

# La Interacción Nucleón-Nucleón en Teorías Efectivas

Manuel Pavón Valderrama

*Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear*

*Universidad de Granada*

· Abril 2006 ·



## CERTIFICACIÓN

**Enrique Ruiz Arriola** Catedrático de Física Atómica, Molecular y Nuclear de la Universidad de Granada,

**Certifica** que la presente memoria titulada “La Interacción Nucleón-Nucleón en Teorías Efectivas” ha sido realizada bajo su dirección en el Departamento de Física Moderna de la Universidad de Granada, por Manuel Pavón Valderrama, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias por la Universidad de Granada.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presenta ante la Universidad de Granada la referida Tesis.

En Granada, a 27 de Abril de 2006

FDO. Enrique Ruiz Arriola  
DNI. 27507674  
Catedrático de Física Atómica, Molecular y Nuclear  
de la Universidad de Granada

# Índice general

Índice general	2
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. La Interacción Nucleón-Nucleón	2
1.2. Teorías Efectivas	3
1.3. Teorías de Campo Efectivas y la Interacción NN	6
1.4. Organización y Objetivos	11
<b>2. Invitación: Dispersión CsCs y Fuerzas de van der Waals Quirales</b>	<b>13</b>
2.1. Introducción	13
2.2. Relaciones de Universalidad	17
2.3. Las Interacciones de van der Waals Quirales	19
<b>3. Dispersión NN en Onda S</b>	<b>23</b>
3.1. Introducción	23
3.2. Dispersión NN con Intercambio de Un Pión	25
3.2.1. Ecuación de Schrödinger	25
3.2.2. Regularización del Potencial de Intercambio de Un Pión	25
3.2.3. Descripción de los Estados de Dispersión	27
3.3. Dispersión NN con Intercambio de Dos Piones	31
3.3.1. Ecuación de Schrödinger	31
3.3.2. Regularización de Potenciales Singulares	31
3.3.3. Descripción de los Estados de Dispersión	34
3.4. Correlaciones de Largas Distancias	35
3.4.1. Defasajes	40
3.5. Efectos de Corte Finito	41
3.6. Relación entre las Escalas del Potencial Nuclear: Dominio van der Waals	43
3.7. Conclusiones	48

<b>4. El Deuterón con Potencial OPE</b>	<b>50</b>
4.1. Introducción . . . . .	50
4.2. Descripción del Estado Ligado . . . . .	51
4.2.1. Ecuación de Schrödinger para el Deuterón . . . . .	51
4.2.2. Comportamiento Asintótico de las Soluciones . . . . .	52
4.2.3. Regularización de la Función de Onda . . . . .	54
4.2.4. Observables del Deuterón . . . . .	56
4.3. Descripción de los Estados de Dispersión . . . . .	58
4.3.1. Ecuación de Schrödinger . . . . .	58
4.3.2. Comportamiento Asintótico de las Soluciones . . . . .	59
4.3.3. Regularización . . . . .	61
4.3.4. Parámetros de Baja Energía . . . . .	63
4.4. Correlaciones OPE y Límite de Acoplamiento Débil . . . . .	66
4.4.1. Parámetros de Baja Energía . . . . .	70
4.5. Dependencia en la Masa del Pión . . . . .	72
4.5.1. Dependencia Explícita en la Masa del Pión . . . . .	72
4.5.2. Dependencia Implícita en la Masa del Pión . . . . .	74
4.6. Expansión de Cortas Distancias . . . . .	75
4.7. Conclusiones . . . . .	79
<b>5. El Deuterón con Potencial TPE</b>	<b>80</b>
5.1. Introducción . . . . .	80
5.2. Regularización del Potencial Nuclear . . . . .	81
5.2.1. Canales Singletes . . . . .	82
5.2.2. Canales Tripletas . . . . .	83
5.3. Descripción del Estado Ligado . . . . .	84
5.3.1. Ecuación de Schrödinger . . . . .	84
5.3.2. Comportamiento Asintótico de las Soluciones . . . . .	85
5.3.3. Observables del Deuterón . . . . .	86
5.4. Descripción de los Estados de Dispersión . . . . .	93
5.4.1. Ecuación de Schrödinger . . . . .	93
5.4.2. Estados de Energía Finita . . . . .	93
5.4.3. Estados de Energía Cero . . . . .	95
5.4.4. Regularización . . . . .	96
5.5. Análisis de Errores y Determinación de los Acoplamientos Quirales . . . . .	102
5.5.1. Errores Debidos a los Acoplamientos Quirales . . . . .	102
5.5.2. Determinación de los Acoplamientos Quirales . . . . .	103
5.6. Fuerzas de van der Waals Quirales . . . . .	105
5.7. El Potencial Quiral a NLO . . . . .	109

5.7.1.	Radio de Corte Finito y Contaje de Weinberg . . . . .	111
5.7.2.	Contaje $\Delta$ . . . . .	114
5.8.	Conclusiones . . . . .	115
<b>6.</b>	<b>Ondas Parciales Periféricas</b>	<b>118</b>
6.1.	Introducción . . . . .	118
6.2.	Regularización de las Ondas Periféricas . . . . .	118
6.2.1.	Descripción de las Ondas Periféricas . . . . .	118
6.2.2.	Comportamiento Asintótico en Infinito . . . . .	120
6.2.3.	Comportamiento en el Origen . . . . .	122
6.2.4.	Regularización . . . . .	124
6.3.	Resultados Renormalizados para los Defasajes . . . . .	129
6.3.1.	El Canal del Deuterón . . . . .	130
6.3.2.	Dependencia en el Radio de Corte y la Longitud de Dispersión . . . . .	131
6.4.	Dependencia en los Acoplamientos Quirales . . . . .	132
6.5.	Conclusiones . . . . .	133
<b>7.</b>	<b>Teoría de Perturbaciones</b>	<b>142</b>
7.1.	Introducción . . . . .	142
7.2.	Perturbaciones con el Potencial de Intercambio de Un Pión . . . . .	144
7.2.1.	El Canal Singlete en Teoría de Perturbaciones . . . . .	144
7.2.2.	El Deuterón en Teoría de Perturbaciones . . . . .	148
7.2.3.	Comparación con el Contaje de Kaplan, Savage y Wise . . . . .	159
7.3.	Perturbaciones con el Potencial de Intercambio de Dos Piones . . . . .	161
7.3.1.	El Canal Singlete a NLO y NNLO . . . . .	161
7.3.2.	El Deuterón a NLO y NNLO . . . . .	166
7.4.	Perturbaciones en Ondas Periféricas . . . . .	170
7.5.	Conclusiones . . . . .	173
<b>8.</b>	<b>Renormalización de la Interacción Nuclear con Condiciones de Contorno</b>	<b>175</b>
8.1.	Introducción . . . . .	175
8.2.	Regularización con Condición de Contorno . . . . .	176
8.2.1.	El Grupo de Renormalización Asociado a la Regularización con Condición de Contorno . . . . .	177
8.2.2.	Comportamiento en el Límite Infrarrojo . . . . .	180
8.2.3.	Comportamiento en el Límite Ultravioleta . . . . .	183
8.3.	Regularización con Condición de Ortogonalidad y Condición de Contorno . . . . .	188
8.4.	Relación de la Regularización con Condición de Contorno con la Ecuación de Fase Variable . . . . .	190

8.4.1. Grupo de Renormalización para los Parámetros Baja Energía . . . . .	194
8.5. Conclusiones . . . . .	196
<b>9. Conclusiones</b>	<b>198</b>
9.1. Publicaciones . . . . .	201
<b>A. La Interacción NN en Teoría Quiral de Perturbaciones</b>	<b>202</b>
A.1. Introducción . . . . .	202
A.2. Componentes Generales de la Interacción NN . . . . .	202
A.3. Descomposición en Ondas Parciales . . . . .	204
A.3.1. Potencial Central . . . . .	204
A.3.2. Potencial Tensorial . . . . .	204
A.4. Comportamiento Asintótico y Defasajes . . . . .	207
A.5. La Interacción NN Quiral . . . . .	210
<b>B. Relación entre Regularización en Espacio de Configuración y Espacio de Momento</b>	<b>212</b>
B.1. Teoría sin Piones . . . . .	212
B.2. Teoría con Piones . . . . .	216
B.2.1. Defasajes . . . . .	220
B.2.2. Relación con Contratérminos . . . . .	222
B.3. Conclusiones . . . . .	224
<b>C. Expansión de Cortas Distancias para la Función de Onda del Deuterón con el Potencial OPE</b>	<b>225</b>
<b>D. Parámetros de Baja Energía para los Potenciales Fenomenológicos Nijmegen II y Reid 93</b>	<b>228</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>237</b>



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. La Interacción Nucleón-Nucleón

El estudio de la interacción nucleón-nucleón (NN) y las fuerzas nucleares ha sido objeto de un gran interés científico y un intenso trabajo durante los últimos cincuenta años. La idea original de Yukawa [1] de que las fuerzas nucleares son producto del intercambio de partículas pesadas, los mesones, es válida aún, y su propuesta original de un mesón escalar fue pronto extendida al caso de mesones pseudovectoriales y pseudoescalares. Finalmente la idea del intercambio de un mesón pseudoescalar se impuso ya que predecía correctamente el signo del momento cuadrupolar del deuterón. Este mesón es el pión, que es la partícula responsable de la interacción nucleón-nucleón a largas distancias.

Posteriormente Taketani, Nakamura y Sasaki (TNS) [2] propusieron la primera separación de escalas para la interacción nuclear. Distinguían entre una zona de largas distancias,  $r > 2$  fm, dominada por el potencial de intercambio de un pion, otra de distancias intermedias,  $2 \text{ fm} > r > 1$  fm, dominada por intercambios piónicos superiores y algunos mesones pesados, y una última zona de cortas distancias,  $r < 1$  fm, en la que no se sabe con exactitud que pasa. Taketani et al. propusieron un tratamiento fenomenológico para esta parte de la interacción.

En los años cincuenta, una vez quedó establecido que el intercambio de un pión explicaba la parte de largas distancias de la interacción nucleón-nucleón, se emprendió el cálculo del potencial de intercambio de dos piones. Estas teorías multipiónicas resultaron ser un fracaso: resultaba imposible derivar un término espín-órbita lo suficientemente fuerte, y fueron abandonadas. Hoy se sabe que el ingrediente que faltaba en estas primeras teorías piónicas era la simetría quiral, que determina la forma exacta del potencial de intercambio de dos piones.

Por otra parte el fracaso de las teorías piónicas llevó a formular en los años sesenta las teorías mesónicas para la interacción nucleón-nucleón. La suposición básica en el modelo de

intercambio de un bosón (OBE) es por un lado que el intercambio de piones correlaciones es equivalente al intercambio de otros mesones más pesados, y por otro que los piones no correlacionados son irrelevantes en la descripción de la interacción nuclear. Tales teorías explican los datos experimentales de dispersión NN con un número no demasiado grande de parámetros y proporcionan una imagen relativamente simple y compacta de la interacción nucleón-nucleon. Sin embargo en las teorías mesónicas la atracción de medio alcance entre los nucleones se debía a un mesón con una masa de 600 MeV que corresponde a una resonancia de dos piones en onda s. Este mesón, la sigma, no se observaba experimentalmente.

Por último con el desarrollo de la cromodinámica cuántica (QCD) los intercambios mesónicos pasaron de ser una teoría a un modelo. La interacción nucleón-nucleón debe basarse en la teoría fundamental de las interacciones fuertes, pero la dificultad de realizar cálculos basados en QCD a bajas energías es enorme. Sin embargo QCD resulta tratable perturbativamente a altas energías. Por tal razón para fundamentar la interacción nucleón-nucleón en QCD se requieren métodos indirectos que permitan conectar la física que describe QCD con los fenómenos nucleares que ocurren a energías mucho menores. Estos métodos son las teorías efectivas sobre las que este trabajo trata.

## 1.2. Teorías Efectivas

La idea en la que se basan las teorías efectivas puede resumirse en la frase

La física asociada a los fenómenos de baja energía no depende explícitamente de los detalles de distancias pequeñas.

Esta afirmación no es en absoluto exclusiva de las teorías efectivas, sino que es probablemente una idea común en todas las partes de la física, y se ve confirmada por el hecho de que es posible estudiar los fenómenos que se producen en una determinada escala de energía independientemente de lo que ocurra a energías más altas. Esto no significa que no haya una conexión entre las escalas de energías pequeñas y grandes, sino que la interdependencia entre los fenómenos de estas escalas no es explícita sino implícita. Por ejemplo, las propiedades termodinámicas de la materia pueden entenderse sin conocer la estructura microscópica de la que estas propiedades derivan. En el caso de la interacción NN (nucleón-nucleón) un ejemplo de esta idea son los distintos potenciales fenomenológicos que la describen: todos ellos implementan a grandes distancias la misma física, intercambio de un pión, pero difieren en como modelan las cortas distancias, a pesar de lo cual todos generan prácticamente los mismos resultados para el deuterón.

Sin embargo las teorías efectivas se distinguen de las descripciones fenomenológicas como la del ejemplo anterior en que tratan de ser independientes de modelo, es decir, que intentan

describir la física de baja energía evitando hacer suposiciones sobre la física de cortas distancias. Por tanto, un potencial fenomenológico no es una descripción efectiva de la interacción NN ya que en él las cortas distancias se modelan explícitamente.

Para ser más claros se puede ilustrar el concepto de teoría efectiva en mecánica cuántica mediante un ejemplo conocido: la expansión de rango efectivo. Si se considera la dispersión elástica de dos partículas no relativistas sin espín por un potencial central  $V(r)$  de alcance finito  $a$ , se tiene que a bajas energías domina la dispersión en ondas y el defasaje en esta onda puede describirse mediante la expansión de rango efectivo desarrollada por Bethe [3, 4]

$$k \cot \delta_0(k) = -\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{2} r_0 k^2 + \dots \quad (1.1)$$

que es válida para  $k < 1/a$ , y en donde  $\alpha_0$  es la longitud de dispersión del sistema y  $r_0$  el rango efectivo. Estos dos parámetros dependen de hecho del potencial de cortas distancias  $V(r)$ , pero la descripción del sistema para longitudes de onda grandes  $ka \ll 1$  no incluye explícitamente al potencial, sino a una serie de parámetros,  $\alpha_0$  y  $r_0$ , que pueden derivarse a partir de  $V(r)$ . En concreto la longitud de dispersión se puede calcular resolviendo la ecuación de Schrödinger reducida a energía cero

$$-u_0'' + 2\mu V(r) u_0(r) = 0 \quad (1.2)$$

con  $\mu$  la masa reducida y  $u_0(r)$  la función de onda de energía cero. Esta ecuación se resuelve con la condición de contorno adicional  $u_0(0) = 0$ , y para  $r \gg a$  la función de onda  $u_0(r)$  se comporta asintóticamente como

$$u_0(r) \rightarrow 1 - \frac{r}{\alpha_0} \quad (1.3)$$

de donde se puede obtener la longitud de dispersión  $\alpha_0$ . Por otra parte el rango efectivo se calcula mediante la fórmula integral

$$r_0 = 2 \int_0^\infty dr \left[ \left( 1 - \frac{r}{\alpha_0} \right)^2 - u_0(r)^2 \right] \quad (1.4)$$

con  $u_0(r)$  la solución de la ecuación (1.2). La expansión de rango efectivo se desarrolló precisamente para tratar con el problema de la dispersión NN a bajas energías.

Lo cierto es que esta aproximación de rango efectivo no sólo puede utilizarse para la descripción del defasaje, sino que en ciertas circunstancias se pueden obtener correlaciones entre distintos observables. Por ejemplo, si hay un estado débilmente ligado con energía de ligadura  $B = -\gamma^2/2\mu$  pequeña, es decir, tal que  $\gamma \ll 1/a$  con  $a$  el alcance del potencial, entonces se tiene la relación siguiente entre la longitud de dispersión y el número de onda  $\gamma$  del estado ligado

$$\frac{1}{\alpha_0} = \gamma - \frac{1}{2} r_0 \gamma^2 + O(\gamma^3) \quad (1.5)$$

Lo interesante de esta correlación entre  $\alpha_0$  y  $\gamma$  es que es universal e independiente del potencial  $V(r)$  concreto. Se puede derivar a partir de consideraciones puramente cinemáticas, por lo que es independiente de modelo. La dependencia en los detalles del potencial aparecerá cuando  $\gamma \sim 1/a$ , que es cuando se rompe la relación anterior. Otra nueva correlación no conocida hasta ahora que se obtiene a partir de ideas similares es ésta

$$r_0 = A + \frac{B}{\alpha_0} + \frac{C}{\alpha_0^2} \quad (1.6)$$

entre el rango efectivo y la longitud de dispersión, con  $A$ ,  $B$  y  $C$  coeficientes que pueden determinarse a partir del potencial  $V(r)$ . Esta correlación que se deriva en el capítulo (3) no depende de que  $\alpha_0$  sea grande o pequeño, y se basa únicamente en el principio de superposición de funciones de onda y en la ortogonalidad de éstas.

Si volvemos al ejemplo de los potenciales fenomenológicos y sus resultados para un sistema de baja energía como el deuterón, se pueden aplicar ideas similares a las de la expansión de rango efectivo para intentar explicar los observables del deuterón con independencia de modelo. Para tal fin se va a hacer una separación entre escalas de largas y cortas distancias, escribiendo el potencial completo como suma de dos contribuciones

$$V(r) = V_L(r) + V_C(r) \quad (1.7)$$

con  $V_L(r)$  el potencial que describe la interacción de largas distancias y  $V_C(r)$  el potencial de cortas distancias <sup>1</sup>. Los potenciales fenomenológicos implementan todos la misma física de largas distancias, intercambio de un pión (OPE), por lo que se toma  $V_L(r) = V_{OPE}(r)$ . El objetivo entonces es obtener la descripción más general posible del deuterón sin hacer referencia al potencial desconocido de cortas distancias  $V_C(r)$ , tema que se trata en el capítulo (4). El resultado que se obtiene es que hay una correlación uniparamétrica entre todos los observables, es decir, que todos los observables dependen de un único parámetro a elegir. De hecho se tomará la energía de ligadura  $B_d$  como el parámetro del que dependerán las propiedades del deuterón.

Las correlaciones como la que se encuentra en el deuterón con el potencial OPE no son nuevas en física nuclear. Un ejemplo conocido es la línea de Phillips [5], que relaciona la energía de ligadura del tritón con la longitud de dispersión neutrón-deuterón en el canal doblete en onda s y que se encuentra “experimentalmente” calculando estos dos observables mediante una multitud de potenciales fenomenológicos. Dicha correlación ha sido explicada posteriormente en teorías efectivas [6]. Otro ejemplo es la banda de Coester [7] que relaciona la densidad de saturación en materia nuclear con la energía de ligadura por nucleón en ausencia de fuerzas a tres cuerpos. Recordemos que la banda de Coester no incluye el punto de

---

<sup>1</sup>Aquí se ha supuesto un potencial local. Sin embargo, la localidad del potencial de cortas distancias no es esencial en la discusión, y de hecho es posible extender el tratamiento a potenciales no-locales.

saturación experimental. Por tanto, muestra una limitación intrínseca de cálculos de materia nuclear que involucren únicamente interacciones a dos cuerpos. Sin embargo, en teorías efectivas se intenta deducir estas correlaciones de una manera independiente de modelo. Una consecuencia de tal análisis es la determinación no ambigua de causas físicas. Por ejemplo, la banda de Coester indica que no es posible reproducir el punto de saturación en el espacio de potenciales a dos cuerpos.

La teoría las correlaciones de largas distancias requiere una herramienta matemática que permita separar la física de bajas energías de la de altas energías. Esta herramienta es el proceso de renormalización, que puede expresarse como

$$\text{Física de Largas Distancias} \longleftarrow \boxed{\text{Proceso de Renormalización}} \longrightarrow \text{Física de Cortas Distancias}$$

A lo largo de este trabajo se hará un especial hincapié en las técnicas de renormalización para poder obtener resultados independientes de modelos evitando así hacer suposiciones sobre la física de cortas distancias. Lo novedoso de nuestro punto de vista consiste en importantes restricciones impuestas por principios generales pero que han sido ignoradas en la literatura.

### 1.3. Teorías de Campo Efectivas y la Interacción NN

La teoría fundamental que explica las interacciones fuertes es la cromodinámica cuántica (QCD). Sin embargo, a pesar de los esfuerzos hechos, aún no ha podido explicarse la física hadrónica, es decir, los procesos en los que intervienen bariones y mesones a partir de QCD, cuyos grados de libertad son quarks y gluones. El problema está en la dificultad de hacer cálculos en QCD a bajas energías: los acoplamientos entre quarks y gluones se vuelven muy grandes a bajas energías, y en tales condiciones un tratamiento perturbativo es imposible; por el contrario a altas energías, debido a la libertad asintótica, QCD es perturbativa. A pesar de estas dificultades se puede observar una separación de escalas entre estos dos casos, lo que permite tratar de aplicar técnicas propias de las teorías efectivas para entender la relación entre la cromodinámica cuántica y la física hadrónica y nuclear.

En este contexto se desarrolló la idea de las teorías de campo efectivas [8] como método sistemático para el estudio de las interacciones de las que no se dispone de una teoría fundamental adecuada, como es el caso de la física hadrónica<sup>2</sup>. El planteamiento consiste en considerar los grados de libertad propios y las simetrías presentes en la teoría de bajas energías y escribir todos los términos de interacción entre dichos grados de libertad consistentes con las simetrías. El número de estas interacciones es infinito, pero esto no es un problema ya que pueden ordenarse según un parámetro de desarrollo, como el cociente  $Q/\Lambda$  entre las escalas de baja y alta energía,  $Q$  y  $\Lambda$ , de manera que se obtiene una jerarquía de

---

<sup>2</sup>Dado que no se sabe resolver QCD en la escala de energías propia de los procesos hadrónicos.

contribuciones similar a una serie de potencias. Esquemáticamente se escribe

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{eff}}^{(0)} + \mathcal{L}_{\text{eff}}^{(1)} + \mathcal{L}_{\text{eff}}^{(2)} + \dots \quad (1.8)$$

con  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  el lagrangiano efectivo, y  $\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(n)}$  la contribución de orden  $(Q/\Lambda)^n$ . Las reglas mediante las cuales a una interacción o diagrama se les asigna un orden  $n$ , y por tanto contribuyen como  $(Q/\Lambda)^n$  se denominan contaje, y suelen estar basados en la dimensionalidad de los distintos términos del lagrangiano. La teoría efectiva que describe los procesos en física hadrónica es la teoría quiral de perturbaciones [9, 10], que ha tenido un gran éxito en el sector mesón-mesón y mesón-barión de la física hadrónica, y parametriza en unos pocos coeficientes fenomenológicos la compleja dinámica asociada a QCD que subyace a estos procesos. Al igual que ocurría en el caso de la teoría de rango efectivo, estos coeficientes que describen las interacciones en teoría quiral de perturbaciones pueden obtenerse a partir (o al menos relacionarse con<sup>3</sup>) de la teoría de alta energía, QCD, aunque tales cálculos no sean en general posibles aún.

Sin embargo el éxito de la teoría quiral de perturbaciones no parecía extenderse al caso de la interacción NN. Weinberg sugirió [11, 12] que la razón de este fracaso estaba en que la aparición de nuevas escalas de baja energía en la interacción NN: la longitud de dispersión anómalamente grande en el canal singlete o la energía de ligadura del deuterón están asociadas con escalas de energía de 8 y 45 MeV respectivamente <sup>4</sup>, menores que las escalas características en física hadrónica ( $\sim 1$  GeV). La aparición por una parte de una longitud de dispersión tan grande y por otra de un estado tan débilmente ligado hace que los métodos perturbativos de teoría quiral de perturbaciones fallen, ya que se trata de sistemas intrínsecamente no perturbativos. La propuesta de Weinberg, llevada a cabo por primera vez por Ray, Ordoñez y van Kolck [13, 14], consistía en usar la teoría quiral de perturbaciones para construir el potencial nucleón-nucleón hasta cierto orden, y posteriormente iterar dicho potencial a todos los ordenes insertándolo en la ecuación de Schrödinger o de Lippmann-Schwinger y resolviendo ésta. Por ejemplo, al orden más bajo,  $(Q/\Lambda)^0$ , se tiene que el potencial nuclear está compuesto por un potencial de contacto entre nucleones y el potencial de intercambio

---

<sup>3</sup>Un ejemplo de la relación entre QCD y parámetros de la teoría quiral de perturbaciones es la relación de Gell-Mann-Oakes-Renner entre las propiedades de piones y quarks

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -\frac{m_u + m_d}{2} \langle \bar{q}q \rangle$$

en donde  $m_\pi$  y  $f_\pi$  son la masa y constante de decaimiento débil del pion,  $m_u$  y  $m_d$  las masas de los quarks u y d, y el condensado quark es  $\langle \bar{q}q \rangle \sim -260 \text{ MeV}^3$ .

<sup>4</sup>Para la longitud de dispersión del canal singlete se tiene que  $1/\alpha_0 \sim 8 \text{ MeV}$ , mientras que para la energía de ligadura del deuterón se tiene que corresponde a un momento  $\sqrt{M B_d} \sim 45 \text{ MeV}$

de un pión <sup>5</sup>

$$V_{LO} = V_C + V_{OPE} \quad \text{con:}$$

$$V_C = C_S + C_T \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \quad (1.9)$$

$$V_{OPE} = - \left( \frac{g^2}{2 f_\pi} \right)^2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q}}{q^2 + m^2} \quad (1.10)$$

con  $\vec{q}$  el momento transferido entre los nucleones,  $\sigma_{1,2}$  los operadores de espín,  $\tau_{1,2}$  los de isospín,  $m$  la masa del pión,  $f_\pi$  la constante de decaimiento débil del pión y  $g$  la constante de acoplamiento axial del pión;  $C_S$  y  $C_T$  son los dos acoplamientos de contacto que a orden  $(Q/\Lambda)^0$  (o LO, *Leading Order*) hay en el conteo de Weinberg para describir la interacción de contacto NN. Las interacciones de contacto, descritas por  $C_S$  y  $C_T$ , funcionan a modo de parámetros libres de la teoría: pueden ajustarse de manera que los observables se reproduzcan lo mejor posible. En este sentido los contratérminos son completamente equivalentes a las correlaciones paramétricas comentadas anteriormente para el caso del deuterón, que se tratan en el capítulo (4) de este trabajo. Es importante darse cuenta que en el conteo de Weinberg la aplicación de teoría quiral de perturbaciones a la interacción NN es equivalente a resolver un problema mecano-cuántico usual en donde el potencial nuclear es el elemento que proporciona la conexión con teoría quiral de perturbaciones. Para partículas infinitamente pesadas la descripción en términos de campos y de un potencial son equivalentes. Sin embargo, la generalización relativista del problema NN no ha sido realmente posible hasta la fecha a pesar de algunos intentos [15, 16, 17, 18].

Se he dedicado mucho esfuerzo en la literatura [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40] a la obtención de predicciones para la dispersión NN con los potenciales quirales de intercambio de dos piones a NNLO,  $(Q/\Lambda)^3$ , y en la actualidad se está comenzando a estudiar el potencial de intercambio de tres piones en teoría quiral de perturbaciones [41, 42]. En la referencia [43] se propone una modificación del conteo de Weinberg con el objetivo de asegurar la renormalizabilidad completa de los resultados. Tal modificación es necesaria y fácil de comprender en nuestro formalismo (6). También se han propuesto en la literatura el conteo de Kaplan, Savage y Wise (KSW) [44, 45], un conteo alternativo propuesto con el objetivo de obtener una relación más directa entre el conteo de teoría quiral de perturbaciones y el de su aplicación a los procesos hadrónicos (en el conteo de Weinberg esta relación se pierde). La característica principal del conteo KSW es que, al contrario que ocurría en el de Weinberg, los piones son perturbativos. Sin embargo, a pesar de sus ventajas, se encontró [46] que el conteo KSW tiene problemas de convergencia. Esta

---

<sup>5</sup>Este potencial se obtiene considerando los diagramas irreducibles del lagrangiano quiral para NN al orden más bajo.

situación llevó a la formulación de un tercer contaje, el contaje BBSvK [47], que trata de aunar las ventajas de los dos anteriores, y según el cual el límite quiral del potencial nuclear debería tratarse de forma no perturbativa, mientras que las correcciones en torno a dicho límite son tratadas perturbativamente. Por otra parte, aplicando las ideas de la renormalización Wilsoniana [48] al problema de la interacción NN en teoría quiral de perturbaciones [49], se llega a la interpretación de que tanto el contaje de Weinberg como el de Kaplan, Savage y Wise corresponden a expansiones alrededor de distintos puntos fijos del grupo de renormalización.

En este punto hay que resaltar que existe una gran confusión en la literatura que proviene de la hipótesis de que los métodos de teorías efectivas de campos pueden aplicarse no sólo en su filosofía, sino también en su implementación práctica, a cualquier tipo de problemas. A pesar de que se presupone la flexibilidad de las teorías efectivas de campo, lo cierto es que las reglas de aplicación de éstas son excesivamente rígidas y sujetas a una interpretación muy restrictiva. Esta circunstancia supone un inconveniente cuando se consideran los efectos de largo alcance de manera explícita, como se proponía en la sección anterior, y se entra en un conflicto de interpretaciones que no se manifiesta en problemas donde la simetría dinámica genera teoremas de baja energía. Este último caso corresponde a la interacción mesón-mesón y mesón-barión. En el caso de interés para el presente trabajo, nucleón-nucleón, y por extensión barión-barión, veremos que una correcta interpretación de las correlaciones de largo alcance permite una descripción muy limpia teóricamente de las propiedades del deuterón y de los procesos de dispersión entre nucleones debidos a las interacciones fuertes.

Por tanto hay que distinguir entre contaje y física de largas distancias. El hecho físicamente relevante en teorías efectivas consiste en la correcta implementación de *todos* los efectos de largas distancias. Si esto se consigue mediante un parámetro de desarrollo pequeño, como ocurre en el caso de un contaje, es teóricamente atrayente pero físicamente irrelevante. Un ejemplo donde ambos conceptos coinciden es la interacción entre átomos neutros en el régimen ultrafrío. En este caso, el potencial se describe mediante un desarrollo de largas distancias

$$U(r) = -\frac{2\mu C_6}{r^6} - \frac{2\mu C_8}{r^8} - \frac{2\mu C_{10}}{r^{10}} + \dots \quad (1.11)$$

con  $\mu$  la masa reducida del sistema átomo-átomo y  $C_6$ ,  $C_8$ , etc, constantes de acoplamiento. Como puede verse cada orden en la expansión del potencial comporta una descripción más precisa de la física de largas distancias<sup>6</sup>. Sin embargo, en la interacción NN esto no ocurre ya que el potencial contiene una escala relevante adicional debida el intercambio de piones, cuyo alcance es finito<sup>7</sup>. Es decir, se tienen parámetros adicionales en la expansión, por lo que ésta no es exactamente una expansión de largas distancias. En concreto, la expansión

<sup>6</sup>En el fondo ésto es debido al hecho de que el fotón tiene masa cero.

<sup>7</sup>Lo que implica un comportamiento asintótico del potencial  $\sim e^{-mr}/r$ .

del potencial nuclear en teoría quiral de perturbaciones puede escribirse esquemáticamente como [20, 24]

$$\begin{aligned}
U(r) = & \frac{Mm^3}{f^2}W_{\text{LO}}(mr, g) + \frac{Mm^5}{f^4}W_{\text{NLO}}(mr, g, \bar{d}) \\
& + \frac{m^6}{f^4}W_{\text{NNLO}}(mr, g, \bar{c}_1, \bar{c}_3, \bar{c}_4) + \dots
\end{aligned} \tag{1.12}$$

con  $W(x)$  funciones adimensionales conocidas, finitas en todas partes salvo el origen, en donde muestran divergencias del tipo  $1/r^n$  similares a las presentes en el potencial interatómico. Este potencial queda definido por completo si se especifican la masa del pión  $m$ , la constante de acoplamiento débil del pión  $f$ , la constante de acoplamiento axial del pión  $g$ , la masa del nucleón  $M$ , la discrepancia de Goldberger-Treimann  $\bar{d}_{18}$  y tres constantes de baja energía adicionales  $\bar{c}_1 = c_1M$ ,  $\bar{c}_3 = c_3M$  y  $\bar{c}_4 = c_4M$  a las que llamaremos acoplamientos quirales y que pueden determinarse mediante el estudio del proceso de dispersión pión-nucleón a bajas energías. En el capítulo (2) se estudian los posibles paralelismos entre las interacciones átomo-átomo y nucleón-nucleón.

Desde que Weinberg propuso su idea original, que aquí se interpreta como una motivación para estudiar la relevancia de la simetría quiral en la interacción NN, lo cierto es que su implementación concreta ha estado sujeta a muchos vaivenes y discusiones. El estudio de la literatura revela que gran parte de la discusión no siempre se basa en el método científico sino en consideraciones ideológicas fundamentadas en fuertes prejuicios sobre “qué debe ser una teoría efectiva de campos”. Tales consideraciones no siempre están avaladas por los resultados: aparte de la comparación con el experimento, no existe ninguna otro tipo de prueba que sirva para verificar dichos prejuicios. Esta situación es insatisfactoria desde el punto de vista teórico, ya que se usa la interpretación del formalismo de teorías de campos efectivas de manera abusiva. Se permite una proliferación descontrolada de los parámetros libres de la teoría que es considerada inevitable, y que al tiempo es usada para mejorar los ajustes, sin atender a posibles restricciones en los parámetros salvo las basadas en la simetría. Es común encontrar singularidades y comportamientos patológicos cuya interpretación física es difícil, y que tienen que ser reanalizadas a posteriori para no violar causalidad. El hecho, que se desarrolla en este trabajo, es que dichas restricciones existen y están basadas en principios muy generales como causalidad, ortogonalidad y completitud. Un ejemplo palpable consiste en no admitir que el deuterón pueda solapar con los estados del continuo. En la interpretación usual no existe ninguna razón para esto no ocurra, a pesar de que muchos cálculos autodenominados de teoría de campos efectivas la utilizan en ocasiones, sin admitir que se ha impuesto una restricción adicional. Como veremos, dichas restricciones físicas son efectivas y eficientes a la hora de limitar la proliferación descontrolada de parámetros de cortas distancias. Aunque parezca sorprendente, dichas propiedades también imponen

fuertes restricciones sobre la consistencia y finitud de un contaje dado. Como veremos existen conflictos entre contajes preestablecidos y la renormalizabilidad no perturbativa de la teoría.

## 1.4. Organización y Objetivos

En este trabajo se considera el problema general de la descripción de la interacción NN en teorías efectivas. Se buscan correlaciones de largas distancias para el potencial de interacción NN en teoría quiral, que viene dado por la expansión (1.12), y las predicciones y restricciones que el potencial quiral impone en los observables del sistema NN.

En el capítulo (2) se explota el paralelismo entre las interacciones átomo-átomo y nucleón-nucleón en base a la idea de las correlaciones generadas por los potenciales de largas distancias. Este paralelismo no es perfecto. Sin embargo resulta sorprendente comprobar como en la interacción nuclear hay un dominio van der Waals que conlleva una analogía sorprendente entre los dos sistemas considerados: el potencial de intercambio de dos piones contiene un término van der Waals que explica por sí sólo buena parte de la interacción nuclear en onda s.

En el capítulo (3) se estudia la dispersión NN con potenciales quirales en el caso más sencillo, el canal singlete  $^1S_0$ , que se usa también como ejemplo para introducir las ideas fundamentales de los métodos de renormalización y regularización usados a lo largo de todo este trabajo. Desde el punto de vista físico se encuentra un buen patrón de convergencia quiral y también correlaciones entre los parámetros de la expansión de rango efectivo que no eran conocidas hasta ahora. Desde un punto de vista formal se muestra que para este canal el potencial quiral es regularizable con un único parámetro libre (se toma la longitud de dispersión) tanto en LO, como en NLO y NNLO. Este resultado está de acuerdo con el contaje de Weinberg en LO, pero no así en NLO y NNLO en donde dicho contaje requiere dos parámetros libres en el canal singlete. Este capítulo está basado en la referencia [50].

En los capítulos (4) y (5) se estudia deuterón, el único estado ligado entre dos nucleones, con los potenciales de intercambio de uno (LO) y dos piones (NLO, NNLO). Con el potencial de intercambio de un pión se obtiene una descripción razonablemente buena del deuterón. Esto no es sorprendente si se tiene en cuenta que la energía de ligadura del deuterón es muy pequeña, por lo que los nucleones están muy separados y la parte de más largas distancias de la interacción quiral, el potencial OPE, será suficiente para la descripción del deuterón. En el caso del potencial de intercambio de dos piones se estudia la importancia de los acoplamientos quirales en el deuterón; estos acoplamientos son importantes ya que son el efecto genuinamente quiral de orden más bajo que puede observarse en el deuterón<sup>8</sup>

---

<sup>8</sup>El potencial OPE es idéntico en la teoría mesónica y en la teoría quiral de perturbaciones, por lo que éste no sirve para estudiar el efecto de la simetría quiral en física nuclear. Sin embargo la simetría quiral sí es fundamental en la determinación correcta del potencial TPE, por lo que es este potencial en donde pueden estudiarse las implicaciones

Desde un punto de vista formal se encuentra que para los potenciales OPE y TPE NNLO el conteo coincide con el de Weinberg; sin embargo, en el caso del potencial TPE NLO surge un problema que compromete la convergencia del potencial quiral: el potencial NLO no es renormalizable. Estos capítulos están basados en las referencias [51, 50].

En el capítulo (6) se extiende el tratamiento anterior a todas las ondas parciales con momento angular  $j \leq 5$ . Se puede observar así la importancia relativa de los acoplamientos quirales en estas ondas, y se obtienen también consecuencias interesantes relativas al conteo. Este capítulo está basado en la referencia [52].

En el capítulo (7) se explora los tratamientos perturbativos aplicados a la interacción NN con potenciales quirales. Cuando se estudian las perturbaciones con el potencial de intercambio de un pión se reproducen las amplitudes obtenidas anteriormente por Kaplan, Savage y Wise [44, 45]. También se estudia el tratamiento perturbativo de los potenciales de intercambio de dos piones mediante el método de ondas distorsionadas. Este capítulo se basa en las referencias [51, 50].

Por último el trabajo se complementa con diversos apéndices, en donde se discute el potencial NN en teoría quiral de perturbaciones (A), la relación entre renormalización en espacio de posiciones y momentos (B), o los parámetros de la expansión de rango efectivo para algunos potenciales fenomenológicos (D).

Es necesario advertir en este punto que cuando en este trabajo se hable genéricamente de la interacción nucleón-nucleón normalmente nos estaremos refiriendo a neutrón-protón. El sistema protón-protón queda descartado por que no es un sistema hadrónico puro debido a la interferencia coulombiana. Además, aun si se eliminan los efectos electromagnéticos de este proceso habría que considerar correcciones debidas a la ruptura de simetría de carga. Por otra parte para el sistema neutrón-neutrón apenas existen datos experimentales, aparte de que en este sistema hay la rotura de independencia de carga, ya que la tercera componente del isospín no es nula,  $m_t \neq 0$ <sup>9</sup>.

Para los defasajes en las disintas ondas parciales van a usarse los defasajes del potencial fenomenológico Nijmegen II [53] a modo de datos experimentales. Este defasaje reproduce el análisis en ondas parciales que el grupo de Nijmegen ha hecho a partir de los datos experimentales disponibles de dispersión NN, ref. [54]. Por tanto pueden considerarse como equivalentes al resultado experimental.

Los resultados se expresarán siempre en MeV o en fm, y se toma  $\hbar c = 197,33 \text{ MeV fm}$ .

---

de la simetría quiral en física nuclear.

<sup>9</sup>Estos efectos se pueden comprender mejor considerando las longitudes de dispersión correspondientes en el canal  $^1S_0$ : mientras que para neutrón-protón se tiene  $\alpha_0 = -23,74 \text{ fm}$ , para protón-protón se extrapola el valor  $\alpha_{0,\text{fuerte}} \sim -17,4 \text{ fm}$ , y para neutrón-neutrón  $\alpha_0 \sim -18,6 \text{ fm}$ .

## Capítulo 2

# Invitación: Dispersión CsCs y Fuerzas de van der Waals Quirales

### 2.1. Introducción

La idea en la que se resume la renormalización es que la física que ocurre a bajas energías no debe depender en los detalles de la física de cortas distancias. La interacción átomo-átomo es un caso en el que existe una separación de escalas muy marcada. Esto lo hace un buen candidato para comprobar si en la descripción de este sistema físico hay una independencia real con respecto a los detalles de esta interacción a cortas distancias.

Cuando dos átomos están muy separados estos se atraen debido a las fuerzas de van der Waals. La interacción es conocida y viene dada por el potencial reducido

$$U_{vdW}(r) = -2\mu \frac{C_6}{r^6} \quad (2.1)$$

en donde  $\mu$  hace referencia a la masa reducida del sistema. Sin embargo cuando dos átomos se encuentran muy cercanos estos se repelen. La forma de la interacción no se conoce de manera exacta y existen varias parametrizaciones para describirla. Dos de estas parametrizaciones son el potencial de Lenard-Jones y el potencial fenomenológico al que se ha denotado con el subíndice  ${}^3\Sigma_u$

$$U_{LJ} = 2\mu \left[ \frac{C_{12}}{r^{12}} - \frac{C_6}{r^6} \right] \quad (2.2)$$

$$U_{3\Sigma_u} = 2\mu \left[ \frac{1}{2}Br^\lambda e^{-\eta r} - \left( \frac{C_6}{r^6} + \frac{C_8}{r^8} + \frac{C_{10}}{r^{10}} \right) f_c(r) \right] \quad (2.3)$$

Los valores de estos dos potenciales a diferentes distancias se muestran en la figura (2.1). Una manera posible de encontrar la forma exacta de la interacción a cortas distancias sería

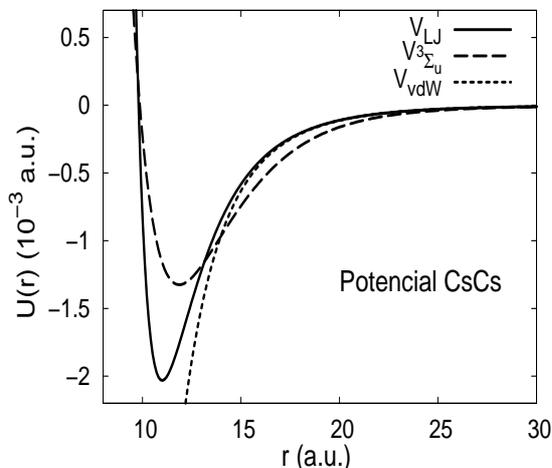


Figura 2.1: Los diferentes potenciales (reducidos) de interacción CsCs a cortas distancias. Se muestran el potencial de Lennard-Jones,  $U_{LJ}$ , el potencial  $^3\Sigma_u$ ,  $U_{^3\Sigma_u}$ , y el potencial de van der Waals,  $U_{vdW}$ . Como puede observarse los tres potenciales coinciden a distancias superiores a 20a.u.. A distancias inferiores a 10a.u. el comportamiento repulsivo domina en los dos potenciales fenomenológicos. Esto sugiere que la escala de longitud de cortas distancias de la interacción CsCs se encuentra entre 10 y 20a.u..

hacer un cálculo *ab initio* a partir de la estructura de capas de los átomos considerados. Sin embargo este procedimiento no va a resultar necesario, ya que el comportamiento del sistema a bajas energías va a ser insensible a estos detalles. Esta suposición está en parte confirmada por los defasajes que para la dispersión CsCs se obtienen con los dos potenciales fenomenológicos considerados: ambos potenciales generan defasajes prácticamente idénticos, como se muestra en la figura (2.2).

En el caso del potencial de van der Waals, definimos la escala de longitud como el único número con dimensiones de longitud que podemos construir a partir de la constante de acoplamiento del potencial. Para dispersión CsCs la escala que así se obtiene es

$$R_L = \sqrt[4]{2\mu C_6} = 203 \text{ a.u.} \quad (2.4)$$

En el caso de la interacción a cortas distancias, no está tan claro como definir la escala de longitud asociada. Una manera es comparar los distintos potenciales que parametrizan la interacción CsCs a cortas distancias y ver cuando difieren de manera significativa con el potencial de van der Waals y entre ellos. Esto podemos verlo en la figura (2.1), y una

estimación de la escala de longitud de cortas distancias es

$$R_C \sim 10 - 20 \text{ a.u.} \quad (2.5)$$

En resumen observamos una separación de escalas muy limpia en el caso de la interacción CsCs. Como la escala de largas distancias es mucho mayor que la escala de cortas distancias,  $R_L \gg R_C$ , podemos esperar que la descripción del sistema no vaya a depender mucho de qué ocurra cerca de  $R_C$ . Por otra parte, el sistema físico de más relevancia en donde la interacción CsCs resulta importante es el condensado Bose-Einstein de  $Cs_2$  que ocurre a una temperatura aproximada de  $1 \mu\text{K}$ . A esta temperatura la longitud de onda térmica del cesio es de 1000 a.u., cinco veces mayor que la escala de longitud del potencial de van der Waals y de cincuenta a cien veces mayor que la distancia en donde las desviaciones respecto al potencial de van der Waals van a ser importantes. Eso significa que uno esperaría que la importancia de la escala de cortas distancias sea bastante pequeña.

En cierto sentido el que los diversos potenciales fenomenológicos que describen la interacción CsCs den el mismo resultado (fig. (2.2)) a pesar de ser diferentes en los ingredientes de cortas distancias que incluyen <sup>1</sup> indica que la idea de la independencia respecto a los detalles de cortas distancias es correcta. Sin embargo, la manera en que los diferentes potenciales fenomenológicos evitan el problema de las cortas distancias no es sistemática. Se incluye explícitamente un modelo de la física a cortas distancias, y el problema al hacer esto es la pérdida de sistematicidad debido a que la forma en que se modelan los detalles de cortas distancias no es única ni universal a todos los fenómenos de este tipo, y la referencia a una forma concreta de la interacción a estas distancias ya está haciendo suposiciones sobre la física de estas escalas que además no podemos verificar.

Dado que los detalles de cortas distancias deben ser irrelevantes para la descripción del problema, tenemos que desarrollar un procedimiento en el que la física de cortas distancias no intervenga explícitamente. En principio el sistema vendrá descrito por la ecuación de Schrödinger y por el potencial de van der Waals, válido salvo para distancias muy pequeñas. En onda  $s$ , la ecuación de Schrödinger reducida se escribe como

$$-u'' + U_{vdW}(r)u = k^2 u \quad (\text{onda } s) \quad (2.6)$$

El problema que ahora surge es cómo incluimos aquí información sobre las cortas distancias que sea independiente de modelo. Por una parte si resolvemos la ecuación de Schrödinger a partir de la condición de regularidad en el origen,  $u(0) = 0$ , obtendremos una solución que no describirá el sistema. Por otra, si modificamos el potencial añadiendo una componente de cortas distancias, estaremos haciendo una serie de suposiciones arbitrarias sobre cómo es la interacción entre átomos de cesio a cortas distancias.

---

<sup>1</sup>Todos incluyen sin embargo el mismo comportamiento, van der Waals, a largas distancias.

Una solución distinta a modificar el potencial es construir la función de onda de manera que reproduzca cierto observable físico que pensemos que puede contener información relevante sobre qué ocurre a cortas distancias. Para hacer esto se sustituye la condición de regularidad en el origen por la condición de que el observable físico elegido sea reproducido. La mejor elección corresponde a un parámetro físico que describa el comportamiento del sistema a muy bajas energías. Esto se debe a que a muy bajas energías el sistema sólo puede ver la física de cortas distancias de manera promediada, sin que se manifieste ningún detalle sobre su forma exacta. Sin embargo a altas energías el sistema verá los detalles de la física de cortas distancias, debido a que la longitud de onda será lo suficientemente pequeña como para resolver estos detalles. Por esta razón un observable relacionado con el comportamiento a altas energías no sería una buena elección.

En el caso de la dispersión CsCs, el observable físico que describe el comportamiento del sistema a energías muy bajas es la longitud de dispersión, pues cuando el momento tiende a cero, los observables de dispersión pueden ser descritos haciendo referencia únicamente a la longitud de dispersión, representada aquí por  $\alpha_0$

$$k \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma \simeq 4\pi\alpha_0^2 \quad \text{y} \quad \delta(k) \simeq -k\alpha_0 \quad (2.7)$$

en donde  $\sigma$  es la sección eficaz, y  $\delta(k)$  el defasaje.

Los resultados que se obtienen para los defasajes al fijar la longitud de dispersión pueden verse en la figura (2.2), en donde se compara estos defasajes con los obtenidos con los dos potenciales fenomenológicos (2.2) y (2.3). El acuerdo es muy bueno hasta momentos bastante altos,  $k \sim 0,1$ , que corresponden a una longitud de onda  $\lambda \sim 10$  a.u., bastante mayor de la que en principio uno esperaría. Además el acuerdo con los defasajes de los potenciales (2.2) y (2.3) no es ninguna casualidad, pues si tomáramos tan sólo la longitud de dispersión sin tener en cuenta ningún potencial de larga distancia <sup>2</sup> no se reproducirían los defasajes, como puede observarse en la figura (2.2).

La conclusión que se obtiene es que el sistema puede describirse a partir de dos parámetros con dimensiones de longitud, que son la escala asociada al potencial,  $R_L$ , y la longitud de dispersión,  $\alpha_0$ . En ningún momento se hace referencia a qué pasa exactamente a distancias del orden de  $R_C$ . La información sobre qué ocurre en esa zona está contenida en un parámetro físico, la longitud de dispersión, y no ha sido necesario hacer referencia a ningún detalle concreto sobre la física a  $R_C$ . El problema que hemos resuelto se puede expresar de forma sencilla en la pregunta *¿cuáles serían los defasajes si fijásemos la longitud de dispersión a su valor físico y supusiéramos que el potencial de largo alcance viene dado por la fuerza de van der Waals?*

---

<sup>2</sup>Esto sería equivalente a teoría de rango efectivo tomando sólo la longitud de dispersión,  $k \cot \delta = -1/\alpha_0$ .

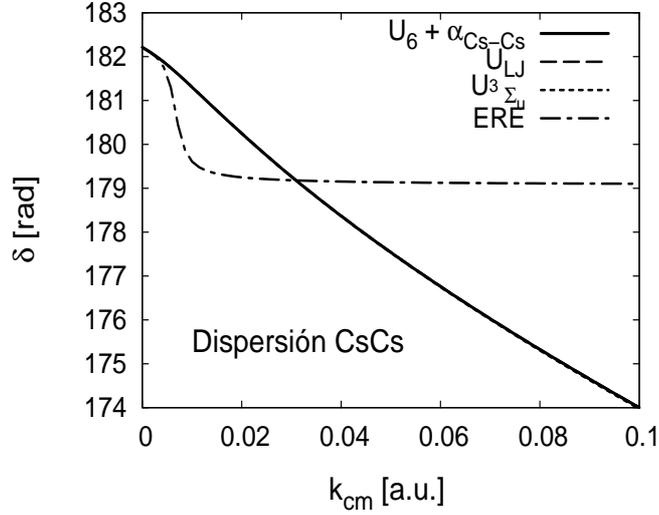


Figura 2.2: Defasajes para dispersión CsCs en el caso de los potenciales de Lennard-Jones y  ${}^3\Sigma_u$ , así como los defasajes que se obtienen al fijar la longitud de dispersión CsCs a su valor “físico”, 68,216a.u., en el caso del potencial de van der Waals.

## 2.2. Relaciones de Universalidad

Hemos visto que la dispersión entre átomos de cesio puede ser descrita con tan sólo dos parámetros, la escala de longitud asociada al potencial de van der Waals,  $R_L$ , y la longitud de dispersión  $\alpha_0$ , sin que se haga ninguna referencia a qué ocurre a distancias del orden de  $R_C$ . En este punto la pregunta que uno se hace es si otros sistemas similares a la dispersión CsCs podrán ser descritos también con estos dos únicos parámetros.

El conjunto de sistemas físicos más similar a la dispersión de átomos de cesio es la dispersión de otros átomos alcalinos, como por ejemplo, el litio o el sodio. En principio para responder la pregunta de si estos sistemas se comportan igual que la dispersión CsCs bastaría con hacer el mismo tipo de cálculo que en el cesio y comparar caso por caso con los defasajes que predicen distintos potenciales fenomenológicos. Sin embargo sería interesante una descripción más portable de estos sistemas, de manera que pudieramos, por ejemplo, describirlos a todos con una única curva. Como la interacción de todos los átomos alcalinos a largas distancias viene dada por un potencial de van der Waals, sería útil eliminar cualquier referencia explícita a la escala de largas distancias asociada a este potencial de manera que

la interacción entre átomos alcalinos pudiese escribirse de forma genérica como

$$\bar{U}_{\text{vdW}}(\bar{r}) = -\frac{1}{\bar{r}^6} \quad (2.8)$$

en donde los parámetros con barra son parámetros de los que ha sido eliminada toda referencia a la escala de largas distancias  $R_L$ . Este potencial de van der Waals reducido describiría de manera universal la interacción de átomos alcalinos a largas distancias.

Para eliminar la escala asociada al potencial de van der Waals vamos a definir una serie de parámetros adimensionales

$$\begin{aligned} r = R_L \bar{r} \quad U_{\text{vdW}}(r) = R_L^{-2} \bar{U}_{\text{vdW}}(\bar{r}) \quad , \quad \text{con} \quad \bar{U}_{\text{vdW}} = -\frac{1}{\bar{r}^6} \\ k = R_L^{-1} \bar{k} \quad \sigma(k) = R_L^2 \bar{\sigma}(\bar{k}) \quad \delta(k) = \bar{\delta}(\bar{k}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Las cantidades adimensionales que hemos definido dependerán tan sólo del valor de la longitud de dispersión reducida,  $\bar{\alpha}_0$ . Por ejemplo

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\alpha}_0) \quad \bar{\delta} = \bar{\delta}(\bar{\alpha}_0) \quad (2.10)$$

Estas cantidades adimensionales representan a cualquier sistema similar a la dispersión CsCs. Tan sólo hay que indicar cual es el valor de la longitud de dispersión reducida  $\bar{\alpha}_0$  y redimensionar los parámetros calculados multiplicando por la potencia adecuada de  $R_L$ . Todos estos sistemas estarán descritos por la misma ecuación de Schrödinger reducida y adimensional, que en onda s tomará la forma

$$-\bar{u}'' + \bar{U}_{\text{vdW}}(\bar{r}) \bar{u} = \bar{k}^2 \bar{u} \quad (2.11)$$

Un ejemplo de este procedimiento es el cálculo del rango efectivo reducido para los sistemas tipo dispersión CsCs. Recordemos que el rango efectivo  $r_0$  es el término de orden  $k^2$  en la expansión de  $k \cot \delta$  en momento (es decir, la expansión de rango efectivo)

$$k \cot \delta = -\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{2} r_0 k^2 + \dots \quad (2.12)$$

En tal caso el rango efectivo reducido se define como  $\bar{r}_0 = r_0/R_L$ , y puede calcularse a partir de la longitud de dispersión reducida del sistema. Para el potencial de van der Waals reducido el resultado para esta correlación fue calculado en [55] y viene dado por la expresión siguiente

$$\bar{r}_0 = \frac{16 \Gamma(\frac{5}{4})^2}{3 \pi} - \frac{4}{3 \bar{\alpha}_0} + \frac{4 \Gamma(\frac{3}{4})^2}{3 \bar{\alpha}_0^2 \pi} \quad (2.13)$$

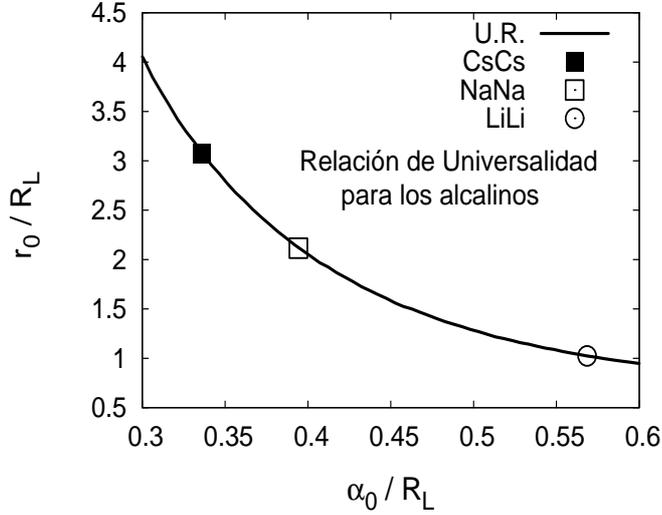


Figura 2.3: Curva de universalidad de los alcalinos para el rango efectivo reducido en función de la longitud de dispersión reducida. Como se puede ver todos los alcalinos caen sobre la curva de universalidad.

La curva  $\bar{r}_0(\bar{\alpha}_0)$  que se obtiene se muestra en la figura (2.3), en donde también se pueden ver los rangos efectivos y longitudes de dispersión adimensionales correspondientes a la dispersión CsCs, NaNa y LiLi. Como se puede observar todos caen sobre la curva de universalidad van der Waals.

Este tipo de correlaciones entre observables inducida por un potencial de largas distancias van a aparecer de manera continua a lo largo de este trabajo, aunque normalmente en el contexto de la interacción nuclear. En realidad no son algo nuevo, ni requieren resultados renormalizados para obtenerse: un ejemplo bastante conocido en física nuclear es la línea de Phillips, que es una correlación entre la energía de ligadura del tritón y la del deuterón,  $B_t(B_d)$ , al estilo de la correlación van der Waals  $r_0(\alpha_0)$  que cumplen los alcalinos. Lo que sí es nuevo es obtenerlas como consecuencia del proceso de renormalización, lo que permite encontrar este tipo de correlaciones y también comprender porqué surgen.

### 2.3. Las Interacciones de van der Waals Quirales

La descripción efectiva de la interacción nuclear se basa en que hay una separación entre las escalas de largas y cortas distancias. La física de largas distancias se describe mediante potenciales de intercambios piónicos que obedecen una expansión quirial, mientras que la de

cortas distancias se considera desconocida. El potencial de largas distancias se expande como

$$U(r) = U_{\text{LO}}(r) + U_{\text{NLO}} + U_{\text{NNLO}} + \dots \quad (2.14)$$

en donde cada nuevo término mejora la descripción de largas distancias del sistema;  $U_{\text{LO}}$  representa el potencial de intercambio de un pión, mientras que  $U_{\text{NLO}}$  y  $U_{\text{NNLO}}$  son términos que corresponden a intercambio de dos piones y correcciones al potencial de intercambio de un pión.

A diferencia del caso atómico, en la interacción nuclear la separación de escalas del sistema no es tan limpia. En principio, sin entrar en detalles sobre cómo es el potencial nuclear, hay varias escalas de largas distancias involucradas, como por ejemplo la longitud de onda Compton del pión,  $R_{1\pi} = 1/m \sim 1,4 \text{ fm}$ , correspondiente al decaimiento exponencial del potencial de intercambio de un pión a grandes distancias. Sin embargo, resulta interesante comprobar que la escala de largas distancias dominante en la interacción nuclear es una escala van der Waals correspondiente al comportamiento del potencial de intercambio de dos piones<sup>3</sup> a distancias menores que la longitud de onda Compton del pión, que viene dado por

$$U(r) = -\frac{R_{s(t)}^4}{r^6} \quad (2.15)$$

en donde el subíndice se refiere a al canal de dispersión que estemos considerando<sup>4</sup>:  $s$  indica el canal singlete  $^1S_0$  y  $t$  el canal triplete  $^3S_1$ . En el caso del canal singlete se tiene  $R_s = 1,64 \text{ fm}$ , mientras que en el triplete  $R_t = 1,73 \text{ fm}$ . Como se puede ver ambas escalas son similares.

La correlación de largas distancias entre el rango efectivo y la longitud de dispersión para este potencial está dada por la misma fórmula que en el caso de los átomos alcalinos, sólo que en este caso se incluye explícitamente la escala  $R_{s(t)}$

$$r_0 = \frac{16 R_{s(t)} \Gamma(\frac{5}{4})^2}{3 \pi} - \frac{4 R_{s(t)}^2}{3 \alpha_0} + \frac{4 R_{s(t)}^3 \Gamma(\frac{3}{4})^2}{3 \alpha_0^2 \pi} \quad (2.16)$$

Con esta correlación se puede determinar la contribución van der Waals al rango efectivo en los canales singlete y triplete

$$r_{0,s} = 2,29 - \frac{3,60}{\alpha_{0,s}} + \frac{2,82}{\alpha_{0,s}^2} \quad (\text{Singlete}) \quad (2.17)$$

$$r_{0,t} = 2,41 - \frac{3,98}{\alpha_{0,t}} + \frac{3,28}{\alpha_{0,t}^2} \quad (\text{Triplete}) \quad (2.18)$$

<sup>3</sup>En concreto la componente NNLO en la expansión (2.14).

<sup>4</sup>La estructura de ondas parciales de la interacción nuclear puede consultarse en el apéndice (A). Por el momento es suficiente indicar que en dispersión NN hay dos ondas  $s$  que se diferencian por su espín, isospín, y momento angular total, que son el canal singlete  $^1S_0$  y el triplete  $^3S_1$ . El canal triplete es en realidad un canal acoplado de onda  $s$  y  $d$ , pero en esta sección se va a ignorar la mezcla existente en este canal.

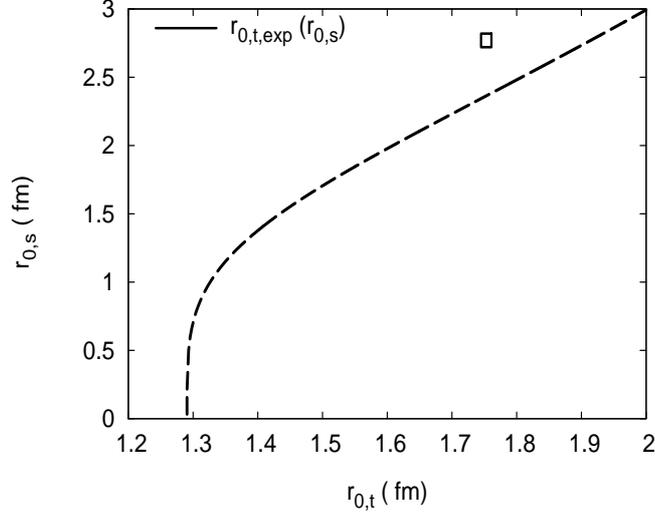


Figura 2.4: Correlación van der Waals entre los rangos efectivos del canal singlete y triplete, fijando las longitudes de dispersión a sus valores experimentales. El cuadrado representa los valores experimentales.

En el canal singlete para la longitud de dispersión experimental  $\alpha_{0,s} = -23,74$  fm, se obtienen el rango efectivo  $r_{0,s} = 2,45$  fm, a comparar con el valor experimental  $r_{0,s,exp} = 2,77(5)$  fm, en donde el número entre paréntesis es el error experimental. En el triplete la longitud de dispersión experimental es  $\alpha_{0,t} = 5,419$  fm, con la que se obtiene el rango efectivo  $r_{0,t} = 1,79$  fm, a comparar con el experimental  $r_{0,t} = 1,753(8)$  fm. Esto significa que la correlación van der Waals por sí sola es capaz de explicar gran parte del rango efectivo experimental.

Por otra parte es posible establecer una relación entre las correlaciones en el canal singlete y triplete teniendo en cuenta que la diferencia entre las respectivas escalas van der Waals  $R_s$  y  $R_t$ , lo que genera una correlación a cuatro términos entre  $\alpha_{0,s}$ ,  $\alpha_{0,t}$ ,  $r_{0,s}$  y  $r_{0,t}$ . Esta correlación a cuatro términos se simplifica a dos términos si para  $\alpha_{0,s}$  y  $\alpha_{0,t}$  se toman los valores experimentales. En tal caso los rangos efectivos  $r_{0,s}$  y  $r_{0,t}$  se pueden expresar uno en función del otro como se muestra en la figura (2.4). Para el valor experimental del rango efectivo en el canal triplete,  $r_{0,t} = 1,753(8)$  fm la correlación van der Waals da  $r_{0,s} = 2,34$  fm, es decir, explica cerca de un 85 % del valor experimental  $r_{0,s,exp} = 2,77(5)$  fm.

También pueden calcularse los defasajes NN para el potencial de van der Waals quiral con la condición de reproducir la longitud de dispersión física, tal y como hicimos en el caso de la dispersión CsCs. Los resultados que en tal caso se obtienen para los canales singlete y triplete se muestran en la figura (2.5), en donde se los compara con los resultados del

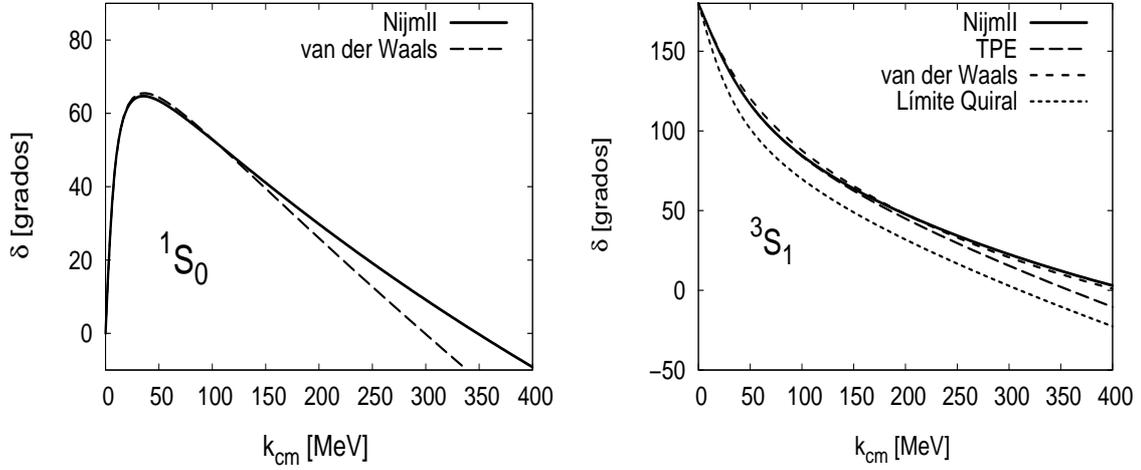


Figura 2.5: Defasajes NN para los canales singlete (izquierda) y triplete (derecha) calculados con el potencial fenomenológico Nijmegen II y mediante el potencial de van der Waals quiral con la condición de reproducir las longitudes de dispersión físicas.

potencial fenomenológico Nijmegen II, compatibles con los datos experimentales disponibles para la dispersión NN.

La similitud entre los resultados experimentales y las correlaciones van der Waals en el caso de la dispersión NN es notable, a pesar de no ser tan limpia como las correlaciones observadas en la dispersión CsCs, y establece un paralelismo interesante entre la física molecular y nuclear. Una de las consecuencias de esta similitud es la conexión con el modelo de la gota líquida. El comportamiento de la materia nuclear está dominado por la dispersión entre nucleones en onda  $s$ , que es completamente análoga a la dispersión que hay entre átomos y moléculas neutras que a largas distancias interaccionan mediante fuerzas de van der Waals, es decir, la fuerza que hay a largas distancias entre las moléculas de un líquido. Esto establece un paralelismo teórico entre la materia nuclear y los líquidos, que ya era explotado fenomenológicamente en el modelo de la gota líquida, pero que se comprende mejor a partir de los resultados que se obtienen para las fuerzas de van der Waals quirales.

## Capítulo 3

# Dispersión NN en Onda S

### 3.1. Introducción

Al igual que en la interacción átomo-átomo (en concreto el sistema cesio-cesio) tratada en el capítulo anterior, en la interacción nucleón-nucleón existe una separación de escalas de largas y cortas distancias que puede utilizarse para obtener una descripción efectiva de ésta. Sin embargo el caso de la interacción NN es bastante más complejo que el de la interacción átomo-átomo. En las interacciones nucleares la separación de escalas es poco limpia: (i) a distancias superiores a 1,4fm la física está dominada por el potencial de intercambio de un pión, (ii) a distancias entre 0,5 – 1,0fm el intercambio de dos piones comienza a ser el factor dominante para la física de esas distancias, (iii) y por último a distancias algo menores los nucleones se superponen. En general las diferentes escalas de la interacción NN están muy cercanas las unas de las otras, lo cual hace que sea más difícil distinguir los efectos debidos a física cortas distancias de los de largas distancias. Esta situación mejora ligeramente mediante la introducción de potenciales de largas distancias calculados a partir de teoría quiral de perturbaciones.

La teoría quiral de perturbaciones proporciona una base teórica firme para la descripción de los procesos hadrónicos a partir de las simetrías de baja energía de QCD. En el caso de la interacción NN esta teoría proporciona una expansión de largas distancias para el potencial nuclear que puede escribirse esquemáticamente como [20, 24]

$$U(r) = \frac{Mm^3}{f^2}W_{\text{LO}}(mr, g) + \frac{Mm^5}{f^4}W_{\text{NLO}}(mr, g, \bar{d}) + \frac{m^6}{f^4}W_{\text{NNLO}}(mr, g, \bar{c}_1, \bar{c}_3, \bar{c}_4) + \dots \quad (3.1)$$

con  $W(x)$  funciones adimensionales conocidas, finitas en todas partes salvo el origen, en

donde muestran divergencias de tipo potencial  $1/r^n$ . Este potencial queda definido por completo si se especifican la masa del pión  $m$ , la constante de acoplamiento débil del pión  $f$ , la constante de acoplamiento axial del pión  $g$ , la masa del nucleón  $M$ , la discrepancia de Goldberger-Treiman  $\bar{d}_{18}$  y tres constantes de baja energía adicionales  $\bar{c}_1 = c_1M$ ,  $\bar{c}_3 = c_3M$  y  $\bar{c}_4 = c_4M$  a las que llamaremos acoplamientos quirales y que pueden determinarse mediante el estudio del proceso de dispersión pión-nucleón a bajas energías. A lo largo de este capítulo tomaremos  $m = 138,03 \text{ MeV}$ ,  $f = 92,4 \text{ MeV}$  y  $g = 1,29$ <sup>1</sup>.

Al orden más bajo en esta expansión (LO) las predicciones de teoría quiral de perturbaciones y del modelo tradicional de intercambios mesónicos coinciden, ya que se obtiene el potencial de intercambio de un pión, la componente de más largo alcance del potencial nuclear. Sin embargo a ordenes más altos (NLO y NNLO) el potencial quiral difiere del potencial de intercambio piónico tradicional, debido a que la simetría quiral determina fuertemente la dinámica piónica por lo que a estos ordenes nos encontramos con las primeras predicciones genuinamente quirales distinguibles del intercambio piónico clásico. En NLO hay que comentar por ejemplo existe una corrección quiral a la constante de acoplamiento axial del pión  $g$ , la discrepancia de Goldberger-Treiman<sup>2</sup>, que puede tenerse en cuenta mediante la sustitución

$$g \rightarrow g - d_{18} m^2 \quad (3.2)$$

Esta corrección se tendrá en cuenta tomando  $g = 1,26$  en vez de  $1,29$  en las componentes NLO y NNLO del potencial<sup>3</sup>. En NNLO lo más importante es la aparición de los acoplamientos quirales  $c_1$ ,  $c_3$  y  $c_4$ , que también aparecen en la descripción quiral del proceso de dispersión pión-nucleón, y que normalmente se determinan a partir del estudio de dicho proceso. Una de las ventajas de la descripción quiral de la interacción NN es que dicha descripción puede relacionarse con la de otros procesos hadrónicos, en este caso dispersión  $\pi N$ . A lo largo de este trabajo van a considerarse cuatro sets de acoplamientos quirales, uno de ellos obtenidos a partir del estudio del sistema  $\pi N$  y otros tres ajustados al sistema NN. Los valores de  $c_1$ ,  $c_3$  y  $c_4$  que conforman estos sets así como las referencias de las que se obtienen pueden consultarse en la tabla (3.1).

Para poder realizar predicciones independiente de modelos con potenciales quirales los métodos de regularización y renormalización van a ser especialmente importantes, y van a ocupar buena parte de la discusión en este capítulo. Esto a su vez justifica el que se dedique un capítulo completo a la dispersión NN en el canal singlete, ya que dicho canal proporciona el caso más sencillo sobre el que desarrollar los métodos de regularización que posteriormente

<sup>1</sup>También hay que advertir que en ocasiones habrá diferencias menores en la notación, por lo que podemos encontrarnos escrito  $m_\pi$ ,  $f_\pi$  y  $g_A$  en vez de  $m$ ,  $f$  y  $g$  en este trabajo.

<sup>2</sup>Recuérdese que la relación de Goldberger-Treiman (sin corrección) es  $gM = g_{\pi NN} f_\pi$ .

<sup>3</sup>En LO se seguirá tomando  $g = 1,29$ . Esto difiere de la prescripción usual de cambiar  $g$  globalmente en el potencial cuando se considera NLO y NNLO. Sin embargo así se asegura el mismo valor de  $g_{\pi NN}$  para todas las componentes del potencial quiral.

Set	Ref	$c_1(\text{GeV}^{-1})$	$c_3(\text{GeV}^{-1})$	$c_4(\text{GeV}^{-1})$
Set I	(BM) $\pi N$	$-0.81 \pm 0.15$	$-4.69 \pm 1.34$	$3.40 \pm 0.04$
Set II	(RTdS) $NN$	-0.76	-5.08	4.70
Set III	(EMa) $NN$	-0.81	-3.40	3.40
Set IV	(EMb) $NN$	-0.81	-3.20	5.40

Cuadro 3.1: Sets considerados de acoplamientos quirales. El set I se ha obtenido a partir de la dispersión  $\pi N$ , mientras que los sets II, III y IV provienen de dispersión  $NN$ . Las referencias son Büttiker y Meissner (BM [56]), Rentmeester, Timmermans y de Swart (RTdS [24]), Entem y Machleidt a (EMa [33]) y Entem y Machleidt b (EMb [41]).

aplicaremos al deuterón en los capítulos (4) y (5). Desde este punto de vista el presente capítulo podría resumirse en que vamos a tratar de responder la misma pregunta que ya nos hicimos en el caso de la interacción cesio-cesio: *¿Qué predicciones puedo hacer sobre dispersión  $NN$ , el deuterón, etc, si supongo que a largas distancias la interacción viene dada por los potenciales quirales y si exijo que se reproduzcan ciertos observables físicos elegidos?*

## 3.2. Dispersión $NN$ con Intercambio de Un Pión

### 3.2.1. Ecuación de Schrödinger

La dispersión  $NN$  en el canal singlete se describe mediante la ecuación de Schrödinger reducida que, tras la descomposición en ondas parciales, puede escribirse en onda  $s$  como

$$-u'' + U_{\text{OPE}}(r)u = k^2 u \quad (\text{onda } s) \quad (3.3)$$

en donde  $k$  es el número de onda en el sistema centro de masa, y  $U_{\text{OPE}}$  el potencial reducido de intercambio de un pión, que se define como

$$U_{\text{OPE}}(r) = M_N V_{\text{OPE}}(r) = -\frac{m_\pi^2 M_N g_A^2 e^{-m_\pi r}}{16\pi f_\pi^2 r} \quad (3.4)$$

siendo  $M_N$  dos veces la masa reducida protón-neutrón,  $m$  la masa del pión,  $g_A$  la constante de acoplamiento axial del pión, y  $f_\pi$  la constante de decaimiento débil del pión. Para estas constantes físicas se toman los valores  $M_N = 938,918 \text{ MeV}$ ,  $m = 138,03 \text{ MeV}$ ,  $g_A = 1,29$  y  $f_\pi = 92,4 \text{ MeV}$ .

### 3.2.2. Regularización del Potencial de Intercambio de Un Pión

Consideremos un sistema físico compuesto por dos partículas que interaccionan entre sí mediante cierto potencial central. En mecánica cuántica este sistema viene descrito por la

ecuación de Schrödinger reducida siguiente

$$-u'' + U(r)u = k^2 u \quad (\text{onda } s) \quad (3.5)$$

La ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial de segundo orden y tiene por tanto dos soluciones linealmente independientes. Sin embargo el sistema físico descrito por la ecuación de Schrödinger debe tener una solución única, por lo que hay que descartar una de las dos soluciones. La forma usual de escoger la solución física es imponer la condición de regularidad en el origen

$$u(0) = 0 \quad (3.6)$$

A la solución de la ecuación de Schrödinger que cumple esta condición se la llama solución regular, y a la que no, solución irregular. La razón de por qué se exige la condición de regularidad en el origen en el caso de onda  $s$ <sup>4</sup> está en que la solución irregular genera una contribución singular de tipo delta de Dirac que no puede ser absorbida por ningún otro término de la ecuación de Schrödinger. Para un potencial que no sea demasiado singular en el origen, es decir

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 U(r) = 0 \quad (3.7)$$

las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Schrödinger (3.5) se comportan cerca del origen como

$$u(r) \rightarrow c_0 + c_1 r \quad (3.8)$$

La aplicación de la condición de regularidad de la función de onda (3.6) a la solución de cortas distancias implica que  $c_0 = 0$ , con lo que cerca del origen la función de onda se comportaría como  $u(r) \sim r$ . Integrando esta solución desde  $r \sim 0$  hasta  $r \rightarrow \infty$  obtendríamos la solución completa de la ecuación de Schrödinger que describe el sistema físico considerado<sup>5</sup>

Sin embargo en muchos sistemas físicos el conocimiento que se tiene sobre el potencial es incompleto. En tales casos se conoce cómo es la interacción a largas distancias, pero no cómo es a cortas. En general el potencial viene dado por una expansión de largas distancias. Un ejemplo de esto es el potencial de interacción átomo-átomo, que a largas distancias se puede escribir como la serie

$$U(r) = -\frac{C_6}{r^6} - \frac{C_8}{r^8} - \frac{C_{10}}{r^{10}} - \dots \quad (3.9)$$

<sup>4</sup>En el caso de ondas de mayor momento angular,  $l \neq 0$ , la exigencia de la condición de regularidad es necesaria para obtener una solución de cuadrado integrable. Sin embargo en onda  $s$  ambas soluciones a la ecuación de Schrödinger son normalizables, cumplan o no la condición de regularidad.

<sup>5</sup>En realidad para el potencial de intercambio de un pión el comportamiento cerca del origen no es  $u(r) \sim c_0 + c_1 r$ , sino

$$u(r) \sim c_0 \left[ 1 + mr - \frac{3r}{2R_s} - \frac{r}{R_s} \log\left(\frac{r}{R_s}\right) \right] + c_1 r \quad \text{con} \quad R_s = \frac{16\pi f_\pi^2}{g^2 m^2 M}$$

Sin embargo la discusión no cambia respecto al caso habitual  $u(r) \sim c_0 + c_1 r$ , ya que cualitativamente el comportamiento es muy similar.

El primer término es el conocido potencial de van der Waals. Los siguientes términos son correcciones de largas distancias al potencial de van der Waals. La misma situación se presenta en el caso de la interacción nucleón-nucleón. El potencial de largas distancias entre nucleones se expresa como una serie perturbativa determinada y ordenada por la exigencia de la simetría quiral del lagrangiano de QCD

$$U(r) = U_{LO}(r) + U_{NLO}(r) + U_{NNLO}(r) + \dots \quad (3.10)$$

El término principal,  $U_{LO}$ , es el potencial de intercambio de un pión (OPE, por *One Pion Exchange*). Los términos siguientes representan intercambios piónicos superiores, y correcciones de orden superior a estos intercambios piónicos. Cada término nuevo que se añade al potencial mejora ligeramente la descripción de largas distancias de la interacción.

En estos sistemas físicos el potencial de cortas distancias es desconocido. En la situación ideal en la que la separación de escalas entre el potencial de cortas y largas distancias sea especialmente grande, la función de onda se comportará como  $u(r) \sim c_0 + c_1 r$  a distancias en las que el potencial de cortas distancias ha dejado de actuar. Si ignoramos la presencia del potencial de cortas distancias el resultado que se observa es que  $c_0 \neq 0$ , y que por lo tanto se viola la condición de regularidad en el origen. Esta conclusión es en realidad tan sólo aparente. El potencial completo, compuesto de términos conocidos de largas distancias y de términos desconocidos de cortas distancias, cumplirá la condición de regularidad en el origen, pero cuando consideramos sólo la parte de largas distancias del potencial la solución que describe el sistema físico ya no se corresponde con la solución regular de la ecuación de Schrödinger.

### 3.2.3. Descripción de los Estados de Dispersión

Un ejemplo de las ideas discutidas anteriormente es el estudio de la dispersión NN en el canal  $^1S_0$ . A largas distancias el intercambio de un pión es el factor dominante en la interacción NN. A cortas distancias la interacción NN se complica debido a intercambios piónicos superiores, intercambio de mesones más pesados, y finalmente a la superposición de los nucleones a muy cortas distancias. Estas componentes de cortas distancias de la interacción NN se considerarán desconocidas.

Para determinar la solución física a la ecuación de Schrödinger (3.3) en vez de la condición de regularidad en el origen se va a usar la condición de reproducir la longitud de dispersión física, que en el caso de la interacción NN es  $\alpha_{0,\text{exp}} = -23,74 \text{ fm}$ . Si usamos la condición de regularidad para resolver el potencial de intercambio de un pión obtenemos una longitud de dispersión  $\alpha = -0,83 \text{ fm}$ , unas treinta veces menor que el valor físico. Por tanto, teniendo en cuenta la incapacidad de la solución regular para describir el comportamiento de bajas energías, resulta necesario fijar  $\alpha_0$ .

La forma en que se construyen soluciones que reproduzcan la longitud de dispersión fija es imponiendo a la solución de energía cero que se comporte asintóticamente como la solución libre de longitud de dispersión fijada

$$u_0(r) \rightarrow \left(1 - \frac{r}{\alpha_0}\right) \quad \text{para } r \rightarrow \infty \quad (3.11)$$

Esta solución asintótica se integra con la ecuación de Schrödinger (3.5) desde  $r \rightarrow \infty$  hasta  $r \rightarrow 0^+$ , con lo que determinamos por completo la solución de energía cero <sup>6</sup>.

La solución de energía finita, que se comporta asintóticamente como

$$u_k(r) \rightarrow \frac{\sin(kr + \delta(k))}{\sin \delta(k)} \quad (3.12)$$

se puede construir por ortogonalidad con la solución de energía cero

$$\int_0^\infty dr u_k(r) u_0(r) = 0 \quad (3.13)$$

Esta condición garantiza que la solución de energía finita,  $u_k(r)$ , reproduzca la longitud de dispersión  $\alpha_0$  de la solución de energía cero,  $u_0(r)$ . Para construir la solución de energía finita  $u_k$  es conveniente reescribir la condición de ortogonalidad (3.13) como <sup>7</sup>

$$k^2 \int_0^\infty dr u_k(r) u_0(r) = [u_k u_0' - u_k' u_0] \Big|_0^\infty = 0 \quad (3.14)$$

Esta última condición puede reducirse a la siguiente igualdad entre derivadas logarítmicas <sup>8</sup>

$$\frac{u_k'}{u_k} \Big|_{0^+} = \frac{u_0'}{u_0} \Big|_{0^+} \quad (3.16)$$

---

<sup>6</sup>Nótese que el sentido de integración es el contrario del habitual. Normalmente para resolver la ecuación de Schrödinger partimos del comportamiento regular a cortas distancias de la función de onda reducida,  $u(r) \sim r$ , e integramos desde  $r \sim 0$  a  $r \rightarrow \infty$ . Aquí estamos haciendo justo lo contrario. Partimos del comportamiento asintótico a largas distancias de la función de onda reducida e integramos desde  $r \rightarrow \infty$  a  $r \sim 0$  para obtener la solución completa.

<sup>7</sup>Resultado al que se llega mediante una identidad de Lagrange entre las funciones de onda reducidas  $u_0$  y  $u_k$ .

<sup>8</sup>Para verlo es necesario regularizar la condición integral de ortogonalidad de manera que de resultados bien definidos en infinito, por ejemplo, añadiendo una exponencial decreciente  $e^{-\epsilon r}$  en donde  $\epsilon$  tiende a cero. Esto es

$$\int_0^\infty dr u_k(r) u_0(r) \rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty dr u_k(r) u_0(r) e^{-\epsilon r} \quad (3.15)$$

Con este regulador, el término que corresponde al límite superior de integración tras aplicar la identidad de Lagrange,  $[u_k u_0' - u_k' u_0] \Big|_\infty$ , estará bien definido (y valdrá 0).

a partir de la cual se puede reconstruir la función de onda de momento  $k$ , integrando desde el origen hasta infinito con la ecuación de Schrödinger.

La condición de ortogonalidad impone una restricción importante a las funciones de onda que se pueden construir cuando se considera un potencial regular en onda  $s$ : sólo es posible fijar un observable a su valor físico. La función de onda de momento  $k$  queda completamente fijada por el valor de la derivada logarítmica de la función de onda de momento cero, que a su vez depende de un único parámetro, la longitud de dispersión. Para poder fijar un segundo parámetro, sería necesario que la derivada logarítmica de la solución de momento  $k$  dependiese del momento, con lo que se violaría la ortogonalidad de las soluciones.

Los resultados que se obtienen para el potencial de intercambio de un pión se muestran en la figura (3.1). Como se puede ver, si usamos la condición de regularidad, curva OPE(R), los resultados que se obtienen no se parecen a los defasajes  $NN$  que se obtienen del potencial fenomenológico Nijmegen II. Cuando se fija la longitud de dispersión  $\alpha$  a su valor físico los defasajes cambian notablemente, y reproducen correctamente el comportamiento para momento cercano a cero. Sin embargo a energías intermedias se estabilizan en torno a los 70 grados y ya no consiguen reproducir los defasajes fenomenológicos. Esto indica la necesidad de incluir las componentes de energías intermedias del potencial nuclear, que vienen dadas por intercambios piónicos superiores. En cualquier caso el potencial de intercambio de un pión supone una mejora sistemática sobre la teoría de rango efectivo a orden  $k^0$ , es decir

$$k \cot \delta = -\frac{1}{\alpha} \quad (3.17)$$

Es curioso observar que en realidad la teoría de rango efectivo es a este orden equivalente a fijar la longitud de dispersión sin potencial de largas distancias, es decir, equivale a la teoría sin piones. Este resultado puede obtenerse teniendo en cuenta que cuando no hay potencial de largas distancias, las funciones de onda son

$$u_0(r) = \left(1 - \frac{r}{\alpha_0}\right) \quad (3.18)$$

$$u_k(r) = \frac{\sin(kr + \delta(k))}{\sin \delta(k)} \quad (3.19)$$

y la condición de ortogonalidad resulta ser entonces

$$\left. \frac{u_k'}{u_k} \right|_{0^+} = \left. \frac{u_0'}{u_0} \right|_{0^+} \Rightarrow k \cot \delta = -\frac{1}{\alpha} \quad (3.20)$$

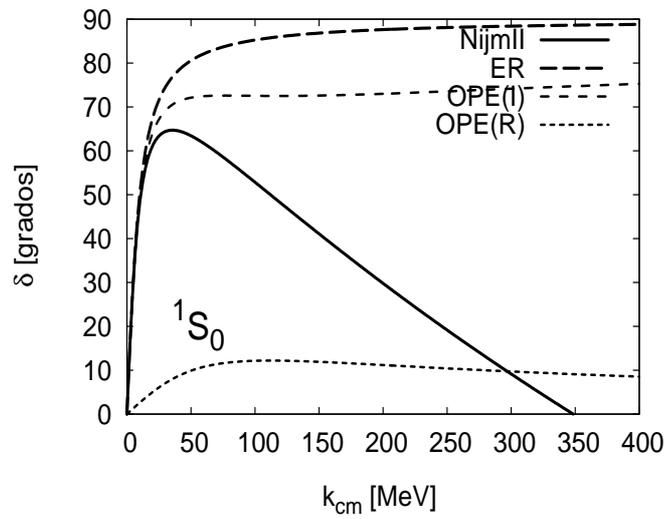


Figura 3.1: Defasajes en el canal  $^1S_0$  para el potencial de intercambio de un pión (OPE), teoría de rango efectivo (ERE), y para el potencial fenomenológico Nijmegen II (NijmII), que son tratados como pseudodatos. En la curva OPE(R) se ha tomado la función de onda regular para el potencial OPE, mientras que en la curva OPE(I) se ha tomado la función de onda irregular que reproduce el defasaje físico  $\alpha_0 = -23,74$  fm.

### 3.3. Dispersión NN con Intercambio de Dos Piones

#### 3.3.1. Ecuación de Schrödinger

La dispersión NN en el canal singlete se describe mediante la siguiente ecuación de Schrödinger reducida

$$-u'' + U_{\text{TPE}}(r)u = k^2 u \quad (\text{onda } s) \quad (3.21)$$

en donde  $k$  es el número de onda en el sistema centro de masa, y  $U_{\text{TPE}}$  el potencial reducido de intercambio de dos piones.

Esto de abajo no toca aquí, pero lo meto de todas maneras

$$U_{\text{OPE}}(r) = M_N V_{\text{OPE}}(r) = -\frac{m_\pi^2 M_N g_A^2}{16\pi f_\pi^2} \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \quad (3.22)$$

siendo  $M_N$  dos veces la masa reducida protón-neutrón,  $m$  la masa del pión,  $g_A$  la constante de acoplamiento axial del pión, y  $f_\pi$  la constante de decaimiento débil del pión. Para estas constantes físicas se toman los valores  $M_N = 938,918 \text{ MeV}$ ,  $m = 138,03 \text{ MeV}$ ,  $g_A = 1,29$  y  $f_\pi = 92,4 \text{ MeV}$ .

#### 3.3.2. Regularización de Potenciales Singulares

La discusión elaborada en la sección anterior se basa en la suposición de que el potencial de largas distancias tiene un comportamiento suficientemente regular cerca del origen, eq. (3.7). En tal caso el comportamiento cuando  $r \rightarrow 0$  de la función de onda reducida es  $u(r) \sim a + br$ , y existe la posibilidad de sustituir la condición de regularidad en el origen,  $a = 0$ , por la condición de fijar un determinado observable físico que contenga información sobre la física de cortas distancias.

En general los potenciales de largas distancias no van a cumplir la condición de regularidad para el potencial en el origen, eq. (3.7). En tales casos hablaremos de potenciales singulares. Un ejemplo es el potencial de van der Waals, que se comporta como  $-\frac{1}{r^6}$ , y por lo tanto viola la condición de regularidad del potencial en el origen. Los potenciales quirales que describen la interacción NN también contienen contribuciones singulares. A distancias menores que la longitud de onda Compton del pión las contribuciones LO, NLO y NNLO se comportan como

$$U_{LO} \rightarrow \pm \frac{1}{r^3} \quad , \quad U_{NLO} \rightarrow \pm \frac{1}{r^5} \quad , \quad U_{NNLO} \rightarrow \pm \frac{1}{r^6} \quad (3.23)$$

Es importante señalar que el comportamiento singular de estos potenciales no es una propiedad de cortas distancias, sino una propiedad de largas distancias. Por otra parte el potencial completo no puede ser singular atractivo cerca del origen, ya que si esto ocurriera el hamiltoniano no estaría acotado inferiormente y el sistema colapsaría.

Supongamos un potencial singular que se comporte cerca del origen como

$$U_L(r) = \pm \frac{R_L^{N-2}}{r^N} \quad (3.24)$$

en donde  $N > 2$ . Para distancias lo suficientemente pequeñas la solución a este potencial vendrá dada por la aproximación semiclásica, que será válida cuando la variación de la longitud de onda de de Broglie semiclásica,  $\lambda$ , respecto del radio sea suave

$$\left| \frac{1}{2\pi} \frac{d\lambda}{dr} \right| = \left| \frac{d}{dr} \frac{1}{k(r)} \right| \ll 1 \quad (3.25)$$

en donde  $k(r) = 1/\sqrt{|k^2 - U_L(r)|}$ . Para la familia de potenciales singulares (3.24) y para  $k \ll |U_L(r)|$ , el comportamiento de la función de onda es semiclásico a distancias tales que

$$\frac{r}{R_L} \ll \left( \frac{N}{2} \right)^{1-N/2} \quad (3.26)$$

Esto significa que mientras mas singular sea el potencial, la validez de la aproximación semiclásica será mayor, dado que  $(N/2)^{1-N/2}$  crece con  $N$ , comportandose incluso como  $N/2$  para  $N$  suficientemente grande.

Se pueden distinguir entre dos situaciones según el potencial sea repulsivo o atractivo. En el caso repulsivo la solución de la ecuación de Schrödinger reducida se expresa como combinación lineal de una solución regular y otra irregular en el origen

$$u(r) \rightarrow r^{N/4} \left\{ C_{1R} \exp \left[ \frac{2}{N-2} \left( \frac{R_L}{r} \right)^{\frac{N}{2}-1} \right] + C_{2R} \exp \left[ -\frac{2}{N-2} \left( \frac{R_L}{r} \right)^{\frac{N}{2}-1} \right] \right\} \quad (3.27)$$

la solución física queda completamente determinada mediante la condición de regularidad en el origen, es decir,  $C_{1R} = 0$ . No es posible fijar ningún parámetro físico, como se hacía por ejemplo con un potencial regular en el origen, porque si  $C_{1R} \neq 0$  la función de onda es divergente y no normalizable. Esto significa que la física queda determinada únicamente por las escalas de largo alcance. La interpretación física de esta situación es que el potencial repulsivo de largo alcance se comporta como una barrera de potencial que va a apantallar cualquier efecto debido a la física de cortas distancias, por lo que éstas no contribuyen en la descripción del sistema considerado.

En el caso atractivo la solución cerca del origen se comporta como

$$u(r) \rightarrow C_A r^{N/4} \sin \left[ \frac{2}{N-2} \left( \frac{R_L}{r} \right)^{\frac{N}{2}-1} + \varphi \right] \quad (3.28)$$

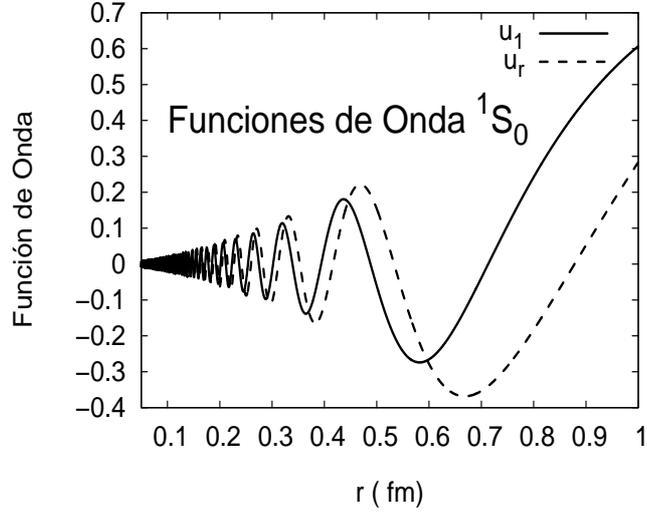


Figura 3.2: Comportamiento de dos funciones de onda linealmente independientes para el potencial TPE en la onda  $^1S_0$ . El potencial TPE se comporta a cortas distancias como  $-1/r^6$ , por lo que las funciones de onda a cortas distancias oscilan indefinidamente con una longitud de onda y una amplitud cada vez menores en su camino hacia el origen. La función de onda  $u_1$  se comporta asintóticamente como 1 y la función de onda  $u_r$  como  $r$ . Debido a que ambas soluciones cumplen la condición de regularidad en el origen,  $u(0) = 0$ , esta condición no puede ser usada para determinar la combinación lineal de soluciones que representa la solución física.

La solución del sistema queda descrita por completo mediante la fase de cortas distancias  $\varphi$ . El problema es cómo determinar esta fase. La condición de regularidad en el origen no sirve como criterio para determinar  $\varphi$  debido a que la solución cerca del origen siempre va a ser regular independientemente de cuánto valga la fase de cortas distancias. Esto puede observarse en la figura (3.2), en donde se representan dos funciones de onda linealmente independientes para el potencial de intercambio de dos piones a NNLO en el canal singlete.

Para poder determinar la fase  $\varphi$  y por lo tanto la solución que describe al sistema físico se debe sustituir la condición de regularidad en el origen por otra condición diferente, como la de reproducir un determinado observable de baja energía <sup>9</sup>.

<sup>9</sup>Tal y como hicimos en el caso de la interacción CsCs, capítulo (2)

### 3.3.3. Descripción de los Estados de Dispersión

En el caso de intercambio de dos piones (TPE) tenemos que el potencial reducido a NLO y NNLO se comporta cerca del origen como

$$U_{NLO} \rightarrow -\frac{MC_5}{r^5} \quad U_{NNLO} \rightarrow -\frac{MC_6}{r^6} \quad (3.29)$$

en donde  $M$  es el doble de la masa reducida protón-neutrón, y los acoplamientos  $C_5$  y  $C_6$  se relacionan con las escalas de longitud asociadas mediante  $MC_5 = R_5^3$  y  $MC_6 = R_6^4$ . Los valores de  $MC_5$  y  $MC_6$  vienen dados por

$$MC_5 = M \frac{1 + 10g_A^2 - 59g_A^4}{256 \pi^3 f_\pi^4} \quad (3.30)$$

$$MC_6 = \frac{3g_A^2(15g_A^2 - 4 + 24\bar{c}_3 - 8\bar{c}_4)}{128 \pi^2 f_\pi^4} \quad (3.31)$$

en donde  $\bar{c}_3 = M c_3$  y  $\bar{c}_4 = M c_4$  son los dos acoplamientos quirales a los que es más sensible el potencial TPE a NNLO. Para los acoplamientos quirales tomaremos los valores correspondientes al Set IV, es decir,  $c_3 = -3,20 \text{ GeV}^{-1}$  y  $c_4 = 5,40 \text{ GeV}^{-1}$ . Debido a la discrepancia de Goldberger-Treimann, en las contribuciones de orden NLO y NNLO del potencial tomaremos  $g_A = 1,26$  en lugar de  $g_A = 1,29$ .

Tomando estos valores para las constantes físicas, las escalas asociadas al comportamiento de cortas distancias de los potenciales de intercambio de dos piones son  $R_5 = 1,18 \text{ fm}$  y  $R_6 = 1,64 \text{ fm}$ .

Como los potenciales de intercambio de dos piones son atractivos singulares, es necesario fijar un observable físico. El más adecuado es la longitud de dispersión.

El procedimiento para construir funciones de onda con longitud de dispersión fija es el mismo que en el caso de intercambio de un pión. Sin embargo, debido a que la singularidad de los potenciales va a generar problemas de precisión numérica, no va a resultar posible integrar la solución de energía cero hasta  $r \rightarrow 0^+$ , sino que se integra hasta un radio de corte  $r_c$  lo suficientemente pequeño en el que los resultados no dependan de este radio de corte. En tal caso la relación de ortogonalidad entre las funciones de onda de momento  $k$  y cero queda como

$$\frac{u_k'}{u_k} \Big|_{r_c} = \frac{u_0'}{u_0} \Big|_{r_c} \quad (3.32)$$

El corte finito  $r_c$  puede inducir errores sistemáticos en la determinación de las funciones de onda y los defasajes, que serán estudiados en detalle más adelante. Para tener bajo control estos errores sistemáticos es necesario comprobar que los resultados no dependen sensiblemente del radio de corte  $r_c$ , por ejemplo, variándolo y recalculando los observables

para  $r_c + \Delta r_c$ . En la sección (3.4.1) presentamos una discusión más completa de los efectos de corte finito.

Una vez que se han eliminado los efectos de corte finito, los defasajes que se obtienen para los potenciales de intercambio de dos piones se presentan en la figura (3.3), en donde puede verse la convergencia de los defasajes con cada orden quiral.

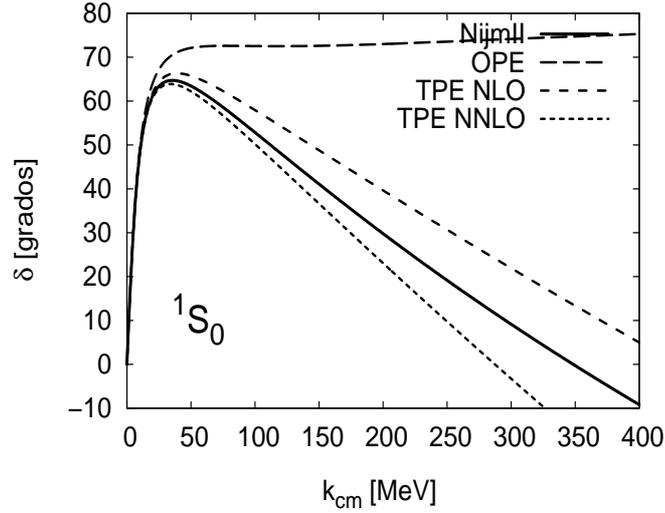


Figura 3.3: Defasajes en el canal  $^1S_0$  para los diferentes ordenes del potencial NN quiral, y para el potencial fenomenológico Nijmegen II, que son tratados como pseudodatos. En los potenciales quirales el defasaje se construye con la condición de que reproduzca la longitud de dispersión NN,  $\alpha_0 = -23,74$  fm. Se observa que la descripción de los defasajes mejora con cada orden quiral. Esto significa que la descripción de la física de largas distancias mejora en cada orden.

### 3.4. Correlaciones de Largas Distancias

La descripción renormalizada de los estados de dispersión del canal singlete en término de los potenciales quirales requiere la longitud de dispersión  $\alpha_0$  (u otro observable) como un parámetro libre de la teoría necesario para determinar unívocamente la función de onda. Esto quiere decir que existe una relación paramétrica simple entre todos los observables de dispersión, lo que permite estudiar la dependencia de estos observables respecto a la longitud de dispersión.

El ejemplo más sencillo es el del rango efectivo,  $r_0$ , que se define como el término de orden

$k^2$  en la expansión en serie de potencias de  $k \cot \delta$

$$k \cot \delta(k) = -\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{2}r_0 k^2 + v_2 k^4 + v_3 k^6 + \dots \quad (3.33)$$

A esta serie de potencias de  $k^2$  se la llama expansión de rango efectivo. Existe también una representación integral de  $k \cot \delta$  que involucra a las funciones de onda reducidas

$$k \cot \delta(k) = -\frac{1}{\alpha_0} + \int_0^\infty dr (v_0(r) v_k(r) - u_0(r) u_k(r)) \quad (3.34)$$

En donde  $u_0$  y  $u_k$  son las funciones de onda reducida a momento 0 y  $k$ , mientras que  $v_0$  y  $v_k$  coinciden con la forma asintótica de  $u_0$  y  $u_k$ , cuando  $r \rightarrow \infty$ . Es decir

$$u_0(r) \rightarrow v_0(r) = \left(1 - \frac{r}{\alpha_0}\right) \quad (3.35)$$

$$u_k(r) \rightarrow v_k(r) = \frac{\sin(kr + \delta(k))}{\sin \delta(k)} \quad (3.36)$$

Desarrollando en serie de potencias esta fórmula integral y comparándola con la expansión de rango efectivo (3.33), se obtiene la siguiente fórmula integral para el rango efectivo

$$r_0 = 2 \int_0^\infty dr \left[ \left(1 - \frac{r}{\alpha_0}\right)^2 - u_0(r)^2 \right] \quad (3.37)$$

Por otra parte la función de onda reducida de energía cero ha sido construida de manera que reproduzca la longitud de dispersión  $\alpha_0$  cuando  $r \rightarrow \infty$

$$u_0(r) \rightarrow \left(1 - \frac{r}{\alpha_0}\right) \quad (3.38)$$

Esto se hacia integrando la solución asintótica con la ecuación de Schrödinger desde  $r \rightarrow \infty$  hasta  $r \sim 0$ . Aunque el método para calcular la función de onda de energía cero es puramente numérico, es posible obtener la forma de la dependencia de la función de onda reducida respecto a la longitud de dispersión usando el principio de superposición. Si construimos las funciones de onda reducidas que asintóticamente se comportan como

$$u_1(r) \rightarrow 1 \quad (3.39)$$

$$u_r(r) \rightarrow r \quad (3.40)$$

entonces, la solución de energía cero con longitud de dispersión fija se escribe como

$$u_0(r) = u_1(r) - \frac{u_r(r)}{\alpha_0} \quad (3.41)$$

Cuando se incluye la dependencia de la solución de energía cero respecto a la longitud de dispersión en la fórmula integral para el rango efectivo, eq. (3.37), se obtiene la dependencia del rango efectivo respecto a  $\alpha_0$

$$r_0 = A + \frac{B}{\alpha_0} + \frac{C}{\alpha_0^2} \quad (3.42)$$

en donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  se definen como

$$A = 2 \int_0^\infty dr (1 - u_1(r)^2) \quad (3.43)$$

$$B = -4 \int_0^\infty dr (r - u_1(r) u_r(r)) \quad (3.44)$$

$$C = 2 \int_0^\infty dr (r^2 - u_r(r)^2) \quad (3.45)$$

y dependen únicamente del potencial de largas distancias. Un ejemplo sencillo de la correlación entre el rango efectivo y la longitud de dispersión es el caso de un potencial de van der Waals,  $-R_L^4/r^6$ , en donde la correlación resultante es

$$r_0 = \frac{16 R_L \Gamma(\frac{5}{4})^2}{3 \pi} - \frac{4 R_L^2}{3 \alpha_0} + \frac{4 R_L^3 \Gamma(\frac{3}{4})^2}{3 \alpha_0^2 \pi} \quad (3.46)$$

Si consideramos la interacción NN con potenciales de intercambios piónicos, las correlaciones que estos potenciales quirales inducen entre el rango efectivo y la longitud de dispersión son

$$r_0 = 1,234 - \frac{4,672}{\alpha_0} + \frac{5,141}{\alpha_0^2} \quad (\text{OPE}) \quad (3.47)$$

$$r_0 = 2,126 - \frac{4,896}{\alpha_0} + \frac{5,502}{\alpha_0^2} \quad (\text{TPE NLO}) \quad (3.48)$$

$$r_0 = 2,618 - \frac{5,641}{\alpha_0} + \frac{5,953}{\alpha_0^2} \quad (\text{TPE NNLO}) \quad (3.49)$$

En donde el rango efectivo y la longitud de dispersión están en fm y el resultado TPE NNLO se refiere al set IV de acoplamientos quirales. Podemos ver que los términos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son progresivamente menos dependientes de las escalas de distancias más pequeñas del sistema. El término  $A$ , por ejemplo, tiene un cambio notable de su valor por cada nuevo orden quiral del potencial, mientras que en  $B$  y  $C$  el cambio es menor. Esto significa que un sistema con longitud de dispersión grande, como es el caso de dispersión NN en el canal  $^1S_0$ , va a ser sensible a efectos de más cortas distancias, mientras que un sistema con longitud de dispersión pequeña sólo va a ver las partes de más largo alcance de la interacción.

Set	A	B	C	$r_0(\Delta r_c)$	$r_0(\Delta \alpha_0)$
OPE	1.2336(10)	-4.6722(8)	5.1406(4)	1.4395(10)	1.4395(2)
TPE NLO	2.1255(19)	-4.8961(9)	5.5020(7)	2.3415(19)	2.3415(2)
Set I	2.6718(12)	-5.7552(6)	6.0310(2)	2.9249(12)	2.9249(2)
Set II	2.7159(12)	-5.8473(6)	6.0933(3)	2.9730(12)	2.9730(2)
Set III	2.5877(11)	-5.5843(7)	5.9168(2)	2.8334(12)	2.8334(2)
Set IV	2.6175(13)	-5.6408(7)	5.9526(2)	2.8657(13)	2.8657(2)

Cuadro 3.2: Coeficientes de la correlación entre el rango efectivo y la longitud de dispersión para los potenciales de intercambio de uno y dos piones quirales. Para el intercambio de dos piones a NNLO se presentan los resultados de los cuatro sets de acoplamientos quirales considerados. También se muestran el rango efectivo con el error derivado de efectos de corte finito  $r_0(\Delta r_c)$  y con el error derivado de la incertidumbre en el valor experimental de la longitud de dispersión,  $r_c(\Delta \alpha_0)$ . Los efectos de corte finito son estimados variando el radio de corte en el rango 0,001–0,002 fm en el caso del potencial OPE, y 0,1–0,2 fm para los potenciales TPE NLO y NNLO. El valor experimental de la longitud de dispersión y su error es  $\alpha_{0,\text{exp}} = -23,74(2)$  fm, y el del rango efectivo  $r_{0,\text{exp}} = 2,77(5)$  fm. El mejor resultado teórico lo da el set IV de acoplamientos quirales.

En la tabla (3.2) se presentan los valores de  $A$ ,  $B$  y  $C$  con sus correspondientes errores debido a los efectos de corte finito, así como la predicción del rango efectivo si se usa la longitud de dispersión experimental en la correlación (3.42). Para el rango efectivo se muestran dos errores: el debido a corte finito y el debido al error experimental de la longitud de dispersión. El error de corte finito puede reducirse arbitrariamente disminuyendo  $r_c$ . El mejor resultado es el correspondiente al set IV,  $r_0 = 2,8657(2)$  fm, que está a dos desviaciones estándar del valor experimental,  $r_{0,\text{exp}} = 2,77(5)$  fm.

También se puede obtener la dependencia del resto de los parámetros de la expansión de rango efectivo respecto a la longitud de dispersión de la misma manera que se ha hecho con el rango efectivo. Es decir, se estudia la representación integral del parámetro en cuestión, y se expanden las funciones de onda reducidas mediante el principio de superposición. En el caso de  $v_2$ , el término de orden  $k^4$  en la expansión de  $k \cot \delta$ , su representación integral es

$$v_2 = \int_0^\infty dr (v_0(r) v_2(r) - u_0(r) u_2(r)) \quad (3.50)$$

en donde  $v_0, v_2, \dots, v_{2n}$  y  $u_0, u_2, \dots, u_{2n}$  son los términos de orden  $k^0, k^2, \dots, k^{2n}$  de la expansión en momento de  $u$  y  $v$

$$v_k = v_0 + v_2 k^2 + v_4 k^4 + v_6 k^6 + \dots \quad (3.51)$$

$$u_k = u_0 + u_2 k^2 + u_4 k^4 + u_6 k^6 + \dots \quad (3.52)$$

Set	$\alpha_0$ fm	$r_0$ fm	$v_2$ fm	$v_3$ fm	$v_4$ fm
OPE	Input	1.4305(2)	-	-	-
TPE NLO	Input	2.3415(2)	-1.0573(2)	6.2707(10)	-36.017(6)
Set I	Input	2.9249(2)	-0.3032(1)	4.9357(9)	-27.704(5)
Set II	Input	2.9730(2)	-0.2356(1)	4.8600(9)	-27.068(5)
Set III	Input	2.8334(2)	-0.4284(1)	5.0972(9)	-28.935(5)
Set IV	Input	2.8657(2)	-0.3837(1)	5.0839(9)	-28.499(5)
NijmII	-23.727	2.670	-0.4759	3.962	-19.88
Reid93	-23.735	2.753	-0.4942	3.652	-18.30
Exp	-23.74(2)	2.77(5)	-	-	-

Cuadro 3.3: Parámetros de baja energía para los potenciales OPE, TPE NLO y TPE NNLO. Se ha tomado la longitud de dispersión experimental,  $\alpha_0 = -23,74(2)$  fm como parámetro de entrada en los cálculos. El error se ha obtenido variando el parámetro de entrada según su error experimental.

Expandiendo  $k \cot \delta$  dentro de la expresión para  $v_k$ , eq. (3.35), obtenemos

$$u_2(r) \rightarrow v_2(r) = r \left( \frac{r_0}{2} - \frac{r}{2} + \frac{r^2}{6\alpha_0} \right) \quad (3.53)$$

Por último, teniendo en cuenta la relación entre rango efectivo y longitud de dispersión, eq. (3.42), se obtiene la relación entre  $v_2$  y  $\alpha_0$

$$v_2 = A + \frac{B}{\alpha_0} + \frac{C}{\alpha_0^2} + \frac{D}{\alpha_0^3} \quad (3.54)$$

Para los términos de orden  $k^n$  de la expansión de rango efectivo

$$v_n = \int_0^\infty dr (v_0(r)v_n(r) - u_0(r)u_n(r)) \quad (3.55)$$

usando los mismos argumentos que para  $r_0$  y  $v_2$  se puede comprobar que la correlación resultante es

$$v_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{A_k}{\alpha_0^k} \quad (3.56)$$

En la tabla (3.3) se pueden ver los observables de dispersión de baja energía para los potenciales OPE, TPE NLO y TPE NNLO. El valor de estos observables es consecuencia de las correlaciones de largas distancias inducidas por los respectivos potenciales. Se ha tomado como parámetro de entrada la longitud de dispersión experimental,  $\alpha_0 = -23,74(2)$  fm, y

el error se ha calculado variando la longitud de dispersión según su error experimental. En principio el único observable que puede compararse con su valor experimental es el rango efectivo  $r_0$ , en el que se observa un patrón de convergencia quiral  $\text{LO} \rightarrow \text{NLO} \rightarrow \text{NNLO}$ . Para el potencial TPE NNLO el mejor set de acoplamientos quirales es el IV, que proporciona el resultado teórico para  $r_0$  que mejor se compara con el experimental. Para los otros observables de dispersión ( $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_4$ ) no hay ningún dato experimental con el que comparar, por lo que se compara en tal caso con los resultados de los potenciales fenomenológicos Nijmegen II y Reid 93. La diferencia entre los resultados de estos dos potenciales fenomenológicos puede tomarse como el error teórico de estos potenciales. En cualquier caso también para los parámetros  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_4$  se observa el patrón de convergencia quiral que ya se veía en el rango efectivo.

### 3.4.1. Defasajes

En el caso de los defasajes también es posible encontrar la forma de la dependencia respecto a la longitud de dispersión. La función de onda para el estado de dispersión de momento  $k$  se comporta asintóticamente como

$$u_k(r) \rightarrow \frac{\sin(kr + \delta(k))}{\sin \delta(k)} = \cos kr - k \cot \delta \frac{\sin kr}{k} \quad (3.57)$$

Entonces, mediante el principio de superposición se puede descomponer la función de onda  $u_k$  como

$$u_k(r) = u_{k,c}(r) - k \cot \delta u_{k,s}(r) \quad (3.58)$$

en donde  $u_{k,c}$  y  $u_{k,s}$  son funciones de onda que cuando  $r \rightarrow \infty$  se comportan como

$$u_{k,c}(r) \rightarrow \cos kr \quad (3.59)$$

$$u_{k,s}(r) \rightarrow \frac{\sin kr}{k} \quad (3.60)$$

La ventaja de estas funciones de onda está en que sólo dependen de los parámetros del potencial. Es fácil comprobar que  $u_{0,c}(r) = u_1(r)$  y  $u_{0,s}(r) = u_r(r)$ .

Usando la relación de ortogonalidad en  $r_c$  y desarrollando las funciones de onda  $u_k(r_c)$  y  $u_0(r_c)$  según la descomposición anterior (3.58), la correlación resultante es

$$k \cot \delta(k) = \frac{\alpha_0 \mathcal{A}(k) - \mathcal{B}(k)}{\alpha_0 \mathcal{C}(k) - \mathcal{D}(k)} \quad (3.61)$$

en donde  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  se definen como

$$\mathcal{A}(k) = \lim_{r_c \rightarrow 0} [u_{0,c}(r_c) u'_{k,c}(r_c) - u'_{0,c}(r_c) u_{k,c}(r_c)] \quad (3.62)$$

$$\mathcal{B}(k) = \lim_{r_c \rightarrow 0} [u_{k,c}(r_c) u'_{0,s}(r_c) - u'_{k,c}(r_c) u_{0,s}(r_c)] \quad (3.63)$$

$$\mathcal{C}(k) = \lim_{r_c \rightarrow 0} [u'_{0,c}(r_c) u_{k,s}(r_c) - u_{0,c}(r_c) u'_{k,s}(r_c)] \quad (3.64)$$

$$\mathcal{D}(k) = \lim_{r_c \rightarrow 0} [u_{0,s}(r_c) u'_{k,s}(r_c) - u'_{0,s}(r_c) u_{k,s}(r_c)] \quad (3.65)$$

Además  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  cumplen las condiciones

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathcal{A}(k) = \lim_{k \rightarrow 0} \mathcal{D}(k) = 0 \quad (3.66)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathcal{B}(k) = \lim_{k \rightarrow 0} \mathcal{C}(k) = 1 \quad (3.67)$$

que aseguran que  $k \cot \delta$  se comporte adecuadamente a baja energía.

### 3.5. Efectos de Corte Finito

Para obtener soluciones de dispersión renormalizadas en el canal singlete es necesario fijar la longitud de dispersión u otro observable. El procedimiento de construcción de funciones de onda que tengan longitud de dispersión fija es construir en primer lugar una función de onda de energía cero con esta propiedad y luego construir las funciones de onda de energía finita por ortogonalidad con la función de onda de energía cero. Esto requiere que se integre la función de onda hasta  $r \rightarrow 0^+$  con la ecuación de Schrödinger. En el caso de un potencial singular el procedimiento resulta complicado numéricamente, debido a que el potencial diverge conforme nos acercamos a  $r \rightarrow 0^+$ . Las limitaciones numéricas exigen tomar un radio de corte finito,  $r_c$ , e imponer en este radio de corte la condición de ortogonalidad

$$\frac{u_k'}{u_k} \Big|_{r_c} = \frac{u_0'}{u_0} \Big|_{r_c} \quad (3.68)$$

Posteriormente se tiene que comprobar la independencia del cálculo respecto al radio de corte  $r_c$ . La forma más segura de hacerlo es calcular la dependencia explícita de los observables respecto al corte, y comprobar si para radios de corte lo suficientemente pequeños se observa un *plateau* en el comportamiento de estos observables como función de  $r_c$ .

Sin embargo es posible estimar los efectos de corte finito y los errores que estos inducen en los observables mediante el análisis del comportamiento a cortas distancias de las funciones de onda, y por tanto de los observables. De manera consistente con la introducción de un

radio de corte en la relación de ortogonalidad (3.68), vamos a imponer un radio de corte a la función de onda, y a las integrales que la contengan

$$u(0) \rightarrow u(r_c), \quad \int_0^\infty dr u^2(r) \rightarrow \int_{r_c}^\infty dr u^2(r) \quad \text{etc.} \quad (3.69)$$

Un ejemplo es esta integral

$$I = \int_0^\infty dr u^2(r) = \int_{r_c}^\infty dr u^2(r) + \Delta I \quad (3.70)$$

en donde  $\Delta I$  representa el error inducido por el radio de corte  $r_c$ . Si suponemos que el comportamiento cerca del origen del potencial de largas distancias es un potencial singular atractivo del tipo

$$U(R) \propto -\frac{1}{r^N} \quad (3.71)$$

entonces el comportamiento de las funciones de onda cerca del origen es conocido, eq. (3.28), y puede ser acotado por

$$|u(r)| \leq C r^{N/4} \quad (3.72)$$

con lo que es posible acotar el error que se comete al cortar esta integral

$$\Delta I = \int_0^{r_c} dr u^2(r) \leq C' r_c^{N/2+1} \quad (3.73)$$

Esta misma integral aparece en la fórmula integral para el rango efectivo y el defasaje

$$r_0(r_c) = 2 \int_0^\infty dr \left(1 - \frac{r}{\alpha_0}\right)^2 - 2 \int_{r_c}^\infty dr u_0(r)^2 \quad (3.74)$$

$$k \cot \delta(k, r_c) = -\frac{1}{\alpha_0} + \int_0^\infty dr v_0(r) v_k(r) - \int_{r_c}^\infty dr u_0(r) u_k(r) \quad (3.75)$$

por lo que se tiene que el error de corte finito para estas dos cantidades escala como

$$\Delta r_0 \propto r_c^{N/2+1} \quad (3.76)$$

$$\Delta(k \cot \delta) \propto r_c^{N/2+1} \quad (3.77)$$

Este escalamiento de los errores de corte finito en el rango efectivo y los defasajes puede observarse en las figuras (3.4) y (3.5), en donde se presenta el cálculo explícito de la dependencia del rango efectivo y los defasajes en función del radio de corte. En concreto en la figura (3.4) se compara la convergencia del rango efectivo con la curva  $r_0(r_c \sim 0) + 0,11 r_c^4$ ,

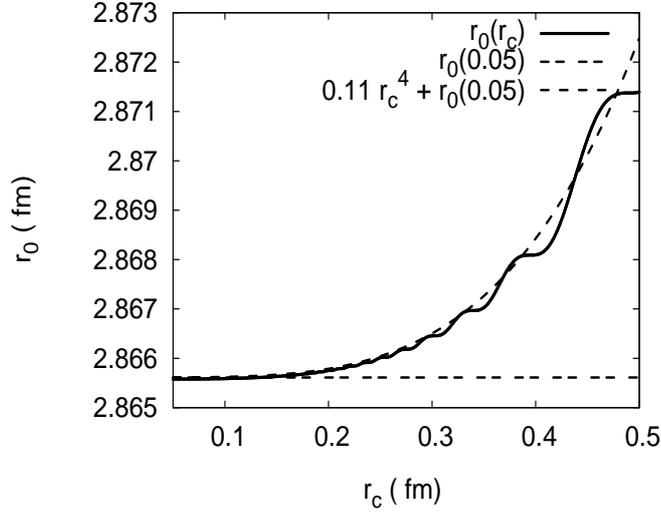


Figura 3.4: Convergencia del rango efectivo con respecto al radio de corte para el canal  $^1S_0$  de la interacción  $NN$  con potencial TPE a NNLO. A pesar de que el potencial es muy singular, a distancias inferiores a la longitud de onda Compton del pión se comporta como  $-1/r^6$ , la convergencia del rango efectivo es muy rápida, y escala como  $r_c^4$ , como puede verse de la curva en la que se compara  $r_0(0,05) + 0,11 r_c^4$  con  $r_0(r_c)$ .

que proporciona una estimación bastante buena del error de corte finito. En la figura dedicada a los defasajes, (3.5), se puede comprobar que en contra de lo que pudiera pensarse los potenciales singulares son más insensibles a los efectos de corte finito que los potenciales regulares: la convergencia de los defasajes para intercambio de un pión es mucho más lenta que para intercambio de dos piones.

### 3.6. Relación entre las Escalas del Potencial Nuclear: Dominio van der Waals

La interacción nuclear se puede comprender mejor si se tiene en cuenta que hay una separación de escalas entre la física de largas y cortas distancias. La física de largas distancias se describe mediante la expansión quiral de los potenciales de intercambio piónicos, mientras que la de cortas distancias se considera desconocida. Las exigencias de renormalizabilidad y ortogonalidad limitan considerablemente el efecto de la física de cortas distancias, que equivale a la condición de fijar el valor de algún observable.

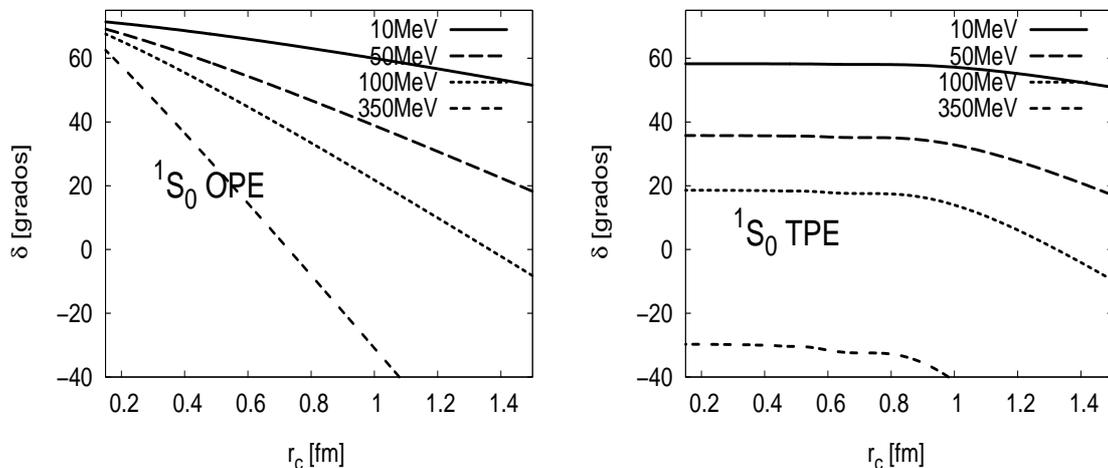


Figura 3.5: Convergencia de los defasajes respecto al radio de corte para el canal  $^1S_0$  en el caso del potencial OPE (panel izquierdo) y del potencial TPE (panel derecho). En el caso del potencial TPE la convergencia es mucho más rápida que en el caso del potencial OPE, a pesar de que el potencial TPE se comporta como  $-1/r^6$  a cortas distancias, mientras que el potencial OPE se comporta como  $-1/r$ .

Mientras que las escalas asociadas a la física de largas distancias intervienen de manera activa en la descripción del sistema, el proceso de renormalización elimina cualquier referencia explícita de las escalas de cortas distancias. La información sobre estas escalas es reemplazada por el observable que se elija para renormalizar, y se generan una serie de correlaciones de largas distancias entre éste y el resto de los observables considerados. En el caso de la dispersión NN el observable elegido es la longitud de dispersión, y las correlaciones correspondientes de largas distancias se han estudiado en la sección (3.3.3).

En la interacción nuclear de largas distancias, descrita por los potenciales quirales de intercambio de uno y dos piones, hay varias escalas involucradas, como la longitud de onda Compton del pión,  $1/m \sim 1,4$  fm o la escala van der Waals  $R_6$  asociada al potencial de intercambio de dos piones NNLO. En general para la discusión de las escalas nucleares nos vamos a centrar en los resultados que se obtienen con el potencial NNLO, ya que son los que mejor se comparan con los potenciales fenomenológicos.

El efecto de la escala  $1/m$ , la longitud de onda Compton del pión, puede estudiarse considerando el límite quiral del potencial. En este límite los potenciales quirales pueden

escribirse como

$$U_{NNLO} \rightarrow \frac{MC_5}{r^5} + \frac{MC_6}{r^6} \quad (3.78)$$

en donde

$$\begin{aligned} MC_5 &= \frac{M(1 + 10g_A^2 - 59g_A^4)}{256 \pi^3 f_\pi^4} \\ MC_6 &= \frac{3g_A^2(15g_A^2 - 4 + 24\bar{c}_3 - 8\bar{c}_4)}{128 \pi^2 f_\pi^4} \end{aligned} \quad (3.79)$$

En este límite no es posible calcular los observables de dispersión de baja energía como el rango efectivo o coeficientes superiores en la expansión de  $k \cot \delta$ , debido a que estos parámetros no están bien definidos para un potencial con una divergencia del tipo  $-1/r^5$ <sup>10</sup>.

En la figura (3.6) se muestran los defasajes para el potencial de intercambio de dos piones a NNLO quiral, y se los compara con los del potencial fenomenológico Nijmegen II y el potencial quiral a NNLO con la masa física del pión. Se puede ver que las diferencias entre  $m = 0$  y  $m = 138,03 \text{ MeV}$  son pequeñas, por lo que la escala asociada al pión es irrelevante en la descripción de la onda  $^1S_0$ .

La importancia relativa de las escalas van der Waals del potencial nuclear en el canal singlete pueden estudiarse considerando un potencial de interacción que sólo contenga la contribución van der Waals pura del potencial NNLO, esto es

$$U(r) = -\frac{R_6^4}{r^6} \quad (3.80)$$

en donde en el caso del potencial TPE NNLO se tiene que  $R_6 = |MC_6|^{1/4}$ . Para este potencial la correlación entre el rango efectivo y la longitud de dispersión es conocida y viene dada por la eq. (3.46). Las correlaciones generadas para los cuatro sets quirales considerados son

<sup>10</sup>Para un potencial  $-1/r^5$  la expansión de rango efectivo se escribe como

$$k \cot \delta = -\frac{1}{\alpha_0} + ck^2 \log k + \dots$$

por lo que el rango efectivo no está definido, y si uno intenta calcularlo mediante la fórmula integral (3.37) se obtiene que  $r_0$  diverge logarítmicamente para radios de integración grandes. En el caso de un potencial  $-1/r^6$  el rango efectivo sí está correctamente definido, ya que la expansión de rango efectivo se escribe en tal caso como

$$k \cot \delta = -\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{2} r_0 k^2 + ck^4 \log k + \dots$$

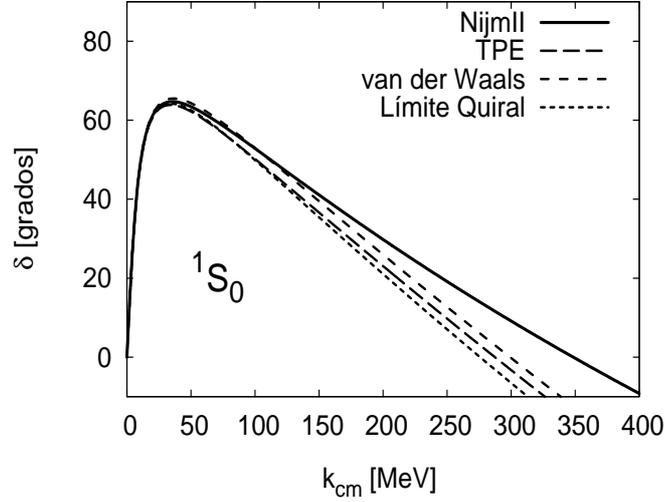


Figura 3.6: Comparación de defasajes en onda  $^1S_0$ . Se representan aquí los defasajes del potencial fenomenológico Nijmegen II, que son tratados como pseudodatos, y los defasajes que se obtienen al fijar la longitud de dispersión con el potencial TPE a NNLO, el límite quiral de este potencial y la componente van der Waals del límite quiral. En el límite quiral la masa del pión tiende a cero, y en el van der Waals se escoge tan sólo el término del límite quiral que se comportan como un potencial de van der Waals, es decir, como  $1/r^6$ . El hecho de que los defasajes para  $m = 138,03$  MeV (TPE) y  $m = 0$  (límite quiral) sean prácticamente idénticos indica que la escala de longitud asociada al pión,  $R_\pi = 1,4$  fm, es irrelevante en la descripción de la onda  $^1S_0$ . Por otro lado la componente van der Waals del límite quiral es la que más se parece a los defasajes del potencial fenomenológico Nijmegen II. La similitud entre van der Waals y el límite quiral indica que la escala asociada al potencial  $1/r^6$  es la escala dominante en la onda  $^1S_0$  de la interacción nucleón-nucleón.

entonces

$$\begin{aligned}
r_0 &= 2,3981 - \frac{3,9418}{\alpha_0} + \frac{3,2396}{\alpha_0^2} & (\text{Set I}) \\
r_0 &= 2,4919 - \frac{4,2562}{\alpha_0} + \frac{3,6349}{\alpha_0^2} & (\text{Set II}) \\
r_0 &= 2,2227 - \frac{3,8625}{\alpha_0} + \frac{2,5794}{\alpha_0^2} & (\text{Set III}) \\
r_0 &= 2,2910 - \frac{3,5975}{\alpha_0} + \frac{2,8246}{\alpha_0^2} & (\text{Set IV})
\end{aligned} \tag{3.81}$$

que corresponden a las escalas van der Waals  $R_6 = 1,7193, 1,7868, 1,5941, 1,643$  fm. Para la longitud de dispersion experimental  $\alpha_0 = -23,74$  fm, se obtienen los rangos efectivos  $r_0 = 2,5697, 2,6778, 2,2917, 2,4477$  fm, por lo que la correlación van der Waals para el potencial NNLO explica cerca del 80 – 90 % del rango efectivo teórico y experimental del canal singlete.

Sin embargo este dominio de la escala van der Waals quiral del 80 – 90 % es algo difícil de comprender desde el punto de vista de las interacciones efectivas. Resulta bastante extraño que la componente más singular del potencial, que también es la contribución de orden más alto (NNLO), sea la que domine el comportamiento de baja energía de la interacción NN, por lo que requiere una explicación adicional. La componente van der Waals quiral aparece en el potencial apantallada por un factor exponencial debida al intercambio de dos piones

$$U(r) = -\frac{R_6^4}{r^6} e^{-2mr} = -\frac{R_6^4}{r^6} e^{-r/R_{2\pi}} \quad (3.82)$$

en donde la escala de longitud asociada al intercambio de dos piones es  $R_{2\pi} = 1/2m \sim 0,7$  fm. Este apantallamiento tan grande hace poco probable que la escala van der Waals,  $R_6 \sim 1,6 - 1,7$  fm, vaya a poder observarse limpiamente. En concreto, considerando el apantallamiento piónico, se obtienen los rangos efectivos  $r_0 = 1,5993, 1,6452, 1,5119, 1,5462$  fm, es decir, en torno a un 60 % del rango efectivo que se obtiene con un van der Waals sin apantallar. Es decir, el dominio de la escala van der Waals  $R_6$  no se debe a que la interacción más singular o de orden más alto domine, situación que sería bastante incomoda en teorías efectivas, sino a que se produce debido a que la contribución que se pierde debido al apantallamiento piónico es similar a la que se obtiene al considerar todas las otras componentes del potencial que se han ignorado al aproximar con un van der Waals. Es probable que esta misma situación se dé en la irrelevancia de la escala asociada a la masa del pión.

Sin embargo, independientemente de cual sea su origen, el dominio de la escala van der Waals no sólo ocurre en la onda  $^1S_0$ , sino también en la  $^3S_1$  como se verá más adelante. Este hecho sugiere una conexión con el modelo de gota líquida: si la materia nuclear está dominada por el comportamiento de la interacción nuclear en onda s, ésta debe parecerse bastante a un líquido ordinario, en donde las interacciones entre las moléculas vienen dadas por fuerzas de van der Waals.

Por último, como curiosidad, cuando se considera únicamente la componente NNLO del potencial de intercambio de un pión se obtienen las correlaciones entre rango efectivo y

longitud de dispersión siguientes

$$\begin{aligned}
r_0 &= 2,1146 - \frac{2,6782}{\alpha_0} + \frac{1,2869}{\alpha_0^2} && \text{(Set I)} \\
r_0 &= 2,1798 - \frac{2,8345}{\alpha_0} + \frac{1,3935}{\alpha_0^2} && \text{(Set II)} \\
r_0 &= 1,9858 - \frac{2,3770}{\alpha_0} + \frac{1,0858}{\alpha_0^2} && \text{(Set III)} \\
r_0 &= 2,0330 - \frac{2,4820}{\alpha_0} + \frac{1,1524}{\alpha_0^2} && \text{(Set IV)} \tag{3.83}
\end{aligned}$$

con  $r_0 = 2,2297, 2,3017, 2,0878, 2,1396$  fm. Si hacemos lo mismo pero considerando únicamente la componente NLO del potencial TPE, se obtiene

$$r_0 = 1,5119 - \frac{1,5475}{\alpha_0} + \frac{0,6422}{\alpha_0^2} \quad \text{(NLO)} \tag{3.84}$$

con  $r_0 = 1,5782$  fm. En principio estas dos últimas correlaciones no añade ninguna conclusión nueva, aunque resultan interesantes desde el punto de vista de estudiar la importancia relativa de distintas partes del potencial.

### 3.7. Conclusiones

Para describir de manera independiente de modelo la dispersión NN en el canal singlete  $^1S_0$  con los potenciales de intercambio de uno y dos piones se necesita un parámetro libre, la longitud de dispersión. Este resultado se fundamenta en la suposición de que las funciones de onda son ortogonales y regulares en el origen, si bien esta última condición se cumple de manera inmediata en el caso de un potencial singular atractivo. Este tratamiento permite a su vez encontrar relaciones debidas al potencial de largas distancias entre los observables, como la sencilla correlación encontrada entre la longitud de dispersión y el rango efectivo.

Desde un punto de vista físico se observa un patrón de convergencia en los defasajes al considerar los potenciales OPE, TPE NLO y TPE NNLO, que indica la relevancia de la simetría quirral en la descripción del sistema NN. Por otra parte el tratamiento independiente de modelo propuesto en este capítulo permite separar los efectos debidos a diferentes componentes del potencial. De esta manera es posible comprobar la irrelevancia de la masa del pión a NNLO, que contradice el conocimiento establecido en teorías efectivas sobre la importancia de esta escala, o el dominio teóricamente inesperado de la escala van der Waals. Es igualmente sorprendente y notable que en ningún momento se invoca la existencia de un

core repulsivo a cortas distancias <sup>11</sup>.

Respecto a la relación con las interpretaciones tradicionales de las teorías efectivas en el sistema NN es interesante observar que la exigencia de ortogonalidad y regularidad nos fuerza a tomar un único parámetro libre en el singlete tanto a LO como a NLO y NNLO. En el conteo de Weinberg a LO hay un parámetro libre, mientras que a NLO y NNLO existen dos. Esto quiere decir por una parte que en el caso del potencial OPE el esquema de regularización aquí propuesto coincide con Weinberg, y por otra parte sugiere que en el caso de los potenciales TPE NLO y NNLO es posible eliminar un parámetro libre conservando la convergencia quiral  $LO \rightarrow NLO \rightarrow NNLO$ . Así pues el contratérmino adicional invocado por Weinberg parece eminentemente superfluo.

Respecto al proceso de regularización presentado éste puede resumirse en la idea de que mediante un único parámetro libre se obtiene una descripción efectiva e independiente de modelo de un sistema físico que a bajas energías pueda describirse mediante la ecuación de Schrödinger y un potencial de largo alcance local. Es importante señalar que en principio es posible fijar más de un parámetro, pero en tal caso se rompe la ortogonalidad del sistema. Un ejemplo de los resultados que se obtendrían en el canal singlete fijando el rango efectivo  $r_0$  y el parámetro de curvatura  $v_2$  puede consultarse en la referencia [57]. Sin embargo el punto de vista que se toma aquí es que es preferible mejorar la descripción de largas distancias del problema que añadir más coeficientes que parametrizen la física de cortas distancias. En este sentido nuestro punto de vista es más cercano en espíritu a lo que debiera ser una teoría efectiva, además de que se obtiene una mayor conformidad con principios generales de mecánica cuántica. Por otra parte los resultados relativos a la convergencia quiral  $LO \rightarrow NLO \rightarrow NNLO$  avalan nuestros resultados. No ocurre lo mismo en el caso de fijar más parámetros; en la anterior referencia [57] puede observarse que en el caso de que se fijen la longitud de dispersión  $\alpha_0$  y el rango efectivo  $r_0$  los resultados empeoran respecto a la expansión de rango efectivo.

Por último el resultado de que para un potencial repulsivo no se puede fijar ningún parámetro en caso de que queramos renormalizabilidad exacta, es decir, tomar el límite  $r_c \rightarrow 0$ , puede parecer extraño pero tiene una interpretación física sencilla. Si el potencial de largas distancias es fuertemente repulsivo, las partículas que conforman el sistema no se acercarán a distancias inferiores a la escala propia del potencial de largas distancias  $R_L$ . Por tanto el sistema será completamente insensible a efectos de distancias  $R_C$  menores que la escala de largas distancias,  $R_C \ll R_L$ ; las partículas nunca verán la física de cortas distancias.

---

<sup>11</sup>Recordemos que tradicionalmente la existencia de este core se deduce del cambio de signo del defasaje en la onda  $^1S_0$  a 250 MeV

## Capítulo 4

# El Deuterón con Potencial OPE

### 4.1. Introducción

Es un hecho conocido desde hace ya más de cincuenta años que el potencial de intercambio de un pión describe la parte de más largas distancias de la interacción nucleón-nucleón, hecho que sigue siendo cierto en el tratamiento quiral de dicha interacción. Cualquier potencial fenomenológico que describa la interacción nuclear contiene el potencial de intercambio de un pión (la cola piónica) para describir el comportamiento de más largo alcance. Por otra parte la naturaleza débilmente ligada del deuterón <sup>1</sup> sugiere que es posible una descripción independiente de modelo en términos de intercambio de un pión de la interacción nuclear o al menos del deuterón. En este sentido ya en los años sesenta Glendenning y Krammer [58] observaron correlaciones entre varios observables del deuterón generadas al truncar el potencial OPE en el radio  $R = 0,4915$  fm y suponiendo dentro un *hard core*. También Klarsfeld, Martorell y Sprung [59, 60] establecieron fuertes restricciones en el valor de los observables del deuterón integrando la función de onda del deuterón desde infinito hasta un radio de corte determinado. Por otra parte Ericson y Rosa-Clot [61, 62] hicieron una determinación precisa de la razón asintótica D/S suponiendo una correlación “OPE” entre las ondas s y d del deuterón y describiendo la onda s mediante potenciales realistas (véase también [63]). Friar *et al* [64] toman un factor de forma multipolar, mientras que Ballot *et al.* [65, 66] usan factores de forma monopoles para la parte central y tensorial del potencial OPE con el objeto de imitar el tamaño finito de los nucleones. En una línea similar Sprung *et al.* [67] usan un pozo cuadrado para modelar la interacción de cortas distancias en la componente central y un potencial nulo para la componente tensorial.

En todos estos casos se buscan correlaciones sobre los observables debidas a la parte de

---

<sup>1</sup>De hecho al ser el deuterón débilmente ligado, la separación media de los nucleones en él es de aproximadamente  $\sim 4$  fm, mayor que la longitud de onda Compton del pión  $\sim 1,4$  fm, distancia por encima de la cual los efectos piónicos decaen exponencialmente.

más largas distancias del potencial nuclear, intercambio de un pión, y de ahí la importancia de deducir estas correlaciones en teorías efectivas. Para encontrarlas se va a usar un procedimiento similar al del capítulo anterior (3), sólo que complicado por el hecho de que el deuterón es un estado acoplado de onda *s* y *d* debido a la acción de la fuerza tensorial.

En este capítulo se va a partir de condiciones muy generales como regularidad de la función de onda en el origen u ortogonalidad entre los estados de distintas energías, y se obtendrán correlaciones numéricas de largas distancias entre diferentes observables. Lo notable de nuestro análisis es demostrar que el límite  $r_c \rightarrow 0$  existe realmente, lo cual no tenía una explicación anteriormente. Los resultados de este capítulo están basados en la referencia [51].

## 4.2. Descripción del Estado Ligado

### 4.2.1. Ecuación de Schrödinger para el Deuterón

La ecuación de Schrödinger reducida se escribe para el deuterón como

$$-u'' + U_s(r)u + U_{sd}(r)w = -\gamma^2 u \quad (4.1)$$

$$-w'' + U_{sd}(r)u + \left[ U_d(r) + \frac{6}{r^2} \right] w = -\gamma^2 w \quad (4.2)$$

en donde  $\gamma = \sqrt{M_N B_d}$  es el número de onda del deuterón,  $B_d$  es la energía de ligadura del deuterón y  $M_N = 2\mu_{np} = 2M_n M_p / (M_n + M_p)$  es dos veces la masa reducida neutrón-protón ( $M_n$  y  $M_p$  son respectivamente la masa del neutrón y del protón).  $U_s$ ,  $U_{sd}$  y  $U_d$  representan las distintas componentes del potencial nuclear reducido. Para intercambio de un pión (OPE) estas componentes se escriben como

$$U_s = U_C \quad U_{sd} = 2\sqrt{2}U_T \quad U_d = U_C - 2U_T \quad (4.3)$$

$U_C$  y  $U_T$  son la parte central y tensorial del potencial OPE reducido ( $U = 2\mu V$ ), que vienen dadas por

$$U_C(r) = -\frac{mM_N g_A^2 e^{-mr}}{16\pi f_\pi^2 r} \quad (4.4)$$

$$U_T(r) = -\frac{m^2 M_N g_A^2 e^{-mr}}{16\pi f_\pi^2 r} \left( 1 + \frac{3}{mr} + \frac{3}{(mr)^2} \right) \quad (4.5)$$

en donde  $m$  es la masa del pión,  $g_A$  la constante de acoplamiento axial del nucleón y  $f_\pi$  la constante de decaimiento débil del pión. Se toman  $m = 138,03$  fm,  $f_\pi = 92,4$  fm y  $g_A = 1,29$ , equivalente mediante la relación de Goldberger-Treiman a tomar  $g_{\pi NN} = 13,087$ . Este

valor para  $g_{\pi NN}$  es compatible con el análisis de dispersión NN realizado por el grupo de Nijmegen [68]. En cualquier caso, tras la última determinación de  $g_{\pi NN}$  mediante la regla de suma GMO [69] también va a considerarse el valor  $g_{\pi NN} = 13,3158$ . Como se verá, esta diferencia de un 5% en el valor de  $g_{\pi NN}$  es la mayor fuente de incertidumbre teórica en los cálculos que siguen.

#### 4.2.2. Comportamiento Asintótico de las Soluciones

Para describir el deuterón es necesaria una solución de la ecuación de Schrödinger (4.1) que sea normalizable

$$\int_0^\infty [u(r)^2 + w(r)^2] dr = 1 \quad (4.6)$$

El cumplimiento de esta condición requiere que las funciones de onda sean regulares tanto en infinito como en el origen, lo que impone ciertas restricciones sobre el número de parámetros libres en la descripción del deuterón con el potencial de intercambio de un pión.

En infinito la función de onda del deuterón está sujeta a la condición de contorno asintótica

$$u(r) \rightarrow A_S e^{-\gamma r} \quad (4.7)$$

$$w(r) \rightarrow A_D e^{-\gamma r} \left( 1 + \frac{3}{\gamma r} + \frac{3}{(\gamma r)^2} \right) \quad (4.8)$$

que representa el comportamiento de la función de onda del deuterón cuando  $r \rightarrow \infty$  y en donde  $\gamma$  es el número de onda del deuterón, mientras que  $A_S$  y  $A_D$  son factores de normalización para las ondas  $S$  y  $D$ . El cociente  $\eta = A_D/A_S$  es conocido como la razón asintótica  $D/S$ . Lo normal es utilizar la razón asintótica  $D/S$  para expresar el comportamiento de  $w(r)$  en infinito, mediante la relación  $A_D = \eta A_S$ . Esto significa que son necesarios dos parámetros,  $\eta$  y  $\gamma$ , para describir la función de onda asintótica del deuterón en infinito <sup>2</sup>.

Para estudiar el comportamiento cerca del origen de las soluciones de la ecuación de Schrödinger para el deuterón, eq. (4.1), es conveniente definir la escala de longitud  $R$

$$R = \frac{3g_A^2 M}{32\pi f_\pi^2} \quad (4.9)$$

cuyo valor numérico es  $R = 1,078$  fm. Esta escala aparece en el comportamiento cerca del origen de la componente tensorial del potencial de intercambio de un pión

$$U_T \rightarrow -\frac{2R}{r^3} \quad (4.10)$$

---

<sup>2</sup>La constante de normalización  $A_S$  no es necesaria porque puede ser determinada posteriormente a partir de  $\eta$  y  $\gamma$  mediante la normalización de la función de onda a la unidad, eq. (4.6).

que es la componente más singular del potencial OPE. Teniendo en cuenta este comportamiento, la ecuación de Schrödinger para el deuterón puede escribirse cerca del origen como

$$-u'' - 4\sqrt{2}\frac{R}{r^3}w = 0 \quad (4.11)$$

$$-w'' - 4\sqrt{2}\frac{R}{r^3}u + 4\frac{R}{r^3}w = 0 \quad (4.12)$$

ecuaciones que pueden desacoplarse mediante la transformación

$$u_A = \sqrt{\frac{2}{3}}u + \frac{1}{\sqrt{3}}w \quad (4.13)$$

$$u_R = -\frac{1}{\sqrt{3}}u + \sqrt{\frac{2}{3}}w \quad (4.14)$$

que genera las siguientes ecuaciones para  $u_A$  y  $u_R$

$$-u_A'' - 4\frac{R}{r^3}u_A = 0 \quad (4.15)$$

$$-u_R'' + 8\frac{R}{r^3}u_R = 0 \quad (4.16)$$

Las soluciones cerca del origen de estas dos ecuaciones pueden obtenerse mediante la aproximación semiclásica, dando

$$u_A(r) \rightarrow \left(\frac{r}{R}\right)^{3/4} \left[ C_{1A}e^{-4i\sqrt{\frac{R}{r}}} + C_{2A}e^{4i\sqrt{\frac{R}{r}}} \right] \quad (4.17)$$

$$u_R(r) \rightarrow \left(\frac{r}{R}\right)^{3/4} \left[ C_{1R}e^{+4\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{r}}} + C_{2R}e^{-4\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{r}}} \right] \quad (4.18)$$

La solución del canal atractivo oscila indefinidamente con una amplitud cada vez menor en su camino al origen, mientras que la solución del canal repulsivo esta compuesta de una exponencial creciente (convergente) y otra decreciente (divergente). Las constantes  $C_{1R}$ ,  $C_{2R}$ ,  $C_{1A}$  y  $C_{2A}$  dependen de  $\gamma$ ,  $\eta$  y los parámetros del potencial de intercambio de un pión, debido a que la manera de construir la función de onda del deuterón es integrar la solución asintótica (4.7) desde infinito hasta el origen mediante la ecuación de Schrödinger para el deuterón, eq. (4.1).

Por otra parte si integramos directamente la solución asintótica (4.7) con los valores de  $\gamma$  y  $\eta$  físicos, se obtienen funciones de onda divergentes en el origen, como puede verse en la figura (4.2). Esto es debido a la exponencial divergente de la solución de cortas distancias. La

normalizabilidad de la función de onda del deuterón requiere que el coeficiente que acompaña a la exponencial divergente se anule

$$C_{1R}(\gamma, \eta) = 0 \quad (4.19)$$

lo que se traduce en que la razón asintótica  $\eta$  queda determinada por la energía de ligadura del deuterón, es decir, en que  $\eta = \eta(\gamma)$ . Esta relación significa que la descripción del deuterón mediante el potencial de intercambio de un pión depende de un único parámetro libre que es  $\gamma$ , el número de onda del deuterón. En tal caso se obtiene el valor  $\eta = 0,026333$  para la razón asintótica .

Sin embargo aún no hemos escrito las funciones de onda cerca del origen en su forma definitiva. El flujo de la función de onda del deuterón se define como

$$i J(r) = u'^* u - u^* u' + w'^* w - w^* w' \quad (4.20)$$

por lo que si se impone conservación de probabilidad cerca del origen, equivalente a  $dJ/dr = 0$ , se obtiene la siguiente relación

$$|C_{1A}|^2 - |C_{2A}|^2 = 2\sqrt{2}i (C_{1R}^* C_{2R} - C_{2R}^* C_{1R}) \quad (4.21)$$

En tal caso si por normalizabilidad tomamos  $C_{1R} = 0$ , entonces  $C_{2R}$  es un parámetro libre y se tiene que  $C_{1A} = C_A e^{i\varphi}$  y  $C_{2A} = C_A e^{-i\varphi}$ , con lo que cerca del origen las funciones de onda de los canales propios atractivo y repulsivo se escriben como

$$u_A(r) \rightarrow C_A(\gamma) \left(\frac{r}{R}\right)^{3/4} \sin \left[ 4\sqrt{\frac{R}{r}} + \varphi(\gamma) \right] \quad (4.22)$$

$$u_R(r) \rightarrow C_R(\gamma) \left(\frac{r}{R}\right)^{3/4} e^{-4\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{r}}} \quad (4.23)$$

Por lo tanto tenemos tres constantes  $C_{2R}(\gamma)$ ,  $C_A(\gamma)$  y  $\varphi(\gamma)$  que determinan por completo la solución de cortas distancias para una determinada energía de ligadura del deuterón.

### 4.2.3. Regularización de la Función de Onda

En principio la manera más directa de resolver el deuterón es tomar las funciones de onda asintóticas en infinito, eq. (4.7), que dependen de la energía de ligadura y de la razón asintótica  $\eta$ , e integrarlas con la ecuación de Schrödinger hasta que se comporten como las funciones de onda de cortas distancias, eq. (4.17). Entonces, si se impone la condición de regularidad en el origen, se determina  $\eta$ , y por consiguiente la función de onda del deuterón. En la práctica esto no es posible porque la determinación del valor del coeficiente de la

exponencial divergente no es fiable debido a errores de precisión numérica en las funciones de onda cerca del origen. La falta de precisión numérica impide integrar la ecuación de Schrödinger hasta distancias en las que el comportamiento semiclásico domine y obliga a usar un radio inferior de integración (es decir, un radio de corte).

En vez de esto, resulta más sencillo imponer cerca del origen ciertas condiciones de contorno que sean equivalentes a la elección de la solución regular, eq. (4.19), cuando se elimine el radio de corte  $r_c$ . Por ejemplo la condición  $u(r_c) - \sqrt{2}w(r_c) = 0$  equivale a la condición de que la función propia del canal repulsivo se anule <sup>3</sup>, y cuando  $r_c \rightarrow 0$  tal cosa sólo puede ocurrir si  $C_{1R} = 0$ . Por lo tanto esta condición de contorno es equivalente a la condición de regularidad en el origen para  $r_c \rightarrow 0^+$ .

Algunas condiciones de contorno posibles son

$$\begin{aligned}
u(r_c) &= 0 & \text{(CC1)} \\
u'(r_c) &= 0 & \text{(CC2)} \\
w(r_c) &= 0 & \text{(CC3)} \\
w'(r_c) &= 0 & \text{(CC4)} \\
u(r_c) - \sqrt{2}w(r_c) &= 0 & \text{(CC5)} \\
u'(r_c) - \sqrt{2}w'(r_c) &= 0 & \text{(CC6)}
\end{aligned}
\tag{4.24}$$

Todas estas condiciones predicen el mismo valor de la razón D/S,  $\eta = 0,026333$ . La ventaja de usar una u otra está en la convergencia respecto al radio de corte. Como puede verse en la figura (4.1), las condiciones más convergentes son CC5 y CC6.

Para determinar la razón  $\eta$  es conveniente utilizar el principio de superposición, por el cual, ignorando la normalización, descomponemos las funciones de onda del deuterón como

$$\begin{aligned}
u(r) &= u_S(r) + \eta u_D(r) \\
w(r) &= w_S(r) + \eta w_D(r)
\end{aligned}
\tag{4.25}$$

donde  $(u_S, w_S)$  y  $(u_D, w_D)$  son las soluciones que en infinito se comportan como

$$\begin{aligned}
u_S(r) &\rightarrow e^{-\gamma r} \\
w_S(r) &\rightarrow 0
\end{aligned}
\tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
u_D(r) &\rightarrow 0 \\
w_D(r) &\rightarrow e^{-\gamma r} \left( 1 + \frac{3}{\gamma r} + \frac{3}{(\gamma r)^2} \right)
\end{aligned}
\tag{4.27}$$

---

<sup>3</sup>Debido que  $u_R = u - \sqrt{2}w$ , eq. (4.13).

Es decir, corresponden a tomar  $A_S = 1$ ,  $A_D = 0$  y  $A_S = 0$ ,  $A_D = 1$  respectivamente en la condición de contorno asintótica (4.7). Mediante esta descomposición las condiciones de regularización CC1 – CC6 se reexpresan como condiciones algebraicas para  $\eta$ . Por ejemplo, en el caso de la condición  $u(r_c) = 0$  tenemos

$$u(r_c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta = -\frac{u_S(r_c)}{u_D(r_c)} \quad (4.28)$$

Una vez que se ha determinado la razón  $\eta$ , la función de onda del deuterón queda completamente determinada al incluir el factor de normalización  $A_S$

$$\begin{aligned} u(r) &= A_S (u_S + \eta u_D) \\ w(r) &= A_S (w_S + \eta w_D) \end{aligned} \quad (4.29)$$

en donde  $A_S$  se obtiene normalizando a la unidad la función de onda

$$A_S^2 \int_0^\infty [(u_S + \eta u_D)^2 + (w_S + \eta w_D)^2] dr = 1 \quad (4.30)$$

El valor que se obtiene es  $A_S = 0,8681(1) \text{ fm}^{-1/2}$ , en donde el error ha sido estimado variando el radio de corte entre 0,1 y 0,2 fm. El valor experimental es  $A_S = 0,8846(9) \text{ fm}^{-1/2}$ .

#### 4.2.4. Observables del Deuterón

Podemos determinar los valores de los observables del deuterón a partir de las funciones de onda regularizadas. Los observables que nos interesan son el radio de materia, el momento cuadrupolar, el radio inverso y la probabilidad de onda <sup>4</sup>. Para calcularlos usamos las fórmulas integrales siguientes

$$r_m^2 = \frac{1}{4} \langle r^2 \rangle = \frac{1}{4} \int_0^\infty r^2 (u(r)^2 + w(r)^2) dr \quad (4.31)$$

$$Q_d = \frac{1}{20} \int_0^\infty r^2 w(r) (2\sqrt{2}u(r) - w(r)) dr \quad (4.32)$$

$$\langle r^{-1} \rangle = \int_0^\infty \frac{u(r)^2 + w(r)^2}{r} dr \quad (4.33)$$

$$P_D = \int_0^\infty w(r)^2 dr \quad (4.34)$$

en donde hemos supuesto que las funciones de onda están normalizadas a la unidad. En el cálculo del momento cuadrupolar hemos ignorado las contribuciones debidas a corrientes

---

<sup>4</sup>Este último en realidad no es un observable.

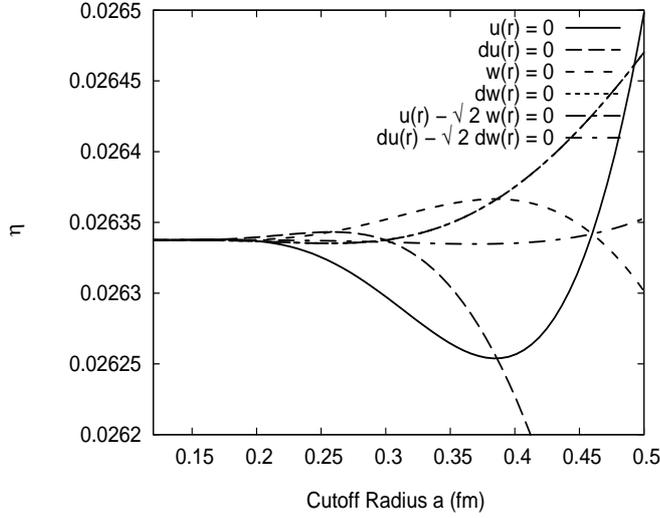


Figura 4.1: Condiciones de contorno usadas para regularizar la función de onda del deuterón, eq.(4.24). Las seis condiciones de contorno predicen el mismo valor para la razón asintótica  $D/S$  cuando  $r_c \rightarrow 0$ ,  $\eta = 0,026333$ . Como se puede distinguir la condición más convergente es CC6.

mesónicas. El radio inverso y la probabilidad de onda d son más sensibles a las cortas distancias que el momento cuadrupolar y el radio de materia; la mayor contribución a  $P_D$  y  $\langle r^{-1} \rangle$  ocurre a distancias en torno a 2 fm, mientras que para  $Q_d$  y  $r_m$  es en torno a 4 fm.

Los resultados están en la tabla (4.1). En general concuerdan bastante bien con los resultados experimentales, salvo para el momento cuadrupolar y la probabilidad de onda d. En el caso del momento cuadrupolar esta discrepancia se debe a ignorar las corrientes de intercambio mesónicas, cuya contribución es aproximadamente  $\Delta Q_d \sim 0,1 \text{ fm}^2$ , explicando la discrepancia entre el valor para el potencial de intercambio de un pión y el experimental. En el caso de la probabilidad de onda d la discrepancia es debida a que el valor citado como experimental se obtiene mediante el análisis del momento magnético del deuterón con funciones de onda relativistas [70].

Los errores han sido estimados variando el radio de corte en el intervalo  $r_c \sim 0,1 - 0,2 \text{ fm}$ . La magnitud de estos errores indica que los efectos de corte finito están bajo control, y son irrelevantes si se los compara con el cambio en el valor de los observables cuando se toma  $g_{\pi NN} = 13,316$  en vez de  $g_{\pi NN} = 13,087$ . Esta última es la mayor fuente de incertidumbre teórica en los resultados, y es comparable con la discrepancia respecto a los datos experimentales.

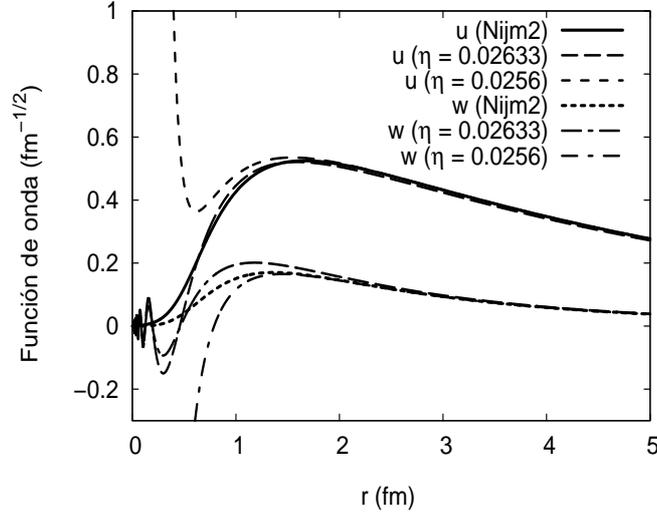


Figura 4.2: Funciones de onda  $u$  y  $w$  del deuterón. Se muestran las funciones de onda regularizadas para el potencial OPE, las funciones de onda en las que se ha tomado para la razón asintótica  $D/S$  su valor físico,  $\eta = 0,0256$ , y las funciones de onda del potencial fenomenológico de Nijmegen. Como se puede ver las funciones de onda regularizadas y las de Nijmegen son prácticamente idénticas hasta distancias del orden de  $1 - 2$  fm. Cuando se toma el valor físico de  $\eta$  las funciones de onda divergen cerca del origen, debido a que la solución que contiene la exponencial divergente domina.

### 4.3. Descripción de los Estados de Dispersión

#### 4.3.1. Ecuación de Schrödinger

Los estados de dispersión en el canal del deuterón quedan descritos por la ecuación de Schrödinger reducida

$$-u'' + U_s(r)u + U_{sd}(r)w = k^2u \quad (4.35)$$

$$-w'' + U_{sd}(r)u + \left[ U_d(r) + \frac{6}{r^2} \right] w = k^2w \quad (4.36)$$

en donde  $U_s$ ,  $U_{sd}$  y  $U_d$  representan el potencial de intercambio de un pión en el canal del deuterón, y vienen dados por las ecuaciones (4.3) y (4.4).

	$\gamma(\text{fm}^{-1})$	$\eta$	$A_S(\text{fm}^{-1/2})$	$r_m(\text{fm})$	$Q_d(\text{fm}^2)$	$P_D$	$\langle r^{-1} \rangle$
OPE(pert)	Input	0.051	0.7373	1.6429	0.4555	0 %	$\infty$
OPE	Input	0.02633	0.8681(1)	1.9351(5)	0.2762(1)	7.31(1) %	0.476(3)
OPE*	Input	0.02687	0.8718(2)	1.9429(6)	0.2826(2)	7.42(1) %	0.471(3)
NijmII	Input	0.02521	0.8845(8)	1.9675	0.2707	5.635 %	0.4502
Reid93	Input	0.02514	0.8845(8)	1.9686	0.2703	5.699 %	0.4515
Exp.	0.231605	0.0256(4)	0.8846(9)	1.9754(9)	0.2859(3)	5.67(4)	

Cuadro 4.1: Propiedades del deuterón para el potencial de intercambio de un pión. Se comparan los resultados obtenidos mediante la regularización de la función de onda del deuterón, OPE y OPE\*, con la teoría de perturbaciones, OPE(pert), y con los resultados de los potenciales fenomenológicos Nijmegen II y Reid 93. Usamos la relación no relativista  $\gamma = \sqrt{2\mu_{np}B_d}$  en donde  $B_d = 2,224575(9)$  MeV y  $\mu_{np} = 469,459$  MeV. Se toman  $m = 138,03$  MeV y  $R = 1,07764$  fm, que corresponde a  $g_{\pi NN} = 13,1083$ , ref. [68] excepto en la fila OPE\*, en la que se toma el valor  $g_{\pi NN} = 13,316$ , ref. [69]. Los errores han sido estimados variando el radio de corte en el intervalo  $r_c = 0,1 - 0,2$  fm.

### 4.3.2. Comportamiento Asintótico de las Soluciones

La ecuación de Schrödinger (4.35) tiene dos soluciones de dispersión linealmente independientes a las que denominaremos  $\alpha$  y  $\beta$ . Cuando  $r \rightarrow \infty$  las soluciones  $\alpha$  y  $\beta$  se comportan como

$$\begin{aligned} u_{k,\alpha}(r) &\rightarrow \hat{j}_0(kr) \cot \delta_1 - \hat{y}_0(kr) \\ w_{k,\alpha}(r) &\rightarrow \tan \epsilon [\hat{j}_2(kr) \cot \delta_1 - \hat{y}_2(kr)] \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} u_{k,\beta}(r) &\rightarrow -\tan \epsilon [\hat{j}_0(kr) \cot \delta_2 - \hat{y}_0(kr)] \\ w_{k,\beta}(r) &\rightarrow \hat{j}_2(kr) \cot \delta_2 - \hat{y}_2(kr) \end{aligned} \quad (4.38)$$

en donde  $\hat{j}_l(x) = x j_l(x)$  e  $\hat{y}_l(x) = x y_l(x)$  son las funciones de Bessel esféricas reducidas,  $\delta_1$  y  $\delta_2$  los defasajes propios, y  $\epsilon$  el ángulo de mezcla.

En esta normalización para las soluciones de dispersión asintóticas resulta evidente que cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  las soluciones  $\alpha$  y  $\beta$  se desacoplan y se comportan como soluciones de dispersión en onda s y d respectivamente. Sin embargo tiene el inconveniente de que el límite de baja energía de la solución  $\beta$  es de orden  $k^2$ . Para obtener un límite de baja energía de orden  $k^0$  se puede normalizar la solución  $\beta$  como

$$\begin{aligned} u_{k,\beta}(r) &\rightarrow -\cot \delta_1 [\hat{j}_0(kr) \cos \delta_2 - \hat{y}_0(kr) \sin \delta_2] \\ w_{k,\beta}(r) &\rightarrow \cot \epsilon \cot \delta_1 [\hat{j}_2(kr) \cos \delta_2 - \hat{y}_2(kr) \sin \delta_2] \end{aligned} \quad (4.39)$$

Esta segunda normalización es la que usaremos para los estados de energía cero.

Cuando  $r \rightarrow 0$ , la ecuación de Schrödinger para los estados de dispersión, eq. (4.35), se desacopla en un canal propio atractivo y otro repulsivo. En tal caso las soluciones de dispersión  $\alpha$  y  $\beta$  pueden describirse cerca del origen en función de las respectivas soluciones propias atractivas y repulsivas, dadas por

$$u_{A,i}(r) \rightarrow C_{A,i}(k) \left(\frac{r}{R}\right)^{3/4} \sin \left[ 4\sqrt{\frac{R}{r}} + \varphi_i(k) \right] \quad (4.40)$$

$$u_{R,i}(r) \rightarrow C_{R,i}(k) \left(\frac{r}{R}\right)^{3/4} e^{-4\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{r}}} \quad (4.41)$$

en donde  $i = \alpha, \beta$ . La relación entre las funciones de onda propias y las funciones de onda de dispersión está determinada por la misma transformación que diagonaliza la ecuación de Schrödinger cerca del origen para el estado ligado, eq. (4.13). Nótese que se ha tomado la solución propia repulsiva regular.

Para un potencial regular la ortogonalidad de las funciones de onda para estados de diferente energía es una propiedad de las soluciones de la ecuación de Schrödinger, y está asegurada. Sin embargo, cuando el potencial contiene alguna componente singular atractiva, como ocurre con el potencial de intercambio de un pión para el deuterón, la ortogonalidad hay que imponerla y es necesaria para poder determinar por completo los estados de dispersión neutrón-protón con potencial OPE. La condición de ortogonalidad entre los estados de dispersión  $\alpha$  y  $\beta$  y el estado ligado, al que denotaremos con el subíndice  $\gamma$ , se escribe como

$$\int_0^\infty dr \left[ u_\gamma(r) u_{k,i}(r) + w_\gamma(r) w_{k,i}(r) \right] = 0 \quad \text{para } i = \alpha, \beta \quad (4.42)$$

Resulta útil reescribir mediante una identidad de Lagrange <sup>5</sup> esta condición como

$$\left[ u'_\gamma u_{k,i} - u_\gamma u'_{k,i} + w'_\gamma w_{k,i} - w_\gamma w'_{k,i} \right] \Big|_0^\infty = 0 \quad i = \alpha, \beta \quad (4.43)$$

Si aplicamos la nueva condición de ortogonalidad a las soluciones cerca del origen dadas por eq.(4.22) y eq.(4.40), se tiene que

$$C_{A,i}(k) C_A(\gamma) \sin [\varphi(\gamma) - \varphi_i(k)] = 0 \quad i = \alpha, \beta \quad (4.44)$$

---

<sup>5</sup>La identidad de Lagrange usada implica que

$$(\gamma^2 + k^2) \int_0^\infty dr \left[ u_\gamma(r) u_{k,i}(r) + w_\gamma(r) w_{k,i}(r) \right] = \left[ u'_\gamma u_{k,i} - u_\gamma u'_{k,i} + w'_\gamma w_{k,i} - w_\gamma w'_{k,i} \right] \Big|_0^\infty$$

para  $i = \alpha, \beta$ .

lo que implica

$$\varphi(\gamma) = \varphi_\alpha(k) = \varphi_\beta(k) \quad (4.45)$$

Por lo tanto las fases de cortas distancias de las soluciones de dispersión están determinadas por la fase de cortas distancias del estado ligado, o equivalentemente, por las propiedades del deuterón. En particular esto significa que los defasajes quedan completamente determinados por la energía de ligadura del deuterón. Otra consecuencia notable es que la fase semiclásica es independiente de la energía.

### 4.3.3. Regularización

La determinación de las soluciones de dispersión se realiza mediante las relaciones de ortogonalidad (4.43), y mediante la condición de regularidad de las funciones de onda en el origen, supuesta implícitamente en (4.40). Debido a que a distancias muy pequeñas los errores de precisión numérica dominan, ni la ortogonalidad ni la regularidad pueden imponerse directamente en el origen,  $r = 0^+$ , sino en un radio de corte finito  $r_c$ . En tal caso la condición de ortogonalidad (4.43) se escribe como

$$\begin{aligned} & u'_\gamma(r_c)u_{k,i}(r_c) + w'_\gamma(r_c)w_{k,i}(r_c) \\ = & u_\gamma(r_c)u'_{k,i}(r_c) + w_\gamma(r_c)w'_{k,i}(r_c) \quad \text{para } i = \alpha, \beta \end{aligned} \quad (4.46)$$

Para el caso de la condición de regularidad hay que elegir alguna de las distintas regularizaciones posibles, eq. (4.24). Tomaremos la misma condición de contorno que para el estado ligado. Si por ejemplo hemos elegido la condición de contorno CC6 para el ligado,  $u'_\gamma(r_c) = \sqrt{2}w'_\gamma(r_c)$ , entonces también la tomaremos para los estados de dispersión

$$u'_{k,i}(r_c) = \sqrt{2}w'_{k,i}(r_c) \quad i = \alpha, \beta \quad (4.47)$$

Además, por conveniencia, en vez de usar la condición de ortogonalidad anterior, eq. (4.46), usamos la condición resultante de combinar ortogonalidad con la condición de regularización. En el caso de la CC6 obtenemos

$$\frac{w'_{k,i}(r_c)}{\sqrt{2}u_{k,i}(r_c) + w_{k,i}(r_c)} = \frac{w'_\gamma(r_c)}{\sqrt{2}u_\gamma(r_c) + w_\gamma(r_c)} \quad i = \alpha, \beta \quad (4.48)$$

Para las otras condiciones de contorno, eq. (4.24), se obtienen expresiones análogas a esta.

Son estas dos últimas condiciones, eqs. (4.47) y (4.48), las que usaremos para determinar los estados de dispersión  $\alpha$  y  $\beta$ . Estas dos condiciones se pueden reexpresar como

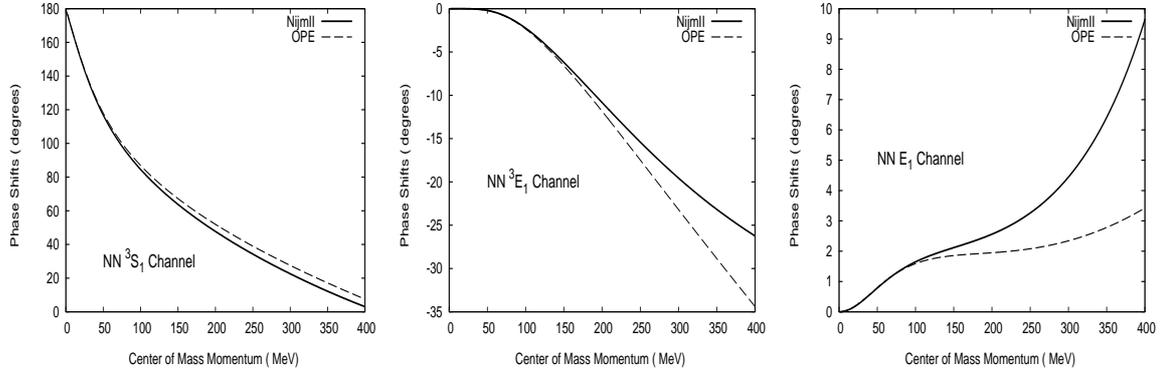


Figura 4.3: Defasajes propios para los potenciales de intercambio de un pión y Nijmegen en el canal del deuterón. Las funciones de onda de dispersión regularizadas son ortogonales a las funciones de onda del deuterón.

ecuaciones algebraicas para funciones trigonométricas de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  y  $\epsilon$ , mediante el principio de superposición. Si construimos funciones de onda que asintóticamente se comporten como

$$u_{k,j}(r) \rightarrow \hat{j}_0(kr) \quad (4.49)$$

$$u_{k,y}(r) \rightarrow \hat{y}_0(kr) \quad (4.50)$$

$$w_{k,j}(r) \rightarrow \hat{j}_2(kr) \quad (4.51)$$

$$w_{k,y}(r) \rightarrow \hat{y}_2(kr) \quad (4.52)$$

entonces las soluciones de dispersión  $\alpha$  y  $\beta$  se reescriben como

$$\begin{aligned} u_{k,\alpha}(r) &= u_{k,j}(r) \cot \delta_1 - u_{k,y}(r) \\ w_{k,\alpha}(r) &= \tan \epsilon [w_{k,j}(r) \cot \delta_1 - w_{k,y}(r)] \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} u_{k,\beta}(r) &= -\tan \epsilon [u_{k,j}(r) \cot \delta_2 - u_{k,y}(r)] \\ w_{k,\beta}(r) &= w_{k,j}(r) \cot \delta_2 - w_{k,y}(r) \end{aligned} \quad (4.54)$$

con lo que las condiciones (4.47) y (4.48) se reducen a cuatro ecuaciones algebraicas, tres linealmente independientes, para determinar  $\cot \delta_1$ ,  $\cot \delta_2$  y  $\tan \epsilon$ .

#### 4.3.4. Parámetros de Baja Energía

En el límite de baja energía,  $k \rightarrow 0$ , los defasajes propios se comportan como

$$\begin{aligned}\delta_1 &\rightarrow -\alpha_0 k \\ \delta_2 &\rightarrow -\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_{02}^2}{\alpha_0}\right) k^5 \\ \epsilon &\rightarrow \frac{\alpha_{02}}{\alpha_0} k^2\end{aligned}\tag{4.55}$$

en donde  $\alpha_0$ ,  $\alpha_{02}$  y  $\alpha_2$  son las longitudes de dispersión<sup>6</sup> del canal triplete  ${}^3S_1 - {}^3D_1$ . Estas longitudes de dispersión representan el comportamiento natural de baja energía de los defasajes en la parametrización de Stapp, Ypsilantis y Metropolis<sup>7</sup>.

Si se toman respectivamente las normalizaciones (4.37) y (4.39) para los estados de dispersión  $\alpha$  y  $\beta$ , entonces el comportamiento asintótico de energía cero de las soluciones de dispersión  $\alpha$  y  $\beta$  es

$$\begin{aligned}u_{0,\alpha}(r) &\rightarrow 1 - \frac{r}{\alpha_0} \\ w_{0,\alpha}(r) &\rightarrow \frac{3\alpha_{02}}{\alpha_0 r^2}\end{aligned}\tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}u_{0,\beta}(r) &\rightarrow \frac{r}{\alpha_0} \\ w_{0,\beta}(r) &\rightarrow \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_{02}} - \frac{\alpha_{02}}{\alpha_0}\right) \frac{3}{r^2} - \frac{r^3}{15\alpha_{02}}\end{aligned}\tag{4.57}$$

Las longitudes de dispersión pueden obtenerse de las condiciones de regularidad y ortogonalidad con el estado ligado, eqs. (4.47) y (4.48). De nuevo, si utilizamos el principio de superposición, estas condiciones pueden reducirse a ecuaciones algebraicas para  $\alpha_0$ ,  $\alpha_{02}$  y  $\alpha_2$ .

---

<sup>6</sup>La llamaremos longitudes de dispersión por analogía al canal singlete  ${}^1S_0$ , aunque solamente  $\alpha_0$  tenga dimensiones de longitud.

<sup>7</sup>En esta parametrización se tiene que  $\bar{\delta}_1 \rightarrow -\alpha_0 k$ ,  $\bar{\delta}_2 \rightarrow -\alpha_2 k^5$ , y  $\bar{\epsilon} \rightarrow -\alpha_{02} k^3$ .

Para tal fin descomponemos las soluciones de energía cero según

$$\begin{aligned} u_{0,\alpha}(r) &= u_1(r) - \frac{1}{\alpha_0}u_2(r) + 3\frac{\alpha_{02}}{\alpha_0}u_3(r) \\ w_{0,\alpha}(r) &= w_1(r) - \frac{1}{\alpha_0}w_2(r) + 3\frac{\alpha_{02}}{\alpha_0}w_3(r) \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} u_{0,\beta}(r) &= \frac{1}{\alpha_0}u_2(r) + 3\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_{02}} - \frac{\alpha_{02}}{\alpha_0}\right)u_3(r) - \frac{1}{15\alpha_{02}}u_4(r) \\ w_{0,\beta}(r) &= \frac{1}{\alpha_0}w_2(r) + 3\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_{02}} - \frac{\alpha_{02}}{\alpha_0}\right)w_3(r) - \frac{1}{15\alpha_{02}}w_4(r) \end{aligned} \quad (4.59)$$

en donde las soluciones 1, 2, 3 y 4 sólo dependen de los parámetros del potencial de intercambio de un pión, y se comportan asintóticamente como

$$\begin{aligned} u_1(r) &\rightarrow 1 \\ w_1(r) &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} u_2(r) &\rightarrow r \\ w_2(r) &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} u_3(r) &\rightarrow 0 \\ w_3(r) &\rightarrow \frac{1}{r^2} \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} u_4(r) &\rightarrow 0 \\ w_4(r) &\rightarrow r^3 \end{aligned} \quad (4.63)$$

con lo que nuevamente se obtienen cuatro ecuaciones algebraicas, tres linealmente independientes, con las que determinar  $\alpha_0$ ,  $\alpha_{02}$  y  $\alpha_2$ . Estas ecuaciones también pueden ser consideradas como correlaciones del potencial OPE sobre los observables de dispersión del deuterón. Numéricamente si se considera la condición de regularidad en el origen para las soluciones  $\alpha$  y  $\beta$  se obtienen las correlaciones

$$\begin{aligned} \alpha_{02} &= 0,963571370240 \alpha_0 - 3,467616391389 \\ \alpha_2 &= 3,467616391389 \frac{\alpha_{02}}{\alpha_0} + 5,080264230656 \end{aligned} \quad (4.64)$$

Mientras, las relaciones de ortogonalidad de las soluciones de energía cero con el estado ligado

	$\gamma(\text{fm}^{-1})$	$\alpha_0(\text{fm})$	$\alpha_{02}(\text{fm}^3)$	$\alpha_2(\text{fm}^5)$	$r_0(\text{fm})$
OPE(CD)	Input	4.3177	0	0	0
OPE(pert)	Input	4.6089	2.5365	0	0.4831
OPE	Input	5.335(1)	1.673(1)	6.693(1)	1.638(1)
OPE*	Input	5.353(1)	1.715(1)	6.951(1)	1.663(1)
NijmII	Input	5.418	1.647	6.505	1.753
Reid93	Input	5.422	1.645	6.453	1.755
Exp.	0.231605	5.419(7)	-	-	1.753(8)

Cuadro 4.2: Observables de dispersión en el canal del deuterón para el potencial de intercambio de un pión. Se comparan los resultados obtenidos mediante la regularización de las funciones de onda de energía cero para el potencial de intercambio de un pión, OPE y OPE\*, con los resultados que se obtienen en la aproximación de cortas distancias, OPE(CD), y en teoría de perturbaciones, OPE(pert). Usamos la relación no relativista  $\gamma = \sqrt{2\mu_{np}B_d}$  en donde  $B_d = 2,224575(9)$  MeV y  $\mu_{np} = 469,459$  MeV. Se toman  $m = 138,03$  MeV y  $R = 1,07764$  fm, que corresponde a  $g_{\pi NN} = 13,1083$ , ref. [68] excepto en la fila OPE\*, en la que se toma el valor  $g_{\pi NN} = 13,316$ , ref. [69]. Los errores han sido estimados variando el radio de corte en el intervalo  $r_c = 0,1 - 0,2$  fm.

generan este otro par de correlaciones

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 1,037805911852 \alpha_{02} + 3,5987124446758 & (\alpha) \\ \alpha_{02} &= 0,288382561043 \alpha_0 \alpha_2 - 1,465059639612 \alpha_0 & (\beta)\end{aligned}\quad (4.65)$$

Las longitudes de dispersión resultantes de resolver tres de estas cuatro ecuaciones se presentan en la tabla (4.2). El número de cifras significativas proporcionadas es necesario para reproducir los resultados de la tabla.

Por último, una vez determinadas las longitudes de dispersión el rango efectivo se obtiene mediante la fórmula integral

$$r_0 = 2 \int_0^\infty \left[ \left(1 - \frac{r}{\alpha_0}\right)^2 - u_{0,\alpha}(r)^2 - w_{0,\alpha}(r)^2 \right] dr \quad (4.66)$$

El valor que se obtiene es  $r_0 = 1,638(1)$  fm (vease la tabla (4.2)), en donde el error corresponde a variar el radio de corte en el rango  $0,1 - 0,2$  fm. Este valor debe compararse con el experimental,  $r_0 = 1,753(8)$  fm.

#### 4.4. Correlaciones OPE y Límite de Acoplamiento Débil

La descripción del deuterón en términos del potencial de intercambio de un pión requiere la energía de ligadura del deuterón (u otro observable) como un parámetro adicional de la teoría necesario para determinar el comportamiento de cortas distancias de la función de onda. A partir del número de onda del deuterón y de los parámetros del potencial de intercambio de un pión pueden predecirse los observables del deuterón, lo que permite estudiar la dependencia de estos observables en función de la energía de ligadura del deuterón.

En la figura (4.4) puede verse la dependencia de los observables del deuterón en función del número de onda  $\gamma$ . Se puede observar que el comportamiento de la razón asintótica  $\eta$  es lineal para números de onda del orden del valor físico, mientras que en el límite  $\gamma \rightarrow 0$  se comporta cuadráticamente. Este comportamiento cuadrático puede entenderse considerando el límite de acoplamiento débil del deuterón. En este límite la extensión de la función de onda del deuterón es mucho mayor que la de los efectos piónicos, por lo que éstos pueden considerarse física de cortas distancias. La mayor parte de la función de onda se comporta según el comportamiento asintótico de grandes distancias descrito en la eq. (4.7), y para que ésta sea normalizable en la región en la que dejan de actuar los intercambios piónicos,  $r \gg 1/m$ , es necesario que la siguiente integral sea finita cuando  $\gamma \rightarrow 0$

$$\int_{1/m}^{\infty} [u(r)^2 + \eta^2 w(r)^2] dr \rightarrow 3m^3 \frac{\eta^2}{\gamma^4} + O(m^2 \frac{\eta^2}{\gamma^3}) \quad (4.67)$$

en donde las funciones de onda vienen dadas por

$$u(r) = e^{-\gamma r} \quad \text{y} \quad w(r) = e^{-\gamma r} \left(1 + \frac{3}{\gamma r} + \frac{3}{(\gamma r)^2}\right) \quad (4.68)$$

y el límite inferior de integración se ha tomado como  $1/m$  por simplicidad. El comportamiento asintótico anterior (4.68) en realidad no es válido hasta distancias del orden de 2 – 3 veces la longitud de onda Compton del pión. Sin embargo esto tan sólo cambiaría el coeficiente geométrico que acompaña al término  $m^3 \eta^2 / \gamma^4$  de la integral anterior <sup>8</sup>, por lo que en cualquier caso el resultado es el mismo: la razón asintótica  $\eta$  debe comportarse cuadráticamente en el número de onda del deuterón en el regimen de acoplamiento débil. En concreto, se encuentra numéricamente el siguiente comportamiento para la razón asintótica  $\eta$

$$\eta^{\text{OPE}} = 0,9638\gamma^2 - 3,46864\gamma^3 + O(\gamma^4) \quad (4.69)$$

Una consecuencia del comportamiento  $\eta \propto \gamma^2$  en el límite  $\gamma \rightarrow 0$  es que en este límite los observables del deuterón van a estar dominados por el comportamiento de onda s. En

<sup>8</sup>La aparición de una potencia de la masa del pión indica efectos piónicos, por lo que el cálculo del coeficiente que acompaña a  $\gamma^2$  tiene que hacerse numéricamente. Para otros observables es posible encontrar correlaciones de acoplamiento débil independientes de la física piónica.

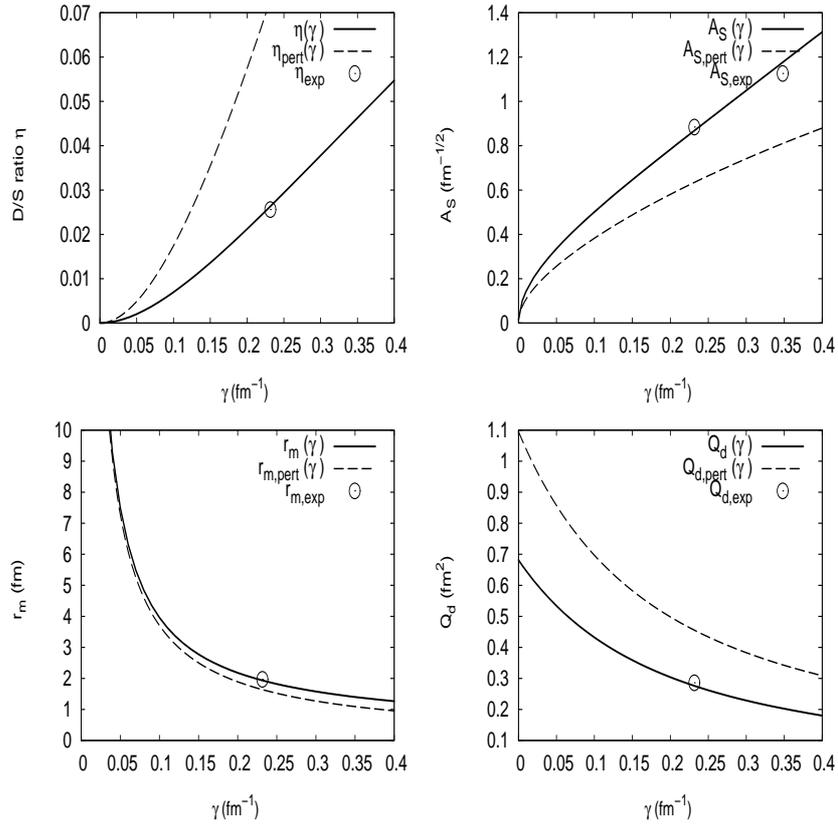


Figura 4.4: Dependencia de los observables del deuterón en función del número de onda  $\gamma$ . Se muestran la razón asintótica  $D/S$   $\eta$ , panel superior izquierdo, el factor de normalización  $A_S$ , panel superior derecho, el radio de materia  $r_m$ , panel inferior izquierdo, y el momento cuadrupolar  $Q_d$ , panel inferior derecho.

concreto es fácil comprobar usando argumentos similares a los utilizados para explicar el comportamiento cuadrático de  $\eta$  que en el límite de acoplamiento débil  $A_S$  y  $r_m$  se comportan como

$$\frac{A_S}{\sqrt{2\gamma}} = 1 + O(\gamma) \quad (4.70)$$

$$\sqrt{8}\gamma r_m = 1 + O(\gamma) \quad (4.71)$$

Estas expresiones pueden compararse con los resultados numéricos para el potencial de intercambio de un pión

$$\frac{A_S^{\text{OPE}}}{\sqrt{2\gamma}} = 1 + 1,2455\gamma - 0,4705\gamma^2 + O(\gamma^3) \quad (4.72)$$

$$\sqrt{8}\gamma r_m^{\text{OPE}} = 1 + 1,2455\gamma - 0,4705\gamma^2 + O(\gamma^3) \quad (4.73)$$

Es curioso observar que los coeficientes de ambas expansiones en el número de onda son idénticas hasta orden  $\gamma^3$ , lo que muestra una correlación notable entre estas dos cantidades. Para los valores experimentales se tiene que  $A_S/\sqrt{2\gamma} = 1,29974$  y  $\sqrt{8}\gamma r_m = 1,29404$ , lo que confirma la idea anterior. Por lo tanto se tiene la siguiente correlación de acoplamiento débil entre  $A_S$  y  $r_m$

$$\frac{A_S}{4\gamma^{3/2}r_m} = 1 + O(\gamma^3) \quad (4.74)$$

en el panel izquierdo de la figura (4.5) se muestra esta correlación calculada con el potencial OPE. Para esta correlación la desviación experimental respecto al límite  $\gamma \rightarrow 0$  es de tan sólo un 0,44 %.

Para el momento cuadrupolar en principio se podría suponer que en el límite de acoplamiento débil se anula debido a la enorme supresión de la onda d respecto a la onda s ( $\eta \propto \gamma^2$ ). Sin embargo éste no es el caso. Mediante un argumento similar al usado para  $\eta$ , el momento cuadrupolar puede escribirse como

$$\begin{aligned} Q_d &= \frac{A_S^2}{20} \int_{1/m}^{\infty} r^2 \eta w(r) (2\sqrt{2}u(r) - \eta w(r)) dr \\ &= \frac{A_S^2}{20\gamma^3} \int_{\gamma/m}^{\infty} \rho^2 \eta w(\rho) (2\sqrt{2}u(\rho) - \eta w(\rho)) dr \\ &= \frac{A_S^2}{\gamma^3} F_{Q_d}(\gamma/m, \eta) \end{aligned} \quad (4.75)$$

en donde la función  $F_{Q_d}(x, \eta)$  viene dada por

$$F_{Q_d}(x, \eta) = \frac{\eta (4\sqrt{2}x(5+x(4+x)) - (36+x(37+2x(7+x))))}{80e^{2x}x} \quad (4.76)$$

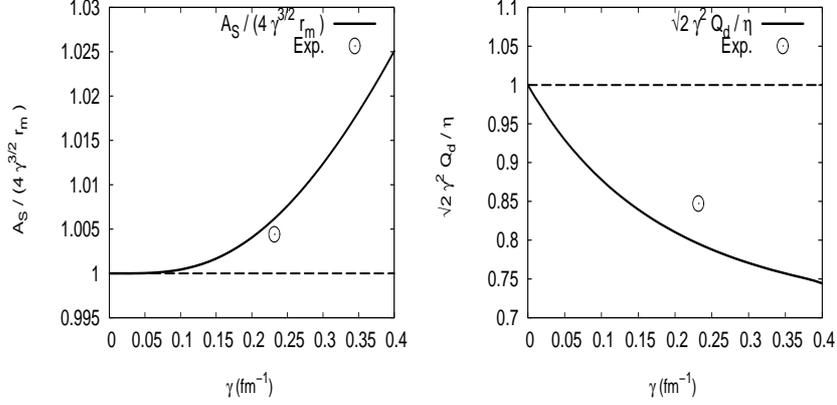


Figura 4.5: Correlaciones de acoplamiento débil entre observables del deuterón. En el panel izquierdo se muestra la correlación  $A_S/(4\gamma^{3/2}r_m)$  y en el panel derecho  $\sqrt{2}\gamma^2 Q_d/\eta$ . Ambas correlaciones valen 1 en el límite de acoplamiento débil.

Si se tiene en cuenta que  $x = \gamma/m = O(\gamma)$ ,  $A_S^2 = O(\gamma)$  y  $\eta = O(\gamma^2)$  y se expande en potencias de  $\gamma$ , entonces se obtiene la siguiente correlación de acoplamiento débil para el momento cuadrupolar

$$\frac{A_S^2}{2} \frac{\sqrt{2}\gamma Q_d}{\eta} = \frac{\sqrt{2}\gamma^2 Q_d}{\eta} = 1 + O(\gamma) \quad (4.77)$$

Por otra parte numéricamente se encuentra para el momento cuadrupolar

$$Q_d^{\text{OPE}} = 0,6815 - 3,5437\gamma + O(\gamma^2) \quad (4.78)$$

lo que confirma la correlación de acoplamiento débil, ya que  $\eta/\sqrt{2}\gamma^2 \rightarrow 0,6815 \text{ fm}^2$ . En el panel derecho de la figura (4.5) se puede ver el valor de esta correlación según el número de onda. Para los valores experimentales la desviación respecto a esta correlación entre  $Q_d$  y  $\eta$  es de un 15 %.

El análisis de acoplamiento débil para el momento cuadrupolar puede ser extendido a los otros observables considerados anteriormente, dando

$$\frac{1}{A_S^2} = \frac{1}{\gamma} F_{A_S}(\gamma/m, \eta) \quad (4.79)$$

$$r_m^2 = \frac{A_S^2}{\gamma^3} F_{r_m}(\gamma/m, \eta) \quad (4.80)$$

$$P_D = \frac{A_S^2}{\gamma} F_{P_D}(\gamma/m, \eta) \quad (4.81)$$

en donde

$$F_{A_S}(x, \eta) = \frac{6\eta^2 + 12x\eta^2 + 6x^2\eta^2 + x^3(1 + \eta^2)}{2e^{2x}x^3} \quad (4.82)$$

$$F_{r_m}(x, \eta) = \frac{x + 36\eta^2 + 37x\eta^2 + 2x^3(1 + \eta^2) + 2x^2(1 + 7\eta^2)}{16e^{2x}x} \quad (4.83)$$

$$F_{P_d}(x, \eta) = \frac{(6 + 12x + 6x^2 + x^3)\eta^2}{2e^{2x}x^3} \quad (4.84)$$

expandiendo en potencias de  $\gamma$  se reproduce el comportamiento ya obtenido anteriormente para  $A_S$  y  $r_m$ . En el caso de la probabilidad de onda  $d$  se obtiene que  $P_d(\gamma) \rightarrow O(\gamma)$ .

En la figura (4.4) se comparan los observables OPE exactos en función del número de onda con los observables perturbativos. Los cálculos perturbativos a primer orden generan las siguientes correlaciones de acoplamiento débil

$$\begin{aligned} \eta_{\text{pert}} &= 1,5497\gamma^2 - 4,15479\gamma^3 + \mathcal{O}(\gamma^4, R^2) \\ \frac{A_{S,\text{pert}}}{\sqrt{2}\gamma} &= 1 - 0,7184\gamma - 2,7394\gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^3, R^2) \\ \sqrt{8}\gamma r_{m,\text{pert}} &= 1 + 0,71843\gamma - 2,7394\gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^3, R^2) \\ Q_{\text{pert}} &= 1,09587 - 5,87576\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2, R^2) \end{aligned} \quad (4.85)$$

Esta expansión perturbativa puede compararse con los resultados no perturbativos, que aunque ya han aparecido anteriormente los agrupamos a continuación para poder compararlos mejor

$$\begin{aligned} \eta^{\text{OPE}} &= 0,9638\gamma^2 - 3,46864\gamma^3 + \mathcal{O}(\gamma^4) \\ \frac{A_S^{\text{OPE}}}{\sqrt{2}\gamma} &= 1 + 1,2455\gamma - 0,4705\gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^3) \\ \sqrt{8}\gamma r_m^{\text{OPE}} &= 1 + 1,2455\gamma - 0,4705\gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^3) \\ Q_d^{\text{OPE}} &= 0,6815 - 3,5437\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) \end{aligned} \quad (4.86)$$

#### 4.4.1. Parámetros de Baja Energía

La discusión anterior se puede extender fácilmente al caso de los observables de dispersión de baja energía, como las longitudes de dispersión. Éstas últimas se obtienen mediante ortogonalidad con el estado ligado

$$\int_0^\infty dr \left[ u_\gamma(r)u_{0,\alpha}(r) + w_\gamma(r)w_{0,\alpha}(r) \right] = 0 \quad (4.87)$$

En el límite  $\gamma \rightarrow 0$  se obtiene la siguiente correlación para la longitud de dispersión  $\alpha_0$

$$\gamma \alpha_0 = 1 + O(\gamma) \quad (4.88)$$

Expandiendo al siguiente orden la relación de ortogonalidad se obtiene que  $\alpha_{02}$  tiene un comportamiento similar,  $\alpha_{02} = O(1/\gamma)$ , aunque en este caso el coeficiente se tiene que determinar numéricamente. El mismo resultado se obtiene para  $\alpha_2$  considerando la ortogonalidad entre el deuterón y el estado de dispersión  $\beta$ . Los cálculos numéricos dan la siguiente expansión en el número de onda

$$\begin{aligned} \gamma \alpha_0 &= 1 + 1,2455 \gamma + O(\gamma^2) \\ \gamma \alpha_{02} &= 0,9636 - 2,2704 \gamma + O(\gamma^2) \\ \gamma \alpha_2 &= 0,9285 + 2,8926 \gamma + O(\gamma^2) \end{aligned} \quad (4.89)$$

en la que se ha incluido también el primer coeficiente no trivial de la expansión de  $\alpha_0$ . Se puede observar que el coeficiente de orden  $O(\gamma^0)$  de la expansión de  $\gamma \alpha_{02}$  cumple la correlación de ortogonalidad de cortas distancias mostrada en la ecuación (4.64). En la figura (4.6) se muestra la dependencia numérica para el potencial OPE de los observables de dispersión respecto al número de onda  $\gamma$

Para el rango efectivo el cálculo es numérico y se basa en la expresión integral (4.66). Se obtiene

$$r_0 = 2,489 - 5,592 \gamma + O(\gamma^2) \quad (4.90)$$

Se puede ver que en el límite de acoplamiento débil el rango efectivo es similar al del canal singlete ( $r_{0,s} = 2,77(5)$  fm). Este resultado es esperable si se considera que el canal singlete se encuentra en una situación parecida a la del límite de acoplamiento débil, salvo que en vez de un estado ligado se tiene un estado virtual. El número de onda de dicho estado virtual es aproximadamente  $\gamma \sim -1/\alpha_0 = 0,042 \text{ fm}^{-1}$ .

Los resultados de dispersión en el límite de acoplamiento débil de nuevo pueden compararse con el cálculo perturbativo

$$\begin{aligned} \gamma \alpha_{0,\text{pert}} &= 1 + 0,7184 \gamma - 8,2167 \gamma^2 + O(\gamma^3, R^2) \\ \gamma \alpha_{02,\text{pert}} &= 1,549 - 4,153 \gamma + O(\gamma^2, R^2) \\ r_{0,\text{pert}} &= 1,4369 - 5,4789 \gamma + 5,8759 \gamma^2 + O(\gamma^3, R^2) \end{aligned} \quad (4.91)$$

Es decir, en el límite de acoplamiento débil el cálculo perturbativo sólo funciona bien para  $\alpha_0$ , aunque esto se debe a la existencia de la correlación de acoplamiento débil  $\gamma \alpha_0 \rightarrow 1$ , y en ningún caso a que la longitud de dispersión se comporte perturbativamente.

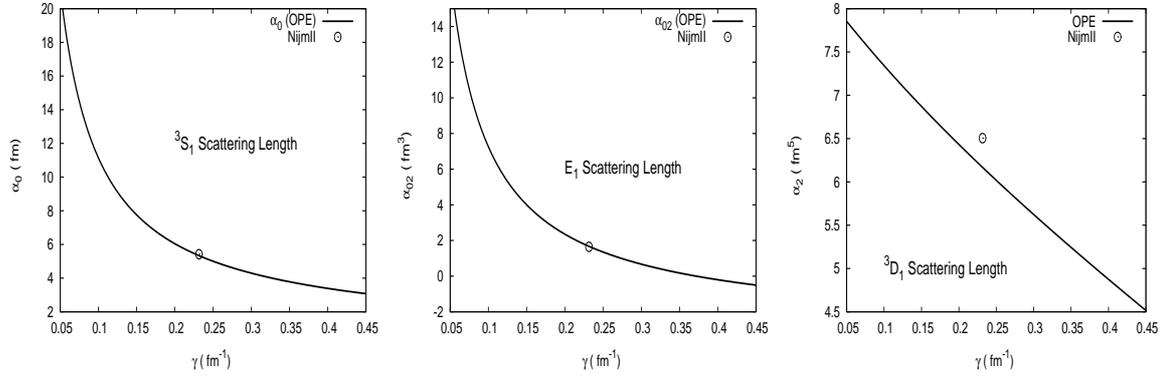


Figura 4.6: Dependencia de las longitudes de dispersión del canal del deuterón con respecto al número de onda  $\gamma$ .

## 4.5. Dependencia en la Masa del Pión

La descripción quiral de la interacción nuclear permite considerar la dependencia de los observables nucleares en función de la masa del pión. Podría calcularse por ejemplo la energía de ligadura del deuterón en el límite quiral. El interés de este tipo de cálculos no es sólo académico, sino que puede servir para conectar con las simulaciones de QCD en el retículo<sup>9</sup>.

Sin embargo, para poder predecir los observables nucleares en función de la masa del pión es necesaria normalmente la suposición de que la física de cortas distancias no depende de la masa del pión. En principio esto no es necesariamente cierto. Aunque el comportamiento de cortas distancias del potencial OPE no depende explícitamente de la masa del pión, las constantes  $C_A$ ,  $C_R$  y  $\varphi$  que describen el comportamiento a cortas distancias de la función de onda del deuterón sí dependen de  $m$ , aunque no se conozca cómo. La suposición de independencia de  $C_A$ ,  $C_R$  y  $\varphi$  respecto a  $m$  es equivalente a integrar hacia el origen con la masa física del pión, y luego integrar hacia infinito con otra masa del pión.

### 4.5.1. Dependencia Explícita en la Masa del Pión

Para calcular la dependencia de la energía de ligadura respecto a la masa del pión vamos a suponer que a un cambio infinitesimal en la masa del pión,  $m \rightarrow m + \Delta m$ , corresponden un cambio infinitesimal en el número de onda del deuterón,  $\gamma \rightarrow \gamma + \Delta\gamma$ , y en la matriz del potencial reducido,  $U(r) \rightarrow U(r) + \Delta U(r)$ . La expresión que describe el cambio de la energía

<sup>9</sup>Aunque por el momento no hay simulaciones de la interacción nuclear en el retículo para masas del pión del orden de la física.

de ligadura con la masa del pión es entonces

$$-\frac{\partial \gamma^2}{\partial m} = \langle \psi_m | \frac{\partial U}{\partial m} | \psi_m \rangle + \left[ u' \frac{\partial u}{\partial m} - u \frac{\partial u'}{\partial m} - w' \frac{\partial w}{\partial m} - w \frac{\partial w'}{\partial m} \right] \Big|_0^\infty \quad (4.92)$$

Esta expresión se obtiene mediante una identidad de Lagrange entre las ecuaciones de Schrödinger para masa del pión  $m$  y  $m + \Delta m$ , ignorando términos de orden  $(\Delta m)^2$ , y en donde la función de onda del deuterón está normalizada a la unidad.

La expresión anterior puede ser simplificada teniendo en cuenta por una parte que la derivada respecto a la masa del pión elimina la barrera centrifuga  $6/r^2$  correspondiente a la onda d, por lo que entonces es posible diagonalizar la expresión anterior mediante el cambio de base (4.13), y por otra parte el comportamiento semiclásico a cortas distancias de la función de onda del deuterón, eq.(4.22). Entonces la expresión resultante es

$$-\frac{\partial \gamma^2}{\partial m} = \int_0^\infty \left[ u_A(r)^2 \frac{\partial U_A}{\partial m} + u_R(r)^2 \frac{\partial U_R}{\partial m} \right] dr + C_A^2 \frac{2}{R} \frac{d\varphi}{dm} \quad (4.93)$$

Sin embargo esta expresión aún no tiene en cuenta la suposición de que la física de cortas distancias es independiente de la masa del pión, que es equivalente a la condición de que la fase semiclásica permanezca constante, es decir

$$\frac{d}{dm} \varphi(\gamma, m) = \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{dm} + \frac{\partial \varphi}{\partial m} = 0 \quad (4.94)$$

por lo que en tal caso la variación de la energía de ligadura respecto a la masa del pión viene dada por

$$-\frac{\partial \gamma^2}{\partial m} = \int_0^\infty \left[ u_A(r)^2 \frac{\partial U_A}{\partial m} + u_R(r)^2 \frac{\partial U_R}{\partial m} \right] dr \quad (4.95)$$

Aunque esta expresión es similar a una cuádrica, no es posible deducir el signo de  $\partial \gamma^2 / \partial m$  a partir de ella por lo que tendrá que ser determinado numéricamente,

La condición de independencia de la física de cortas distancias respecto de la masa del pión, eq.(4.94), puede expresarse de manera sencilla cuando se regulariza la función de onda mediante una condición de contorno en el radio de corte  $r_c$ . Por ejemplo, tomando la condición de contorno CC6, eq.(4.24), se obtiene

$$\frac{d}{dm} \left[ \frac{w'(r_c)}{\sqrt{2} u(r_c) + w(r_c)} \right] = 0 \quad (4.96)$$

equivalente a la condición (4.94). En tal caso para calcular la energía de ligadura para una determinada masa del pión en primer lugar se calcula la cantidad entre corchetes de esta

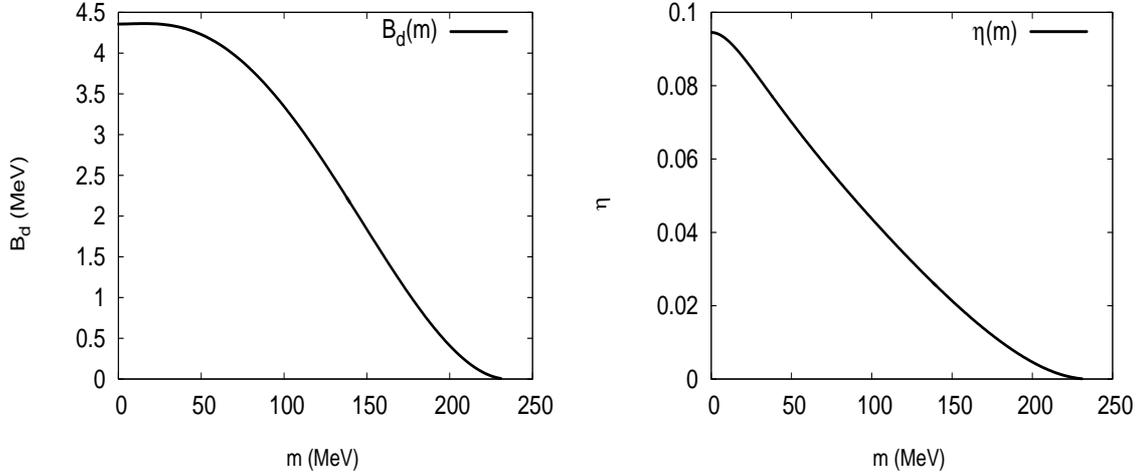


Figura 4.7: Dependencia de la energía de ligadura del deuterón en función de la masa del pión (panel izquierdo) y de la razón asintótica  $\eta$  (panel derecho). Este cálculo se basa en la suposición de que la física de cortas distancias no depende de la masa del pión.

expresión para la masa física del pión y luego se busca una energía de ligadura del deuterón que dé esta misma cantidad para la masa del pión considerada.

La predicción que mediante el procedimiento explícito se obtiene para la energía de ligadura del deuterón en el límite quiral es  $B_d(0) = 4,2 \text{ MeV}$ . Las propiedades del deuterón en este límite pueden verse en la tabla (4.3). La dependencia de  $B_d$  en  $m$  puede verse en la figura (4.7). Esta predicción en el límite quiral es similar a la de la ref. [47], en la que se obtiene  $B_d(0) = 4,1 \text{ fm}$ , aparte de una dependencia  $B_d(m)$  prácticamente idéntica a la de la figura (4.7). Se puede observar que el deuterón deja de estar ligado para masas del pión superiores a 220 MeV. Este límite superior es compatible con los resultados de las referencias [47, 71].

#### 4.5.2. Dependencia Implícita en la Masa del Pión

El cálculo anterior para determinar la dependencia de los observables se basaba por una parte en la suposición de que la física de cortas distancias no depende de la masa del pión y por otra parte en que las constantes físicas como  $M_N$  o  $f_\pi$  tampoco dependen de  $m$ . Es decir, el cálculo ignoraba cualquier dependencia no explícita en la masa del pión.

La razón de ignorar la dependencia en  $m$  de ciertas constantes físicas está en que no se conoce con exactitud como varían. Un valor de compromiso basado en la referencia [71]

	$\gamma(\text{fm}^{-1})$	$\eta$	$A_S(\text{fm}^{-1/2})$	$r_d(\text{fm})$	$Q_d(\text{fm}^2)$	$P_D$	$\alpha_0$
$m = 138,03 \text{ MeV}$	Input	0.02633	0.8681(1)	1.9351(5)	0.2762(1)	7.88(1) %	5.335(1)
$m = 0$ (explícito)	0.3240(1)	0.09452	0.8444(1)	1.550(1)	0.3006(3)	10.96(2) %	-
$m = 0$ (implícito)	0.61(10)	0.15(2)	0.48(7)	0.98(10)	0.15(3)	15(1) %	-

Cuadro 4.3: Propiedades del deuterón para el potencial OPE en el límite quirral ( $m = 0$ ). En el cálculo explícito no se tiene en cuenta la dependencia de  $R$  respecto a la masa del pión y se toma  $R = 1,078 \text{ fm}$ . En el implícito se considera la dependencia de  $R$  en  $m$  y se toma  $R_0 = 1,06(2) R$  en el límite quirral.

para esta variación es tomar  $R_0 = 1,06(2) R$  en el límite quirral ( $m = 0$ ). En este caso numéricamente se tiene

$$B_d(0) = 15(5) \text{ MeV}$$

un valor similar al del análisis de la referencia anterior, [71], en el que se obtiene  $B_d(0) = 9,6(3) \text{ MeV}$ , pero que está en desacuerdo con las referencias [47, 72], en las que el cálculo implícito indica que el deuterón no está ligado para  $m < 90 \text{ MeV}$ . Las propiedades del deuterón en este límite quirral pueden verse en la tabla (4.3).

## 4.6. Expansión de Cortas Distancias

La determinación de la función de onda del deuterón con el potencial de intercambio de un pión requiere la regularidad de la función de onda a cortas distancias. Considerando el comportamiento semiclásico de la función de onda del deuterón a cortas distancias, eq. (4.17), la condición de regularidad es equivalente a exigir que el coeficiente que multiplica a la solución irregular se anule, es decir

$$C_{1R}(\gamma, \eta) = 0 \tag{4.97}$$

Sin embargo la determinación de la razón asintótica  $D/S$  mediante este método no resulta práctico, ya que la función de onda no presenta el comportamiento semiclásico descrito en la ecuación (4.17) hasta distancias demasiado pequeñas para poder comparar con ninguna solución numérica. Igualmente tampoco puede determinarse la fase semiclásica  $\varphi(\gamma)$  que aparece en la solución de cortas distancias, eq. (4.22).

Aunque esta limitación no acarrea ningún problema para determinar las funciones de onda del deuterón gracias a los procedimientos de regularización, la posibilidad de calcular el coeficiente de la solución exponencial regular  $C_{2R}$  y la fase semiclásica  $\varphi(\gamma)$  resulta interesante, aparte de la ventaja que supondría disponer de una expansión analítica de la función de onda de cortas distancias que fuese válida a distancias en las que se pudiera comparar

con la función de onda numérica. Para tal fin vamos a desarrollar una expansión de cortas distancias que proporcione una aproximación precisa a la función de onda del deuterón hasta distancias del orden de 1 fm, que será similar en ciertos aspectos a la aproximación semiclásica.

En el límite  $r \rightarrow 0$  las soluciones a la ecuación de Schrödinger (4.1) se pueden escribir como una expansión que toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} u(r) &= u_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{a_1} e^{a_0 \sqrt{\frac{R}{r}}} f(r) \\ w(r) &= w_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{a_2} e^{a_0 \sqrt{\frac{R}{r}}} g(r) \end{aligned} \quad (4.98)$$

en donde

$$\begin{aligned} f(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{R}\right)^{n/2} \\ g(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{r}{R}\right)^{n/2} \end{aligned} \quad (4.99)$$

considerando la ecuación de Schrödinger (4.1) y el comportamiento del potencial de intercambio de un pión a cortas distancias, se tiene en el orden más bajo de la expansión que

$$\begin{aligned} u_0 a_0^2 + 16\sqrt{2}w_0 &= 0 \\ 16\sqrt{2}u_0 + (a_0^2 - 16)w_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.100)$$

ecuaciones que tienen las siguientes cuatro soluciones no triviales

$$(1A) \quad a_0 = -4i, \quad w_0 = \frac{u_0}{\sqrt{2}} \quad (4.101)$$

$$(2A) \quad a_0 = +4i, \quad w_0 = \frac{u_0}{\sqrt{2}} \quad (4.102)$$

$$(1R) \quad a_0 = +4\sqrt{2}, \quad w_0 = -\sqrt{2}u_0 \quad (4.103)$$

$$(2R) \quad a_0 = -4\sqrt{2}, \quad w_0 = -\sqrt{2}u_0 \quad (4.104)$$

en donde las dos primeras soluciones corresponden a las soluciones oscilantes del canal propio atractivo, y las dos segundas a las soluciones exponenciales del canal propio repulsivo. Resolviendo el siguiente orden se obtiene que

$$a_1 = a_2 = 3/4 \quad (4.105)$$

para cualquiera de las cuatro soluciones en el orden más bajo de (4.100)<sup>10</sup>. La solución general se escribe como combinación lineal de las cuatro soluciones linealmente independientes de orden cero

$$u(r) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{r}{R}\right)^{3/4} \left[ -C_{1R}f_{1R}(r)e^{+4\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{r}}} - C_{2R}f_{2R}(r)e^{-4\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{r}}} + \sqrt{2}C_{1A}f_{1A}(r)e^{-4i\sqrt{\frac{R}{r}}} + \sqrt{2}C_{2A}f_{2A}(r)e^{4i\sqrt{\frac{R}{r}}} \right] \quad (4.106)$$

$$w(r) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{r}{R}\right)^{3/4} \left[ \sqrt{2}C_{1R}g_{1R}(r)e^{+4\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{r}}} + \sqrt{2}C_{2R}g_{2R}(r)e^{-4\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{r}}} + C_{1A}g_{1A}(r)e^{-4i\sqrt{\frac{R}{r}}} + C_{2A}g_{2A}(r)e^{4i\sqrt{\frac{R}{r}}} \right] \quad (4.107)$$

Esta expansión converge bastante rápido para distancias del orden  $\sim 0,6 - 0,9$  fm, más que suficiente para comparar con las soluciones numéricas válidas hasta  $r \sim 0,1$  fm. Si exigimos la conservación de probabilidad en el origen, se tiene que  $C_{1A} = C_{2A}^*$ , por lo que es conveniente definir los coeficientes  $\bar{C}_{1A} = (C_{1A} + C_{2A})/2$  y  $\bar{C}_{2A} = i(C_{1A} - C_{2A})/2$ . En el apéndice (C) puede verse la expansión de cortas distancias hasta octavo orden.

Comparando las soluciones numéricas ( $u, w$ ) y sus derivadas con la expansión pueden determinarse  $\bar{C}_{1A}$ ,  $\bar{C}_{2A}$ ,  $C_{1R}$ ,  $C_{2R}$  y  $\eta$ . En tal caso, comparando las soluciones en  $0,7 < r < 0,9$  fm, y exigiendo  $C_{1R} = 0$  para determinar  $\eta$  se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{C}_{1A} &= 0,1327(3) \\ \bar{C}_{2A} &= 0,2277(5) \\ C_{2R} &= -0,47(1) \\ \eta &= 0,0263333(1) \end{aligned} \quad (4.108)$$

Por otra parte, si se determina la función de onda mediante una condición de regularización, y luego se compara con la expansión de cortas distancias, entonces  $\eta = 0,0263332$ , y los coeficientes valen

$$\begin{aligned} \bar{C}_{1A} &= 0,1327(3) \\ \bar{C}_{2A} &= 0,2277(5) \\ |C_{1R}| &< 10^{-7} \\ C_{2R} &= -0,47(1) \end{aligned} \quad (4.109)$$

---

<sup>10</sup>Una característica curiosa de esta expansión de cortas distancias es que para determinar la solución a un orden determinado es necesario calcular los coeficientes al siguiente orden.

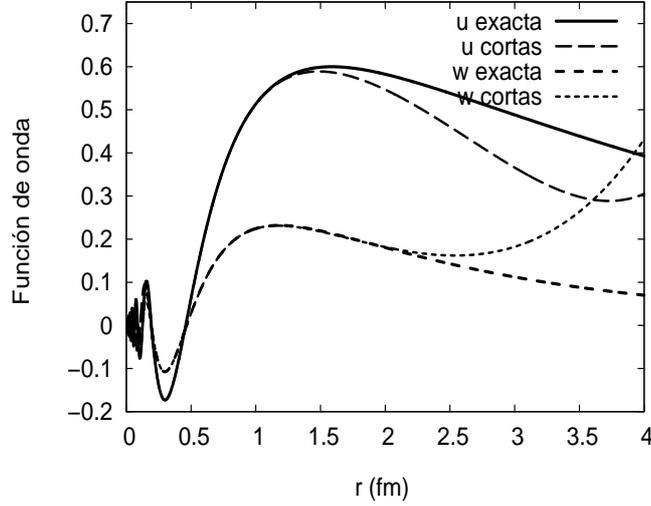


Figura 4.8: Funciones de onda  $u$  y  $w$  del deuterón. Se muestran las funciones de onda regularizadas para el potencial OPE, etiquetadas como “exactas”, y las correspondientes a la expansión de cortas distancias, etiquetadas como “cortas”. Los parámetros de la expansión de cortas distancias se han determinado comparando las funciones de onda en  $r = 0,8$  fm. Las funciones de onda de cortas distancias se solapan con las exactas hasta distancias en torno a los 2 fm. Ambas funciones de onda se han normalizado tomando  $A_S = 1$ .

en donde el error en ambos cálculos es el correspondiente a variar en el rango  $0,7 < r < 0,9$  fm la distancia en donde se comparan las soluciones. También se comprueba que la expansión de cortas distancias y los métodos de regularización empleados producen resultados compatibles.

Las funciones de onda exactas y las determinadas con la expansión de cortas distancias hasta octavo orden se comparan en la figura (4.8), en donde la determinación de los coeficientes  $\bar{C}_{1A}$ ,  $\bar{C}_{2A}$ ,  $C_{1R}$  y  $C_{2R}$  se ha hecho en  $r = 0,8$  fm.

Por último el valor de la fase semiclásica se obtiene a partir del valor de  $\bar{C}_{1A}$  y  $\bar{C}_{2A}$  mediante la relación

$$\varphi = -\text{atan} \frac{\bar{C}_{2A}}{\bar{C}_{1A}} = -59,7(1)^\circ \quad (4.110)$$

El resultado para la fase de cortas distancias es sorprendentemente similar a  $-\pi/3$ .

## 4.7. Conclusiones

La descripción renormalizada del deuterón mediante el potencial de intercambio de un pión se basa en la regularidad y ortogonalidad de las funciones de onda y requiere un único parámetro libre, la energía de ligadura del deuterón, mediante el cual el resto de los observables quedan determinados. La descripción resultante es sorprendentemente buena teniendo en cuenta la simplicidad y sencillez del tratamiento, y probablemente se debe al hecho de que el deuterón es un estado débilmente ligado en el que la separación media entre los nucleones, 4,2 fm, es mayor que el alcance del potencial de intercambio de un pión, 1,4 fm, si bien ya se comentaba en la introducción este hecho como motivación para una descripción efectiva e independiente de modelo del deuterón. Por otra parte este éxito fenomenológico confirma la validez del método de regularización elegido.

Además es posible calcular la fase semiclásica de cortas distancias, cuyo valor, similar a  $-\pi/3$ , resulta intrigante, así como el coeficiente de la exponencial creciente  $C_{2R}$ , eq. (4.109). Es posible una expansión de cortas distancias de la función de onda, similar a la aproximación semiclásica, que complementada con una expansión perturbativa de largas distancias permitiría una descripción portable de las funciones de onda OPE del deuterón.

Se puede estudiar el límite quirral del deuterón, obteniéndose en el caso implícito  $B_d \sim 15$  MeV, proporcionando un resultado similar a la energía de ligadura por nucleón en materia nuclear  $B/A \sim 8$  MeV. En este sentido el deuterón quirral es más “natural” que el real. Por otro lado este resultado es intuitivamente fácil de interpretar si se tiene en cuenta que para los potenciales quirales normalmente el comportamiento de cortas distancias y el límite quirral del potencial coinciden. Dado que la separación media de los nucleones en los núcleos pesados es algo inferior a  $\sim 2$  fm, la mitad que en el deuterón, es esperable que el límite quirral sea importante. Este resultado a su vez tiene conexión con la idea de las fuerzas de van der Waals quirales discutidas en los capítulos (2) y (5).

También se estudia la dependencia de los observables del deuterón respecto a la energía de ligadura del deuterón, lo que permite afirmar que en algunos observables como la longitud de dispersión  $\alpha_0$  o el radio de materia  $r_m$  se está muy cerca del régimen de acoplamiento débil. Otro resultado interesante es comprobar que el momento cuadrupolar del deuterón no se anula en el límite  $B_d = 0$ .

## Capítulo 5

# El Deuterón con Potencial TPE

### 5.1. Introducción

La teoría quiral de perturbaciones proporciona una base teórica firme para la descripción de los procesos hadrónicos a partir de las simetrías de baja energía de QCD. En el caso de la interacción NN esta teoría proporciona una expansión de largas distancias para el potencial nuclear que puede escribirse esquemáticamente como [20, 24]

$$U(r) = \frac{Mm^3}{f^2}W_{\text{LO}}(mr, g) + \frac{Mm^5}{f^4}W_{\text{NLO}}(mr, g, \bar{d}_{18}) + \frac{m^6}{f^4}W_{\text{NNLO}}(mr, g, \bar{c}_1, \bar{c}_3, \bar{c}_4) + \dots \quad (5.1)$$

con  $W(x)$  funciones adimensionales conocidas, finitas en todas partes salvo el origen, en donde muestran divergencias de tipo potencial  $1/r^n$ . Este potencial queda definido por completo si se especifican la masa del pión  $m$ , la constante de acoplamiento débil del pión  $f$ , la constante de acoplamiento axial del pión  $g$ , la masa del nucleón  $M$ , la discrepancia de Goldberger-Treimann  $\bar{d}_{18}$  y tres constantes de baja energía adicionales  $\bar{c}_1 = c_1M$ ,  $\bar{c}_3 = c_3M$  y  $\bar{c}_4 = c_4M$  a las que llamaremos acoplamientos quirales y que pueden determinarse mediante el estudio del proceso de dispersión pión-nucleón a bajas energías.

Para poder determinar las restricciones que la simetría quiral impone en la interacción NN se aplicarán las técnicas de regularización desarrolladas en capítulos anteriores, aunque en este caso aplicadas al potencial quiral de intercambio de dos piones en el canal del deuterón. La importancia teórica de dichos cálculos es grande, ya que como se ha discutido anteriormente son los potenciales quirales a NLO y NNLO los primeros en donde pueden observarse predicciones que dependan genuinamente de simetría quiral. Gran parte de estos efectos quirales viene dado por los acoplamientos  $c_1$ ,  $c_3$  y  $c_4$  que sirven para describir conjuntamente

Set	Ref	$c_1(\text{GeV}^{-1})$	$c_3(\text{GeV}^{-1})$	$c_4(\text{GeV}^{-1})$
Set I	(BM) $\pi N$	$-0.81 \pm 0.15$	$-4.69 \pm 1.34$	$3.40 \pm 0.04$
Set II	(RTdS) $NN$	-0.76	-5.08	4.70
Set III	(EMa) $NN$	-0.81	-3.40	3.40
Set IV	(EMb) $NN$	-0.81	-3.20	5.40

Cuadro 5.1: Sets considerados de acoplamientos quirales. El set I se ha obtenido a partir de la dispersión  $\pi N$ , mientras que los sets II, III y IV provienen de dispersión  $NN$ . Las referencias son Büttiker y Meissner (BM [56]), Rentmeester, Timmermans y de Swart (RTdS [24]), Entem y Machleidt a (EMa [33]) y Entem y Machleidt b (EMb [41]).

tanto la interacción  $NN$  como la interacción  $\pi N$ , por lo que se va a hacer un hincapié especial en estudiar el efecto de estos acoplamientos quirales en la descripción del deuterón. Para tal fin se van a considerar cuatro determinaciones distintas de estos acoplamientos, presentados en la tabla (5.1), una de ellas obtenida del análisis de la dispersión  $\pi N$ , y se hará un estudio completo de los errores asociados a estos acoplamientos.

## 5.2. Regularización del Potencial Nuclear

En esta sección se va a analizar la regularización del potencial nuclear de forma genérica. Es decir, no se va a suponer ningún canal en concreto, aunque se distinguirá si éste es acoplado o desacoplado, y se obtendrá mediante el estudio de las soluciones cerca del origen y las condiciones de regularidad el número de parámetros libres de la teoría regularizada. Sobre el potencial se supondrá que éste es singular, condición que siempre se cumple cuando se considera los potenciales quirales a NLO y NNLO. Los resultados pueden resumirse en

1. En un canal desacoplado con un potencial singular atractivo se debe fijar un observable para obtener una solución regularizada. Por el contrario si el potencial es repulsivo no es posible fijar ningún observable y no hay parámetros libres.
2. En un canal acoplado el número de parámetros libres dependerá de los valores propios del potencial. Dos autovalores atractivos indican la necesidad de fijar tres observables, un autovalor atractivo requiere un parámetro y por último dos autovalores repulsivos no permiten fijar ningún parámetro.

### 5.2.1. Canales Singletes

La ecuación de Schrödinger para momento angular  $l$  se escribe

$$-u'' + \left[ U(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = k^2 u \quad (5.2)$$

en donde  $U(r)$  representa el potencial reducido quiral, que cerca del origen se comporta como

$$U(r) \rightarrow M_N \frac{C_n}{r^n} \quad (5.3)$$

La escala asociada a este potencial singular se define mediante la relación  $R^{n-2} = |MC_n|$ . A distancias suficientemente pequeñas el comportamiento de la función de onda puede estudiarse mediante la aproximación semiclásica, válida cuando

$$\left| \frac{d}{dr} \frac{1}{k(r)} \right| \ll 1 \quad (5.4)$$

en donde  $k(r) = 1/\sqrt{|k^2 - U(r)|}$ . Para los potenciales quirales esta condición equivale a  $r \ll R(n/2)^{1-n/2}$ , por lo que a distancias inferiores a la escala  $R$  el comportamiento es semiclásico. Según el signo del coeficiente van der Waals,  $C_n$ , distinguimos entre dos situaciones:

1. El potencial es atractivo,  $U(r) = -R^{n-2}/r^n$ , y el comportamiento de la función de onda cerca del origen viene dado por

$$u_A(r) \rightarrow C_A \left( \frac{r}{R} \right)^{n/4} \sin \left[ \frac{2}{n-2} \left( \frac{R}{r} \right)^{n/2-1} + \varphi(k) \right] \quad (5.5)$$

en donde  $C_A$  es una constante de normalización, mientras que  $\varphi$ , la fase semiclásica, es un parámetro libre. Mientras que para un potencial regular las soluciones de distinta energía son ortogonales de forma automática, para un potencial singular atractivo la ortogonalidad hay que imponerla y genera consecuencias no triviales. En este caso la relación de ortogonalidad equivale a la condición siguiente

$$\left[ u'_p u_k - u_p u'_k \right] \Big|_0 = \frac{1}{R} \sin(\varphi(k) - \varphi(p)) = 0 \quad (5.6)$$

lo que implica que la fase semiclásica es independiente de la energía.

2. El potencial es repulsivo,  $U(r) = R^{n-2}/r^n$ , y el comportamiento de la función de onda cerca del origen viene dado por

$$u_R(r) \rightarrow C_R \left(\frac{r}{R}\right)^{n/4} \exp \left[ -\frac{2}{n-2} \left(\frac{R}{r}\right)^{n/2-1} \right] \quad (5.7)$$

en donde  $C_R$  es una constante de normalización. La solución irregular, que consiste en una exponencial de signo contrario a la de arriba, se ha desechado por no ser normalizable. La relación de ortogonalidad entre soluciones de distinta energía se cumple automáticamente en el caso repulsivo singular.

### 5.2.2. Canales Tripletes

Los potenciales reducidos quirales se comportan cerca del origen como

$$U(r) \rightarrow M_N \frac{\mathbf{C}_n}{r^n} \quad (5.8)$$

en donde  $\mathbf{C}_n$  es una matriz simétrica de coeficientes van der Waals. La matriz  $\mathbf{C}_n$  puede diagonalizarse mediante la transformación

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{n,+} & 0 \\ 0 & C_{n,-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

$C_{n,\pm}$  son los autovalores de la matriz de coeficientes de van der Waals, y  $\theta$  el ángulo de mezcla.

Podemos desacoplar la ecuación de Schrödinger mediante el cambio de base

$$u_+ = \cos \theta u - \sin \theta w \quad (5.10)$$

$$u_- = \sin \theta u + \cos \theta w \quad (5.11)$$

tal que para las funciones de onda propias  $u_+$  y  $u_-$  corresponden las ecuaciones de Schrödinger

$$-u_{\pm}'' + M_N \frac{C_{n,\pm}}{r^n} u_{\pm} = k^2 u_{\pm} \quad (5.12)$$

y la escala asociada al potencial se define mediante la relación  $R_{\pm}^{n-2} = |M_N C_{n,\pm}|$ . Según los signos que tomen los autovalores  $C_{n,\pm}$  podemos distinguir entre tres situaciones distintas:

1. Los dos autovalores son negativos, es decir, los dos potenciales propios son atractivos. Las dos soluciones propias son oscilantes y hay dos fases semiclásicas,  $\varphi_{\pm}$ . Este es el caso

del potencial de intercambio de dos piones quiral a NNLO. La relación de ortogonalidad entre soluciones de energía distinta genera una condición para las fases semiclásicas

$$\begin{aligned} & [u'_p u_k - u_p u'_k + w'_p w_k - w_p w'_k] \Big|_0 = \\ & \frac{1}{R_+} \sin(\varphi_+(k) - \varphi_+(p)) + \frac{1}{R_-} \sin(\varphi_-(k) - \varphi_-(p)) = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

2. Un autovalor es negativo y el otro es positivo, es decir, un potencial es atractivo y el otro repulsivo. Identificaremos la solución atractiva con el autovalor  $C_{n,-}$ . Una de las soluciones es una exponencial creciente (regular) y la otra es oscilatoria, con una fase semiclásica  $\varphi_-$ . Este es el caso del potencial de intercambio de un pión. La relación de ortogonalidad entre soluciones de energía distinta es

$$\begin{aligned} & [u'_p u_k - u_p u'_k + w'_p w_k - w_p w'_k] \Big|_0 = \\ & \frac{1}{R_-} \sin(\varphi_-(k) - \varphi_-(p)) = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

e implica que la fase  $\varphi_-$  no depende de la energía.

3. Los dos autovalores son positivos. Entonces las dos soluciones son exponenciales crecientes (regulares), y no hay ninguna fase semiclásica. Este es el caso del potencial quiral de intercambio de dos piones a NLO. Las relaciones de ortogonalidad se satisfacen de manera automática.

Estos argumentos pueden ser generalizados a cualquier número de canales acoplados. El número de fases semiclásicas corresponde al número de canales propios atractivos.

## 5.3. Descripción del Estado Ligado

### 5.3.1. Ecuación de Schrödinger

La ecuación de Schrödinger reducida se escribe para el deuterón como

$$-u'' + U_s(r)u + U_{sd}(r)w = -\gamma^2 u \quad (5.15)$$

$$-w'' + U_{sd}(r)u + \left[ U_d(r) + \frac{6}{r^2} \right] w = -\gamma^2 w \quad (5.16)$$

en donde  $\gamma = \sqrt{M_N B_d}$  es el número de onda del deuterón,  $B_d$  es la energía de ligadura del deuterón y  $M_N = 2\mu_{np} = 2M_n M_p / (M_n + M_p)$  es dos veces la masa reducida neutrón-protón ( $M_n$  y  $M_p$  son respectivamente la masa del neutrón y del protón).  $U_s$ ,  $U_{sd}$  y  $U_d$  representan las distintas componentes del potencial TPE NNLO reducido.

### 5.3.2. Comportamiento Asintótico de las Soluciones

Para describir el deuterón es necesaria una solución de la ecuación de Schrödinger (5.15) que sea normalizable, lo que requiere que las funciones de onda sean regulares tanto en infinito como en el origen.

En infinito la función de onda del deuterón esta sujeta a la condición de contorno asintótica

$$u(r) \rightarrow A_S e^{-\gamma r} \quad (5.17)$$

$$w(r) \rightarrow A_S \eta e^{-\gamma r} \left( 1 + \frac{3}{\gamma r} + \frac{3}{(\gamma r)^2} \right) \quad (5.18)$$

que representa el comportamiento de la función de onda del deuterón cuando  $r \rightarrow \infty$  y en donde  $\gamma$  es el número de onda del deuterón,  $\eta$  la razón asintótica  $D/S$ , y  $A_S$  la normalización de la onda  $s$ . La función de onda queda determinada con dos parámetros,  $\gamma$  y  $\eta$ .  $A_S$  puede obtenerse normalizando a la unidad.

En el origen el comportamiento de la función de onda del deuterón está determinado por el comportamiento del potencial. Para el potencial de intercambio de dos piones a NNLO el comportamiento cerca del origen viene dado por

$$\begin{aligned} U_s &\rightarrow \frac{M C_s}{r^6} \\ U_{sd} &\rightarrow \frac{M C_{sd}}{r^6} \\ U_d &\rightarrow \frac{M C_d}{r^6} \end{aligned} \quad (5.19)$$

en donde los coeficientes de van der Waals son

$$\begin{aligned} M C_s &= \frac{3g^2}{128f^4\pi^2}(4 - 3g^2 + 24\bar{c}_3 - 8\bar{c}_4) \\ M C_{sd} &= -\frac{3\sqrt{2}g^2}{128f^4\pi^2}(-4 + 3g^2 - 16\bar{c}_4) \\ M C_d &= \frac{9g^2}{32f^4\pi^2}(-1 + 2g^2 + 2\bar{c}_3 - 2\bar{c}_4) \end{aligned} \quad (5.20)$$

El potencial puede diagonalizarse cerca del origen mediante la transformación

$$\begin{pmatrix} C_s & C_{sd} \\ C_{sd} & C_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{6,+} & 0 \\ 0 & C_{6,-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Set	$MC_{6,+}$ (fm <sup>4</sup> )	$MC_{6,-}$ (fm <sup>4</sup> )	$\theta$ (grados)	$R_{6,+}$ (fm)	$R_{6,-}$ (fm)
Set I	-19.69	-5.63	140.8	2.11	1.54
Set II	-21.45	-5.58	170.0	2.15	1.54
Set III	-14.68	-3.35	140.7	1.96	1.35
Set IV	-20.18	-1.86	182.6	2.12	1.17

Cuadro 5.2: Coeficientes de van der Waals propios, ángulos de mezcla y escalas de longitud van der Waals para el potencial de intercambio de dos piones a NNLO para los distintos sets de acoplamientos quirales considerados.

en donde  $C_{6,\pm}$  son los coeficientes de van der Waals propios y  $\theta$  un ángulo de mezcla. La escala de longitud asociada se define como

$$R_{6,\pm} = |MC_{6,\pm}|^{1/4} \quad (5.22)$$

Los valores para los coeficientes de van der Waals propios, los ángulos de mezcla y las escalas de longitud asociadas están listados en la tabla (5.2). Los dos autovalores  $C_{6,\pm}$  son negativos, por lo que las funciones de onda propias se comportan cerca del origen como

$$u_{\pm}(r) \rightarrow C_{\pm} \left( \frac{r}{R_{6,\pm}} \right)^{3/2} \sin \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{R_{6,\pm}}{r} \right)^2 + \varphi_{\pm}(\gamma) \right] \quad (5.23)$$

A cortas distancias es necesario determinar dos fases semiclásicas,  $\varphi_{\pm}(\gamma)$ .

El número de parámetros libres es el mismo en infinito que en el origen: las dos fases semiclásicas,  $\varphi_{\pm}(\gamma)$  quedan determinadas por el número de onda  $\gamma$  y la razón asintótica  $\eta$ . Por lo tanto para obtener la función de onda del deuterón basta con integrar la ecuación de Schrödinger desde infinito hasta el origen, con  $\gamma$  y  $\eta$  como parámetros de entrada. Las funciones de onda que se obtienen se pueden ver en la figura (5.1). A diferencia del potencial OPE, en el potencial TPE no es necesario regularizar de forma explícita las funciones de onda.

### 5.3.3. Observables del Deuterón

Podemos determinar los valores de los observables del deuterón a partir de las funciones de onda regularizadas. Los observables que nos interesan son el radio de materia, el momento cuadrupolar, el radio inverso y la probabilidad de onda d <sup>1</sup>. Para calcularlos usamos las

<sup>1</sup>Este último en realidad no es un observable.

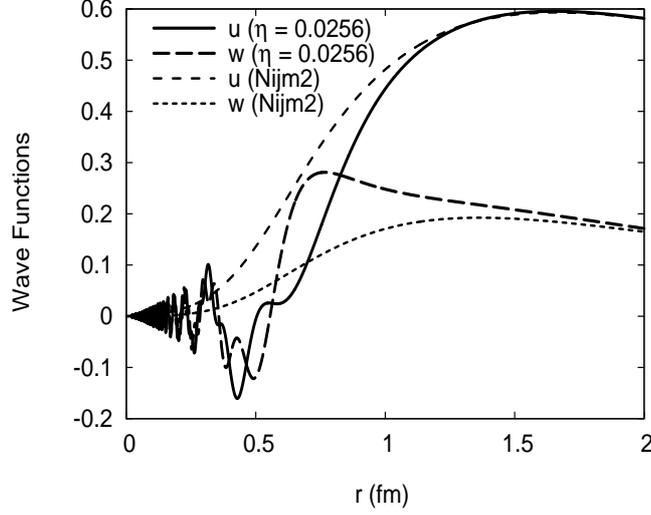


Figura 5.1: Funciones de onda  $u$  y  $w$  del deuterón. Se muestran las funciones de onda regularizadas para el potencial TPE con la energía de ligadura y razón asintótica experimentales, y las funciones de onda del potencial fenomenológico Nijmegen II. Como se puede ver las funciones de onda regularizadas y las de Nijmegen son prácticamente idénticas hasta distancias superiores a 2 fm (aunque existe una ligera discrepancia debida a que el potencial Nijmegen II predice un valor de la razón asintótica ligeramente distinto al valor experimental). Para los acoplamientos quirales del potencial TPE se ha tomado el set IV.

fórmulas integrales siguientes

$$r_m^2 = \frac{1}{4} \langle r^2 \rangle = \frac{1}{4} \int_0^\infty r^2 (u(r)^2 + w(r)^2) dr \quad (5.24)$$

$$Q_d = \frac{1}{20} \int_0^\infty r^2 w(r) (2\sqrt{2}u(r) - w(r)) dr \quad (5.25)$$

$$\langle r^{-1} \rangle = \int_0^\infty \frac{u(r)^2 + w(r)^2}{r} dr \quad (5.26)$$

$$P_D = \int_0^\infty w(r)^2 dr \quad (5.27)$$

en donde hemos supuesto que las funciones de onda están normalizadas a la unidad. En el cálculo del momento cuadrupolar hemos ignorado las contribuciones debidas a corrientes mesónicas. El radio inverso y la probabilidad de onda  $d$  son más sensibles a las cortas distancias que el momento cuadrupolar y el radio de materia.

Set	$\gamma$ (fm <sup>-1</sup> )	$\eta$	$A_S$ (fm <sup>-1/2</sup> )	$r_m$ (fm)	$Q_d$ (fm <sup>2</sup> )	$P_D$
OPE	Input	0.02633	0.8681(1)	1.9351(5)	0.2762(1)	7.31(1) %
OPE'	Input	0.02555	0.8625(2)	1.9234(5)	0.2667(1)	7.14(1) %
OPE''	Input	0.02687	0.8718(2)	1.9429(6)	0.2826(2)	7.42(1) %
Set I	Input	Input	0.900(2)	1.999(4)	0.284(4)	6(1) %
Set II	Input	Input	0.900(2)	1.999(4)	0.284(4)	7(1) %
Set III	Input	Input	0.891(3)	1.981(5)	0.279(4)	7(1) %
Set IV	Input	Input	0.884(4)	1.967(6)	0.276(3)	8(1) %
NijmII	0.231605	0.02521	0.8845	1.9675	0.2707	5.635 %
Reid93	0.231605	0.02514	0.8845	1.9686	0.2703	5.699 %
Exp.	0.231605	0.0256(4)	0.8846(9)	1.971(6)	0.2859(3)	5.67(4) %

Cuadro 5.3: Propiedades del deuterón para los potenciales de intercambio de uno y dos piones (OPE y TPE). En el caso del potencial OPE se muestran los resultados correspondientes ha tomar  $g_A = 1,29$  (OPE),  $g_A = 1,26$  (OPE') y  $g_{\pi NN} = 13,3$  (OPE''). Para el potencial TPE NNLO se muestran los resultados correspondientes a los cuatro sets considerados de acoplamientos quirales. Los errores corresponden en el caso del cálculo OPE a variar el radio de corte en el rango 0,1–0,2 fm, y en el caso del cálculo TPE a propagar el error experimental de  $\gamma$  y  $\eta$  que se usan como parámetros de entrada.

Los resultados para el potencial TPE NNLO para los cuatro sets de acoplamientos quirales están en la tabla (5.3). Como puede observarse los sets I y II, que han sido obtenidos a partir de dispersión  $\pi N$ , dan peores resultados, mientras que los sets III y IV, obtenidos a partir de dispersión  $NN$ , dan mejores resultados. En concreto el set IV predice resultados compatibles con los experimentales para  $A_S$  y  $r_m$ , aunque la discrepancia con el valor experimental de  $Q_d$  puede explicarse a partir de las corrientes de intercambio mesónicas cuyo efecto neto sería aproximadamente añadir  $0,01 \text{ fm}^2$  al valor potencial de  $Q_d$ . En tal caso se puede considerar que el set IV también da un resultado del momento cuadrupolar compatible con el experimental. La magnitud con una mayor discrepancia con el valor experimental es la probabilidad de onda d. Sin embargo no es un observable, y el valor referido como experimental se obtiene mediante un análisis del momento magnético del deuterón con funciones de onda relativistas.

Los errores han sido estimados variando  $\eta$  y  $\gamma$  según sus errores experimentales. Dado que el error experimental para la energía de ligadura del deuterón es muy pequeño, prácticamente todo el error de los distintos observables del deuterón proviene de la incertidumbre experimental en el valor de la razón asintótica  $\eta$ . También se ha considerado el error de corte finito, pero resulta ser despreciable frente al error inducido por  $\eta$ . Esto puede verse en la figura (5.2), que muestra la convergencia de los distintos observables en el radio de corte. En general, por debajo de los  $0,3 \text{ fm}$  los resultados son bastante estables.

En el caso del potencial OPE los errores listados corresponden al error de corte finito. El error debido a la incertidumbre en  $\gamma$  en el cálculo OPE es mucho menor que el debido a usar un corte finito. Sin embargo también se presentan los resultados correspondientes a tomar diferentes valores de  $g_{\pi NN}$  para el potencial OPE. La diferencia entre estos resultados podría tomarse como el error teórico del cálculo OPE.

### Dependencia en la Razón Asintótica $\eta$

La dependencia de los observables en  $\eta$  puede ser estudiada de manera semianalítica descomponiendo según el principio de superposición las funciones de onda del deuterón en una contribución de onda s y en otra de onda d

$$\begin{aligned} u(r) &= u_S(r) + \eta u_D(r) \\ w(r) &= w_S(r) + \eta w_D(r) \end{aligned} \tag{5.28}$$

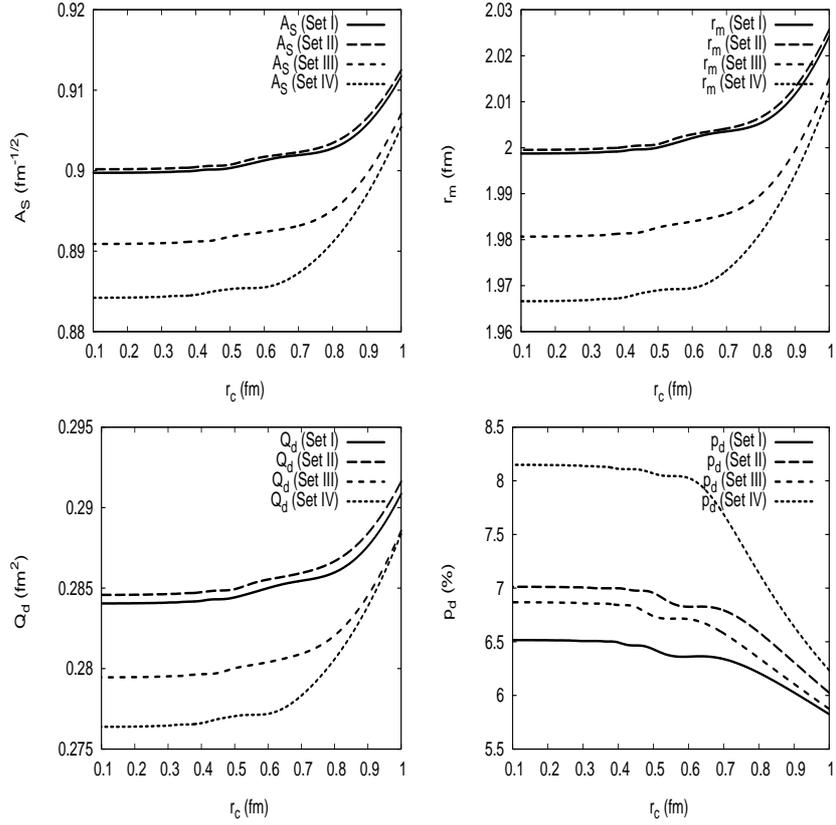


Figura 5.2: Dependencia de los observables del deuterón en función del radio de corte  $r_c$  para el potencial de intercambio de dos piones. Se muestran el factor de normalización  $A_S$ , panel superior izquierdo, el radio de materia  $r_m$ , panel superior derecho, el momento cuadrupolar  $Q_D$ , panel inferior izquierdo, y la probabilidad de onda d  $P_D$ , panel inferior derecho. Se representan los cuatro sets de acoplamiento quirales.

donde  $(u_S, w_S)$  y  $(u_D, w_D)$  son las soluciones que en infinito se comportan como

$$\begin{aligned} u_S(r) &\rightarrow e^{-\gamma r} \\ w_S(r) &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} u_D(r) &\rightarrow 0 \\ w_D(r) &\rightarrow e^{-\gamma r} \left( 1 + \frac{3}{\gamma r} + \frac{3}{(\gamma r)^2} \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Es decir, corresponden a tomar  $A_S = 1$ ,  $A_D = 0$  y  $A_S = 0$ ,  $A_D = 1$  respectivamente en la condición de contorno asintótica.

Esta descomposición permite desarrollar los observables como un polinomio de  $\eta$ . Por ejemplo, en el caso de la normalización asintótica  $A_S$  se tiene que

$$\frac{1}{A_S^2} = \int_0^\infty dr (u_S^2 + w_S^2) + 2\eta \int_0^\infty dr (u_S u_D + w_S w_D) + \eta^2 \int_0^\infty dr (u_D^2 + w_D^2) \quad (5.31)$$

por lo que la dependencia explícita puede parametrizarse como

$$\frac{1}{A_S^2} = N_0 + N_1 \eta + N_2 \eta^2 \quad (5.32)$$

en donde  $N_0$ ,  $N_1$  y  $N_2$  vienen dadas por las expresiones integrales que acompañan a la potencia correspondiente de  $\eta$  en la ecuación (5.31). Desarrollando el resto de los observables en potencias de  $\eta$  se obtiene

$$\frac{r_m^2}{A_S^2} = r_{m,0} + r_{m,1} \eta + r_{m,2} \eta^2 \quad (5.33)$$

$$\frac{Q_d^2}{A_S^2} = Q_{d,0} + Q_{d,1} \eta + Q_{d,2} \eta^2 \quad (5.34)$$

$$\frac{P_D^2}{A_S^2} = P_{D,0} + P_{D,1} \eta + P_{D,2} \eta^2 \quad (5.35)$$

en donde  $N_{\{0,1,2\}}$ ,  $r_{m,\{0,1,2\}}$ ,  $Q_{d,\{0,1,2\}}$  y  $P_{D,\{0,1,2\}}$  están tabulados en (5.4).

En la figura (5.3) se muestra la dependencia de los observables del deuterón respecto a la razón asintótica  $\eta$ . Se ha calculado la dependencia para los cuatro sets de acoplamientos quirales. Las cajas representan los valores experimentales y sus errores: la anchura de la caja está determinada por la incertidumbre en  $\eta$  y la altura por el error del observable considerado. En general el set IV produce los mejores resultados, pasando por los datos experimentales en  $A_S$  y  $r_m$ , aunque no en  $Q_d$ , si bien esto último es debido a ignorar las

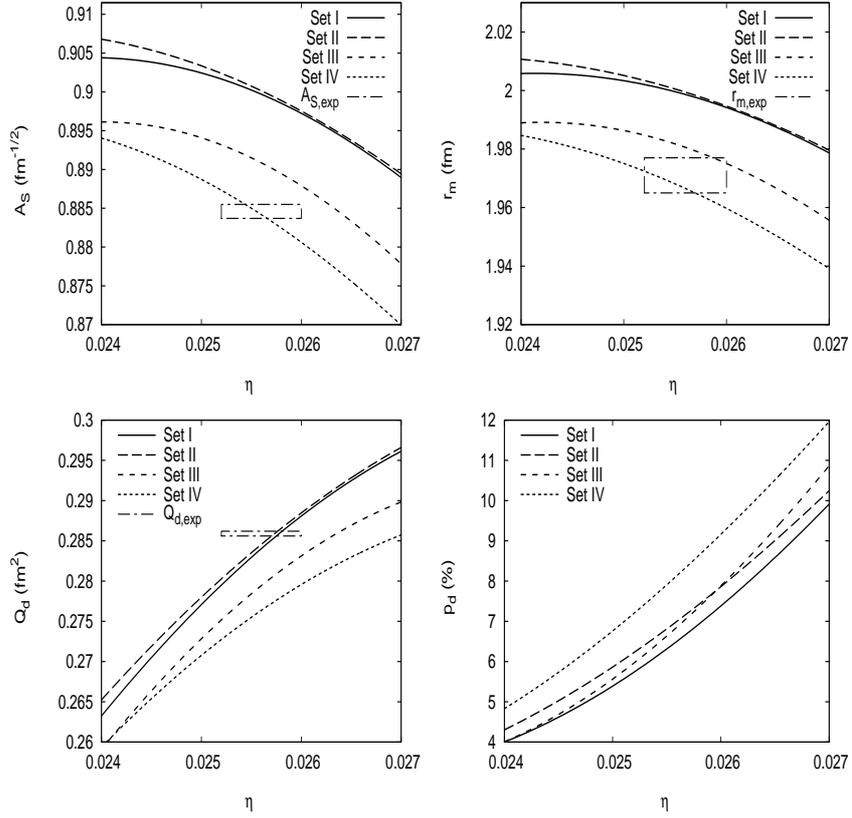


Figura 5.3: Dependencia de los observables del deuterón en función de la razón asintótica  $\eta$  para el potencial de intercambio de dos piones. Las cajas representan los valores experimentales. Se muestran el factor de normalización  $A_S$ , panel superior izquierdo, el radio de materia  $r_m$ , panel superior derecho, el momento cuadrupolar  $Q_D$ , panel inferior izquierdo, y la probabilidad de onda  $P_D$ , panel inferior derecho. Los valores para el momento cuadrupolar representan únicamente las contribuciones potenciales y no incluyen las corrientes de intercambio mesónicas, cuyo efecto sería aproximadamente de  $0,01 \text{ fm}^2$ . Se representan los cuatro sets de acoplamiento quirales.

Set	$N_0$	$N_1$	$N_2$	$r_{m,0}$	$r_{m,1}$	$r_{m,2}$
Set I	3.788(2)	-214.7(2)	4489(3)	5.47297(8)	-54.1956(12)	1295.89(3)
Set II	3.0127(14)	-155.59(10)	3364(2)	5.34737(6)	-44.890(2)	1122.59(6)
Set III	4.650(4)	-283.5(3)	5903(7)	5.58929(8)	-63.1854(12)	1481.50(3)
Set IV	3.410(3)	-190.7(2)	4199(4)	5.40066(6)	-49.291(2)	1232.81(5)
Set	$Q_{d,0}$	$Q_{d,1}$	$Q_{d,2}$	$P_{D,0}$	$P_{D,1}$	$P_{D,2}$
Set I	-0.34288(2)	36.6449(5)	-372.841(2)	2.1090(9)	-184.82(7)	4124.4(1.7)
Set II	-0.29685(2)	33.2406(12)	-309.624(10)	1.44293(2)	-132.31(4)	3098.9(9)
Set III	-0.377779(14)	39.2691(4)	-420.250(4)	2.7752(15)	-241.49(13)	5331(3)
Set IV	-0.30647(2)	33.9364(9)	-318.598(6)	1.6652(10)	-155.23(8)	3682(2)

Cuadro 5.4: Coeficientes que describen la dependencia polinómica de los observables del deuterón en la razón asintótica  $\eta$  según las ecuaciones (5.31) y (5.33). El error ha sido estimado variando el radio de corte en el rango 0,1 – 0,2 fm.

contribuciones de corrientes mesónicas, como ya se ha comentado anteriormente. Estas curvas pueden reproducirse a partir de las fórmulas (5.31) y (5.33) tomando para los coeficientes los valores de la tabla (5.4).

## 5.4. Descripción de los Estados de Dispersión

### 5.4.1. Ecuación de Schrödinger

Los estados de dispersión en el canal del deuterón quedan descritos por la ecuación de Schrödinger reducida

$$-u'' + U_s(r)u + U_{sd}(r)w = k^2u \quad (5.36)$$

$$-w'' + U_{sd}(r)u + \left[ U_d(r) + \frac{6}{r^2} \right] w = k^2w \quad (5.37)$$

en donde  $U_s$ ,  $U_{sd}$  y  $U_d$  representan el potencial TPE NNLO en el canal del deuterón.

### 5.4.2. Estados de Energía Finita

La ecuación de Schrödinger (5.36) tiene dos soluciones de dispersión linealmente independientes en el continuo a las que denominaremos  $\alpha$  y  $\beta$ . Cuando  $r \rightarrow \infty$  las soluciones  $\alpha$

y  $\beta$  se comportan como

$$\begin{aligned} u_{k,\alpha}(r) &\rightarrow \hat{j}_0(kr) \cot \delta_1 - \hat{y}_0(kr) \\ w_{k,\alpha}(r) &\rightarrow \tan \epsilon [\hat{j}_2(kr) \cot \delta_1 - \hat{y}_2(kr)] \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} u_{k,\beta}(r) &\rightarrow -\cot \delta_1 [\hat{j}_0(kr) \cos \delta_2 - \hat{y}_0(kr) \sin \delta_2] \\ w_{k,\beta}(r) &\rightarrow \cot \epsilon \cot \delta_1 [\hat{j}_2(kr) \cos \delta_2 - \hat{y}_2(kr) \sin \delta_2] \end{aligned} \quad (5.39)$$

en donde  $\hat{j}_l(x) = x j_l(x)$  e  $\hat{y}_l(x) = x y_l(x)$  son las funciones de Bessel esféricas reducidas,  $\delta_1$  y  $\delta_2$  los defasajes propios, y  $\epsilon$  el ángulo de mezcla. La normalización del estado  $\beta$  se ha elegido para que genere un estado de energía cero con una normalización conveniente.

Cuando  $r \rightarrow 0$ , la ecuación de Schrödinger para los estados de dispersión, eq. (5.36), se desacopla en dos canales propios atractivos mediante la rotación (5.21). En tal caso las soluciones de dispersión  $\alpha$  y  $\beta$  pueden describirse cerca del origen en función de las respectivas soluciones propias atractivas, dadas por

$$u_{\pm,i}(r) \rightarrow C_{\pm,i} \left( \frac{r}{R_{6,\pm}} \right)^{3/2} \sin \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{R_{6,\pm}}{r} \right)^2 + \varphi_{\pm,i}(k) \right] \quad (5.40)$$

en donde  $i = \alpha, \beta$ . Para momento  $k$  es necesario determinar cuatro fases semiclásicas,  $\varphi_{\pm,\alpha}$  y  $\varphi_{\pm,\beta}$ .

Para determinar las fases semiclásicas resulta útil imponer la ortogonalidad entre los estados de dispersión y ligados. Mientras que para un potencial regular la ortogonalidad entre soluciones de diferente energía es automática, cuando un potencial contiene alguna componente singular atractiva la ortogonalidad hay que imponerla. La condición de ortogonalidad entre los estados de dispersión  $\alpha$  y  $\beta$  y el estado ligado, al que denotaremos con el subíndice  $\gamma$ , se escribe como

$$\int_0^\infty dr \left[ u_\gamma(r) u_{k,i}(r) + w_\gamma(r) w_{k,i}(r) \right] = 0 \quad i = \alpha, \beta \quad (5.41)$$

Por otra parte también se requiere que los estados de dispersión  $\alpha$  y  $\beta$  sean ortogonales entre sí

$$\int_0^\infty dr \left[ u_{k,\alpha}(r) u_{k,\beta}(r) + w_{k,\alpha}(r) w_{k,\beta}(r) \right] = 0 \quad (5.42)$$

Esta segunda condición sirve para explicar por qué la solución asintótica en infinito depende de tres parámetros ( $\delta_1$ ,  $\delta_2$  y  $\epsilon$ ) mientras que la solución cerca del origen depende de cuatro. En principio no resulta útil para determinar los defasajes, pero sí para analizar qué condiciones son necesarias para la determinación de la física de cortas distancias.

Resulta útil reescribir mediante identidades de Lagrange adecuadas <sup>2</sup> estas tres condiciones como

$$\left[ u'_\gamma u_{k,i} - u_\gamma u'_{k,i} + w'_\gamma w_{k,i} - w_\gamma w'_{k,i} \right] \Big|_0^\infty = 0 \quad i = \alpha, \beta \quad (5.43)$$

$$\left[ u'_{k,\alpha} u_{k,\beta} - u_{k,\alpha} u'_{k,\beta} + w'_{k,\alpha} w_{k,\beta} - w_{k,\alpha} w'_{k,\beta} \right] \Big|_0^\infty = 0 \quad (5.44)$$

Si se tiene en cuenta el comportamiento de las soluciones ligada y de dispersión cerca del origen, eqs. (5.23,5.40), las condiciones de ortogonalidad anteriores pueden reexpresarse como condiciones sobre las fases semiclásicas

$$\frac{1}{R_+} \sin(\varphi_+(\gamma) - \varphi_{+,i}(k)) + \frac{1}{R_-} \sin(\varphi_-(\gamma) - \varphi_{-,i}(k)) = 0 \quad i = \alpha, \beta \quad (5.45)$$

$$\frac{1}{R_+} \sin(\varphi_{+,\alpha}(k) - \varphi_{+,\beta}(k)) + \frac{1}{R_-} \sin(\varphi_{-,\alpha}(k) - \varphi_{-,\beta}(k)) = 0 \quad (5.46)$$

Es decir, tres condiciones para determinar cuatro fases. Es necesario añadir otra condición más para poder regularizar las funciones de onda del continuo. La condición adicional necesaria va a ser la de fijar la longitud de dispersión  $\alpha_0$  a su valor experimental en la solución de dispersión de energía cero.

### 5.4.3. Estados de Energía Cero

Los estados de dispersión  $\alpha$  y  $\beta$  de energía cero se comportan asintóticamente como

$$\begin{aligned} u_{0,\alpha}(r) &\rightarrow 1 - \frac{r}{\alpha_0} \\ w_{0,\alpha}(r) &\rightarrow \frac{3\alpha_{02}}{\alpha_0 r^2} \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} u_{0,\beta}(r) &\rightarrow \frac{r}{\alpha_0} \\ w_{0,\beta}(r) &\rightarrow \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_{02}} - \frac{\alpha_{02}}{\alpha_0} \right) \frac{3}{r^2} - \frac{r^3}{15\alpha_{02}} \end{aligned} \quad (5.48)$$

en donde  $\alpha_0$ ,  $\alpha_{02}$  y  $\alpha_2$  son las longitudes de dispersión del canal del deuterón. Estos estados de energía cero se obtienen considerando el límite  $k \rightarrow 0$  de los estados de energía finita,

<sup>2</sup>La identidad de Lagrange usada implica que

$$(\gamma^2 + k^2) \int_0^\infty dr \left[ u_\gamma(r) u_{k,i}(r) + w_\gamma(r) w_{k,i}(r) \right] = \left[ u'_\gamma u_{k,i} - u_\gamma u'_{k,i} + w'_\gamma w_{k,i} - w_\gamma w'_{k,i} \right] \Big|_0^\infty$$

para  $i = \alpha, \beta$ .

eq. (5.38), y de los defasajes propios, que en este límite se comportan como

$$\begin{aligned}
\delta_1 &\rightarrow -\alpha_0 k \\
\delta_2 &\rightarrow -\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_{02}^2}{\alpha_0}\right) k^5 \\
\epsilon &\rightarrow \frac{\alpha_{02}}{\alpha_0} k^2
\end{aligned} \tag{5.49}$$

El comportamiento de los estados de dispersión de energía cero cuando  $r \rightarrow 0$  está dado por la ecuación (5.40). Siguiendo el mismo argumento que en el caso de los estados de energía finita se llega de nuevo al resultado de que hay tres condiciones para determinar cuatro fases semiclásicas. La condición adicional necesaria para poder fijar la solución de cortas distancias va a ser que el estado de dispersión  $\alpha$  de energía cero reproduzca la longitud de dispersión  $\alpha_0$  experimental. Esta condición permite determinar por completo los estados de dispersión de energía cero, y de paso los estados de energía finita mediante ortogonalidad con los de energía cero. Mediante la condición de ortogonalidad

$$\int_0^\infty dr \left[ u_{0,\alpha}(r) u_{k,i}(r) + w_{0,\alpha}(r) w_{k,i}(r) \right] = 0 \tag{5.50}$$

equivalente a la condición sobre las fases semiclásicas

$$\frac{1}{R_+} \sin(\varphi_{+,\alpha}(0) - \varphi_{+,i}(k)) + \frac{1}{R_-} \sin(\varphi_{-,\alpha}(0) - \varphi_{-,i}(k)) = 0 \tag{5.51}$$

y mediante las condiciones (5.45) se determinan las cuatro fases  $\varphi_{\pm,i}(k)$ , y por lo tanto los estados de dispersión.

#### 5.4.4. Regularización

##### Estados de Energía Cero y Parámetros de Baja Energía

La determinación de las soluciones de dispersión de energía cero se realiza mediante las relaciones de ortogonalidad con el estado ligado, eq. (5.43), junto con la condición adicional de fijar la longitud de dispersión  $\alpha_0$  al valor experimental. Debido a que a distancias muy pequeñas los errores de precisión numérica dominan, estas condiciones no van a imponerse directamente en el origen,  $r = 0^+$ , sino en un radio de corte finito  $r_c$ . En tal caso las condiciones de ortogonalidad (5.43) para energía cero se escriben como

$$\begin{aligned}
&u'_\gamma(r_c) u_{0,i}(r_c) + w'_\gamma(r_c) w_{0,i}(r_c) \\
&= u_\gamma(r_c) u'_{0,i}(r_c) + w_\gamma(r_c) w'_{0,i}(r_c) \quad \text{para } i = \alpha, \beta
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Estas condiciones de ortogonalidad pueden transformarse en condiciones algebraicas usando el principio de superposición, por el cual podemos descomponer las soluciones de dispersión de energía cero como

$$\begin{aligned} u_{0,\alpha}(r) &= u_1(r) - \frac{1}{\alpha_0}u_2(r) + 3\frac{\alpha_{02}}{\alpha_0}u_3(r) \\ w_{0,\alpha}(r) &= w_1(r) - \frac{1}{\alpha_0}w_2(r) + 3\frac{\alpha_{02}}{\alpha_0}w_3(r) \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} u_{0,\beta}(r) &= \frac{1}{\alpha_0}u_2(r) + 3\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_{02}} - \frac{\alpha_{02}}{\alpha_0}\right)u_3(r) - \frac{1}{15\alpha_{02}}u_4(r) \\ w_{0,\beta}(r) &= \frac{1}{\alpha_0}w_2(r) + 3\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_{02}} - \frac{\alpha_{02}}{\alpha_0}\right)w_3(r) - \frac{1}{15\alpha_{02}}w_4(r) \end{aligned} \quad (5.54)$$

en donde las soluciones 1, 2, 3 y 4 tienen el comportamiento asintótico adecuado para reproducir (5.48). La ventaja de estas soluciones es que sólo dependen de los parámetros del potencial TPE NNLO, por lo que expandiendo (5.52) en función de  $u_{i,(1,2,3,4)}(r_c)$  y  $w_{i,(1,2,3,4)}(r_c)$  para  $i = \alpha, \beta$  conseguimos dos ecuaciones algebraicas con las que determinar  $\alpha_{02}$  y  $\alpha_2$  dado un valor de  $\alpha_0$ .

Una vez se han determinado los estados de energía cero, es sencillo calcular el rango efectivo mediante la fórmula integral

$$r_0 = 2 \int_0^\infty \left[ \left(1 - \frac{r}{\alpha_0}\right)^2 - u_{0,\alpha}(r)^2 - w_{0,\alpha}(r)^2 \right] dr \quad (5.55)$$

Los resultados que se obtienen se presentan en la tabla (5.5). La única predicción que puede compararse con un valor experimental es la del rango efectivo. En el caso del set IV de acoplamientos quirales los valores teórico (1,76(3) fm) y experimental (1,753(8) fm) son consistentes. El error del valor teórico para el rango efectivo ha sido estimado a partir de la incertidumbre en los parámetros de entrada,  $\gamma$ ,  $\eta$  y  $\alpha_0$ .

### Dependencia en la Razón Asintótica $\eta$

Es posible determinar semianálíticamente la dependencia de las longitudes de dispersión  $\alpha_{02}$  y  $\alpha_2$  en  $\eta$  expandiendo en la relación de ortogonalidad (5.52) las funciones de onda del deuterón como una superposición de ondas s y d, eq. (5.28). Entonces se genera el siguiente tipo de correlación numérica entre  $\alpha_0$ ,  $\alpha_{02}$ ,  $\alpha_2$  y  $\eta$ , que presentamos para el set IV de acoplamientos quirales

Set	$\gamma(\text{fm}^{-1})$	$\alpha_0(\text{fm})$	$\alpha_{02}(\text{fm}^3)$	$\alpha_2(\text{fm}^5)$	$r_0(\text{fm})$
OPE	Input	5.335(1)	1.673(1)	6.693(1)	1.638(1)
OPE'	Input	5.308(1)	1.612(1)	6.325(1)	1.602(1)
OPE''	Input	5.353(1)	1.715(1)	6.951(1)	1.663(1)
Set I	Input	Input	2.3(2)	3(3)	1.4(4)
Set II	Input	Input	2.22(15)	4(2)	1.46(19)
Set III	Input	Input	1.88(10)	5.7(1.6)	1.67(8)
Set IV	Input	Input	1.67(4)	6.6(4)	1.76(3)
NijmII	Input	5.418	1.647	6.505	1.753
Reid93	Input	5.422	1.645	6.453	1.755
Exp.	0.231605	5.419(7)	-	-	1.753(8)

Cuadro 5.5: Observables de dispersión en el canal del deuterón para los potenciales OPE y TPE NNLO. OPE corresponde a tomar  $g_A = 1,29$  y OPE'  $g_A = 1,26$ . Para TPE se muestran los cuatro sets de acoplamientos quirales. Los errores del cálculo OPE corresponden a variar el radio de corte en el rango 0,1 – 0,2 fm, mientras que en el cálculo TPE corresponden a los errores experimentales de los parámetros de entrada  $\gamma$ ,  $\eta$  y  $\alpha_{02}$ .

Set I

$$\begin{aligned}
\alpha_{02} &= \frac{2,0176(8) - 0,4565(3) \alpha_0 - 44,89(3) \eta + 11,935(9) \alpha_0 \eta}{-0,3144(2) + 13,156(10) \eta} \\
\alpha_2 &= \frac{- (0,15337(4) - 3,41261(7) \eta)^2 + \alpha_0 (0,008423(3) - 0,53786(8) \eta + 9,3938(7) \eta^2)}{\alpha_0 (0,023901(1) - \eta)^2} + \frac{\alpha_{02}^2}{\alpha_0}
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Set II

$$\begin{aligned}
\alpha_{02} &= \frac{1,7175(6) - 0,37323(14) \alpha_0 - 33,46(2) \eta + 8,766(5) \alpha_0 \eta}{-0,22807(14) + 9,866(6) \eta} \\
\alpha_2 &= \frac{- (0,17408(5) - 3,39164(8) \eta)^2 + \alpha_0 (0,009559(3) - 0,56661(9) \eta + 9,7185(8) \eta^2)}{\alpha_0 (0,023118(1) - \eta)^2} + \frac{\alpha_{02}^2}{\alpha_0}
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Set III

$$\begin{aligned}
\alpha_{02} &= \frac{2,3666(16) - 0,5509(5) \alpha_0 - 59,17(7) \eta + 15,75(2) \alpha_0 \eta}{-0,4150(5) + 17,28(2) \eta} \\
\alpha_2 &= \frac{- (0,13695(5) - 3,42387(7) \eta)^2 + \alpha_0 (0,007437(3) - 0,50543(12) \eta + 9,0993(7) \eta^2)}{\alpha_0 (0,024013(1) - \eta)^2} + \frac{\alpha_{02}^2}{\alpha_0}
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Set IV

$$\begin{aligned}
\alpha_{02} &= \frac{1,8953(11) - 0,4190(13) \alpha_0 - 41,84(10) \eta + 10,853(12) \alpha_0 \eta}{-0,2792(3) + 12,298(12) \eta} \\
\alpha_2 &= \frac{- (0,15411(7) - 3,40196(13) \eta)^2 + \alpha_0 (0,008050(4) - 0,51860(12) \eta + 9,3180(11) \eta^2)}{\alpha_0 (0,022706(1) - \eta)^2} + \frac{\alpha_{02}^2}{\alpha_0}
\end{aligned} \tag{5.59}$$

En la figura (5.4) se muestra la dependencia de las longitudes de dispersión  $\alpha_{02}$  y  $\alpha_2$  respecto a  $\eta$ , en donde las barras de error se han estimado variando la longitud de dispersión  $\alpha_0$  que se usa como parámetro de entrada según su error experimental.

**Estados de Energía Finita y Defasajes**

Para determinar los estados de dispersión de energía finita se necesitan tres condiciones de ortogonalidad. Además de las dos condiciones de ortogonalidad con el estado ligado se puede tomar la de ortogonalidad entre los estados  $\alpha$  de energía finita y cero. En tal caso, las condiciones para radio de corte finito se escriben

$$\begin{aligned}
&u'_{0,\alpha}(r_c)u_{k,\alpha}(r_c) + w'_{0,\alpha}(r_c)w_{k,\alpha}(r_c) \\
&= u_{0,\alpha}(r_c)u'_{k,\alpha}(r_c) + w_{0,\alpha}(r_c)w'_{k,\alpha}(r_c)
\end{aligned} \tag{5.60}$$

$$\begin{aligned}
&u'_\gamma(r_c)u_{k,i}(r_c) + w'_\gamma(r_c)w_{k,i}(r_c) \\
&= u_\gamma(r_c)u'_{k,i}(r_c) + w_\gamma(r_c)w'_{k,i}(r_c) \quad \text{para } i = \alpha, \beta
\end{aligned} \tag{5.61}$$

De nuevo estas condiciones se pueden reexpresar como ecuaciones algebraicas para funciones trigonométricas de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  y  $\epsilon$  mediante el principio de superposición. Si construimos funciones

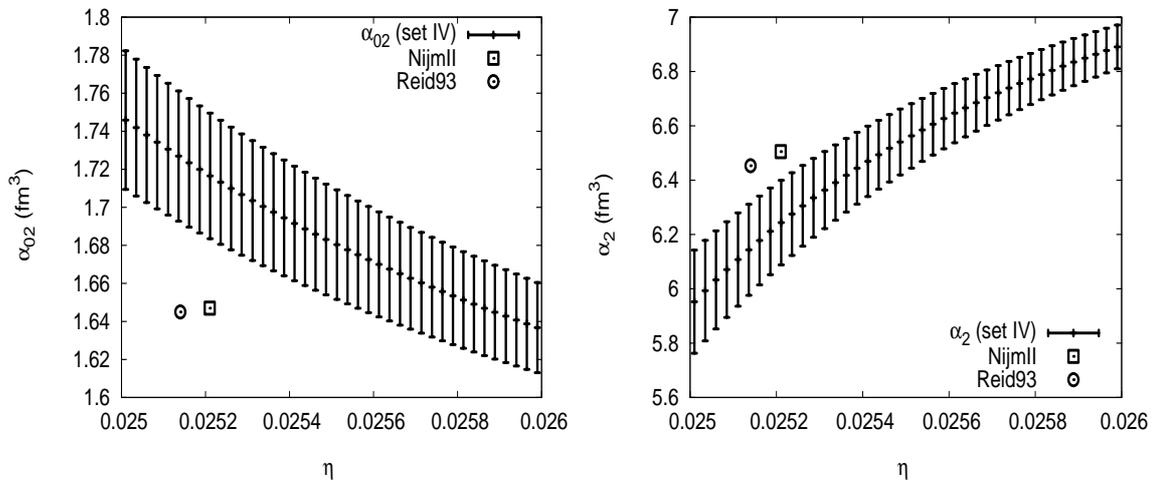


Figura 5.4: Dependencia de las longitudes de dispersión  $\alpha_{02}$  y  $\alpha_2$  de la razón asintótica  $\eta$  para el potencial de intercambio de dos piones. El cuadrado y el círculo representan los resultados para los potenciales fenomenológicos Nijmegen II y Reid 93. Las barras representan la incertidumbre generada por el valor experimental de la longitud de dispersión  $\alpha_0 = 5,149(7)$ , que se usa como parámetro de entrada en el cálculo de las otras dos longitudes de dispersión mesónicas, cuyo efecto sería aproximadamente de  $0,01 \text{ fm}^2$ . Se representa el set IV de acoplamientos quirales.

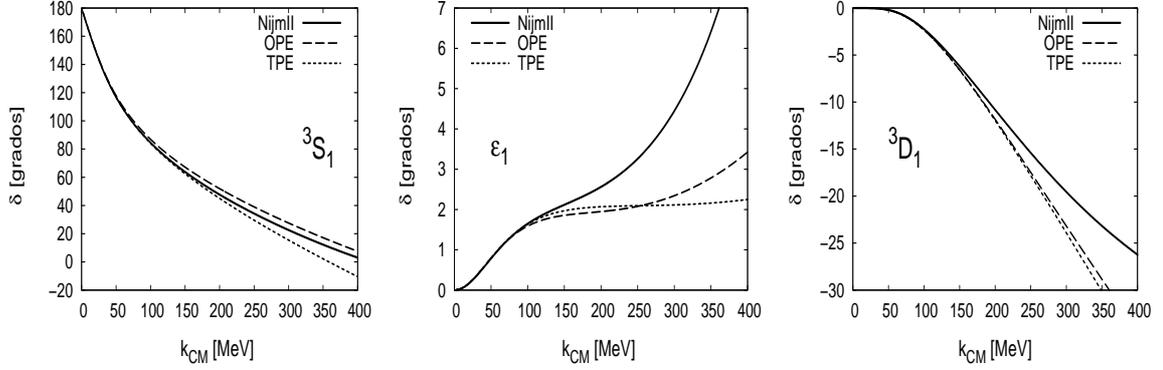


Figura 5.5: Defasajes propios  ${}^3S_1$ ,  $E_1$  y  ${}^3D_1$  en el canal triplete. Se representa el set IV de acoplamiento quirales.

de onda que asintóticamente se comporten como

$$u_{k,j}(r) \rightarrow \hat{j}_0(kr) \quad (5.62)$$

$$u_{k,y}(r) \rightarrow \hat{y}_0(kr) \quad (5.63)$$

$$w_{k,j}(r) \rightarrow \hat{j}_2(kr) \quad (5.64)$$

$$w_{k,y}(r) \rightarrow \hat{y}_2(kr) \quad (5.65)$$

entonces las soluciones de dispersión  $\alpha$  y  $\beta$  se reescriben como

$$\begin{aligned} u_{k,\alpha}(r) &= u_{k,j}(r) \cot \delta_1 - u_{k,y}(r) \\ w_{k,\alpha}(r) &= \tan \epsilon [w_{k,j}(r) \cot \delta_1 - w_{k,y}(r)] \end{aligned} \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned} u_{k,\beta}(r) &= -\cot \delta_1 [u_{k,j}(r) \cot \delta_2 - u_{k,y}(r)] \\ w_{k,\beta}(r) &= \cot \epsilon \cot \delta_1 [w_{k,j}(r) \cot \delta_2 - w_{k,y}(r)] \end{aligned} \quad (5.67)$$

con lo que las condiciones (5.60) se reducen a tres ecuaciones algebraicas para determinar  $\cot \delta_1$ ,  $\cot \delta_2$  y  $\tan \epsilon$ . Los defasajes que se obtienen se muestran en la figura (5.5), en donde se considera el set IV de acoplamiento quirales y se toma un radio de corte  $r_c = 0,1$  fm.

## 5.5. Análisis de Errores y Determinación de los Acoplamientos Quirales

### 5.5.1. Errores Debidos a los Acoplamientos Quirales

En las secciones anteriores se han calculado los observables de los estados ligado y de dispersión en el canal  ${}^3S_1 - {}^3D_1$  con el potencial TPE NNLO. Los resultados se muestran en las tablas (5.4) y (5.5). En general son insensibles al radio de corte elegido, siempre y cuando sea razonablemente pequeño, y las mayores fuentes de errores corresponden a la incertidumbre en los parámetros físicos que se usan como entrada y en el valor de los acoplamientos quirales  $c_1$ ,  $c_3$  y  $c_4$ . El error debido a las incertidumbres en  $\eta$  y  $\alpha_0$  se ha calculado y es el que se presenta en las tablas (5.4) y (5.5). El error debido a los acoplamientos quirales se manifiesta en los distintos resultados de cada uno de los sets considerados. Los sets III y IV proporcionan resultados compatibles con los experimentales a un nivel de confianza de unos  $2 - 3\sigma$  en el set III y cerca de un  $\sigma$  en el set IV para observables como  $A_S$  y  $r_m$ , mientras que en los sets I y II los resultados son marcadamente incompatibles con los experimentales. Con este análisis se llega a la conclusión de que el set IV describe los datos, mientras que los sets I y II no, aunque a falta de un análisis preciso de los errores en los acoplamientos quirales, y el error que inducen en los observables nucleares esta conclusión es incompleta y podría ser incorrecta.

Sin embargo es posible mejorar el análisis de los errores correspondientes a los acoplamientos quirales propagando el error de éstos en los resultados. El set I de acoplamientos quirales está basado en el análisis de la dispersión  $\pi N$  (BM [56]), y tienen cierto error. El análisis de la referencia (RTdS [24]) en donde se calcula el set II, basado en dispersión NN, también incluye errores. En los sets III y IV (EMa [33]) y EMb [41]) no hay errores disponibles, aunque para el caso del set IV una estimación razonable es tomar un error relativo del 5% para  $c_3$  y un 30% para  $c_4$  [73]. El procedimiento de propagación de errores se hace mediante una simulación Monte Carlo. Si se supone que los errores son gaussianos pueden generarse valores de  $c_1$ ,  $c_3$  y  $c_4$  que sigan dicha distribución y para cada uno de estos valores calcular los observables considerados. Con una muestra suficientemente grande se pueden estimar las barras de error para los observables.

En la tabla (5.6) pueden verse el valor central y las barras de error para los principales observables del estado ligado y de dispersión en el canal del deuterón. La distribución es algo asimétrica. Las barras de error se han escogido de forma que el nivel de confianza del intervalo comprendido entre ellas corresponda al 68%. Se puede comprobar que el error debido a la incertidumbre en los acoplamientos quirales es ligeramente superior al debido a la incertidumbre en los parámetros de entrada  $\gamma$ ,  $\eta$  y  $\alpha_0$ .

	Set I	Set II	Set IV	Exp.
$c_1$	-0,81(15)	-0,76(7)	-0,81	
$c_3$	-4,69(1,34)	-5,08(24)	-3,20(16)	
$c_4$	3,40(4)	4,78(10)	5,40(1,65)	
$A_s$	$0,899^{+0,008}_{-0,009}$	$0,900^{+0,003}_{-0,004}$	$0,884^{+0,005}_{-0,008}$	$0,8849 \pm 0,0009$
$Q_d$	$0,284^{+0,005}_{-0,007}$	$0,284^{+0,005}_{-0,004}$	$0,276^{+0,004}_{-0,004}$	$0,2859 \pm 0,0003$
$r_m$	$1,998^{+0,015}_{-0,019}$	$1,998^{+0,007}_{-0,007}$	$1,965^{+0,011}_{-0,014}$	$1,971 \pm 0,006$
$P_d$	$6,6^{+1,0}_{-0,9}$	$7,1^{+0,9}_{-0,9}$	$8,3^{+1,4}_{-1,5}$	-
$\alpha_{02}$	$2,26^{+0,51}_{-0,39}$	$2,20^{+0,23}_{-0,16}$	$1,67^{+0,13}_{-0,13}$	-
$\alpha_2$	$2,6^{+2,8}_{-6,6}$	$3,1^{+1,4}_{-2,8}$	$6,17^{+0,39}_{-0,75}$	-
$r_{0,s}$	$2,92^{+0,08}_{-0,04}$	$2,97^{+0,03}_{-0,02}$	$2,86^{+0,04}_{-0,03}$	$2,77 \pm 0,05$
$r_{0,t}$	$1,36^{+0,33}_{-0,75}$	$1,48^{+0,14}_{-0,25}$	$1,76^{+0,03}_{-0,06}$	$1,753 \pm 0,008$

Cuadro 5.6: Observables para el estado ligado y de dispersión para el canal del deuterón. Los errores se han estimado propagando el error de los acoplamientos quirales mediante una simulación Monte Carlo. Se muestran los resultados para los sets I, II y IV (en el caso del set III no se tiene una estimación de los errores en los acoplamientos quirales).

### 5.5.2. Determinación de los Acoplamientos Quirales

Otra posibilidad para estudiar los acoplamientos quirales en el deuterón es hacer un ajuste a los observables del deuterón. El procedimiento usual para realizar dichas determinaciones es ajustar los defasajes al análisis de ondas parciales, [54, 53]. Este procedimiento de ajuste se ha llevado acabo en las referencias [24, 34], que sin embargo no asignan errores a sus determinaciones de acoplamientos quirales. Por otra parte otros trabajos [41, 36, 42] en donde se ha hecho un análisis de ondas parciales en teorías efectivas para la dispersión NN simplemente se suponen para  $c_1$ ,  $c_3$  y  $c_4$  unos valores sin errores, por lo que no se lleva a cabo un análisis de errores debidos a los acoplamientos quirales similares a los de la tabla (5.6).

El procedimiento que se propone aquí para ajustar los acoplamientos quirales difiere de los anteriores en el sentido en que se prefieren usar observables relacionados con el comportamineto de baja energía que defasajes. La razón de que se prefieran estos observables está en que se espera que las teorías efectivas funcionen mejor a energías pequeñas, por lo que el cálculo de un observable relacionado con bajas energías tiene una dependencia más limpia con los parámetros de la teoría efectiva que uno relacionado con energías grandes. Los observables del deuterón que menor error tienen son la energía de ligadura y la longitud de dispersión. Sin embargo estas dos cantidades se usan como parámetros de entrada con

los que renormalizar la función de onda, por lo que los descartamos para un ajuste de los acoplamientos quirales. Otros observables relacionados con bajas energías que se conocen bastante bien son los rangos efectivos de los canales singlete y triplete y la normalización asintótica

$$r_{0,s} = 2,77(5) \text{ fm} \quad r_{0,t} = 1,753(8) \text{ fm} \quad A_S = 0,8846(9) \text{ fm}^{-1/2} \quad (5.68)$$

Para ajustar los acoplamientos quirales a estos observables se va a propagar los errores de los observables usados como parámetros de entrada, es decir, las longitudes de dispersión en los canales singlete y triplete, la razón asintótica  $D/S$  y la energía de ligadura del deuterón, mediante un Monte Carlo, de manera que puedan calcularse las incertidumbres que los errores experimentales generan en los acoplamientos quirales ajustados. Para determinar los acoplamientos quirales se minimiza la siguiente función  $\chi^2$

$$\chi^2 = \left( \frac{r_{0,s} - r_{0,s}^{\text{exp}}}{\Delta r_{0,s}} \right)^2 + \left( \frac{r_{0,t} - r_{0,t}^{\text{exp}}}{\Delta r_{0,t}} \right)^2 + \left( \frac{A_S - A_S^{\text{exp}}}{\Delta A_S} \right)^2 \quad (5.69)$$

Dado que se ajustan tres acoplamientos quirales a tres observables el significado estadístico de  $\chi^2$  no es grande. A pesar de esto se rechazarán aquellos acoplamientos quirales que superen  $\chi^2 > 1$ . Para los parámetros de entrada se toma  $g_{\pi NN} = 13,083$ ,  $\alpha_{0,s} = -23,77 \pm 0,05 \text{ fm}$ ,  $\alpha_{0,t} = 5,419 \pm 0,007 \text{ fm}$  y  $\eta = 0,0256 \pm 0,0004$ . Propagando los errores en estos parámetros de entrada se selecciona finalmente un conjunto de 125 puntos  $(c_1, c_3, c_4)$  tales que  $\chi^2 < 1$ , dando como resultado

$$\begin{aligned} c_1 &= -1,13_{-0,04}^{+0,02}(\text{stat}) \text{ GeV}^{-1} \\ c_3 &= -2,60_{-0,23}^{+0,18}(\text{stat}) \text{ GeV}^{-1} \\ c_4 &= +3,40_{-0,40}^{+0,25}(\text{stat}) \text{ GeV}^{-1} \end{aligned} \quad (5.70)$$

en donde el valor central es la mediana, y los errores se han obtenido de manera que comprendan el 68 % de los puntos, con el 16 % de los puntos por debajo del valor inferior, y otro 16 % por encima del superior. Estos valores no cambian significativamente si se reducen los puntos aceptados a aquellos tales que  $\chi^2 < 0,5$ .

Estos valores de  $c_1$ ,  $c_3$  y  $c_4$  son compatibles a un nivel de  $2\sigma$  con los obtenidos en la referencia [56], mediante un análisis de baja energía de la dispersión  $\pi N$ , para los que se tienen los valores siguientes:  $c_1 = -0,81 \pm 0,15$ ,  $c_3 = -4,69 \pm 1,34$  y  $c_4 = 3,40 \pm 0,04$ . Por otra parte son incompatibles con los obtenidos en las referencias [24, 34] mediante un análisis completo de las ondas parciales en dispersión NN, en donde los potenciales quirales se regularizan con una condición de contorno dependiente de la energía en el radio de corte  $r_c = 1,4 \text{ fm}$  (en el formalismo presentado a lo largo de este trabajo una condición de contorno dependiente de energía no sería aceptable porque rompe las condiciones de ortogonalidad).

## 5.6. Fuerzas de van der Waals Quirales

La descripción efectiva de la interacción nuclear se basa en que hay una separación entre las escalas de largas y cortas distancias. La física de largas distancias se describe mediante potenciales de intercambios piónicos que obedecen una expansión quiral, mientras que la de cortas distancias se considera desconocida, aunque la exigencia de renormalizabilidad limita enormemente sus efectos que equivalen a fijar algún observable a su valor físico. El proceso de renormalización elimina cualquier referencia explícita a las escalas de cortas distancias. Por el contrario, las escalas de largas distancias intervienen de manera activa en la descripción del sistema.

En la descripción de la interacción nuclear mediante el potencial quiral de intercambio de dos piones hay varias escalas de largas distancias involucradas, como por ejemplo la longitud de onda Compton del pión,  $1/m \sim 1,4 \text{ fm}$ , y las escalas van der Waals  $R_{6,\pm}$  asociadas a la componente  $1/r^6$  del potencial quiral. Resulta interesante estudiar la importancia relativa de cada una de estas escalas para determinar cuál de ellas contribuye en mayor medida a la física del sistema. Esta discusión sobre escalas en el canal triplete está muy relacionada con la correspondiente discusión en el canal singlete, por lo que se van a volver a exponer aquí muchos de los resultados de este canal.

El efecto de la escala  $1/m$ , la longitud de onda Compton del pion, puede estudiarse considerando el límite quiral del potencial. Las componentes del potencial nuclear que sobreviven en este límite son la parte tensorial del potencial OPE con su singularidad del tipo  $1/r^3$ , así como las singularidades principales  $1/r^5$  y  $1/r^6$  de los potenciales TPE NLO y TPE NNLO. Los resultados para los defasajes en el caso de este límite quiral pueden verse en la figura (5.6). Como se observa los defasajes quirales son prácticamente idénticos a los defasajes con el potencial TPE NNLO completo, por lo que la conclusión es que en onda  $s$  la escala  $1/m$  es irrelevante en la descripción de los defasajes. Esta conclusión, aunque resulte extraña, se va a ver reforzada al considerar la escala de van der Waals quiral. No se muestran los defasajes en el límite quiral de ondas parciales superiores ya que en el límite quiral el potencial se comporta como  $1/r^3$  a largas distancias, no hay apantallamiento piónico, lo que cambia considerablemente el comportamiento de largas distancias de las ondas parciales  $E_1$  y  $^3D_1$ , por lo que los defasajes deberían redefinirse y no corresponderían a los habituales en estos canales.

La importancia de la escala van der Waals puede determinarse considerando un potencial de interacción nuclear que sólo contenga la contribución van der Waals pura del potencial quiral. Para un potencial van der Waals se tiene que

$$U(r) = -\frac{R^4}{r^6} \quad (5.71)$$

La correlación de largas distancias entre el rango efectivo y la longitud de dispersión para

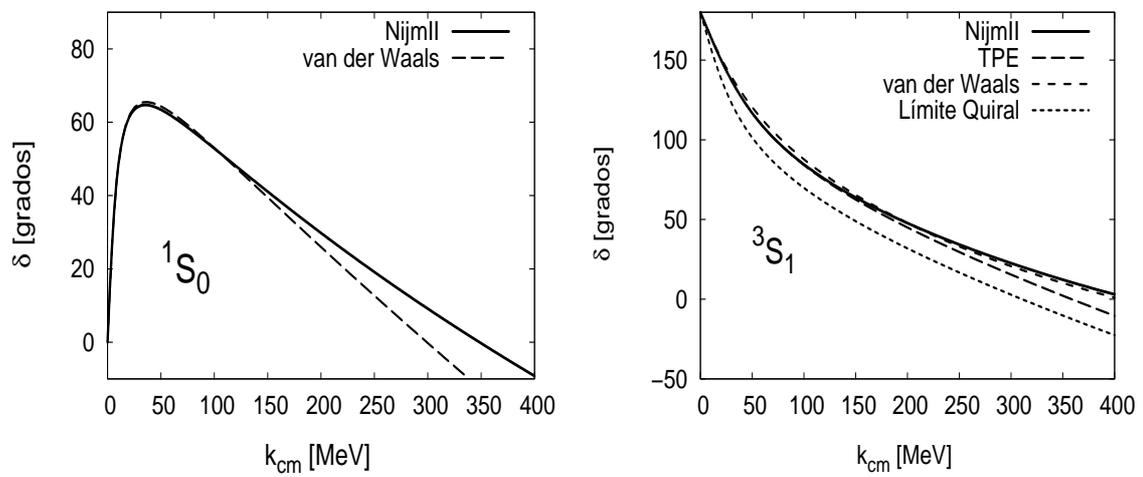


Figura 5.6: Defasajes NN para los canales singlete (izquierda) y triplete (derecha) calculados con el potencial fenomenológico Nijmegen II, el potencial quiral TPE NNLO, el potencial de van der Waals quiral y el límite quiral ( $m \rightarrow 0$ ) del potencial de intercambio de dos piones. Los defasajes se han construido con la condición de reproducir las longitudes de dispersión físicas de los canales singlete y triplete,  $\alpha_{0,s} = -23,74(2)$  fm y  $\alpha_{0,t} = 5,419(7)$  fm.

este potencial está dada por la fórmula

$$r_0 = \frac{16 R \Gamma(\frac{5}{4})^2}{3 \pi} - \frac{4 R^2}{3 \alpha_0} + \frac{4 R^3 \Gamma(\frac{3}{4})^2}{3 \alpha_0^2 \pi} \quad (5.72)$$

Con esta correlación se puede determinar la contribución van der Waals al rango efectivo en los canales singlete y triplete. En el canal singlete  $^1S_0$  la escala van der Waals se define como  $R_s = (M C_{6,^1S_0})^{1/4}$ , y da lugar a las correlaciones siguientes según el set quiral considerado

$$\begin{aligned} r_{0,s} &= 2,3981 - \frac{3,9418}{\alpha_{0,s}} + \frac{3,2396}{\alpha_{0,s}^2} & (\text{Set I}) \\ r_{0,s} &= 2,4919 - \frac{4,2562}{\alpha_{0,s}} + \frac{3,6349}{\alpha_{0,s}^2} & (\text{Set II}) \\ r_{0,s} &= 2,2227 - \frac{3,8625}{\alpha_{0,s}} + \frac{2,5794}{\alpha_{0,s}^2} & (\text{Set III}) \\ r_{0,s} &= 2,2910 - \frac{3,5975}{\alpha_{0,s}} + \frac{2,8246}{\alpha_{0,s}^2} & (\text{Set IV}) \end{aligned} \quad (5.73)$$

que corresponden a las escalas van der Waals  $R_s = 1,7193, 1,7868, 1,5941, 1,643$  fm. Para la longitud de dispersion experimental  $\alpha_{0,s} = -23,74$  fm, se obtienen los rangos efectivos  $r_{0,s} = 2,5697, 2,6778, 2,2917, 2,4477$  fm, por lo que la correlación van der Waals de largas distancias explica cerca del 80 % del rango efectivo teórico y experimental del canal singlete.

En el canal triplete en primer lugar hay que elegir qué escala van der Waals se va a considerar. La opción más sencilla es ignorar el efecto de la mezcla, y definir la escala van der Waals como  $R_t = (M C_{6,^3S_1})^{1/4}$ . Esta escala genera las correlaciones siguientes para el rango efectivo según el set de acoplamientos quirales considerados

$$\begin{aligned} r_{0,t} &= 2,5017 - \frac{4,2898}{\alpha_{0,t}} + \frac{3,6780}{\alpha_{0,t}^2} & (\text{Set I}) \\ r_{0,t} &= 2,5854 - \frac{4,5814}{\alpha_{0,t}} + \frac{4,0593}{\alpha_{0,t}^2} & (\text{Set II}) \\ r_{0,t} &= 2,3509 - \frac{3,7881}{\alpha_{0,t}} + \frac{3,0520}{\alpha_{0,t}^2} & (\text{Set III}) \\ r_{0,t} &= 2,4088 - \frac{3,9769}{\alpha_{0,t}} + \frac{3,2830}{\alpha_{0,t}^2} & (\text{Set IV}) \end{aligned} \quad (5.74)$$

que corresponden a las escalas de van der Waals  $R_t = 1,7937, 1,8536, 1,6855, 1,7270$  fm. Para la longitud de dispersion experimental  $\alpha_{0,s} = 5,419$  fm, se obtienen los rangos efectivos

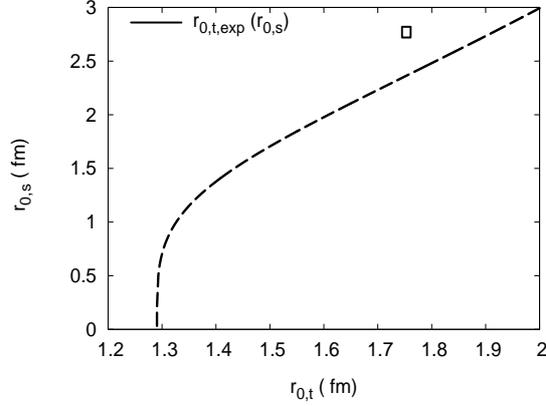


Figura 5.7: Correlación van der Waals entre los rangos efectivos del canal singlete y triplete, fijando las longitudes de dispersión a sus valores experimentales. El cuadrado representa los valores experimentales.

$r_{0,t} = 1,8353, 1,8781, 1,7558, 1,7867$  fm. Para el set IV la diferencia entre el rango efectivo exacto (1,76(3)) y el van der Waals (1,79) es compatible con el error teórico del cálculo.

También es posible otra elección para la escala van der Waals en el canal triplete, y es tomar la escala correspondiente a uno de los autovalores de cortas distancias del potencial,  $R_{6,+} = (M C_{6,+})^{1/4}$ . En tal caso se obtiene  $r_0 = 1,9985, 2,0784, 1,9501$  y  $2,0576$  fm para los sets I,II,III y IV respectivamente.

Por otra parte es posible establecer una relación entre las correlaciones en el canal singlete y triplete teniendo en cuenta que las respectivas escalas van der Waals  $R_s$  y  $R_t$  cumplen que

$$\begin{aligned} MC_{6,1S_0} - MC_{6,3S_1} &= R_s^4 - R_t^4 \\ &= \frac{3g^2}{64\pi^2 f^4} (4 - 9g^2) \end{aligned} \quad (5.75)$$

Esta relación entre las escalas  $R_s$  y  $R_t$  genera una correlación a cuatro términos entre  $\alpha_{0,s}$ ,  $\alpha_{0,t}$ ,  $r_{0,s}$  y  $r_{0,t}$ , independiente del valor de los acoplamientos quirales  $c_3$  y  $c_4$ . Esta correlación a cuatro términos se simplifica a dos términos si para  $\alpha_{0,s}$  y  $\alpha_{0,t}$  se toman los valores experimentales. En tal caso los rangos efectivos  $r_{0,s}$  y  $r_{0,t}$  se expresan uno en función del otro como se muestra en la figura (5.7). Para el valor experimental del rango efectivo en el canal triplete,  $r_{0,t} = 1,753(8)$  fm la correlación van der Waals da  $r_{0,s} = 2,34$  fm, es decir, explica cerca de un 85 % del valor experimental  $r_{0,s,exp} = 2,77(5)$  fm.

Por último en la figura (5.6) se muestran los defasajes van der Waals para las ondas  $^1S_0$  y  $^3S_1$ . En general se parecen bastante a los de Nijmegen, por lo que se comprueba una vez

más el dominio de las escalas van der Waals en estas dos ondas parciales.

La similitud entre los resultados experimentales y las correlaciones van der Waals en el caso de la dispersión NN es notable, y establece un paralelismo interesante entre la física molecular y nuclear <sup>3</sup>. Una de las consecuencias de esta similitud es la conexión con el modelo de la gota líquida. El comportamiento de la materia nuclear está dominado por la dispersión entre nucleones en onda *s*, que es completamente análoga a la dispersión que hay entre átomos y moléculas neutras que a largas distancias interaccionan mediante fuerzas de van der Waals, es decir, la fuerza que hay a largas distancias entre las moléculas de un líquido. Esto establece un paralelismo teórico entre la materia nuclear y los líquidos, que ya era explotado fenomenológicamente en el modelo de la gota líquida, pero que se comprende mejor a partir de los resultados que se obtienen para las fuerzas de van der Waals quirales.

## 5.7. El Potencial Quiral a NLO

En secciones anteriores se ha considerado la renormalización de los potenciales quirales a LO y NNLO en el canal del deuterón. El resultado al que se llega es que la estructura de las singularidades del potencial cerca del origen determina el número de parámetros libres que deben fijarse para obtener una solución renormalizada <sup>4</sup>. En el caso del LO el potencial tiene una componente propia atractiva y otra repulsiva por lo que con un parámetro se determinan el estado ligado y los estados de dispersión. En el caso del NLO el potencial tiene dos componentes propias atractivas, por lo que son necesarios tres parámetros para determinar los estados ligado y de dispersión.

Sin embargo, las dos componentes propias del potencial quiral a NLO son repulsivas por lo que no es posible fijar ningún parámetro. Esto plantea un problema porque en este caso la física de largas distancias determina por completo el sistema. El comportamiento repulsivo del potencial de largas distancias apantalla cualquier efecto debido a la física de cortas distancias. En tal caso no es posible construir una descripción efectiva y renormalizada del sistema basada en una separación de escalas de cortas y largas distancias.

El potencial quiral a NLO en el canal del deuterón se comporta cerca del origen como

$$\begin{aligned}
 U_s(r) &\rightarrow \frac{MC_{5,3S_1}}{r^5} \\
 U_{sd}(r) &\rightarrow \frac{MC_{5,E_1}}{r^5} \\
 U_d(r) &\rightarrow \frac{MC_{5,3D_1}}{r^5}
 \end{aligned} \tag{5.76}$$

---

<sup>3</sup>Recuérdese que el potencial de van der Waals describe las interacciones moleculares de largas distancias.

<sup>4</sup>Por una solución renormalizada se entiende aquella en la que el radio de corte ha sido eliminado.

en donde los coeficientes de van der Waals reducidos vienen dados por

$$\begin{aligned}
MC_{5,s} &= \frac{3M(-1 - 10g^2 + 27g^4)}{256\pi^3 f^4} \\
MC_{5,sd} &= -\frac{15Mg^4}{64\sqrt{2}\pi^3 f^4} \\
MC_{5,d} &= \frac{3M(-1 - 10g^2 + 37g^4)}{256\pi^3 f^4}
\end{aligned} \tag{5.77}$$

La matriz de coeficientes de van der Waals reducidos se puede diagonalizar mediante la rotación

$$\begin{pmatrix} MC_{5,+} & 0 \\ 0 & MC_{5,-} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} MC_{5,s} & MC_{5,sd} \\ MC_{5,sd} & MC_{5,d} \end{pmatrix} R^T \quad \text{con} \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \tag{5.78}$$

que corresponde a la rotación (5.21) con un ángulo de mezcla tal que  $\tan \theta = \sqrt{2}$ <sup>5</sup>. Diagonalizando se obtienen los autovalores siguientes

$$\begin{aligned}
MC_{5,+} &= \frac{3M(-1 - 10g_A^2 + 17g_A^4)}{256\pi^3 f^4} \\
MC_{5,-} &= \frac{3M(-1 - 10g_A^2 + 47g_A^4)}{256\pi^3 f^4}
\end{aligned} \tag{5.79}$$

Para  $g_A = 1,26$  ambos son positivos, por lo que las componentes propias del potencial son repulsivas. Los valores son  $MC_{5,+} = 0,97 \text{ fm}^3$  y  $MC_{5,-} = 3,80 \text{ fm}^3$ , siendo las escalas de longitud correspondientes  $R_{5,+} = 0,99 \text{ fm}$  y  $R_{5,-} = 1,56 \text{ fm}$ . Esto significa que para resolver el potencial se tiene que tomar la solución regular, y por tanto no puede fijarse ningún parámetro.

En la figura (5.8) se muestran los defasajes para el potencial quiral de intercambio de dos piones a NLO, tomando la solución regular. Como se observa los resultados NLO no reproducen los defasajes fenomenológicos  ${}^3S_1$  y  $E_1$ , e imposibilitan un patrón de convergencia quiral  $\text{LO} \rightarrow \text{NLO} \rightarrow \text{NNLO}$ . En concreto, la longitud de dispersión en el canal  ${}^3S_1$  es negativa, y por lo tanto con el potencial NLO el deuterón no está ligado. El único defasaje aceptable es el  ${}^3D_1$ , lo que indica que esta cantidad es poco sensible a la física de cortas distancias que determina el resto de observables en el canal del deuterón. A pesar de esto el resultado NLO para el defasaje propio  ${}^3D_1$  es peor que los resultados LO y NNLO.

---

<sup>5</sup>En el caso del potencial OPE el ángulo que se obtiene cumple  $\tan \theta = -1/\sqrt{2}$ , difiriendo en  $-\pi$  con el de TPE NLO.

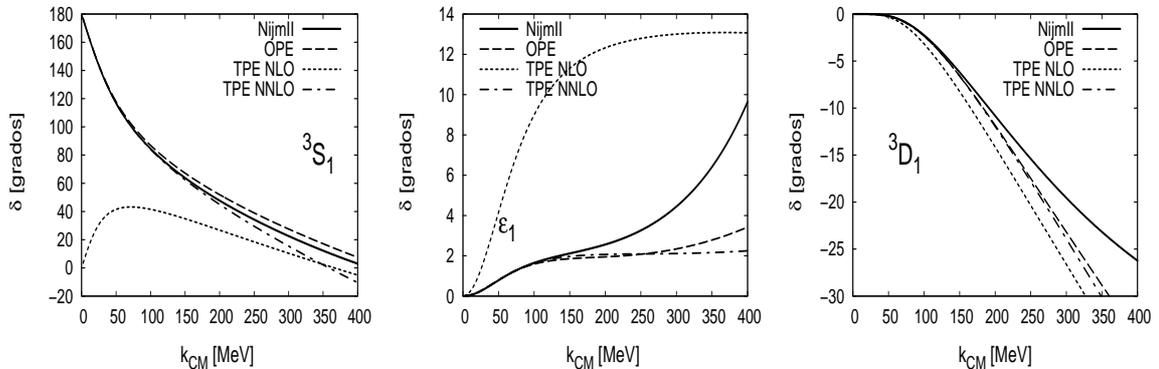


Figura 5.8: Defasajes propios  ${}^3S_1$ ,  $E_1$  y  ${}^3D_1$  en el canal triplete, con los potenciales LO(OPE), NLO y NNLO. Para en potencial NNLO se ha tomado el set IV de acoplamientos quirales.

### 5.7.1. Radio de Corte Finito y Contaje de Weinberg

El requerimiento de renormalizabilidad exige que se tome la solución regular para el potencial quiral a NLO. Sin embargo, si se renuncia a la renormalizabilidad y se considera aceptable trabajar con un radio de corte finito entonces es posible tomar una solución irregular en la que se pueden fijar parámetros como la energía de ligadura o la razón asintótica  $\eta$ . En tal caso el radio de corte no puede reducirse arbitrariamente ya que la función de onda va a diverger en el origen, lo que tendrá consecuencias sobre los observables calculados. Por ejemplo, la normalización asintótica  $A_S$  tenderá a cero cuando el radio de corte sea bastante pequeño debido a la divergencia de la función de onda. Con otros observables habrá otros problemas. Esto significa que en un cálculo con el potencial quiral de NLO el radio de corte es un parámetro ajustable, que se toma en un rango en donde permita reproducir los observables.

Por otra parte los argumentos anteriores sobre el radio de corte en el cálculo a NLO explican una tendencia observada en cálculos anteriores en espacio de momentos [23], en donde se renormaliza mediante un corte en momento  $\Lambda$ . El rango en el que puede variar el corte  $\Lambda$  en el cálculo a NLO es menor ( $\Lambda \sim 400 - 600$  MeV) que para LO ( $\Lambda \sim 700 - 800$  MeV) y NNLO ( $\Lambda \sim 800 - 1000$  MeV). Sin embargo las razones de esta limitación con los valores permitidos de la escala  $\Lambda$  no estaban claras. El análisis de la renormalización en espacio de posiciones permite entender este problema con el corte en los cálculos a NLO.

El contaje de Weinberg utilizado normalmente en los cálculos en espacio de momentos se basa en un análisis de las dimensiones de las contribuciones quirales al potencial nuclear para decidir el orden de éstas. El orden se denota  $Q^\nu$ , con  $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$ , y  $Q$  se refiere a escalas ligeras similares a la masa del pión. LO equivale a orden  $Q^0$ , NLO a orden  $Q^2$  y NNLO a

	$\gamma$	$\eta$	$A_S(\text{fm}^{-1/2})$	$r_m(\text{fm})$	$Q_d(\text{fm}^2)$	$P_D$
OPE	Input	0.0251(2)	0.885(12)	1.97(2)	0.273(4)	5.8(4) %
OPE	Input	Input	0.889(11)	1.98(2)	0.278(4)	5.54(5) %
NLO	Input	Input	0.882(11)	1.96(2)	0.274(7)	5.30(10) %
NNLO (Set IV)	Input	Input	0.897(4)	1.99(2)	0.284(4)	6.6(4) %
Exp.	0.231605	0.0256(4)	0.8846(9)	1.971(6)	0.2859(3)	5.67(4) %

Cuadro 5.7: Observables del deuterón para el potencial OPE, TPE NLO y NNLO con corte finito  $r_c = 0,9 \text{ fm}$ . En el potencial OPE se muestran los resultados que se obtienen al fijar el número de onda  $\gamma$ , y al fijar  $\gamma$  y la razón asintótica  $\eta$ . Para los potenciales TPE NLO y NNLO se fijan  $\gamma$  y  $\eta$  al valor experimental. El error ha sido estimado variando el radio de corte en el rango  $0,8 - 1,0 \text{ fm}$ .

$Q^3$ . No hay contribución de orden  $\nu = 1$  debido a paridad e inversión temporal. En LO la interacción nuclear en el canal del deuterón está descrita por el potencial de intercambio de un pión y un término de contacto entre los nucleones. El término de contacto, o contratérmino, equivale a la condición de fijar un observable. De esta manera se tiene que a LO el conteo de Weinberg y la exigencia de renormalizabilidad coinciden. En NLO la interacción nuclear viene dada por el potencial de intercambio de dos piones a NLO y dos términos de contacto entre los nucleones. En este caso el conteo de Weinberg entra en conflicto con la renormalizabilidad. Ésta es la razón de que el corte  $\Lambda$  tenga un rango de variación menor que en NLO.

En la figura (5.9) se muestran los observables del deuterón para el potencial quiral a LO, NLO y NNLO con un corte finito. En el cálculo NLO se han fijado dos contratérminos, por lo que éste representa el conteo de Weinberg a NLO. Este cálculo presenta una ventana en el rango  $r_c \sim 0,8 - 1,0 \text{ fm}$  en el que los observables del deuterón son reproducidos razonablemente bien. La ventana no es muy grande, en acuerdo con los cálculos hechos en espacio de momento. Para radios de corte en torno a  $\sim 0,5 - 0,6 \text{ fm}$  el cálculo NLO comienza a fallar debido a que para estas distancias la solución irregular se hace más grande que la regular. Los cálculos LO y NNLO se han realizado fijando el número de parámetros habitual, uno y dos respectivamente.

La figura (5.9) sugiere que se podría trabajar con un radio de corte finito para todos los ordenes y comparar de esta manera la convergencia de la expansión quiral. El radio de corte adecuado estaría en el rango  $0,8 - 1,0 \text{ fm}$  en el que el cálculo NLO da los resultados más aceptables. En la tabla (5.7) se presenta este cálculo de corte finito, en donde se ha elegido un radio de corte  $r_c = 0,9 \text{ fm}$ . Se muestran los resultados para el potencial OPE fijando el número de onda del deuterón, y los potenciales OPE, TPE NLO y NNLO fijando  $\gamma$  y  $\eta$ . El cálculo OPE con dos contratérminos es divergente cuando el radio de corte se hace pequeño, como el cálculo NLO, pero se muestra para poder discutir con más detalle

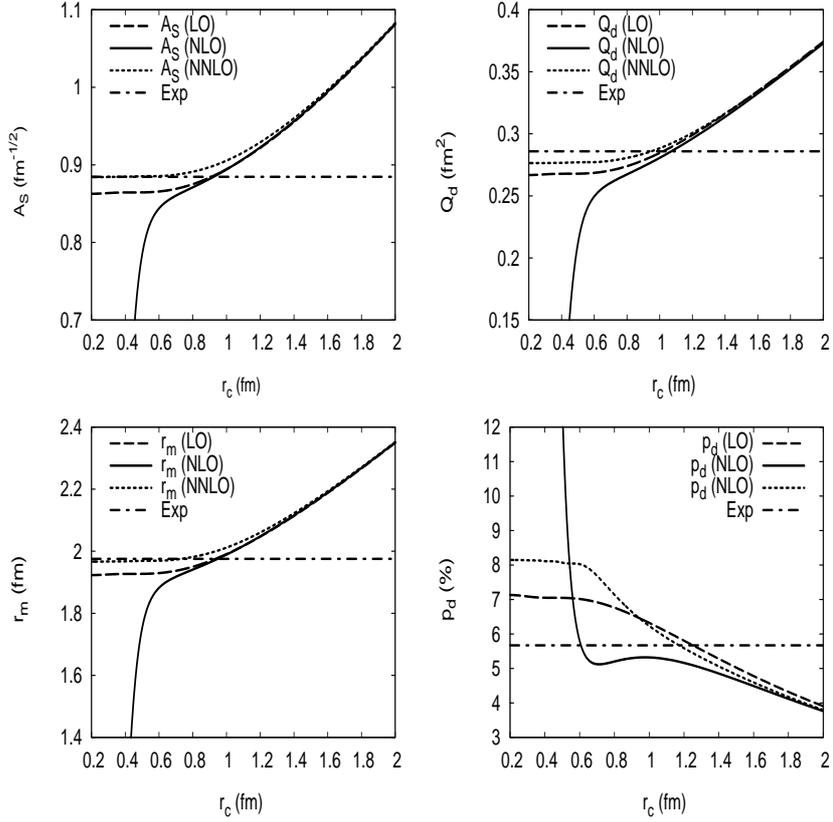


Figura 5.9: Dependencia respecto al radio de corte de los observables del deuterón para los potenciales quirales a LO, NLO y NNLO. En el cálculo LO se fija la energía de ligadura del deuterón al valor experimental, mientras que en los cálculos de NLO y NNLO se fijan la energía de ligadura y la razón asintótica  $\eta$ . El cálculo LO diverge para radios de corte pequeños ( $r < 0,5$  fm) debido a que la solución irregular domina a cortas distancias.

la convergencia quiral con radio de corte finito. Los errores han sido estimados variando el radio de corte en el intervalo  $0,8 - 1,0$  fm. Otras fuentes de errores, como la generada por el error experimental en  $\gamma$  o  $\eta$ , han sido consideradas, pero su contribución es mucho menor que la debida a la variación del radio de corte. Del comportamiento de los observables en la figura (5.9) se deduce que el error de corte finito para el radio de corte considerado en general escala linealmente, por lo que los errores en la tabla (5.7) se doblarían si el intervalo considerado fuera dos veces mayor, de  $0,7$  a  $1,1$  fm.

En general los resultados de la tabla (5.7) son compatibles entre sí, teniendo en cuenta los errores de corte finito, pero el patrón de convergencia quiral no es claro, como lo era en el paso de LO  $\rightarrow$  NNLO considerando los resultados renormalizados. Esto es debido a que el radio de corte es grande y las escalas más pequeñas de los potenciales considerados no se observan tan bien como en un cálculo renormalizado. La manera de mejorar la convergencia quiral es reducir el radio de corte en el caso de los potenciales OPE y TPE NNLO, tal y como se hace en espacio de momentos, pero en tal caso la comparación entre ordenes quirales termina siendo poco sistemática. Para los potenciales OPE y TPE NNLO la elección del radio de corte no es especialmente importante siempre y cuando sea suficientemente pequeño, y los errores debido a un radio de corte finito van a estar bajo control. En el caso de NLO esto no es así: el radio de corte no puede bajar de un determinado valor, y la estimación del error debido a corte finito no acaba de ser sistemática porque no hay un resultado renormalizado con el que comparar. Por ejemplo, en la tabla (5.7) los errores se han estimado variando el radio de corte en un intervalo determinado. Si se dobla el tamaño de este intervalo el error aproximadamente se dobla. Por otra parte el tamaño del intervalo es arbitrario. Además no es posible disminuir el radio de corte mucho más sin que los resultados se estropeen.

### 5.7.2. Contaje $\Delta$

En el contaje de Weinberg los efectos debidos a la excitación delta son considerados como NNLO ( $Q^3$ ). La escala de energía asociada a la delta es la diferencia de masas entre la delta y el nucleón

$$\Delta = M_{\Delta} - M_N = 293 \text{ MeV} \sim 2m \quad (5.80)$$

Esta escala es normalmente considerada de alta energía en el tratamiento efectivo de las interacciones nucleares. Sin embargo el hecho de que sea similar a dos veces la masa del pión sugiere que se la podría tratar como una escala de baja energía, y por lo tanto contribuiría en el contaje de potencias como la masa del pión,  $\Delta \sim m \sim Q$ . En concreto este camino ya se ha sugerido en las referencias (*tal y cual*).

Los potenciales de intercambios piónicos quirales se construyen a partir de los diagramas irreducibles del lagrangiano quiral. Cálculando estos diagramas se obtiene el potencial. Los diagramas son ordenados según potencias de la escala de baja energía  $Q$ , como se ha co-

mentado al tratar el potencial NLO con corte finito. Un diagrama que contenga una delta estará suprimido en un factor  $Q/\Delta$  en relación con un diagrama idéntico que en lugar de la delta contenga el propagador de un nucleón. Si el diagrama es de orden  $Q^\nu$ , el diagrama con delta tendrá un orden  $Q^{\nu+1}$ . Es por esto que los efectos de la delta no están incluidos hasta NNLO. Los diagramas irreducibles de orden más bajo en los que se puede insertar una delta aparecen a NLO, y son de orden  $Q^2$ , por lo que si se considera que  $\Delta$  es una escala de alta energía, el diagrama con la delta será de orden  $Q^3$ , es decir, NNLO. Si por el contrario se considera que  $\Delta$  es una escala de baja energía, y por tanto  $\Delta \sim Q$ , entonces el diagrama con una delta será del mismo orden que el diagrama sin delta, y su contribución aparecerá a NLO en vez de NNLO.

En el potencial de intercambio de dos piones el efecto de la delta está incluido en los acoplamientos quirales  $c_3$  y  $c_4$ . La contribución debida únicamente a la delta sería equivalente a seleccionar sólo aquellas componentes del potencial que contienen  $c_3$  y  $c_4$  y en tomar para los acoplamientos quirales los valores

$$\begin{aligned} c_3 &= -\frac{g_A^2}{2\Delta} \\ c_4 &= \frac{g_A^2}{4\Delta} \end{aligned} \tag{5.81}$$

Si se añade esta contribución al potencial TPE NLO los dos canales propios del potencial resultante son atractivos a cortas distancias, con lo que para determinar la función de onda del deuterón se necesitan dos parámetros y se elimina el problema de la no renormalizabilidad del cálculo NLO.

En la tabla (5.8) se muestran los observables del deuterón para el potencial NLO+ $\Delta$ , y para los potenciales LO(OPE) y NNLO, tomando en este último el set IV de parámetros. También se muestra el cálculo NLO con corte finito. Los errores en el cálculo OPE corresponden a variar el radio de corte en el rango 0,1 – 0,2 fm y en el cálculo NLO con corte finito a variarlo en 0,8 – 1,0 fm, el mismo intervalo considerado en la tabla anterior (5.7). En los cálculos NLO+ $\Delta$  y NNLO el error es el correspondiente al generado por el error experimental en  $\gamma$  y  $\eta$ . Como puede observarse la inclusión de la  $\Delta$  en NLO restaura la convergencia de la expansión quiral del potencial, y reconcilia el conteo de Weinberg con la exigencia de renormalizabilidad en el canal del deuterón.

## 5.8. Conclusiones

La descripción renormalizada del deuterón mediante el potencial de intercambio de dos piones se basa en principios generales como la ortogonalidad de las funciones de onda y requiere tres parámetros libres, la energía de ligadura del deuterón, la razón asintótica  $D/S$

	$\gamma$	$\eta$	$A_S(\text{fm}^{-1/2})$	$r_m(\text{fm})$	$Q_d(\text{fm}^2)$	$P_D$
OPE	Input	0.02633	0.8681(1)	1.9351(5)	0.2762(1)	7.31(1) %
NLO ( $r_c = 0,9 \text{ fm}$ )	Input	Input	0.882(11)	1.96(2)	0.274(7)	5.30(10) %
NLO + $\Delta$	Input	Input	0.8869(8)	1.973(2)	0.276(6)	5.7(6) %
NNLO (Set IV)	Input	Input	0.884(4)	1.967(6)	0.276(3)	8(1) %
Exp.	0.231605	0.0256(4)	0.8846(9)	1.971(6)	0.2859(3)	5.67(4) %

Cuadro 5.8: Propiedades del deuterón para el potencial OPE y los potenciales TPE NLO con corte finito, NLO+ $\Delta$  y NNLO. En el caso del potencial TPE NLO se toma un radio de corte finito  $r_c = 0,9 \text{ fm}$ . La inclusión de la delta hace que la expansión quiral del potencial nuclear sea convergente. Los errores en el potencial OPE han sido estimados variando el radio de corte en el rango  $0,1 - 0,2 \text{ fm}$ , y los del potencial TPE NLO con corte finito variando  $r_c$  en el rango  $0,8 - 1,0 \text{ fm}$ . En los potenciales TPE NLO+ $\Delta$  y NNLO el error proviene de la incertidumbre experimental en los parámetros de entrada  $\gamma$  y  $\eta$ .

y la longitud de dispersión del canal  $^3S_1$  para la determinación unívoca de una solución física. La descripción que se consigue de los observables es notable y está dentro de las barras de error experimental y proporciona además un laboratorio de pruebas perfecto para estudiar el impacto de la simetría quiral en la interacción nucleón-nucleón mediante análisis de los errores asociados a los acoplamientos quirales.

Si se comparan los resultados obtenidos con los del potencial OPE, se puede concluir que intercambio de un pión proporciona el grueso de la descripción del deuterón, mientras que simetría quiral afina esta descripción hasta obtenerse descripciones teóricas comparables con experimento. Sin embargo también se observa que debido a las incertidumbres en los acoplamientos quirales y los parámetros de entrada se llega a un límite en la precisión de la descripción quiral de la interacción NN. Los errores teóricos en el caso del potencial de intercambio de dos piones son mayores que para el potencial OPE, por lo que desde el punto de vista de la descripción teórica no estaría justificado un cálculo que incluyese efectos de intercambio de tres piones al menos hasta que se reduzcan las incertidumbres de los acoplamientos quirales. También se realiza un ajuste de los acoplamientos quirales a los observables de baja energía de los canales singlete y triplete, novedosa ya que normalmente estos parámetros quirales se determinan ajustando procesos de dispersión a energías intermedias, y en la que no hay contaminación espúrea debido a efectos de corte finito, como probablemente ocurre en otras determinaciones.

Por otra parte existe la posibilidad de realizar una predicción teórica para la razón asintótica  $D/S$  del deuterón más precisa que el actual valor experimental. La idea en la que se basa esta determinación es que uno puede elegir cualesquiera dos parámetros para

describir el deuterón. Si se toman los dos con menores errores experimentales,  $B_d$  y  $A_S$ , se reduce al mínimo la incertidumbre debida a los parámetros de entrada. En este ejemplo y tomando el set IV de acoplamientos se obtendría  $\eta = 0,0255(1)$ , menor que el error experimental, claro que sólo se ha propagado el error correspondiente a la entrada; si se propagan los errores debidos a la incertidumbre en los acoplamientos quirales se obtendrá un error mayor que el experimental. Por tanto una condición fundamental para esta determinación teórica de la razón asintótica  $D/S$  es que se puedan determinar los acoplamientos quirales  $c_1$ ,  $c_3$  y  $c_4$  con mayor precisión que la actual. De confirmarse tal cálculo constituiría un hito en física hadrónica, comparable con la determinación teórica de la longitud de dispersión entre piones llevada a cabo recientemente [74, 75, 76].

Desde un punto de vista formal resulta preocupante que el potencial quiral a NLO no sea renormalizable. Este hecho es consecuencia de que la expansión del potencial en teoría quiral de perturbaciones no se corresponde con una expansión de largas distancias en potencias de  $1/r$ . Sin embargo pone en peligro el programa de aplicación de las teorías efectivas en física nuclear, al ser imposible una descripción renormalizada en un término intermedio de la expansión quiral. Existen dos alternativas, o se respecta el contaje final y se trabaja con un corte finito a todos los ordenes, o se elimina el radio de corte a expensas de modificar el contaje. En principio se estudian ambas opciones, pero preferimos la opción de modificar el contaje y proponemos el contaje  $\Delta$ . La opción de corte finito no es aceptable ya que en tal caso es imposible hacer predicciones independientes de modelo para los potenciales quirales. Por otro lado la no renormalizabilidad del potencial NLO explica la tendencia observada en cálculos anteriores [23] que implementan el contaje de Weinberg con corte finito.

## Capítulo 6

# Ondas Parciales Periféricas

### 6.1. Introducción

Las ondas parciales periféricas fueron una de las primeras aplicaciones de teoría quiral de perturbaciones en el sistema NN [20, 21]. El hecho de que tengan alto momento angular hace que sean especialmente insensibles a qué ocurra a cortas distancias, debido a la supresión centrífuga,  $u_l(r) \sim r^l$ , por lo que es más sencillo realizar predicciones independientes de modelo. Lo cierto es que el tratamiento perturbativo es suficiente para obtener unos resultados aceptables en el caso de momento angular alto.

Aun así los métodos de renormalización y regularización son en este caso útiles. Por un lado permiten obtener soluciones no perturbativas y renormalizadas para estas ondas parciales; esto puede que no mejore mucho la descripción de dichas ondas, pero resulta útil por ejemplo si se quiere determinar los acoplamientos quirales  $c_1$ ,  $c_3$  y  $c_4$  sin contaminación espúrea de física de cortas distancias (efectos de corte finito) en las ondas periféricas. Por otro es necesario realizar el cálculo para completar el estudio que ya se ha hecho en las ondas centrales.

### 6.2. Regularización de las Ondas Periféricas

#### 6.2.1. Descripción de las Ondas Periféricas

Los estados de dispersión quedan descritos por la ecuación de Schrödinger reducida, que según el canal considerado se escribe:

(i) canal singlete ( $s = 0$ ,  $l = j$ )

$$-u''(r) + \left[ U_{jj}^{0j}(r) + \frac{j(j+1)}{r^2} \right] u(r) = k^2 u(r) \quad (6.1)$$

(ii) canal triplete desacoplado ( $s = 1, l = j$ )

$$-v''(r) + \left[ U_{jj}^{1j}(r) + \frac{j(j+1)}{r^2} \right] v(r) = k^2 v(r) \quad (6.2)$$

(iii) canal triplete acoplado ( $s = 1, l = j \pm 1$ )

$$\begin{aligned} -u''(r) + \left[ U_{j-1,j-1}^{1j}(r) + \frac{(j-1)j}{r^2} \right] u(r) + U_{j-1,j+1}^{1j}(r) w(r) &= k^2 u(r) \\ -w''(r) + \left[ U_{j+1,j+1}^{1j}(r) + \frac{(j+1)(j+2)}{r^2} \right] w(r) + U_{j+1,j-1}^{1j}(r) u(r) &= k^2 w(r) \end{aligned} \quad (6.3)$$

en donde  $U(r) = 2\mu_{np}V(r)$  es el potencial nuclear reducido y  $\mu_{np} = M_p M_n / (M_p + M_n)$  es la masa reducida protón-neutrón. Estas ecuaciones pueden escribirse de manera compacta usando notación matricial

$$-\mathbf{u}''(r) + \left[ \mathbf{U}(r) + \frac{\mathbf{I}^2}{r^2} \right] \mathbf{u}(r) = k^2 \mathbf{u}(r) \quad (6.4)$$

en donde  $\mathbf{U}(r) = 2\mu_{np}\mathbf{V}(r)$ ,  $\mathbf{I}^2$  y  $\mathbf{u}(r)$  son matrices que representan el potencial reducido, el momento angular y la función de onda reducida respectivamente. Para momento angular total  $j > 0$  la matriz de potencial reducido puede escribirse como

$$\mathbf{U}^{0j}(r) = U_{jj}^{0j} \quad (6.5)$$

$$\mathbf{U}^{1j}(r) = \begin{pmatrix} U_{j-1,j-1}^{1j}(r) & 0 & U_{j-1,j+1}^{1j}(r) \\ 0 & U_{jj}^{1j}(r) & 0 \\ U_{j+1,j-1}^{1j}(r) & 0 & U_{j+1,j+1}^{1j}(r) \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

según se trate de un canal singlete ( $\mathbf{U}^{0j}$ ) o un canal triplete ( $\mathbf{U}^{1j}$ ). En esta elección de matrices los canales tripletes acoplados y desacoplados se escriben con una única ecuación, si bien pueden separarse en dos ecuaciones cuando convenga. La matriz de momento angular es diagonal y viene dada por  $\mathbf{I}^2 = \text{diag}(l_1(l_1+1), \dots, l_N(l_N+1))$ . En los canales singletes se tiene que  $N = 1$  y  $l = j$ , mientras que en los tripletes  $N = 3$  y  $l_1 = j-1$ ,  $l_2 = j$  y  $l_3 = j+1$ .

La matriz  $\mathbf{u}$  que representa la función de onda reducida puede resultar algo extraña, ya que parecería más natural usar un vector y no una matriz. La motivación de usar una matriz está en que un canal acoplado tiene más de una solución asintótica linealmente independiente (un ejemplo son los estados asintóticos de dispersión  $\alpha$  y  $\beta$  del deuterón). Cada columna de

la matriz  $\mathbf{u}$  representa una solución linealmente independiente de la ecuación de Schrödinger en la notación usual, mientras que cada fila representa las soluciones de un determinado momento angular, es decir

$$\mathbf{u}(r) = \begin{pmatrix} u_1(r) & u_2(r) & u_3(r) \\ v_1(r) & v_2(r) & v_3(r) \\ w_1(r) & w_2(r) & w_3(r) \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

en donde los subíndices 1, 2 y 3 indican las diferentes soluciones independientes. Una elección natural es tomar  $v_1 = v_3 = 0$  y  $u_2 = w_2 = 0$  de forma que se exprese explícitamente el hecho de que el canal triplete con  $l = j$  está desacoplado.

### 6.2.2. Comportamiento Asintótico en Infinito

En el límite asintótico de grandes distancias las soluciones de dispersión se comportan como

$$\mathbf{u}(r) \rightarrow \hat{\mathbf{h}}^{(-)}(r) - \hat{\mathbf{h}}^{(+)}(r)\mathbf{S} \quad (6.8)$$

en donde  $\mathbf{S}$  es la matriz de dispersión y las ondas entrantes y salientes vienen dadas por

$$\hat{\mathbf{h}}^{(\pm)}(r) = \text{diag}(\hat{h}_{l_1}^{\pm}(kr), \dots, \hat{h}_{l_N}^{\pm}(kr)) \quad (6.9)$$

siendo  $\hat{h}_l^{\pm}(x)$  las funciones de Hankel reducidas de orden  $l$ ,  $\hat{h}_l^{\pm}(x) = xH_{l+1/2}^{\pm}(x)$  ( $\hat{h}_0^{\pm}(x) = e^{\pm ix}$ ), que representan la solución libre de la ecuación de Schrödinger para momento angular  $l$ .

Para un canal singlete de espín,  $s = 0$ , se tiene que  $l = j$  y por lo tanto se trata de un estado desacoplado, con lo que la matriz  $\mathbf{S}$  se escribe como

$$S_{jj}^{0j} = e^{2i\delta_j^{0j}} \quad (6.10)$$

Para un canal triplete desacoplado ( $l = j$ ) la matriz  $\mathbf{S}$  se escribe de forma análoga al caso del canal singlete

$$S_{jj}^{1j} = e^{2i\delta_j^{1j}} \quad (6.11)$$

Mientras, en el caso de los canales tripletes acoplados, la matriz  $\mathbf{S}$  es una matriz de dos componentes respecto a los índices  $l, l' = j \pm 1$ . En tal caso existen varias parametrizaciones posibles y una de ellas es la de Blatt-Biedenharn (BB) [77, 78]

$$S^{1j} = \begin{pmatrix} \cos \epsilon_j & -\sin \epsilon_j \\ \sin \epsilon_j & \cos \epsilon_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2i\delta_{1j}^{1j}} & 0 \\ 0 & e^{2i\delta_{2j}^{1j}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \epsilon_j & \sin \epsilon_j \\ -\sin \epsilon_j & \cos \epsilon_j \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

En esta parametrización la unitariedad de la matriz S resulta evidente. La otra parametrización comúnmente usada para la matriz S y los defasajes es la de de Stapp-Ypsilantis-Metropolis (SYM) [79]

$$\begin{aligned} S^{1j} &= \begin{pmatrix} S_{j-1j-1}^{1j} & S_{j-1j+1}^{1j} \\ S_{j+1j-1}^{1j} & S_{j+1j+1}^{1j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\bar{\epsilon}_j) e^{2i\bar{\delta}_{1j}^{1j}} & i \sin(2\bar{\epsilon}_j) e^{i(\bar{\delta}_{1j}^{1j} + \bar{\delta}_{2j}^{1j})} \\ i \sin(2\bar{\epsilon}_j) e^{i(\bar{\delta}_{1j}^{1j} + \bar{\delta}_{2j}^{1j})} & \cos(2\bar{\epsilon}_j) e^{2i\bar{\delta}_{2j}^{1j}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La relación entre los defasajes SYM y BB viene dada por

$$\bar{\delta}_{1j}^{1j} + \bar{\delta}_{2j}^{1j} = \delta_{1j}^{1j} + \delta_{2j}^{1j} \quad (6.13)$$

$$\sin(\bar{\delta}_{1j}^{1j} - \bar{\delta}_{2j}^{1j}) = \frac{\tan(2\bar{\epsilon}_j)}{\tan(2\epsilon_j)} \quad (6.14)$$

Las longitudes de dispersión se obtienen de la expansión de baja energía ( $k \rightarrow 0$ ) para la matriz S

$$(\mathbf{S} - \mathbf{1})_{\nu,l} = -2i\alpha_{\nu,l} k^{l'+l+1} + \dots \quad (6.15)$$

en donde  $\alpha_{\nu l}$  representa las diferentes longitudes de dispersión. Mediante las relaciones entre la matriz S y los defasajes en sus respectivas parametrizaciones se obtiene el comportamiento de baja energía de éstos últimos. Para los canales desacoplados se obtiene

$$\delta_j^{0j} \rightarrow -\alpha_j^{0j} k^{2j+1} \quad (6.16)$$

$$\delta_j^{1j} \rightarrow -\alpha_j^{1j} k^{2j+1} \quad (6.17)$$

mientras que para los canales acoplados en la representación SYM se tiene

$$\bar{\delta}_{j-1}^{1j} \rightarrow -\alpha_{1j}^{1j} k^{2j-1} \quad (6.18)$$

$$\bar{\delta}_{j+1}^{1j} \rightarrow -\alpha_{2j}^{1j} k^{2j+3} \quad (6.19)$$

$$\bar{\epsilon}_j \rightarrow -e_j^{1j} k^{2j+1} \quad (6.20)$$

En el caso de la representación BB de los defasajes el comportamiento de los defasajes a baja energía es algo más complicado

$$\delta_{j-1}^{1j} \rightarrow -\alpha_{1j}^{1j} k^{2j-1} \quad (6.21)$$

$$\delta_{j+1}^{1j} \rightarrow -\left(\alpha_{2j}^{1j} - \frac{e_j^{1j}}{\alpha_{1j}^{1j}}\right) k^{2j+3} \quad (6.22)$$

$$\epsilon_j \rightarrow \frac{e_j^{1j}}{\alpha_{1j}^{1j}} k^{2j} \quad (6.23)$$

El comportamiento asintótico expresado en la ecuación (6.8) resulta muy conveniente para el cálculo de la matriz  $S$  y para la definición de los defasajes y las longitudes de dispersión. Sin embargo en caso de que se quiera calcular los defasajes de manera directa es más útil el comportamiento asintótico en término de funciones de onda reales. En tales casos para canales desacoplados se tiene

$$u_{k,j}(r) \rightarrow \hat{j}_j(kr) \cot \delta_j - \hat{y}_j(kr) \quad (6.24)$$

en donde  $\delta_j$  representa a  $\delta_j^{0j}$  o  $\delta_j^{1j}$  según se trate de un canal singlete o un canal triplete. En el caso de los canales acoplados tenemos dos soluciones independientes de dispersión,  $\alpha$  y  $\beta$ , que se comportan asintóticamente como

$$\begin{aligned} u_{k,j,\alpha}(r) &\rightarrow \hat{j}_{j-1}(kr) \cot \delta_{1j}^{1j} - \hat{y}_{j-1}(kr) \\ w_{k,j,\alpha}(r) &\rightarrow \tan \epsilon_j [\hat{j}_{j+1}(kr) \cot \delta_{1j}^{1j} - \hat{y}_{j+1}(kr)] \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} u_{k,j,\beta}(r) &\rightarrow -\tan \epsilon_j [\hat{j}_{j-1}(kr) \cot \delta_{2j}^{1j} - \hat{y}_{j-1}(kr)] \\ w_{k,j,\beta}(r) &\rightarrow \hat{j}_{j+1}(kr) \cot \delta_{2j}^{1j} - \hat{y}_{j+1}(kr) \end{aligned} \quad (6.26)$$

donde por conveniencia se han usado los defasajes BB que generan un comportamiento asintótico más sencillo.

### 6.2.3. Comportamiento en el Origen

El comportamiento de las funciones de onda cerca del origen está determinado por el potencial de largas distancias y es necesario para establecer las condiciones de regularización que permitan calcular una solución que no dependa de las ambigüedades de cortas distancias. El comportamiento cerca del origen del potencial quiral viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\text{LO}}(r) &\rightarrow \pm \frac{1}{r}, \pm \frac{1}{r^3} \\ \mathbf{U}_{\text{NLO}}(r) &\rightarrow \pm \frac{1}{r^5} \\ \mathbf{U}_{\text{NNLO}}(r) &\rightarrow \pm \frac{1}{r^6} \end{aligned} \quad (6.27)$$

en donde para LO se ha distinguido entre la singularidad del potencial para los canales singletes ( $1/r$ ) y tripletes ( $1/r^3$ ), mientras que para NLO y NNLO el comportamiento del potencial en el origen es el mismo independientemente del espín del canal. Nótese que para cada orden nuevo de la expansión quiral el potencial se hace más singular.

Según el comportamiento del potencial en el canal considerado se distinguen varios casos. El primero es el potencial LO en los canales singlete, que se comporta como  $1/r$  cerca del origen, y es el único caso en el que el potencial es regular. Para onda  $s$  esto significa que se tiene la libertad de fijar la longitud de dispersión (u otro observable). Sin embargo para ondas parciales superiores,  $l \geq 1$ , no se puede fijar ningún observable debido a que el comportamiento de la solución irregular para la función de onda cerca del origen es singular

$$u_l \sim \frac{C_{1l}}{r^l} + C_{2l} r^{l+1} \quad (6.28)$$

por lo que es necesario tomar  $C_{1l} = 0$ , y la longitud de dispersión está fijada por la condición de regularidad de la función de onda. Esto se debe a que el comportamiento de la función de onda cerca del origen está dominado por la barrera centrifuga y no por el potencial. Sin embargo la situación cambia al considerar los potenciales quirales a NLO y NNLO, que son singulares. En el caso repulsivo se debe tomar la solución regular para que la función de onda sea normalizable, por lo que la longitud de dispersión está determinada por el potencial de largas distancias y no puede tomarse como un parámetro libre. La función de onda se comporta cerca del origen como

$$u(r) \rightarrow r^{n/4} C_R \exp \left[ -\frac{2}{N-2} \left( \frac{R_L}{r} \right)^{\frac{n}{2}-1} \right] \quad (6.29)$$

independientemente del momento angular del canal considerado, con  $n = 5, 6$  para NLO y NNLO respectivamente. En el caso atractivo las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Schrödinger son regulares, y la función de onda cerca del origen se comporta como

$$u(r) \rightarrow C_A r^{N/4} \sin \left[ \frac{2}{N-2} \left( \frac{R_L}{r} \right)^{\frac{N}{2}-1} + \varphi \right] \quad (6.30)$$

en donde  $\varphi$  es una fase semiclásica arbitraria. Para determinar la solución renormalizada es necesario fijar la longitud de dispersión, ya que es un parámetro libre.

En los canales triplete puede distinguirse entre canales acoplados y desacoplados. En los desacoplados el potencial siempre es singular ( $1/r^3$ ,  $1/r^5$  y  $1/r^6$  para LO, NLO y NNLO respectivamente) por lo que la situación es idéntica a la de los canales singlete con potenciales singulares. Por tanto para los potenciales repulsivos la solución cerca del origen viene dada por (6.29) con  $n = 3, 5, 6$  según el caso y la longitud de dispersión no puede fijarse, mientras que para los potenciales atractivos la solución cerca del origen queda descrita por (6.30) y es necesario fijar la longitud de dispersión.

La discusión de los canales tripletes acoplados es idéntica a la hecha en la sección (5.2) del capítulo (5). En estos casos se diagonaliza el potencial cerca del origen, y según los

autovalores del potencial se determina el comportamiento cerca del origen de la función de onda, y por tanto el número de parámetros que es necesario fijar. Los resultados son que si los dos autovalores son repulsivos no se puede fijar ningún parámetro y se toma la solución regular, si un autovalor es atractivo y el otro repulsivo se debe fijar un parámetro, y por último si los dos autovalores son atractivos entonces tienen que fijarse tres parámetros. Los parámetros elegidos son siempre longitudes de dispersión.

En la tabla (6.1) se resume la situación de las longitudes de dispersión que son necesarias fijar en cada onda parcial considerada. Para los canales acoplados con autovalores atractivo-repulsivo para el potencial se escoge la longitud de dispersión de la onda con menor momento angular como parámetro de entrada. También se muestra el valor de las longitudes de dispersión que se obtienen usando los potenciales fenomenológicos Nijmegen II y Reid 93. Se debe tener en cuenta que sólo hay valores experimentales para la longitud de dispersión en los canales  $^1S_0$  y  $^3S_1$ . Por otra parte en la tabla (6.2) se muestran las componentes más singulares de los potenciales quirales a LO, NLO y NNLO en las ondas parciales consideradas en este capítulo.

#### 6.2.4. Regularización

Los procedimientos necesarios para regularizar las distintas ondas periféricas son una extensión y modificación de los considerados en el canal singlete  $^1S_0$  y en el canal del deuterón  $^3S_1 - ^3D_1$  en los capítulos (3), (4) y (5), por lo que no se van a explicar con el mismo detalle que en esos capítulos. Los métodos empleados se basan siempre en usar el principio de superposición y las relaciones de ortogonalidad entre estados de energía finita y energía cero en un determinado radio de corte  $r_c$ . Esto permite obtener ecuaciones algebraicas para funciones trigonométricas de los defasajes. Para no complicar demasiado la discusión se van a explicar de manera separada los casos de los canales desacoplados y acoplados.

#### Canales Desacoplados

Para fijar la longitud de dispersión en los canales desacoplados se construye la solución de energía cero con la longitud de dispersión fijada al valor elegido, e imponiendo ortogonalidad entre esta solución y la de energía finita se obtiene el defasaje. La expresión de la condición de ortogonalidad para un radio de corte finito  $r_c$  es

$$\frac{u'_{k,l}(r_c)}{u_{k,l}(r_c)} = \frac{u'_{0,l}(r_c)}{u_{0,l}(r_c)} \quad (6.31)$$

Este mismo regulador puede usarse para obtener la solución regular de un potencial no singular. En este caso si se tiene en cuenta que la solución de energía cero se comporta como

Onda	$\alpha$ NijmII (Reid93)	LO	NLO	NNLO
$^1S_0$	-23.727(-23.735)	—/Input	Input	Input
$^3P_0$	-2.468(-2.469)	Input	—	Input
$^1P_1$	2.797(2.736)	—	—	—
$^3P_1$	1.529(1.530)	—	Input	Input
$^3S_1$	5.418(5.422)	Input	—	Input
$^3D_1$	6.505(6.453)	—	—	Input
$E_1$	1.647(1.645)	—	—	Input
$^1D_2$	-1.389(-1.377)	—	Input	Input
$^3D_2$	-7.405(-7.411)	Input	Input	Input
$^3P_2$	-0.2844(-0.2892)	Input	Input	Input
$^3F_2$	-0.9763(-0.9698)	—	—	Input
$E_2$	1.609(1.600)	—	—	Input
$^1F_3$	8.383(8.365)	—	—	—
$^3F_3$	2.703(2.686)	—	Input	Input
$^3D_3$	-0.1449(-0.1770)	Input	—	Input
$^3G_3$	4.880(4.874)	—	—	Input
$E_3$	-9.695(-9.683)	—	—	Input
$^1G_4$	-3.229(-3.210)	—	Input	Input
$^3G_4$	-19.17(-19.14)	Input	Input	Input
$^3F_4$	-0.01045(-0.01053)	Input	Input	Input
$^3H_4$	-1.250(-1.240)	—	—	Input
$E_4$	3.609(3.586)	—	—	Input
$^1H_5$	28.61(28.57)	—	—	—
$^3H_5$	6.128(6.082)	—	Input	Input
$^3G_5$	-0.0090(-0.010)	Input	—	Input
$^3I_5$	10.68(10.66)	—	—	Input
$E_5$	-31.34(-31.29)	—	—	Input

Cuadro 6.1: En la tabla se muestran las longitudes de dispersión necesarias que deben usarse como parámetro de entrada para obtener un resultado finito y renormalizado para los defasajes en cada una de las ondas parciales que se muestran. También se muestra el correspondiente valor de las longitudes de dispersión para los potenciales fenomenológicos Nijmegen II y Reid 93.

$r^{l+1}$  cerca del origen, entonces

$$\frac{u'_{k,l}(r_c)}{u_{k,l}(r_c)} = \frac{l+1}{r_c} \quad (6.32)$$

condición mediante la cual podría obtenerse la solución de un potencial regular con el mismo metodo con el que se regulariza la solución de uno singular.

Para aplicar el regulador (6.31) primero se construye la solución de energía cero con longitud de dispersión  $\alpha_l$  a partir de su comportamiento asintótico en infinito que viene dado por

$$u_{0,l}(r) \rightarrow \frac{(2l-1)!!}{r^l} - \frac{r^{l+1}}{(2l+1)!!} \frac{1}{\alpha_l} \quad (6.33)$$

integrando desde infinito hasta el origen se obtiene la función de onda  $u_{0,l}$  completa. Posteriormente, se construyen soluciones de energía finita que se comporten asintóticamente como

$$u_{k,l,r}(r) \rightarrow \hat{j}_l(kr) \quad (6.34)$$

$$u_{k,l,s}(r) \rightarrow \hat{y}_l(kr) \quad (6.35)$$

en donde  $\hat{j}_l(kr)$  y  $\hat{y}_l(kr)$  son las funciones de Bessel esféricas reducidas. A partir de  $u_{k,l,r}$  y  $u_{k,l,s}$  la solución de dispersión genérica se escribe como

$$u_{k,l}(r) = u_{k,l,r}(r) \cot \delta_l - u_{k,l,s}(r) \quad (6.36)$$

con lo que desarrollando y despejando  $\cot \delta_l$  en el regulador (6.31) se obtiene que el defasaje renormalizado viene dado por la expresión

$$\cot \delta_l = \frac{u_{0,l}(r_c) u'_{k,l,s}(r_c) - u'_{0,l}(r_c) u_{k,l,s}(r_c)}{u_{0,l}(r_c) u'_{k,l,r}(r_c) - u'_{0,l}(r_c) u_{k,l,r}(r_c)} \quad (6.37)$$

### Canales Acoplados

En los canales acoplados hay que distinguir entre los casos atractivo-repulsivo (un contratérmino) y atractivo-atractivo (tres contratérminos), que requieren reguladores diferentes. El primer caso, en donde sólo un autovalor del potencial es atractivo, corresponde al potencial de intercambio de un pión, y además de las condiciones de ortogonalidad es necesario imponer la regularidad de la función de onda en el radio de corte  $r_c$ . Se pueden elegir varios reguladores para obtener una función de onda finita en el origen, como por ejemplo  $u(r_c) = 0$  o  $u'(r_c) = 0$ , pero el más efectivo en el sentido que genera la menor dependencia respecto

al radio de corte es el que corresponde a la rotación que diagonaliza el potencial <sup>1</sup>. Así se generan las condiciones de contorno siguientes

$$\begin{aligned} u'_j(r_c) - \sqrt{\frac{j+1}{j}} w'_j(r_c) &= 0 & \text{para } j \text{ impar} \\ u'_j(r_c) + \sqrt{\frac{j}{j+1}} w'_j(r_c) &= 0 & \text{para } j \text{ par} \end{aligned} \quad (6.40)$$

que debe cumplir cualquiera de las soluciones de dispersión consideradas y en la que se ha escogido la derivada de la función de onda en vez de esta última para obtener una convergencia mayor respecto al radio de corte. Sin embargo la principal utilidad de este regulador es que permite calcular la longitud de dispersión  $e_j$  correspondiente al defasaje  $\bar{e}_j$  a partir de la longitud de dispersión  $\alpha^{1j}$ , usada como parámetro de entrada. De esta forma queda determinado por completo el estado de dispersión  $\alpha$  de energía cero.

Una vez calculado el estado de dispersión  $\alpha$  de energía cero se determinan los tres defasajes del canal acoplado mediante ortogonalidad con el estado de energía cero y regularidad de las funciones de onda. La ortogonalidad viene dada por

$$\int_0^\infty dr \left[ u_{0,\alpha}(r) u_{k,i}(r) + w_{0,\alpha}(r) w_{k,i}(r) \right] = 0 \quad \text{para } i = \alpha, \beta \quad (6.41)$$

que para radio de corte finito puede escribirse como

$$u'_{0,\alpha}(r_c) u_{k,i}(r_c) + w'_{0,\alpha}(r_c) w_{k,i}(r_c) = u_{0,\alpha}(r_c) u'_{k,i}(r_c) + w_{0,\alpha}(r_c) w'_{k,i}(r_c) \quad i = \alpha, \beta \quad (6.42)$$

en donde por comodidad se ha omitido de  $u$  y  $w$  el subíndice  $j$  que indica el momento angular total. Normalmente no se va a usar la condición de ortogonalidad, sino la combinación de

---

<sup>1</sup>Para momento angular total  $j$  la rotación que diagonaliza el potencial OPE en los canales acoplados viene dada por

$$\mathbf{R}_j = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{j+1} & \sqrt{j} \\ -\sqrt{j} & \sqrt{j+1} \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

En estos canales el comportamiento del potencial OPE para distancias pequeñas estará dominado por el comportamiento de la componente tensorial,  $1/r^3$ , y el resultado de diagonalizar el potencial mediante la matriz de rotación anterior para  $r \rightarrow 0$  vendrá dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_j \mathbf{U}_{\text{LO}}^{1j} \mathbf{R}_j^T &\rightarrow \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} -4R & 0 \\ 0 & 8R \end{pmatrix} & \text{para } j \text{ impar} \\ \mathbf{R}_j \mathbf{U}_{\text{LO}}^{1j} \mathbf{R}_j^T &\rightarrow \frac{1}{3r^3} \begin{pmatrix} 4R & 0 \\ 0 & -8R \end{pmatrix} & \text{para } j \text{ par} \end{aligned} \quad (6.39)$$

en donde  $\mathbf{U}_{\text{LO}}^{1j}$  representa al potencial OPE reducido en el canal acoplado de momento angular total  $j$  (el superíndice 1 indica el valor del espín total en los canales acoplados).

ortogonalidad con regularidad que genera una condición de regularidad más sencilla. En tal caso se tiene que los estados de dispersión  $\alpha$  y  $\beta$  quedan determinados por los siguientes reguladores

$$\begin{aligned} u'_{k,i}(r_c) &= f_j w'_{k,i}(r_c) \\ \frac{w'_{k,i}(r_c)}{f_j u_{k,i}(r_c) + w_{k,i}(r_c)} &= \frac{w'_\gamma(r_c)}{f_j u_\gamma(r_c) + w_\gamma(r_c)} \quad i = \alpha, \beta \end{aligned} \quad (6.43)$$

en donde  $f_j = \sqrt{\frac{j+1}{j}}$  para  $j$  impar y  $f_j = -\sqrt{\frac{j}{j+1}}$  para  $j$  par. Esto da un total de cuatro ecuaciones (tres independientes) para determinar los defasajes en el canal acoplado.

En el caso de los canales atractivo-atractivo el procedimiento es más sencillo ya que no es necesario imponer la condición de regularidad en la función de onda: en este caso las funciones de onda siempre son regulares. Los estados de dispersión  $\alpha$  y  $\beta$  de energía cero están determinados por completo debido a la prescripción de renormalización de fijar las tres longitudes de dispersión del canal acoplado, y los estados de energía finita se construyen por ortogonalidad con los de energía cero, dando un total de cuatro condiciones de ortogonalidad

$$\int_0^\infty dr \left[ u_{0,i}(r) u_{k,i'}(r) + w_{0,i}(r) w_{k,i'}(r) \right] = 0 \quad \text{para } i, i' = \alpha, \beta \quad (6.44)$$

que para radio de corte finito pueden escribirse como

$$u'_{0,i}(r_c) u_{k,i'}(r_c) + w'_{0,i}(r_c) w_{k,i'}(r_c) = u_{0,i}(r_c) u'_{k,i'}(r_c) + w_{0,i}(r_c) w'_{k,i'}(r_c) \quad i, i' = \alpha, \beta \quad (6.45)$$

Sólo tres de las condiciones son necesarias para determinar los defasajes.

Para la regularización de las soluciones de dispersión tanto para potencial OPE (casos atractivo-repulsivo) como TPE (casos atractivo-atractivo) es necesario calcular las soluciones de dispersión de energía cero. Asintóticamente para momento angular total  $j$  estas soluciones se comportan como

$$\begin{aligned} u_{0,j,\alpha}(r) &\rightarrow \frac{(2j-3)!!}{r^{j-1}} - \frac{r^j}{(2j-1)!!} \frac{1}{\alpha_{1j}} \\ w_{0,j,\alpha}(r) &\rightarrow \frac{(2j-1)!!}{r^{j+1}} \frac{e_j}{\alpha_{1j}} \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} u_{0,j,\beta}(r) &\rightarrow \frac{r^j}{(2j-1)!!} \frac{1}{\alpha_{1j}} \\ w_{0,j,\beta}(r) &\rightarrow \left( \frac{\alpha_{2j}}{e_j} - \frac{e_j}{\alpha_{1j}} \right) \frac{(2j-1)!!}{r^{j+1}} - \frac{r^{j+2}}{(2j+3)!!} \frac{1}{e_j} \end{aligned} \quad (6.47)$$

con  $\alpha_{1j}$ ,  $\alpha_{2j}$  y  $e_j$  las longitudes de dispersión. En el caso del potencial OPE se utiliza únicamente la solución  $\alpha$  y se toma  $e_j$  de manera que el estado  $w_{0,j,\alpha}$  cumpla la condición de regularidad. Para el potencial TPE se construyen las soluciones asintóticas con las longitudes de dispersión que se quiera tomar, y se integran desde infinito hasta el origen para obtener la solución completa.

En el caso de las soluciones de energía finita se construyen soluciones de la ecuación de Schrödinger para los potenciales OPE y TPE que se comporten asintóticamente como

$$u_{k,j,r}(r) \rightarrow \hat{j}_{j-1}(kr) \quad (6.48)$$

$$u_{k,j,s}(r) \rightarrow \hat{y}_{j-1}(kr) \quad (6.49)$$

$$w_{k,j,r}(r) \rightarrow \hat{j}_{j+1}(kr) \quad (6.50)$$

$$w_{k,j,s}(r) \rightarrow \hat{y}_{j+1}(kr) \quad (6.51)$$

en donde el subíndice  $j$  representa el momento angular total mientras que  $\hat{j}_l(kr)$  y  $\hat{y}_l(kr)$  son las funciones de Bessel esféricas reducidas. Mediante estas funciones las soluciones de dispersión  $\alpha$  y  $\beta$  se pueden escribir como

$$\begin{aligned} u_{k,j,\alpha}(r) &= u_{k,j,r}(r) \cot \delta_{1j} - u_{k,j,s}(r) \\ w_{k,j,\alpha}(r) &= \tan \epsilon_j [w_{k,j,r}(r) \cot \delta_{1j} - w_{k,j,s}(r)] \end{aligned} \quad (6.52)$$

$$\begin{aligned} u_{k,j,\beta}(r) &= -\tan \epsilon_j [u_{k,j,r}(r) \cot \delta_{2j} - u_{k,j,s}(r)] \\ w_{k,j,\beta}(r) &= w_{k,j,r}(r) \cot \delta_{2j} - w_{k,j,s}(r) \end{aligned} \quad (6.53)$$

siendo  $\delta_{1j}$ ,  $\delta_{2j}$  y  $\epsilon_j$  los defasajes en la representación de Blatt-Biedenharn <sup>2</sup>. Con estas soluciones los diversos reguladores usados para los casos de los potenciales OPE y TPE se reducen a ecuaciones algebraicas en  $\cot \delta_{1j}$ ,  $\cot \delta_{2j}$  y  $\epsilon_j$

### 6.3. Resultados Renormalizados para los Defasajes

En esta sección se muestran los resultados regularizador que se obtienen para los defasajes en las distintas ondas parciales consideradas ( $j \leq 5$ ). En los potenciales quirales se toman los siguientes valores para las constantes físicas:  $f = 92,4 \text{ MeV}$ ,  $\mu = 469,459 \text{ MeV}$ ,  $g = 1,29$  en la parte del potencial correspondiente a intercambio de un pión y  $g = 1,26$  en la de intercambio de dos piones. Para los acoplamientos quirales se toma el set IV ( $c_1 = -0,81 \text{ GeV}^{-1}$ ,  $c_3 = -3,20 \text{ GeV}^{-1}$  y  $c_4 = 5,40 \text{ GeV}^{-1}$ ). Cuando para renormalizar haya que fijar las longitudes

<sup>2</sup>Posteriormente estos defasajes se escriben en la representación de Stapp-Ypsilantis-Metropolis mediante las reglas de transformación (6.13). Sin embargo a la hora de regularizar las soluciones de dispersión es más conveniente usar los defasajes BB.

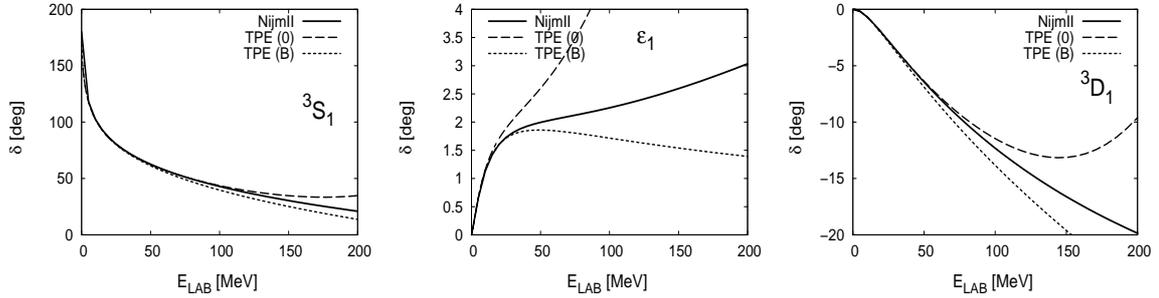


Figura 6.1: Defasajes para el canal del deuterón  ${}^3S_1 - {}^3D_1$  en la parametrización SYM para el potencial TPE a NNLO. La etiqueta TPE(0) indica los defasajes que se obtienen por ortogonalidad con los estados de dispersión de energía cero en los que se toma  $\alpha_0 = 5,418\text{fm}$ ,  $\alpha_{02} = 1,647\text{fm}^3$  y  $\alpha_2 = 6,505\text{fm}^5$ , mientras que la etiqueta TPE(B) indica los defasajes calculados mediante ortogonalidad con el estado ligado y uno de los estados de energía cero en donde se toman como parámetros de entrada la energía de ligadura experimental, la razón asintótica D/S y la longitud de dispersión  $\alpha_0$ . También se muestran los defasajes para el potencial fenomenológico Nijmegen II, compatible con el análisis en ondas parciales de la referencia [54, 53].

de dispersión se tomarán los valores correspondientes al potencial fenomenológico Nijmegen II, listados en la tabla (6.1). Los resultados se muestran en las figuras (6.4), (6.5), (6.6), (6.7), (6.8) y (6.9).

### 6.3.1. El Canal del Deuterón

Los defasajes en el canal del deuterón ya fueron estudiados en el capítulo (*poner*) para el potencial de intercambio de dos piones mediante las condiciones de ortogonalidad con el estado ligado y de reproducir la longitud de dispersión experimental, sumando un total de tres parámetros fijados ( $\gamma = 0,231605\text{ fm}$ ,  $\eta = 0,0256(4)$  y  $\alpha_0 = 5,419(7)\text{ fm}$ ). Mediante estas condiciones de renormalización se deducían los valores  $\alpha_{02} = 1,67\text{ fm}^3$  y  $\alpha_2 = 6,6\text{ fm}^5$  para las otras dos longitudes de dispersión, a comparar con los valores de los potenciales Nijmegen II y Reid93 de la tabla (6.1). En concreto el valor de la longitud de dispersión  $\alpha_2$  es ligeramente superior al de los potenciales fenomenológicos, lo que se manifestaba en que el defasaje de la onda parcial  ${}^3D_1$  no coincidía de manera exacta con el fenomenológico a bajas energías.

En esta ocasión sin embargo los defasajes se calculan directamente por ortogonalidad con los estados de dispersión de energía cero, es decir, usando las tres longitudes de dispersión como parámetros de entrada, lo que garantiza que se reproduzca correctamente el comportamiento de baja energía de los defasajes. En tal caso los defasajes que se obtienen pueden verse en la figura (6.1). Resulta curioso observar que los defasajes obtenidos por ortogonali-

dad con el estado ligado en general reproducen bastante mejor los resultados fenomenológicos a pesar de que a bajas energías fallan. Esto no resulta especialmente sorprendente si se tiene en cuenta que en realidad  $\gamma$  y  $\eta$  están más relacionadas con el comportamiento de bajas energías, el tipo de información que se necesita al renormalizar una teoría efectiva, que  $\alpha_{02}$  y  $\alpha_2$  que se relacionan con comportamientos de orden  $k^2$  y  $k^4$  relativos a  $\alpha_0$  respectivamente. También es sorprendente que los resultados por ortogonalidad con energía cero y ligado difieran tanto a energías laboratorio del orden de 200 MeV a partir de una diferencia bastante pequeña en las longitudes de dispersión ( $\Delta \alpha_{02} \sim 0,02 \text{ fm}^3$  y  $\Delta \alpha_2 \sim 0,1 \text{ fm}^5$ ), lo que indica algún tipo de ajuste fino. En parte esto puede deberse a que el deuterón está débilmente ligado, lo que fuerza ciertas correlaciones entre los parámetros que la libertad paramétrica de la descripción efectiva no siempre tendrá en cuenta. En el régimen de acoplamiento débil hay un parámetro de expansión  $\gamma$ , que es dominante; esto no genera ningún problema cuando se renormaliza con el potencial OPE ya que el parámetro libre que se escoja se terminará identificando con su correlación de acoplamiento débil en el límite  $\gamma \rightarrow 0$ . Sin embargo en el caso del potencial TPE hay tres parámetros libres: en teoría se podrían escoger unos parámetros perversos que descuadraran las relaciones de acoplamiento débil, y probablemente algunos parámetros son más adecuados que otros para romper estas relaciones. Esto es lo que quizás ocurra con las longitudes  $\alpha_{02}$  y  $\alpha_2$ . Mientras que si se toman los parámetros del deuterón como entrada se obtienen defasajes más naturales, no ocurre lo mismo si se usa como entrada las propias longitudes de dispersión.

### 6.3.2. Dependencia en el Radio de Corte y la Longitud de Dispersión

En las figuras (6.4),(6.5),(6.6), (6.7),(6.8) y (6.9) no sólo se muestran los defasajes OPE y TPE para las respectivas ondas parciales sino también la dependencia de estos respecto al radio de corte en el intervalo  $0,15 \text{ fm} < r_c < 1,5 \text{ fm}$ . En general la dependencia respecto al corte disminuye con la singularidad del potencial y el momento angular. La conclusión es que dicha dependencia está controlada.

Sin embargo un aspecto interesante es la dependencia respecto al contratérmino, la longitud de dispersión en nuestro caso. Esto es especialmente útil en aquellas ondas parciales en las que no se obtiene un resultado bueno. En la figura (6.2) se observa como cambia el defasaje en algunas de estas ondas cambiando ligeramente la longitud de dispersión. En cualquier caso lo que ocurre en las ondas presentadas en esta figura es la excepción más que la regla. Esto se puede comprender analizando de nuevo el método de regularización en el caso de los canales desacoplados. La regularización se hace integrando desde infinito hasta un radio de corte la solución de energía cero, válida para  $r \gg 2/m_\pi$

$$u(r) \rightarrow r^{-l} - \frac{r^{l+1}}{\alpha_l} \quad (6.54)$$

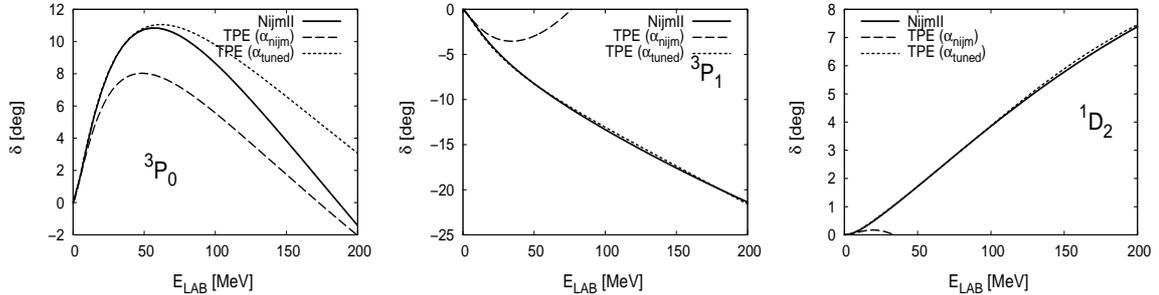


Figura 6.2: Dependencia respecto a la longitud de dispersión de algunas ondas parciales para el potencial quiral de intercambio de dos piones, TPE NNLO, comparadas con los resultados que se obtienen con las longitudes de dispersión correspondientes al potencial Nijmegen II [54, 53], tabla (6.1) o apéndice (D). Se ha tomado el set IV de acoplamientos quirales. La etiqueta  $\alpha_{\text{nijm}}$  indica el defasaje calculado con las longitudes de dispersión Nijmegen II, mientras que la etiqueta  $\alpha_{\text{tuned}}$  indica que se ha variado la longitud de dispersión para obtener un defasaje más adecuado a energías intermedias. Para la onda  ${}^3P_0$  se toma  $\alpha_1 = -2,670\text{fm}^3$ , para la  ${}^3P_1$  se toma  $\alpha_1 = 1,692\text{fm}^3$  y para la  ${}^1D_2$  se toma  $\alpha_2 = -1,666\text{fm}^5$ .

La solución de largas distancias irregular,  $r^{l+1}$ , domina, a menos que  $\alpha_l$  sea anómalamente grande, esto es  $\alpha_l(m_\pi/2)^{(2l+1)} \gg 1$ , por lo que el cociente  $u'_0(r_c)/u_0(r_c)$  será más bien insensible al valor de  $\alpha_l$  si éste es natural. Esta situación es algo intrigante: por una parte es necesario fijar un parámetro en estas ondas parciales, y por otra el resultado es prácticamente insensible a dicho parámetro salvo en casos excepcionales. En otro orden de cosas la solución anterior de largas distancias tiene como consecuencia que para evitar errores de redondeo numéricos grandes es necesario poner un radio de corte superior no demasiado grande. Un valor adecuado en muchos casos es  $R_{\text{max}} = 15\text{ fm}$ ; el radio máximo disminuirá conforme se incremente el momento angular.

#### 6.4. Dependencia en los Acoplamientos Quirales

También se ha estudiado el cambio de los defasajes al considerar los cuatro sets de acoplamientos quirales. En general, para obtener unas figuras más sencillas e interpretables, se ha elegido mostrar solamente el set IV, que es por otra parte el que mejores resultados proporciona. En las ondas parciales más altas la dependencia respecto a los acoplamientos es pequeña, ya que quedan determinadas por el potencial de intercambio de un pión. Hay sin embargo algunas ondas parciales especialmente sensibles a los acoplamientos quirales: en la figura (6.3) se muestran los defasajes de las ondas  ${}^1P_1$ ,  ${}^1F_3$  y  ${}^1G_5$  para los cuatro sets

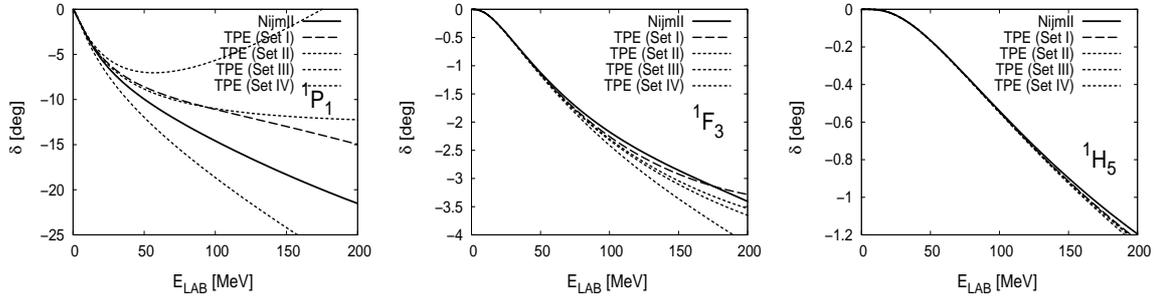


Figura 6.3: Dependencia de algunas ondas parciales respecto a los acoplamientos quirales  $c_1$ ,  $c_3$  y  $c_4$  dados por los sets I, II, III y IV. Se muestran los canales más sensibles a estos acoplamientos quirales, que resultan coincidir con los canales repulsivos para el potencial TPE NNLO.

de acoplamientos quirales considerados a lo largo de este trabajo. Estas ondas son las más sensibles a la elección del set de acoplamientos quirales. También son ondas en las que el potencial quiral TPE NNLO es repulsivo, lo que explica esta sensibilidad a  $c_1$ ,  $c_3$  y  $c_4$ : al tratarse de un canal repulsivo es especialmente insensible a la física de cortas distancias, por lo que en estas ondas se observarán mejor los efectos debidos a distancias largas e intermedias como el de los acoplamientos quirales. Por otra parte los acoplamientos quirales, al estar apantallados por ser un efecto de intercambio de dos piones, son en realidad efectos de distancias intermedias. Por esa razón al aumentar el momento angular los acoplamientos se notan menos debido a la barrera centífuga, y es la cola piónica la que determina la física.

## 6.5. Conclusiones

En este capítulo se ha estudiado la regularización de las ondas periféricas con los potenciales de intercambio de uno y dos piones. En general el acuerdo es grande en la mayoría de las ondas parciales y mejora según aumenta el momento angular. La convergencia respecto al radio de corte se estudia en todas las ondas, y se determina el número de contratérminos necesario en cada canal. Esto predice las modificaciones al conteo que han tenido que hacer Nogga, Timmermans y van Kolck [43] para conseguir renormalizabilidad en ondas periféricas con intercambio de un pión. Por otra parte nos encontramos con la curiosa situación de que aunque algunas ondas parciales requieren un contratérmino para ser renormalizadas son completamente insensibles a dicho contratérmino a menos que su valor sea anómalamente grande. Esto explica que no se haya encontrado hasta hace poco [43] ninguna violación del conteo de Weinberg. Otro aspecto importante de los resultados renormalizados que se obtienen es que indican qué ondas parciales son más sensibles a los acoplamientos quirales, lo

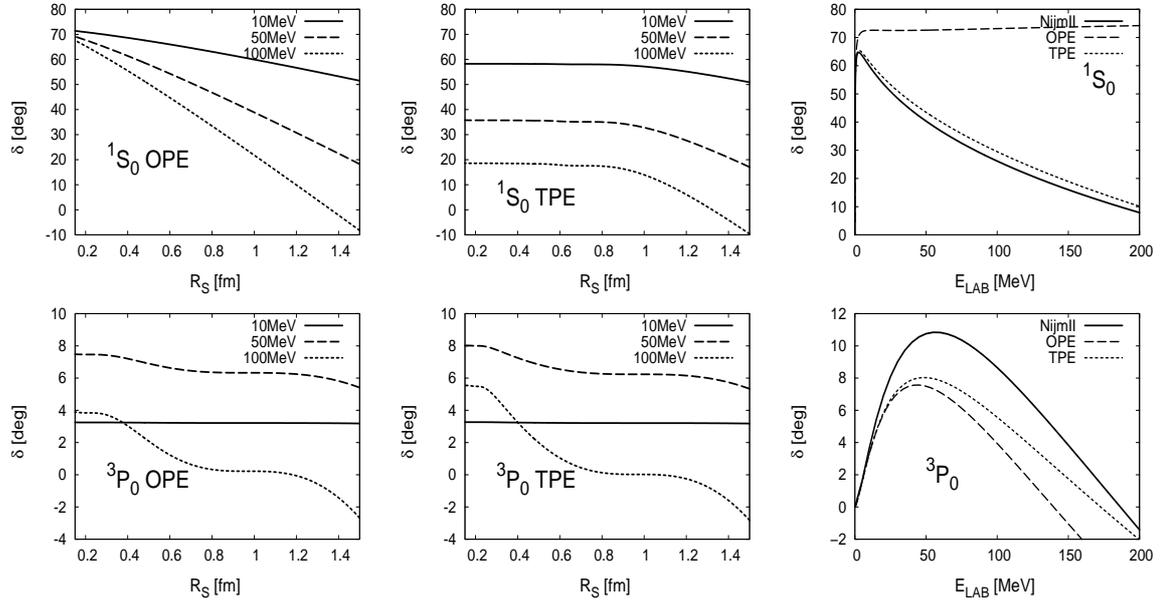


Figura 6.4: Defasajes neutrón-protón para momento angular total  $j = 0$ . El panel izquierdo y el central muestran los defasajes OPE y TPE como función del radio de corte  $r_c$  para las energías  $E_{LAB} = 10, 50, 100$  (sistema laboratorio). En el panel derecho se muestran los defasajes OPE y TPE como función de la energía laboratorio y se los compara con los obtenidos mediante el potencial Nijmegen II, compatibles con el análisis en ondas parciales de la referencia .

que puede ayudar a la determinación de éstos mediante un ajuste selectivo.



Onda	LO	NLO	NNLO
$^1S_0$	$-\frac{g^2 m^2 M}{16\pi f^2} \frac{1}{r}$	$\frac{(1+10g^2-59g^4)M}{256\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{3g^2(-4+24\bar{c}_3-8\bar{c}_4+15g^2)}{128\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^3P_0$	$-\frac{g^2 M}{4\pi f^2} \frac{1}{r^3}$	$\frac{(1+10g^2+49g^4)M}{256\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{g^2(12+72\bar{c}_3+40\bar{c}_4+g^2)}{128\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^1P_1$	$\frac{3g^2 m^2 M}{16\pi f^2} \frac{1}{r}$	$\frac{3(-1-10g^2+11g^4)M}{256\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{9g^2(4+8\bar{c}_3+8\bar{c}_4-3g^2)}{128\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^3P_1$	$\frac{g^2 M}{8\pi f^2} \frac{1}{r^3}$	$\frac{(1+10g^2-41g^4)M}{256\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{g^2(-2+36\bar{c}_3-4\bar{c}_4+19g^2)}{64\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^3S_1$	0	$\frac{3(-1-10g^2+27g^4)M}{256\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$-\frac{3g^2(-4-24\bar{c}_3+8\bar{c}_4+3g^2)}{128\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^3D_1$	$\frac{3g^2}{8f^2\pi} \frac{1}{r^3}$	$\frac{3(-1-10g^2+37g^4)M}{256\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{9g^2(-1+2\bar{c}_3-2\bar{c}_4+2g^2)}{32\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$E_1$	$-\frac{3g^2}{4\sqrt{2}f^2\pi} \frac{1}{r^3}$	$-\frac{15g^4 M}{64\sqrt{2}f^4\pi^3} \frac{1}{r^5}$	$-\frac{3g^2(-4-16\bar{c}_4+3g^2)}{64\sqrt{2}\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^1D_2$	$-\frac{g^2 m^2 M}{16\pi f^2} \frac{1}{r}$	$\frac{(1+10g^2-59g^4)M}{256\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{3g^2(-4+24\bar{c}_3-8\bar{c}_4+15g^2)}{128\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^3D_2$	$-\frac{3g^2 M}{8\pi f^2} \frac{1}{r^3}$	$\frac{(1+10g^2-89g^4)M}{256\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{g^2(-4+18\bar{c}_3-10\bar{c}_4+15g^2)}{32\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^3P_2$	$-\frac{g^2 M}{40f^2\pi} \frac{1}{r^3}$	$\frac{(1+10g^2-5g^4)M}{256\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{g^2(-9+90\bar{c}_3+14\bar{c}_4+5g^2)}{160\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^3F_2$	$-\frac{g^2 M}{10\pi f^2} \frac{1}{r^3}$	$\frac{(1+10g^2+13g^4)M}{256\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{g^2(76+360\bar{c}_3+104\bar{c}_4+175g^2)}{640\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$E_2$	$\frac{3\sqrt{3}}{20\sqrt{2}\pi f^2} \frac{1}{r^3}$	$-\frac{9\sqrt{3}g^4 M}{64\sqrt{2}f^4\pi^3} \frac{1}{r^5}$	$\frac{3\sqrt{3}g^2(-4-16\bar{c}_4+15g^2)}{320\sqrt{2}\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^1F_3$	$\frac{3g^2 m^2 M}{16\pi f^2} \frac{1}{r}$	$\frac{3(-1-10g^2+11g^4)M}{256\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$-\frac{9g^2(-4-8\bar{c}_3-8\bar{c}_4+3g^2)}{128\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^3F_3$	$\frac{g^2 M}{8\pi f^2} \frac{1}{r^3}$	$\frac{(1+10g^2-41g^4)M}{256\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{g^2(-2+36\bar{c}_3-4\bar{c}_4+19g^2)}{64\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^3D_3$	$-\frac{g^2 M}{28\pi f^2} \frac{1}{r^3}$	$\frac{(7+70g^2-17g^4)M}{1792\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$-\frac{g^2(76-504\bar{c}_3-88\bar{c}_4+37g^2)}{896\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^3G_3$	$-\frac{5g^2 M}{56\pi f^2} \frac{1}{r^3}$	$\frac{(7+70g^2+73g^4)M}{1792\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{g^2(66+252\bar{c}_3+68\bar{c}_4+155g^2)}{448\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$E_3$	$\frac{3\sqrt{3}g^2 M}{28\pi f^2} \frac{1}{r^3}$	$-\frac{45\sqrt{3}g^4 M}{448\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{3\sqrt{3}g^2(-4-16\bar{c}_4+15g^2)}{448\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^1G_4$	$-\frac{g^2 m^2 M}{16\pi f^2} \frac{1}{r}$	$\frac{(1+10g^2-59g^4)M}{256\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{3g^2(-4+24\bar{c}_3-8\bar{c}_4+15g^2)}{128\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^3G_4$	$-\frac{3g^2 M}{8\pi f^2} \frac{1}{r^3}$	$\frac{3(-1-10g^2+17g^4)M}{256\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{3g^2(2+12\bar{c}_3+4\bar{c}_4+g^2)}{64\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^3F_4$	$\frac{3g^2 M}{28\pi f^2} \frac{1}{r^3}$	$\frac{3(-7-70g^2+209g^4)M}{1792\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{3g^2(76+168\bar{c}_3-88\bar{c}_4-127g^2)}{896\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^3H_4$	$\frac{15g^2 M}{56\pi f^2} \frac{1}{r^3}$	$\frac{3(-7-70g^2+239g^4)M}{1792\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{3g^2(-66+84\bar{c}_3-68\bar{c}_4+137g^2)}{448\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$E_4$	$-\frac{9\sqrt{3}g^2 M}{28\pi f^2} \frac{1}{r^3}$	$-\frac{45\sqrt{3}g^4 M}{448\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$-\frac{9\sqrt{3}g^2(-4-16\bar{c}_4+3g^2)}{448\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^1H_5$	$\frac{3g^2 m^2 M}{16\pi f^2} \frac{1}{r}$	$\frac{3(-1-10g^2+11g^4)M}{256\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{9g^2(4+8\bar{c}_3+8\bar{c}_4-3g^2)}{128\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^3H_5$	$\frac{g^2 M}{8\pi f^2} \frac{1}{r^3}$	$\frac{1+10g^2-41g^4}{256\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{g^2(-2+36\bar{c}_3-4\bar{c}_4+19g^2)}{64\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^3G_5$	$\frac{3g^2 M}{22\pi f^2} \frac{1}{r^3}$	$\frac{3(-11-110g^2+337g^4)M}{2816\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{3g^2(204+264\bar{c}_3-152\bar{c}_4-373g^2)}{1408\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$^3I_5$	$\frac{21g^2 M}{88\pi f^2} \frac{1}{r}$	$\frac{3(-11-110g^2+367g^4)M}{2816\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$\frac{3g^2(-73+66\bar{c}_3-50\bar{c}_4+151g^2)}{352\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$
$E_5$	$-\frac{9\sqrt{15}g^2 M}{44\sqrt{2}\pi f^2} \frac{1}{r}$	$-\frac{45\sqrt{15}g^4 M}{704\sqrt{2}\pi^3 f^4} \frac{1}{r^5}$	$-\frac{9\sqrt{15}g^2(-4-16\bar{c}_4+3g^2)}{704\pi^2 f^4} \frac{1}{r^6}$

Cuadro 6.2: Singularidades más importantes de los potenciales reducidos quirales,  $U = 2\mu V$ , a LO, NLO y NNLO para las ondas parciales consideradas en este capítulo. En los canales desacoplados el signo de los coeficientes determina la necesidad de contratérminos mientras que en los canales acoplados el número de parámetros libres depende de los signos de los autovalores del potencial considerado como una matriz. Se tiene que  $\bar{c}_3 = c_3 M$  y  $\bar{c}_4 = M c_4$ , en donde  $c_3$  y  $c_4$  son los acoplamientos quirales.

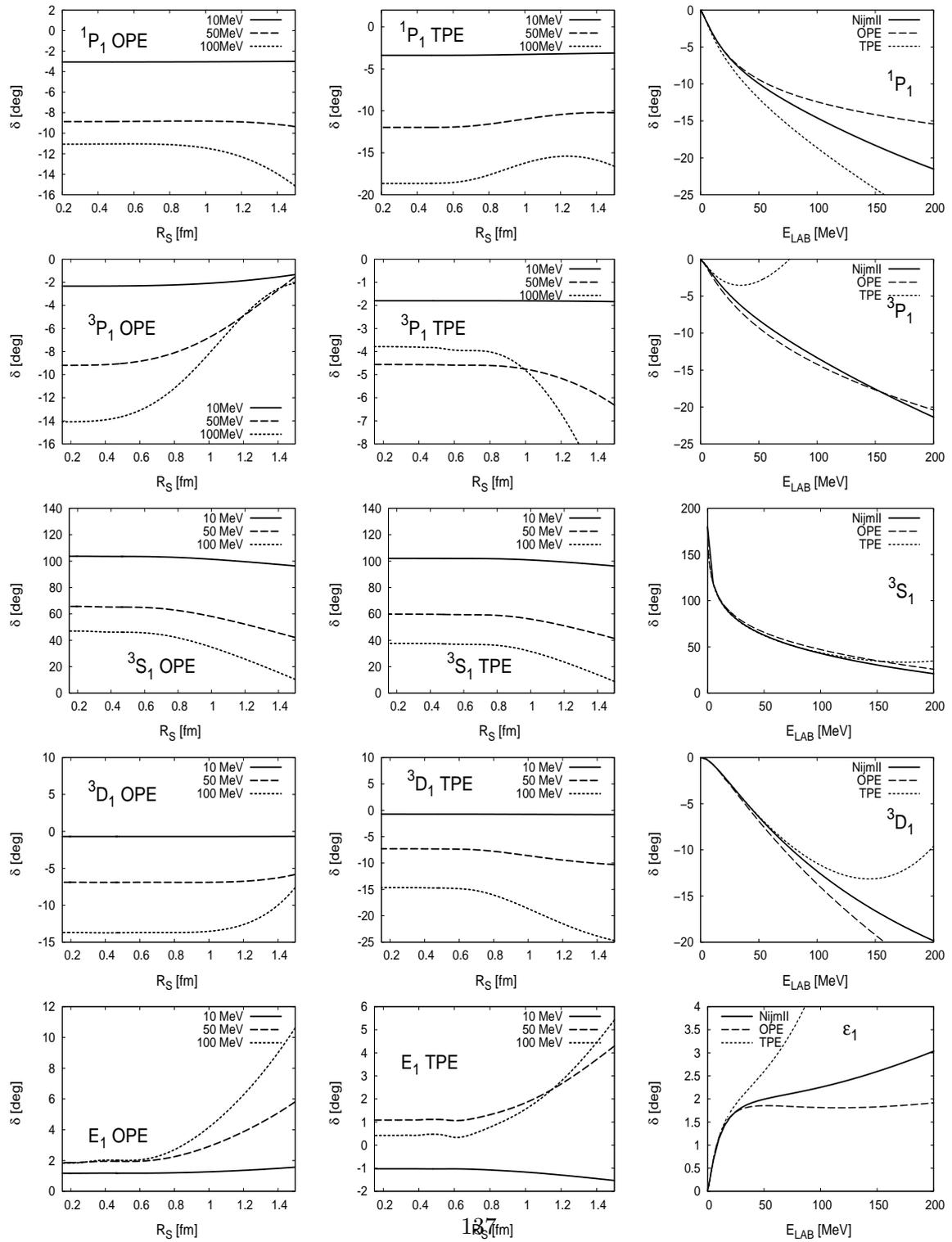


Figura 6.5: Como la figura (6.4) pero con  $j = 1$ .

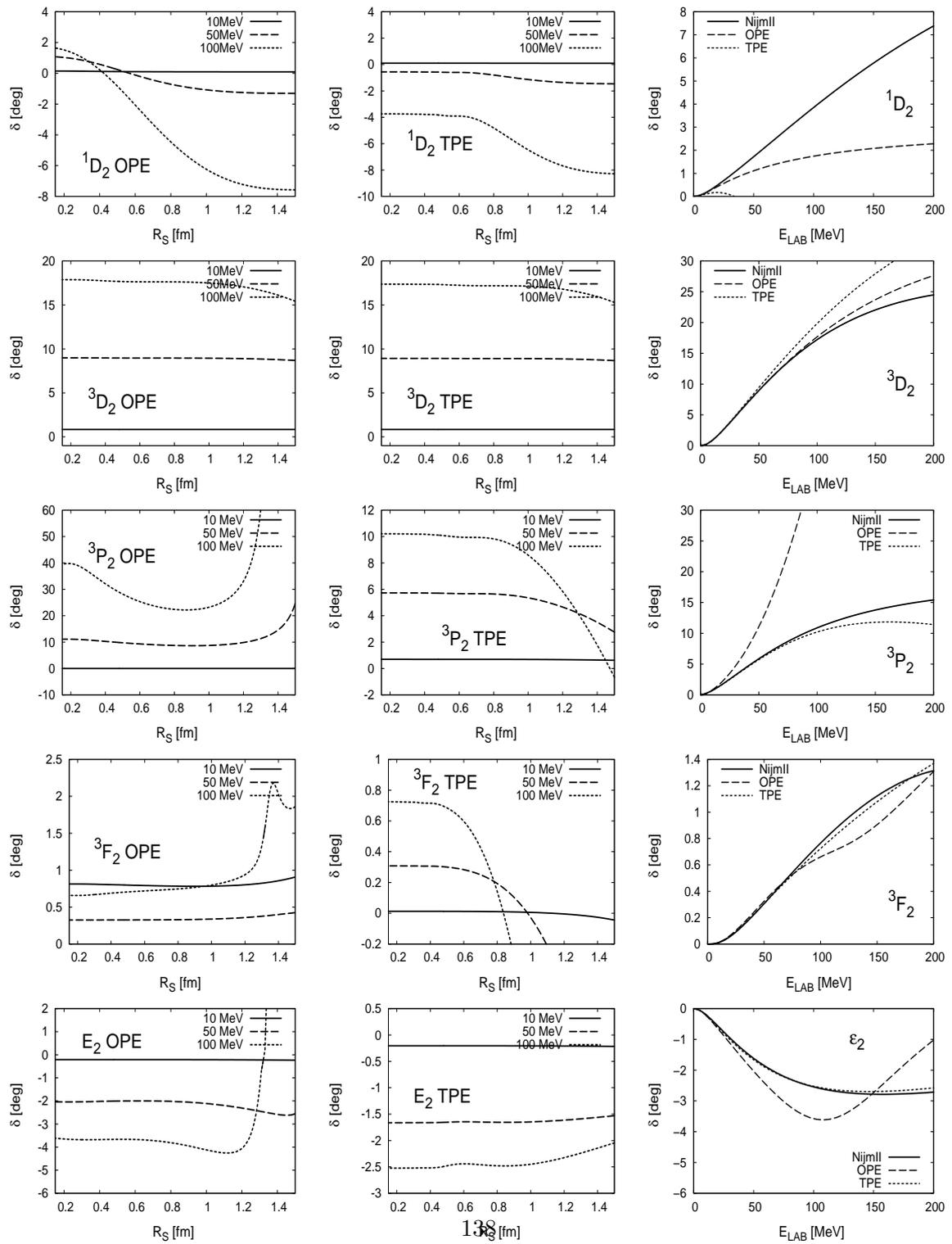


Figura 6.6: Como la figura (6.4) pero con  $j = 2$ .

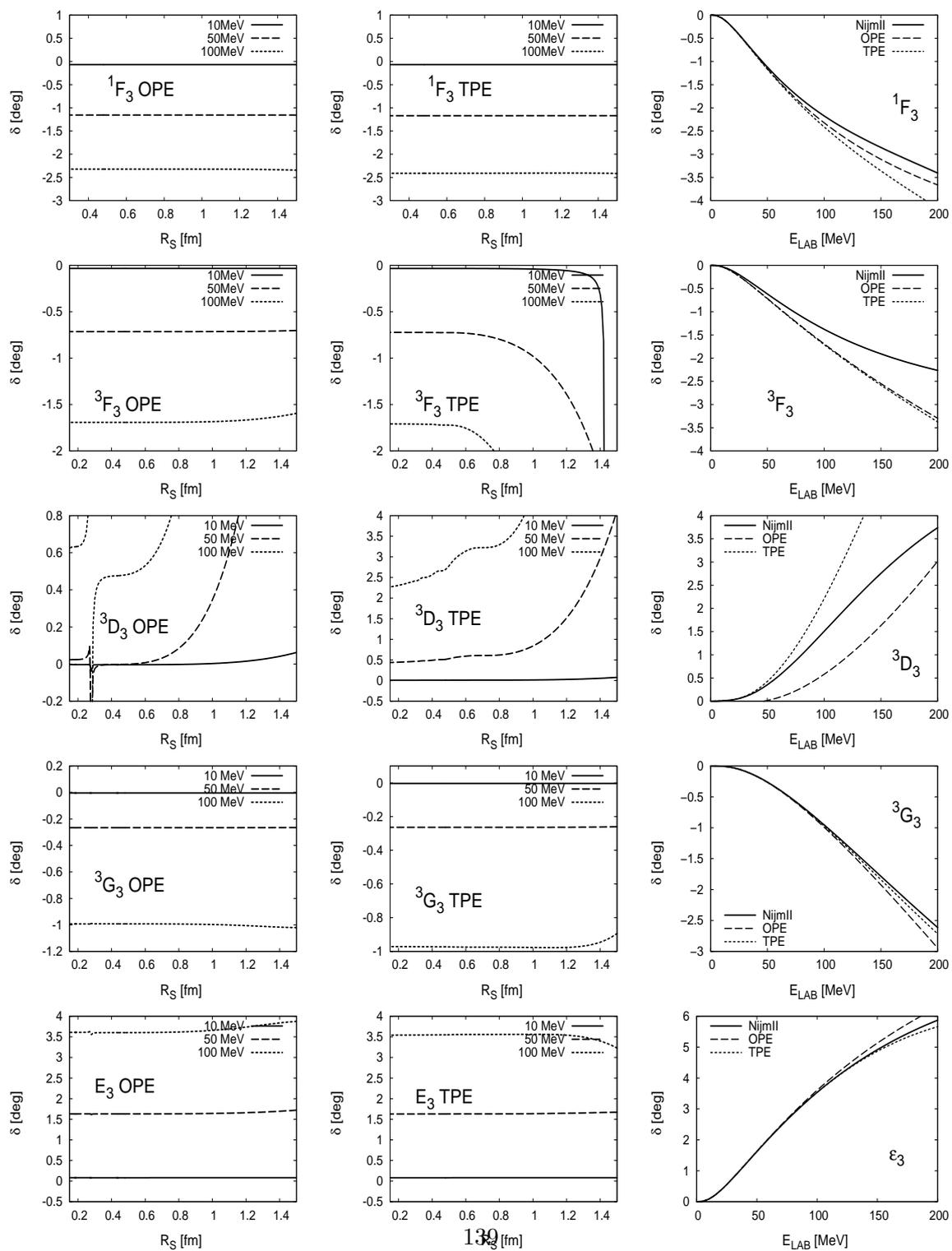


Figura 6.7: Como la figura (6.4) pero con  $j = 3$ .

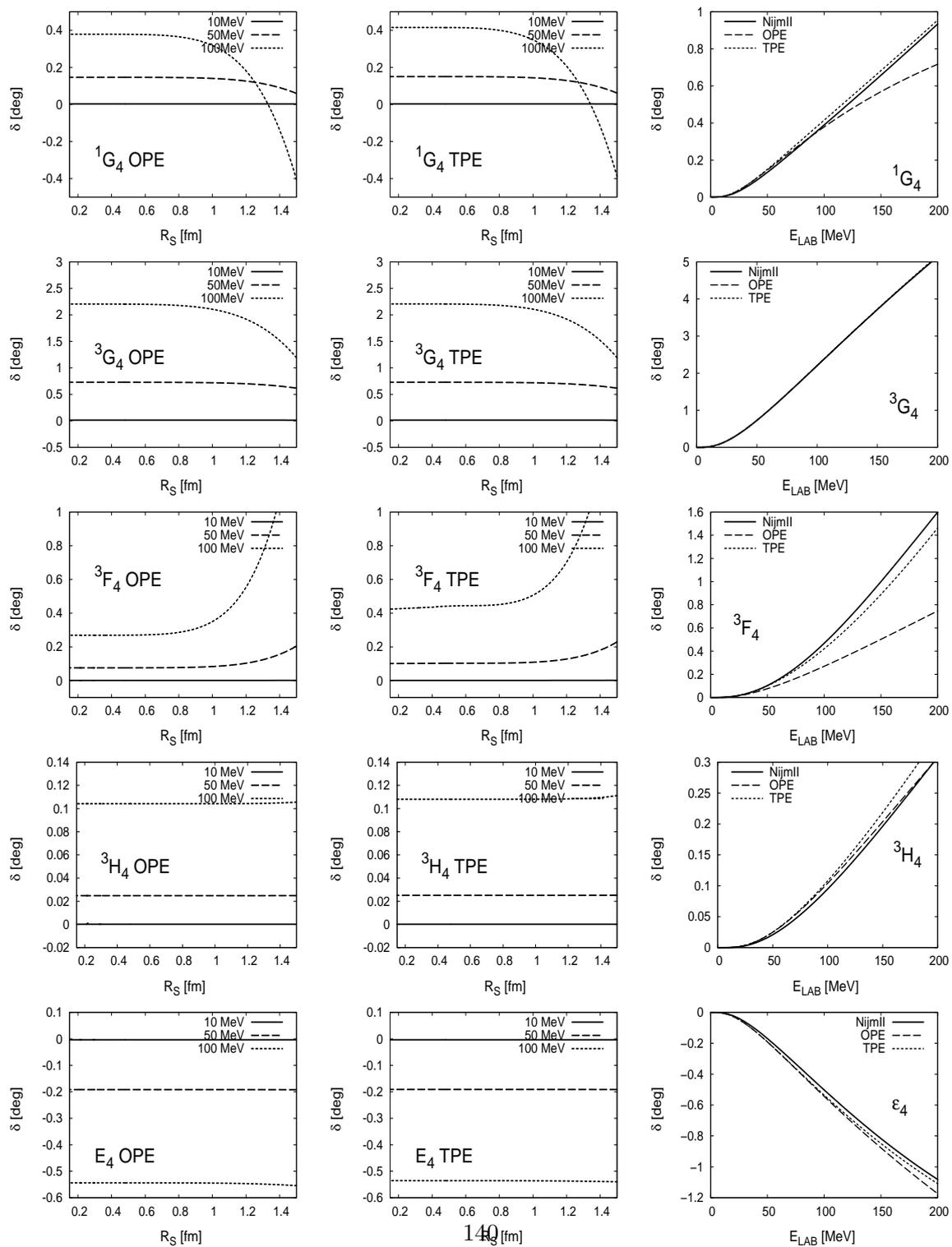


Figura 6.8: Como la figura (6.4) pero con  $j = 4$ .

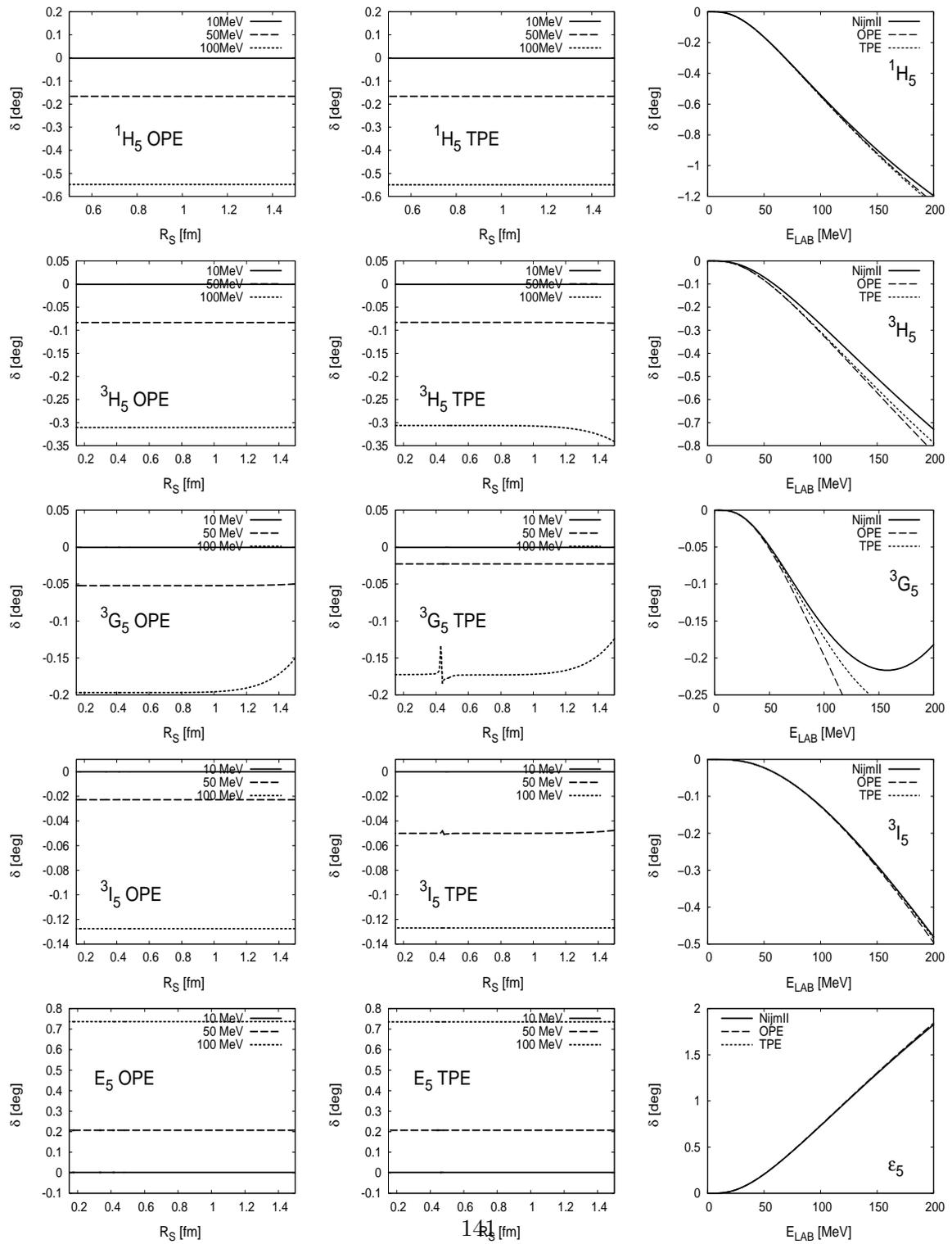


Figura 6.9: Como la figura (6.4) pero con  $j = 5$ .

## Capítulo 7

# Teoría de Perturbaciones

### 7.1. Introducción

El problema principal de la aplicación de teoría quiral de perturbaciones a la interacción nucleó-nucleón está en el carácter no perturbativo de esta interacción, lo que es debido por una parte a la presencia de un estado débilmente ligado, el deuterón, y por otra a una longitud de dispersión anómalamente grande en el singlete, lo que derivó en la idea del conteo de Weinberg [11, 12] en el que los piones no eran perturbativos. Sin embargo hay razones muy buenas para intentar un tratamiento perturbativo de la interacción NN. La principal es la sistematicidad de los cálculos perturbativos: es posible estimar el tamaño de los errores a priori. Esto se debe a que un cálculo perturbativo no es más que una serie de potencias en el acoplamiento para un determinado observable

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_0 + \mathcal{O}_1 \lambda + \mathcal{O}_2 \lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (7.1)$$

por lo que si el observable se calcula hasta orden  $\lambda^n$  el error será de orden  $\lambda^{n+1}$ . En la interacción NN hay además una motivación especial para un tratamiento perturbativo: si el tratamiento se hace como desarrollo en el mismo parámetro de teoría quiral de perturbaciones, habrá un mapeado término-a-término entre ordenes del conteo de simetría quiral y los observables NN. Precisamente este tipo de tratamiento sistemático se hizo mediante el conteo de Kaplan, Savage y Wise (KSW) [44, 45] que sin embargo resultó ser lentamente convergente en el canal singlete y no convergente en el canal triplete [46]. Curiosamente el tratamiento perturbativo que aquí se hace reproduce los resultados del conteo KSW, y explica por qué éste no converge.

En general va a haber una serie de problemas recurrentes en teoría de perturbaciones para la interacción NN. El principal es el fallo de teoría de perturbaciones a partir de un cierto

orden<sup>1</sup>. Otros son la necesidad de un radio de corte finito o la proliferación incontrolada de parámetros libres para que la teoría sea finita. Estos problemas no se deben al hecho de que las correcciones de ciertos efectos sean pequeñas<sup>2</sup>, sino a que estas correcciones no son analíticas. La idea puede ilustrarse con un sencillo ejemplo: el potencial de van der Waals. Para un potencial de van de Waals

$$U(r) = -\frac{R_L^4}{r^6} \quad (7.2)$$

la relación entre el rango efectivo y la longitud de dispersión viene dada por

$$r_0 = \frac{16 R_L \Gamma(\frac{5}{4})^2}{3 \pi} - \frac{4 R_L^2}{3 \alpha_0} + \frac{4 R_L^3 \Gamma(\frac{3}{4})^2}{3 \alpha_0^2 \pi} \quad (7.3)$$

si la escala van der Waals es pequeña, y la longitud de onda es natural, el rango efectivo escalará como  $r_0 \sim R_L$  y también será pequeño. Sin embargo no será en ningún caso perturbativo. Esto puede verse fácilmente reescalando el potencial como  $U \rightarrow \lambda U$ , que se transforma en un escalamiento para el rango efectivo  $r_0 \rightarrow \lambda^{1/4} r_0$ . Este escalamiento no es analítico y tampoco es el esperable en teoría de perturbaciones. Para un potencial perturbativo la transformación  $U \rightarrow \lambda U$  genera el mismo escalamiento en todos los observables, es decir,  $r_0 \rightarrow \lambda r_0$ , cosa que no ocurre en el potencial de van der Waals<sup>3</sup>.

Por otro lado el comportamiento no analítico del potencial de van der Waals se debe en parte al hecho de un cambio cualitativo enorme cuando el acoplamiento cambia de signo: para un van der Waals atractivo la longitud de dispersión es un parámetro libre, mientras que para uno repulsivo esto no es así, y se tiene que la longitud de dispersión y el rango efectivo vienen dados por

$$\alpha_0 = \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{2 \Gamma(\frac{5}{4})} R_L \quad \text{y} \quad r_0 = 0 \quad (7.4)$$

El resultado repulsivo tampoco es perturbativo, a pesar de que para acoplamientos pequeños la longitud de dispersión es pequeña. De hecho ni siquiera es convergente: teoría de perturbaciones daría un resultado infinito para  $\alpha_0$ . Sin embargo es esperable: para el cambio  $U \rightarrow \lambda U$  que corresponde a  $\alpha_0 \rightarrow \lambda \alpha_0$  se tiene que la pendiente de  $\alpha_0$  respecto a  $\lambda$  es infinita (diverge como  $\lambda^{-3/4}$ ). Desde un punto de vista analítico esto se entiende como la aparición de un corte

<sup>1</sup>Es un hecho conocido que las series perturbativas en general no convergen. La diferencia en este caso es la aparición de resultados divergentes a ordenes bajos.

<sup>2</sup>Por ejemplo, los efectos debidos a intercambio de dos piones en el deuterón son pequeños, pero no son perturbativos.

<sup>3</sup>En realidad el escalamiento puede ser más benigno que  $\lambda^{1/4}$ . Si consideramos que  $\alpha_0 \ll R_L$ , se tendrá que el rango efectivo escalará como  $\sim R_L^3/\alpha_0^2$  respecto a la longitud de dispersión, o como  $\lambda^{3/4}$  respecto a la intensidad del potencial. Aun así no resulta perturbativo.

de rama en  $R_L^4 = 0$ . Por otra parte es curioso comprobar que la relación de universalidad (7.3) sigue siendo válido en el caso repulsivo. Cuando  $U \rightarrow -U$ , se tiene  $R_L \rightarrow e^{\pm i\pi/4} R_L$ ; introduciendo este cambio y la nueva longitud de dispersión en (7.3) se obtiene  $r_0(\alpha_0)$  independientemente de la rama elegida para  $R_L$ . A lo largo de este capítulo nos vamos a ir encontrando con situaciones de este tipo bastante a menudo.

## 7.2. Perturbaciones con el Potencial de Intercambio de Un Pi3n

### 7.2.1. El Canal Singlete en Teoría de Perturbaciones

La interacción NN en onda  $^1S_0$  con potencial de intercambio de un pi3n se describe mediante la ecuación de Schr3odinger reducida

$$-u_k'' + U_{\text{OPE}}(r) u_k = k^2 u_k \quad (7.5)$$

en donde  $U_{\text{OPE}}(r)$  representa el potencial de intercambio de un pi3n, y  $k$  es el n3mero de onda en el sistema centro de masa. La funci3n de onda  $u_k(r)$  queda determinada con la condici3n adicional de que reproduzca la longitud de dispersi3n f3sica,  $\alpha_0 = -23,74\text{fm}$ . El procedimiento para construir funciones de onda con esta propiedad y los resultados que se obtienen al fijar la longitud de dispersi3n se describe en detalle en el cap3tulo (3), en donde pod3a observarse que las diferencias entre los resultados que se obtienen entre la teor3a sin piones y la teor3a con intercambio de un pi3n en onda  $^1S_0$  son peque1nas, lo que sugiere que los piones pueden ser tratados perturbativamente.

Por comodidad se va a parametrizar el potencial de intercambio de un pi3n como

$$U_{\text{OPE}}(r) = -\frac{2R}{3} m^2 \frac{e^{-mr}}{r} \quad (7.6)$$

en donde  $R$  se define como

$$R = \frac{3g_A^2 M_N}{32\pi f_\pi^2} \quad (7.7)$$

Esta elecci3n permite transformar la expansi3n en teoria de perturbaciones en una expansi3n en potencias de  $R$ , adem3s de hacer m3s sencilla la comparaci3n con los resultados en el canal del deuter3n.

En teor3a de perturbaciones la funci3n de onda  $u_k(r)$  se expande como

$$u_k(r) = u_k^{(0)}(r) + u_k^{(1)}(r) + u_k^{(2)}(r) + \dots \quad (7.8)$$

en donde  $u_k^{(j)}$  es de orden  $O(U_{\text{OPE}}(r)^j) = O(R^j)$ . Las funciones de onda a orden cero,  $u_k^{(0)}$ , y las correcciones perturbativas  $u_k^{(j)}$  obedecen las ecuaciones

$$-u_k''^{(0)} - k^2 u_k^{(0)} = 0 \quad (7.9)$$

$$-u_k''^{(j)} - k^2 u_k^{(j)} = -U_{\text{OPE}}(r) u_k^{(j-1)} \quad \text{para } j > 0 \quad (7.10)$$

En tal caso la solución de  $u_k^{(j)}$  viene dada por

$$u_k^{(0)}(r) = \cos kr - \frac{1}{\alpha} \frac{\sin kr}{k} \quad (7.11)$$

$$u_k^{(j)}(r) = \int_0^\infty G_k(r, r') U_{\text{OPE}}(r') u_k^{(j-1)} \quad \text{para } j > 0 \quad (7.12)$$

en donde  $u_k^{(0)}$  representa la función de onda libre con longitud de dispersión  $\alpha_0$ , y  $G_k(r, r')$  es una función de Green que cumple

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 \right] G_k(r, r') = \delta(r - r') \quad (7.13)$$

la función de Green puede construirse como

$$G_k(r, r') = \frac{\sin k(r' - r)}{k} \theta(r' - r) \quad (7.14)$$

La corrección perturbativa a primer orden puede calcularse de manera explícita para momento cero dando

$$u_0^{(1)} = \frac{2R}{3\alpha_0} e^{-mr} (1 - \alpha_0 m) + \frac{2m^2 r R}{3} \Gamma(0, mr) \quad (7.15)$$

En el caso de momento finito no hay una fórmula compacta en término de funciones sencillas, aunque en la referencia [80] se trata el comportamiento de esta corrección a energía finita.

Con la corrección perturbativa a primer orden de la función de onda de energía cero puede calcularse el rango efectivo en teoría de perturbaciones

$$\begin{aligned} r_0^{(1)} &= -4 \int_0^\infty u_0^{(0)}(r) u_0^{(1)}(r) dr \\ &= \frac{4R}{3} \left[ 1 - \frac{8}{3m\alpha_0} + \frac{2}{(m\alpha_0)^2} \right] \end{aligned} \quad (7.16)$$

dando  $r_0^{(1)} = 1,6780(2)$  fm, a comparar con el resultado no perturbativo  $r_0 = 1,4395(2)$  fm, en donde se ha tomado  $\alpha_0 = -23,74(2)$  fm, es decir, el valor experimental. Los errores se han

calculado a partir del error de  $\alpha_0$ . Aunque ninguna de las dos cantidades logra un acuerdo satisfactorio con el valor experimental  $r_0 = 2,77(5)$  fm, su similitud indica que el potencial de intercambio de un pión es un efecto perturbativo en el canal singlete.

Para obtener el defasaje a primer orden en teoría de perturbaciones se considera la ecuación de Schrödinger libre, que describe la función de onda perturbativa a orden cero, y con potencial de intercambio de un pión, que describe la función de onda no perturbativa

$$-u_k''^{(0)} = k^2 u_k^{(0)} \quad (7.17)$$

$$-u_k'' + U_{\text{OPE}}(r) u_k = k^2 u_k \quad (7.18)$$

De estas dos ecuaciones se obtiene la identidad de Lagrange siguiente

$$-(u_k'^{(0)} u - u^{(0)} u_k') \Big|_0^\infty = \int_0^\infty U_{\text{OPE}}(r) u(r) u^{(0)}(r) \quad (7.19)$$

que puede simplificarse teniendo en cuenta que

$$(u_k'^{(0)} u - u^{(0)} u_k') \Big|_\infty = k \frac{\sin(\delta - \delta^{(0)})}{\sin \delta \sin \delta^{(0)}} \quad (7.20)$$

de donde se obtiene la relación

$$k \cot \delta = k \cot \delta^{(0)} + \int_0^\infty U_{\text{OPE}}(r) u^{(0)}(r) u(r) dr \quad (7.21)$$

Expandiendo la función de onda completa hasta primer orden  $u(r) = u^{(0)} + u^{(1)} + O(R^2)$  se obtiene el resultado perturbativo a primer orden

$$k \cot \delta^{(1)} = k \cot \delta^{(0)} + \int_0^\infty U(r) u^{(0)}(r)^2 dr \quad (7.22)$$

en donde por  $\delta^{(1)}$  se entiende el defasaje a primer orden (no la corrección a primer orden). Sin embargo esta expresión es logarítmicamente divergente, ya que el integrando se comporta como  $1/r$  para  $r \rightarrow 0$ . Para hacer finito el resultado es necesario renormalizar tomando la prescripción de reproducir la longitud de dispersión a primer orden <sup>4</sup>, es decir

$$\lim_{k \rightarrow 0} k \cot \delta^{(1)}(k) = -\frac{1}{\alpha_0} \quad (7.23)$$

$$(7.24)$$

---

<sup>4</sup>A orden cero se tiene que  $k \cot \delta^{(0)} = -1/\alpha_0$  para cualquier momento.

sustrayendo en la expresión perturbativa el comportamiento de momento cero se obtiene el resultado renormalizado

$$k \cot \delta^{(1)} = -\frac{1}{\alpha_0} + \int_0^\infty U(r) \left[ u_k^{(0)}(r)^2 - u_0^{(0)}(r)^2 \right] dr \quad (7.25)$$

que es finito, y en donde  $u_0^{(0)}$  y  $u_k^{(0)}$  vienen dados por

$$u_0^{(0)}(r) = 1 - \frac{r}{\alpha_0} \quad (7.26)$$

$$u_k^{(0)}(r) = \cos kr - \frac{1}{\alpha} \frac{\sin kr}{k} \quad (7.27)$$

El resultado del cálculo explícito es

$$k \cot \delta^{(1)} = -\frac{1}{\alpha_0} - \frac{R}{6k^2} \left[ 4k^2 (-1 + 2\alpha_0 m_\pi) - 4\alpha_0 k m_\pi^2 \arctan\left(\frac{2k}{m_\pi}\right) + (1 - \alpha_0^2 k^2) m_\pi^2 \log\left(1 + \frac{4k^2}{m_\pi^2}\right) \right] \quad (7.28)$$

Expandiendo en potencias del momento pueden obtenerse las relaciones de universalidad perturbativas a primer orden para  $r_0$  y  $v_2$

$$r_0^{(1)} = \frac{4R}{3} \left[ 1 - \frac{8}{3m\alpha_0} + \frac{2}{(m\alpha_0)^2} \right] \quad (7.29)$$

$$v_2^{(1)} = -\frac{4R}{3m^2} \left[ 1 - \frac{16}{5m\alpha_0} + \frac{8}{3(m\alpha_0)^2} \right] \quad (7.30)$$

que reproduce el resultado previo para la correlación perturbativa del rango efectivo y da el valor  $v_2^{(1)} = -3,5309(5) \text{ fm}^3$ , a comparar con el resultado no perturbativo  $v_2 = -2,053 \text{ fm}$ , y el valor  $v_2 = -0,48 \text{ fm}^3$  obtenido a partir del potencial Nijmegen II (no hay valor experimental disponible para  $v_2$ ). Se puede ver que la correlación  $v_2(\alpha_0)$  perturbativa no contiene ningún término de orden  $1/\alpha_0^3$ , como cabría esperar según el análisis de las correlaciones de largas distancias. Sin embargo esto es una consecuencia de la correlación perturbativa entre el defasaje y la longitud de dispersión, tal y como se puede comprobar reordenando la ecuación (7.28)

$$k \cot \delta^{(1)} + \frac{1}{\alpha_0} = \frac{m^2 R}{6} \left[ \log\left(1 + \frac{4k^2}{m_\pi^2}\right) + \frac{-8 + 4\frac{m}{k} \log\left(1 + \frac{4k^2}{m_\pi^2}\right)}{m\alpha_0} + \frac{4 - \frac{m^2}{k^2} \log\left(1 + \frac{4k^2}{m_\pi^2}\right)}{(m\alpha_0)^2} \right] \quad (7.31)$$

Como se ve, esta correlación no contiene ningún término de orden  $1/\alpha_0^3$ , por lo que tampoco lo contendrá ninguna cantidad derivada de  $k \cot \delta^{(1)}$  como  $v_2$ .

### 7.2.2. El Deuterón en Teoría de Perturbaciones

Las ecuaciones acopladas del deuterón con el potencial de intercambio de un pión son

$$-u''_\gamma + U_s(r) u_\gamma + U_{sd}(r) w_\gamma = -\gamma^2 u_\gamma \quad (7.32)$$

$$-w''_\gamma + U_{sd}(r) u_\gamma + \left[ U_d(r) + \frac{6}{r^2} \right] w_\gamma = -\gamma^2 w_\gamma \quad (7.33)$$

en donde  $U_s(r)$ ,  $U_{sd}(r)$  y  $U_d(r)$  representan las distintas componentes del potencial OPE reducido en el canal  ${}^3S_1 - {}^3D_1$ , que se pueden descomponer en una contribución central y otra tensorial

$$U_s = U_C \quad U_{sd} = 2\sqrt{2} U_T \quad U_d = U_C - 2 U_T \quad (7.34)$$

Las componentes central y tensorial  $U_C$  y  $U_T$  vienen dadas por

$$U_C(r) = -\frac{2}{3} m R \frac{e^{-mr}}{r} \quad (7.35)$$

$$U_T(r) = -\frac{2}{3} m R \frac{e^{-mr}}{r} \left( 1 + \frac{3}{mr} + \frac{3}{(mr)^2} \right) \quad (7.36)$$

en donde  $R$  se ha definido anteriormente en eq. (7.7). La función de onda no perturbativa del deuterón con potencial OPE se determina mediante la condición de regularidad de la función de onda y la condición adicional de reproducir la energía de ligadura física. El procedimiento está descrito en detalle en el capítulo (4).

En teoría de perturbaciones la función de onda del deuterón se expande como

$$u_\gamma(r) = u_\gamma^{(0)}(r) + u_\gamma^{(1)}(r) + \dots \quad (7.37)$$

$$w_\gamma(r) = w_\gamma^{(0)}(r) + w_\gamma^{(1)}(r) + \dots \quad (7.38)$$

donde las contribuciones  $u^{(j)}$  y  $w^{(j)}$  son de orden  $R^j$ . Las funciones  $u_\gamma^{(0)}$ ,  $w_\gamma^{(0)}$  y  $u_\gamma^{(1)}$ ,  $w_\gamma^{(1)}$  están descritas por las siguientes ecuaciones perturbativas

$$\begin{aligned} -u''_\gamma^{(0)} + \gamma^2 u_\gamma^{(0)} &= 0 \\ -w''_\gamma^{(0)} + \left[ \frac{6}{r^2} + \gamma^2 \right] w_\gamma^{(0)} &= 0 \\ -u''_\gamma^{(1)} + \gamma^2 u_\gamma^{(1)} &= -U_s(r) u_\gamma^{(0)} \\ -w''_\gamma^{(1)} + \left[ \frac{6}{r^2} + \gamma^2 \right] w_\gamma^{(1)} &= -U_{sd}(r) u_\gamma^{(0)} \end{aligned} \quad (7.39)$$

A orden cero se parte de las soluciones

$$\begin{aligned} u_\gamma^{(0)}(r) &= e^{-\gamma r} \\ w_\gamma^{(0)}(r) &= 0 \end{aligned} \quad (7.40)$$

En donde la contribución de onda d se ha tomado cero para que la función de onda del deuterón sea normalizable a orden cero. Las correcciones perturbativas a primer orden,  $u_\gamma^{(1)}$  y  $w_\gamma^{(1)}$  pueden obtenerse mediante funciones de Green

$$\begin{aligned} u_\gamma^{(1)}(r) &= \int_0^\infty G_s(r, r') U_s(r') e^{-\gamma r'} dr' \\ w_\gamma^{(1)}(r) &= \int_0^\infty G_d(r, r') U_{sd}(r') e^{-\gamma r'} dr' \end{aligned} \quad (7.41)$$

en donde las funciones de Green cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \gamma^2 \right] G_s(r, r') &= -\delta(r - r') \\ \left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{6}{r^2} + \gamma^2 \right] G_d(r, r') &= -\delta(r - r') \end{aligned} \quad (7.42)$$

Se pueden construir soluciones a las funciones de Green mediante la descomposición siguiente

$$\begin{aligned} -\gamma G_s(r, r') &= u_{\text{reg}}(r) u_{\text{irreg}}(r') \theta(r' - r) + u_{\text{reg}}(r') u_{\text{irreg}}(r) \theta(r - r') \\ -\gamma G_d(r, r') &= w_{\text{reg}}(r) w_{\text{irreg}}(r') \theta(r' - r) + w_{\text{reg}}(r') w_{\text{irreg}}(r) \theta(r - r') \end{aligned} \quad (7.43)$$

en donde las funciones de onda  $u_{(\text{ir})\text{reg}}$  y  $w_{(\text{ir})\text{reg}}$  se definen como

$$\begin{aligned} u_{\text{reg}}(r) &= \sinh(\gamma r) \\ w_{\text{reg}}(r) &= \left( 1 + \frac{3}{(\gamma r)^2} \right) \sinh(\gamma r) - \frac{3}{\gamma r} \cosh(\gamma r) \\ u_{\text{irreg}}(r) &= e^{-\gamma r} \\ w_{\text{irreg}}(r) &= e^{-\gamma r} \left( 1 + \frac{3}{\gamma r} + \frac{3}{(\gamma r)^2} \right) \end{aligned} \quad (7.44)$$

Se puede comprobar que

$$u'_{\text{reg}}(r) u_{\text{irreg}}(r) - u_{\text{reg}}(r) u'_{\text{irreg}}(r) = \gamma \quad \text{y} \quad w'_{\text{reg}}(r) w_{\text{irreg}}(r) - w_{\text{reg}}(r) w'_{\text{irreg}}(r) = \gamma \quad (7.45)$$

por lo que  $G_s(r, r')$  y  $G_d(r, r')$  están bien normalizadas.

El resultado del cálculo explícito de las correcciones perturbativas a primer orden es

$$u_{\gamma}^{(1)}(r) = e^{-\gamma r} \frac{m^2 R \Gamma(0, m r + 2 r \gamma) - \Gamma(0, m r)}{3 \gamma} - \frac{2 m^2 R \text{Ei}(-m r - 2 r \gamma) \sinh(r \gamma)}{3 \gamma} \quad (7.46)$$

$$\begin{aligned} w_{\gamma}^{(1)}(r) = & e^{-r \gamma} \left( 1 + \frac{3}{r^2 \gamma^2} + \frac{3}{r \gamma} \right) \times \\ & \left[ \frac{m^2 R (3 m^2 - 4 \gamma^2) \Gamma(0, m r + 2 r \gamma) - \Gamma(0, m r)}{6 \sqrt{2} \gamma^3} \right. \\ & + \frac{R (-6 m^3 \gamma + 6 m^2 \gamma^2 + 4 \gamma^4 + (3 m^4 - 4 m^2 \gamma^2) \log(1 + \frac{2 \gamma}{m}))}{6 \sqrt{2} \gamma^3} \\ & + \frac{e^{-m r - 2 r \gamma} R (6 + 6 m r + m^2 r^2 - m^3 r^3 + 4 r \gamma + 4 m r^2 \gamma + 2 m^2 r^3 \gamma)}{2 \sqrt{2} r^4 \gamma^3} \\ & \left. - \frac{R e^{-m r} (6 + 6 m r + m^2 r^2 - m^3 r^3 - 8 r \gamma - 8 m r^2 \gamma + 4 r^2 \gamma^2 + 4 m r^3 \gamma^2)}{2 \sqrt{2} r^4 \gamma^3} \right] \\ & + \left( 2 \left( 1 + \frac{3}{\gamma^2 r^2} \right) \sinh(\gamma r) - \frac{6}{\gamma r} \cosh(\gamma r) \right) \times \\ & \left[ \frac{e^{-m r - 2 r \gamma} R (6 + 6 m r + m^2 r^2 - m^3 r^3 + 4 r \gamma + 4 m r^2 \gamma + 2 m^2 r^3 \gamma)}{2 \sqrt{2} r^4 \gamma^3} \right. \\ & \left. - \frac{m^2 R (3 m^2 - 4 \gamma^2) \text{Ei}(-m r - 2 r \gamma)}{6 \sqrt{2} \gamma^3} \right] \quad (7.47) \end{aligned}$$

siendo  $\Gamma(0, z)$  y  $\text{Ei}(z)$  la función gamma incompleta y la función integral exponencial, que se definen como

$$\Gamma(0, z) = \int_z^{\infty} dt \frac{e^{-t}}{t} \quad (7.48)$$

$$\text{Ei}(z) = -P \int_{-z}^{\infty} dt \frac{e^{-t}}{t} \quad (7.49)$$

A partir de las correcciones perturbativas de la función de onda a primer orden,  $u_{\gamma}^{(1)}$  y  $w_{\gamma}^{(1)}$ , se pueden obtener fácilmente los observables del deuterón a este mismo orden. El primero que vamos a calcular es la razón asintótica  $D/S \eta$ , que a orden cero se anula debido a que se toma  $w_{\gamma}^{(0)} = 0$  para que la función de onda sea normalizable a ese orden. Para

calcular  $\eta$  a primer orden se considera el comportamiento en el límite asintótico de grandes distancias de  $u_\gamma^{(1)}$  y  $w_\gamma^{(1)}$

$$u_\gamma^{(1)}(r) \rightarrow c_{\text{pert}} e^{-\gamma r} \quad (7.50)$$

$$w_\gamma^{(1)}(r) \rightarrow \eta_{\text{pert}} e^{-\gamma r} \left( 1 + \frac{3}{\gamma r} + \frac{3}{(\gamma r)^2} \right) \quad (7.51)$$

en donde  $c_{\text{pert}}$  es una corrección perturbativa a la normalización asintótica  $A_S$  y  $\eta_{\text{pert}}$  es la primera contribución perturbativa no nula a la razón asintótica. En principio el valor de  $c_{\text{pert}}$  es irrelevante para el cálculo de la razón asintótica a primer orden, aunque puede verse que contribuirá a la corrección de segundo orden. Ambas cantidades pueden obtenerse considerando el límite asintótico  $r \rightarrow \infty$  de las correcciones  $u_\gamma^{(1)}$  y  $w_\gamma^{(1)}$  a la función de onda, si bien es más sencillo calcularlas considerando las ecuaciones (7.41) y (7.43), es decir, la expresión para  $u_\gamma^{(1)}$  y  $w_\gamma^{(1)}$  en término de funciones de Green, y la descomposición de éstas últimas como combinación de  $u_{(\text{ir})\text{reg}}$  y  $w_{(\text{ir})\text{reg}}$ . En tal caso se obtiene que la expresión integral de estas dos cantidades es

$$c_{\text{pert}} = \int_0^\infty U_s(r) u_{\text{reg}}(r) e^{-\gamma r} dr \quad (7.52)$$

$$\eta_{\text{pert}} = \int_0^\infty U_{sd}(r) w_{\text{reg}}(r) e^{-\gamma r} dr \quad (7.53)$$

cuya evaluación explícita lleva al resultado siguiente

$$c_{\text{pert}} = \frac{Rm^2}{3\gamma} \log \left( 1 + \frac{2\gamma}{m} \right) \quad (7.54)$$

$$\eta_{\text{Pert}} = \frac{R}{6\sqrt{2}m\gamma^3} \left[ 4\gamma^4 + 6m^2\gamma^2 - 6m^3\gamma + (3m^4 - 4m^2\gamma^2) \log \left( 1 + \frac{2\gamma}{m} \right) \right] \quad (7.55)$$

con lo que se obtiene  $\eta_{\text{pert}} = 0,0510$ , el doble del valor experimental.

Se puede calcular el resto de los observables del deuterón mediante el desarrollo perturbativo de sus correspondientes expresiones integrales

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_S^2} &= \int_0^\infty (e^{-2\gamma r} + 2u_\gamma^{(1)}(r)e^{-\gamma r}) \\ r_{m,\text{pert}}^2 &= \frac{A_S^2}{4} \int_0^\infty r^2 (e^{-2\gamma r} + 2u_\gamma^{(1)}(r)e^{-\gamma r}) \\ Q_{d,\text{pert}} &= \frac{\sqrt{2}A_S^2}{10} \int_0^\infty r^2 w_\gamma^{(1)}(r) e^{-\gamma r} dr \end{aligned} \quad (7.56)$$

Otros observables que podrían considerarse son la probabilidad de onda  $P_D$  y el radio inverso  $\langle r^{-1} \rangle$ ; sin embargo es sencillo comprobar que a primer orden  $P_{D,\text{pert}} = 0$  y el radio inverso diverge.

Para la normalización asintótica perturbativa  $A_{S,\text{pert}}$  la evaluación explícita de su expresión integral da el resultado siguiente

$$\frac{A_{S,\text{pert}}}{\sqrt{2\gamma}} = 1 - \frac{2Rm^2}{3(m+2\gamma)} + \frac{Rm^2}{3\gamma} \log\left(1 + \frac{2\gamma}{m}\right) \quad (7.57)$$

en donde se puede observar que el tercer término del resultado perturbativo se identifica con  $c_{\text{pert}}$ . El resultado numérico para la normalización asintótica perturbativa es  $A_{S,\text{pert}} = 0,7373 \text{ fm}^{-1/2}$ , a comparar con el valor no perturbativo  $A_S = 0,8681(1) \text{ fm}^{-1/2}$  y el experimental  $A_S = 0,8846(9) \text{ fm}^{-1/2}$ .

El radio de materia perturbativo del deuterón viene dado por

$$r_{m,\text{pert}} = \frac{1}{8\gamma^2} + \frac{m^2 R(3m+10\gamma)}{18\gamma(m+2\gamma)^3} \quad (7.58)$$

dando  $r_{m,\text{pert}} = 1,6388 \text{ fm}$ , algo menor que el resultado no perturbativo  $r_m = 1,9351(5) \text{ fm}$  (el valor experimental es  $r_{m,\text{exp}} = 1,9754(9)$ ).

Por último para el momento cuadrupolar perturbativo se tiene

$$Q_{d,\text{pert}} = \frac{8R(4m^2 + 9\gamma m + 6\gamma^2)}{45(m+2\gamma)^3} \quad (7.59)$$

dando  $Q_{d,\text{pert}} = 0,4555 \text{ fm}^2$ , considerablemente mayor que el resultado no perturbativo es  $Q_d = 0,2762(1) \text{ fm}^2$  y el valor experimental  $Q_{d,\text{exp}} = 0,2859(3) \text{ fm}^2$ . Es curioso observar que tanto  $\eta_{\text{pert}}$  como  $Q_{d,\text{pert}}$  son distintos de cero perturbativamente, mientras que la probabilidad de onda  $d$  perturbativa sí se anula,  $P_{D,\text{pert}} = 0$ .

Es interesante considerar el límite de acoplamiento débil en los observables perturbativos tal y como se hizo para los no perturbativos en el capítulo (4). En este límite se tiene que

$$\eta_{\text{pert}} = \frac{32\sqrt{2}R}{45m}\gamma^2 - \frac{2\sqrt{2}R\gamma^3}{3m^2} + \dots \quad (7.60)$$

$$\frac{A_{S,\text{pert}}}{\sqrt{2\gamma}} = 1 - \frac{2R\gamma}{3} - \frac{16R\gamma^2}{9m} + \dots \quad (7.61)$$

$$\sqrt{8\gamma} r_{m,\text{pert}} = 1 + \frac{2R\gamma}{3} - \frac{16R\gamma^2}{9m} + \dots \quad (7.62)$$

$$Q_{d,\text{pert}} = \frac{32R}{45m} - \frac{8R\gamma}{3m^2} + \frac{128R\gamma^2}{15m^3} + \dots \quad (7.63)$$

por lo que se puede comprobar que el cálculo perturbativo cumple las diferentes correlaciones de acoplamiento débil que se estudiaron en el capítulo (4). Estas correlaciones eran

$$\frac{A_S}{\sqrt{2\gamma}} = 1 + O(\gamma) \quad , \quad \sqrt{8}\gamma r_{m,\text{pert}} = 1 + O(\gamma) \quad \text{y} \quad \sqrt{2}\gamma^2 Q_d/\eta = 1 + O(\gamma)$$

Otro hecho interesante es que las dos cantidades que perturbativamente más se parecen a los resultados no perturbativos y experimentales son la normalización asintótica  $A_S$  y el radio de materia  $r_m$ , que tienen en común un límite de acoplamiento débil independiente de la física de largas distancias y por lo tanto del potencial de intercambio de un pión. Si consideramos la desviación de estas cantidades respecto al límite de acoplamiento débil, es decir,  $\Delta A_S = A_S - A_{S,\gamma \rightarrow 0}$  y  $\Delta r_m = r_m - r_{m,\gamma \rightarrow 0}$  en donde  $A_{S,\gamma \rightarrow 0} = \text{fm}^{-1/2}$  y  $r_{m,\gamma \rightarrow 0} = 1,5265 \text{ fm}$ , entonces se obtiene que  $\Delta A_{S,\text{pert}} = \text{fm}^{-1/2}$  y  $\Delta r_{m,\text{pert}} = 0,1122 \text{ fm}$ , a comparar con la diferencia OPE  $\Delta A_{S,\text{OPE}} = \text{fm}^{-1/2}$  y  $\Delta r_{m,\text{OPE}} = 0,4085 \text{ fm}$ . Por tanto el parecido entre los resultados perturbativos y OPE se debe a la correlación de acoplamiento débil, pero no a la posibilidad de que el potencial de intercambio de un pión pueda ser tratado perturbativamente.

En principio se puede pensar en calcular el segundo orden perturbativo para obtener mejoras sistemáticas en las predicciones de los observables. Sin embargo esto no es posible porque la teoría de perturbaciones diverge en segundo orden. El comportamiento de las correcciones perturbativas de primer orden cerca del origen es

$$u_\gamma^{(1)}(r) = -\frac{Rm^2}{3\gamma} \log\left(1 + \frac{2\gamma}{m}\right) + \dots \quad (7.64)$$

$$w_\gamma^{(1)}(r) = \frac{\sqrt{2}R}{r} - \frac{2}{3}\sqrt{2}R\gamma + \dots \quad (7.65)$$

por lo que las correcciones perturbativas al siguiente orden, que vienen dadas por las expresiones integrales

$$\begin{aligned} u_\gamma^{(2)}(r) &= \int_0^\infty G_s(r, r') [U_s(r')u_\gamma^{(1)}(r') + U_{sd}(r')w_\gamma^{(1)}(r')] dr' \\ w_\gamma^{(2)}(r) &= \int_0^\infty G_d(r, r') [U_{sd}(r')u_\gamma^{(1)}(r') + U_d(r')w_\gamma^{(1)}(r')] dr' \end{aligned} \quad (7.66)$$

por lo que si se impone un radio de corte  $r_c$  cuando  $r > r_c$  las integrales van a diverger como

$$u_\gamma^{(2)} \propto \frac{1}{r_c^2} \quad \text{y} \quad w_\gamma^{(2)} \propto \log r_c \quad (7.67)$$

mientras que cuando  $r < r_c$  la divergencia va a ser mayor ( $u_\gamma^{(2)} \propto \frac{1}{r_c^3}$  y  $w_\gamma^{(2)} \propto \frac{1}{r_c^5}$ ). Por tanto, al igual que ocurría en el canal singlete, la teoría de perturbaciones deja de converger a segundo orden para el canal del deuterón con potencial de intercambio de un pión.

## Parámetros de Baja Energía

En esta sección estamos interesados en los observables de dispersión de baja energía en teoría de perturbaciones. Los observables que se van a considerar son las longitudes de dispersión  $\alpha_0$  y  $\alpha_{02}$  y el rango efectivo  $r_0$ . Por tanto sólo resulta necesario calcular las correcciones perturbativas correspondientes a las funciones de onda de los estados de dispersión  $\alpha$  de energía cero (véase la eq. (4.57) en el capítulo (4)).

En teoría de perturbaciones se expande la función de onda de energía cero en potencias de  $R$

$$\begin{aligned} u_{0,\alpha}(r) &= u_{0,\alpha}^{(0)}(r) + u_{0,\alpha}^{(1)}(r) + \dots \\ w_{0,\alpha}(r) &= w_{0,\alpha}^{(0)}(r) + w_{0,\alpha}^{(1)}(r) + \dots \end{aligned} \quad (7.68)$$

en donde las correcciones perturbativas  $u_{0,\alpha}^{(0)}$ ,  $w_{0,\alpha}^{(0)}$  y  $u_{0,\alpha}^{(1)}$ ,  $w_{0,\alpha}^{(1)}$  obedecen ecuaciones similares a la eq. (7.39), pero en donde  $\gamma^2$  es sustituido por 0.

A primer orden se parte de las soluciones

$$\begin{aligned} u_{0,\alpha}^{(0)}(r) &= \left(1 - \frac{r}{\alpha_0}\right) \\ w_{0,\alpha}^{(0)}(r) &= 0 \end{aligned} \quad (7.69)$$

Las correcciones perturbativas a primer orden se pueden calcular mediante las fórmulas integrales siguientes que implican funciones de Green

$$\begin{aligned} u_{0,\alpha}^{(1)}(r) &= \int_0^\infty G_s(r, r') U_s(r') \left(1 - \frac{r}{\alpha_0}\right) dr' \\ w_{0,\alpha}^{(1)}(r) &= \int_0^\infty G_d(r, r') U_{sd}(r') \left(1 - \frac{r}{\alpha_0}\right) dr' \end{aligned} \quad (7.70)$$

Las funciones  $G_s(r, r')$  y  $G_d(r', r)$  se descomponen de la manera siguiente

$$\begin{aligned} -G_s(r, r') &= u_{\text{reg}}(r) u_{\text{irreg}}(r') \theta(r' - r) + u_{\text{reg}}(r') u_{\text{irreg}}(r) \theta(r - r') \\ -G_d(r, r') &= w_{\text{reg}}(r) w_{\text{irreg}}(r') \theta(r' - r) + w_{\text{reg}}(r') w_{\text{irreg}}(r) \theta(r - r') \end{aligned} \quad (7.71)$$

en donde las funciones de onda  $u_{(\text{ir})\text{reg}}$  y  $w_{(\text{ir})\text{reg}}$  se definen como

$$u_{\text{reg}}(r) = r \quad (7.72)$$

$$u_{\text{irreg}}(r) = 1 - \frac{r}{\alpha_0} \quad (7.73)$$

Se puede comprobar que

$$u'_{\text{reg}}(r)u_{\text{irreg}}(r) - u_{\text{reg}}(r)u'_{\text{irreg}}(r) = 1 \quad \text{y} \quad w'_{\text{reg}}(r)w_{\text{irreg}}(r) - w_{\text{reg}}(r)w'_{\text{irreg}}(r) = 1 \quad (7.74)$$

por lo que las funciones de Green están bien normalizadas. Los resultados del cálculo explícito de las correcciones perturbativas a primer orden son

$$\begin{aligned} u_{0,\alpha}^{(1)}(r) &= \frac{2R}{3\alpha_0} e^{-mr} (1 - \alpha_0 m) - \frac{2m^2 r R}{3} \text{Ei}(-mr) \\ w_{0,\alpha}^{(1)}(r) &= \frac{e^{-mr} R}{15\sqrt{2}\alpha_0 m^2 r^2} \\ &\times \left( 120 - 64\alpha_0 m + 120mr - 34\alpha_0 m^2 r \right. \\ &+ 40m^2 r^2 - 2\alpha_0 m^3 r^2 + \alpha_0 m^4 r^3 - \alpha_0 m^5 r^4 \left. \right) \\ &+ \frac{R(-120 + 64\alpha_0 m + \alpha_0 m^6 r^5 \Gamma(0, mr))}{15\sqrt{2}\alpha_0 m^2 r^2} \end{aligned} \quad (7.75)$$

El primer observable de dispersión que vamos a considerar es la longitud de dispersión  $\alpha_0$ . En principio podría calcularse a partir de la corrección de primer orden  $u_0^{(1)}$  a la función de onda del estado de dispersión de energía cero, pero esta corrección decae exponencialmente para distancias grandes, por lo que no genera una contribución directa a  $\alpha_0$ . Para calcular la corrección perturbativa a la longitud de dispersión es más conveniente considerar la relación de ortogonalidad perturbativa entre el estado ligado y el estado de dispersión  $\alpha$  de energía cero, que a primer orden se escribe como

$$0 = \int_0^\infty dr \left[ u_\gamma^{(0)} u_{0,\alpha}^{(0)} + u_\gamma^{(1)} u_{0,\alpha}^{(0)} + u_\gamma^{(1)} u_{0,\alpha}^{(0)} \right] \quad (7.76)$$

Evaluando la integral, la relación de ortogonalidad perturbativa es equivalente a la ecuación siguiente

$$0 = -\frac{1}{\alpha_0} + \gamma + \frac{R}{3\alpha_0 \gamma} \left[ m^2 (1 + \alpha_0 \gamma) \log \left( 1 + \frac{2\gamma}{m} \right) - 2\gamma (m - \gamma + \alpha_0 m \gamma) \right]$$

de donde puede resolverse perturbativamente la longitud de dispersión  $\alpha_0$ . Si se ignoran los términos de orden  $O(R^2)$  y superiores, se obtiene

$$\alpha_{0,\text{pert}} = \frac{1}{\gamma} - \frac{2m^2 R}{3\gamma^2} \left[ \frac{\gamma(\gamma - 2m)}{m^2} + \log \left( 1 + \frac{2\gamma}{m} \right) \right] \quad (7.77)$$

El valor que se obtiene es  $\alpha_{0,\text{pert}} = (4,3177 + 0,2912) \text{ fm} = 4,6089 \text{ fm}$ , en donde el primer término corresponde a la contribución debida a acoplamiento débil, que coincide con el resultado perturbativo a orden cero, y el segundo término es la contribución perturbativa a primer orden. El resultado perturbativo debe compararse con el OPE  $\alpha_{0,\text{OPE}} = 5,34 \text{ fm}$  y el valor experimental  $\alpha_0 = 5,42 \text{ fm}$ .

La longitud de dispersión  $\alpha_{02}$ , a diferencia de  $\alpha_0$ , sí puede obtenerse mediante el comportamiento asintótico de la solución perturbativa  $w_{0,\alpha}$  para distancias grandes,  $r \rightarrow \infty$ . En este límite dicha función de onda se comporta como

$$w_{0,\alpha} \rightarrow \frac{3\alpha_{02}}{\alpha_0 r^2} \quad (7.78)$$

por lo que comparando términos entre la ecuación anterior y la expresión perturbativa para  $w_{0,\alpha}^{(1)}$ , se obtiene el resultado

$$\begin{aligned} \alpha_{02,\text{pert}} &= \frac{4\sqrt{2}R(15 - 8\alpha_0 m)}{45m^2} \\ &= \frac{4\sqrt{2}R(15\gamma - 8m)}{45\gamma m^2} \end{aligned} \quad (7.79)$$

en donde en la segunda línea se ha sustituido la longitud de dispersión por el número de onda del estado ligado mediante la relación perturbativa  $\alpha_0 = 1/\gamma + O(R)$ . Si se toman los valores experimentales de  $\alpha_0$  y  $\gamma$  como entrada las expresiones de la primera y segunda línea generan los resultados  $\alpha_{02} = 4,24 \text{ fm}^3$  y  $\alpha_{02} = 2,53 \text{ fm}^3$  respectivamente. No hay un resultado experimental disponible con el que comparar, pero la predicción del potencial fenomenológico Nijmegen II es  $\alpha_{02} = 1,64 \text{ fm}^3$ , mientras que el resultado OPE es  $\alpha_{02,\text{OPE}} = 1,64 \text{ fm}^3$ .

La expresión perturbativa anterior para  $\alpha_{02}$  también genera la siguiente correlación lineal entre las dos longitudes de dispersión

$$\alpha_{02,\text{pert}} = 1,5499 \alpha_{0,\text{pert}} - 4,1530 \quad (7.80)$$

que puede compararse con la no perturbativa

$$\alpha_{02,\text{OPE}} = 0,9636 \alpha_{0,\text{OPE}} - 3,4676 \quad (7.81)$$

Por último se calcula el rango efectivo, que a primer orden viene dado por la fórmula intergal siguiente

$$\begin{aligned} r_{0,\text{pert}} &= -4 \int_0^\infty dr u_{0,\alpha}^{(0)}(r) u_{0,\alpha}^{(1)}(r) \\ &= \frac{4R(3(m\alpha_0)^2 - 8m\alpha_0 + 6)}{9(m\alpha_0)^2} \\ &= \frac{4R(3m^2 - 8m\gamma + 6\gamma^2)}{9m^2} \end{aligned} \quad (7.82)$$

en donde en la tercera línea se ha sustituido la longitud de dispersión por el número de onda del estado ligado mediante  $\alpha_0 = 1/\gamma + O(R)$ . La segunda línea, en la que se expresa el resultado en función de  $\alpha_0$ , coincide con la expresión perturbativa para el rango efectivo en el canal singlete, eq. (7.16). Si se toma el número de onda correspondiente a la energía de ligadura experimental se obtiene  $r_{m,\text{pert}} = 0,4831$  fm, un resultado mucho más pequeño que el no perturbativo (1,64 fm) o que el experimental (1,75 fm).

También se va a considerar el límite de acoplamiento débil para los observables de dispersión perturbativos. En este límite la longitud de dispersión  $\alpha_0$  se comporta como

$$\gamma \alpha_{0,\text{pert}} = 1 + \frac{2R\gamma}{3} - \frac{16R\gamma^2}{9m} + O(\gamma^2, R^2) \quad (7.83)$$

Si se compara esta expansión con la correspondiente para el radio de materia perturbativo, se reproduce la siguiente correlación lineal entre  $\alpha_0$  y  $r_m$

$$r_m = \frac{\alpha_0}{2\sqrt{2}} + O(\gamma^3, R^2) \quad (7.84)$$

que ya se obtuvo numéricamente cuando se consideró el límite de acoplamiento débil para el potencial de intercambio de un pión. Es caso de que se tome como entrada la longitud de dispersión experimental  $\alpha_0 = 5,42$  fm la correlación genera para el radio de materia el valor  $r_m = 1,92$  fm, a comparar con el experimental  $r_m = 1,9754(3)$  fm. Esta correlación ya fue establecida en el caso de potenciales realistas en la referencia [60].

### Escalamiento del Potencial

El comportamiento de los observables perturbativos se puede entender mejor si se reescala el potencial de intercambio de un pión con un cierto factor

$$U_{\text{OPE}} \rightarrow \lambda U_{\text{OPE}} \quad (7.85)$$

de manera que estos observables perturbativos se puedan comparar con los no perturbativos pero en el caso de que el potencial fuese más débil. El reescalamiento anterior del potencial OPE es equivalente a la transformación  $R \rightarrow \lambda R$ , de forma que se comprueba que las correcciones perturbativas a primer orden escalan linealmente con la fuerza del potencial. Por otra parte el cálculo de las propiedades del deuterón con el potencial reescalado por  $\lambda$  sirve para comprobar para qué valores del acoplamiento  $R$  del potencial los observables se comportan perturbativamente.

Los resultados perturbativos y OPE que se obtienen al reescalar el potencial se presentan en las figuras (7.1) y (7.2). En la primera figura se muestran los observables del deuterón y en la segunda los observables de dispersión en ese mismo canal. Puede observarse que el cálculo

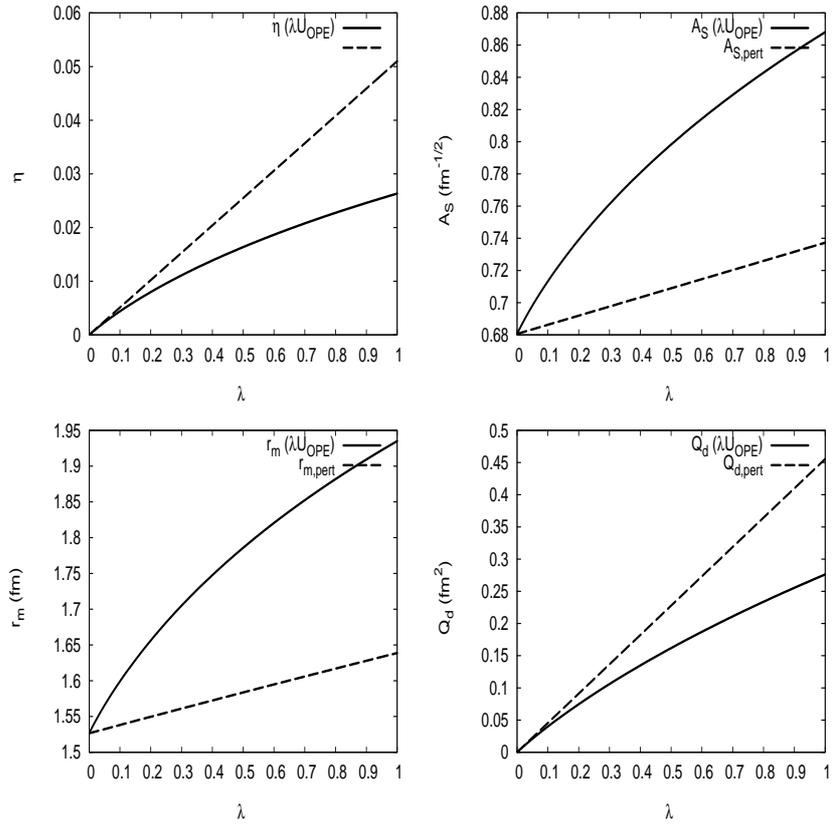


Figura 7.1: Observables perturbativos y no perturbativos para el potencial de intercambio de un pión en donde el potencial ha sido escalado en un factor  $\lambda$ , lo que corresponde a sustituir  $U_{OPE} \rightarrow \lambda U_{OPE}$  en el cálculo no perturbativo o  $R \rightarrow \lambda R$  en el cálculo perturbativo. En el panel superior izquierdo se muestra la razón asintótica  $\eta(\lambda)$ , en el superior derecho la normalización asintótica  $A_S(\lambda)$ , en el inferior izquierdo el radio de materia  $r_m(\lambda)$ , y en el inferior derecho el momento cuadrupolar  $Q_d(\lambda)$ .

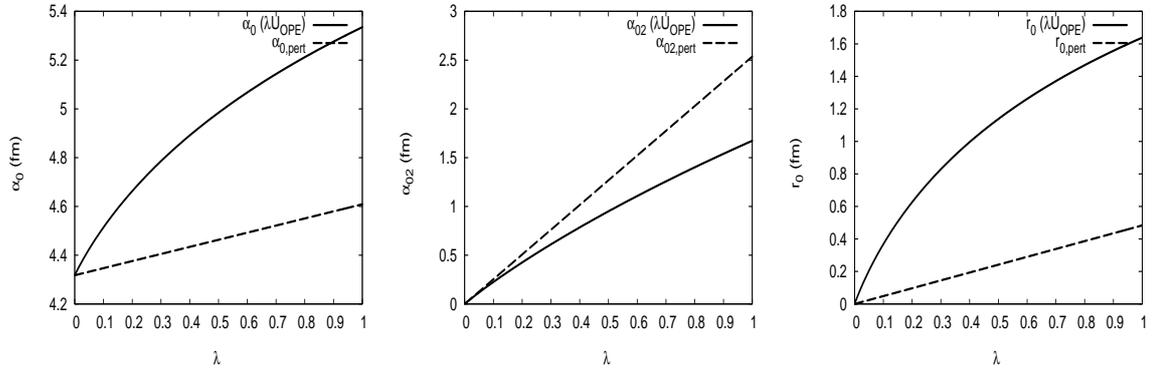


Figura 7.2: Observables de dispersión perturbativos y no perturbativos en el canal del deuterón para el potencial de intercambio de un pión en donde el potencial ha sido escalado en un factor  $\lambda$ , lo que corresponde a sustituir  $U_{OPE} \rightarrow \lambda U_{OPE}$  en el cálculo no perturbativo o  $R \rightarrow \lambda R$  en el cálculo perturbativo. En el panel izquierdo se muestra la longitud de dispersión  $\alpha_0(\lambda)$ , en el central  $\alpha_{02}(\lambda)$ , y en el izquierdo el rango efectivo  $r_0(\lambda)$ .

perturbativo para  $\eta$  y  $Q_d$  corresponde a la pendiente del cálculo no perturbativo para  $\lambda \rightarrow 0$ , pero que sin embargo este no es el caso para  $A_S$  y  $r_m$ . Es decir, las primeras dos cantidades son perturbativas, mientras que las segundas no lo son ni siquiera cuando  $R \rightarrow 0$ . En el caso de los observables de dispersión el único parámetro que se comporta perturbativamente es  $\alpha_{02}$ .

### 7.2.3. Comparación con el Contaje de Kaplan, Savage y Wise

Las expresiones perturbativas que hemos obtenido para el potencial OPE tanto en el singlete como en el deuterón son comparables término-a-término con los resultados del contaje de Kaplan, Savage y Wise (KSW) [44, 45] para la interacción NN. Nos vamos a centrar en el deuterón, ya que en el caso del singlete una comparación entre perturbaciones en mecánica cuántica y el contaje KSW ya fue hecha, aunque de forma distinta a la de nuestro trabajo, por Hansen y Cohen [80]. Los resultados del contaje KSW para el deuterón los tomamos de la referencia [81], aunque se han rescrito debido a su prescripción para  $f_\pi$ .

Un primer ejemplo es el momento cuadrupolar a NLO en el contaje de KSW respecto al

momento cuadrupolar perturbativo para OPE, cuyas expresiones son

$$Q_{\text{KSW}}^{\text{NLO}} = \frac{g^2 M(4m^2 + 9\gamma m + 6\gamma^2)}{60\pi f^2(m + 2\gamma)^3} \quad (7.86)$$

$$Q_{d,\text{pert}} = \frac{8R(4m^2 + 9\gamma m + 6\gamma^2)}{45(m + 2\gamma)^3} \quad (7.87)$$

por lo que la identificación es inmediata cuando se desarrolla  $R$ . Sin embargo en el caso del radio de materia la identificación no es tan directa

$$r_{m,\text{KSW}}^{\text{NLO}^2} = \frac{1}{8\gamma^2} \left[ 1 + C_2(\mu) \frac{M\gamma(\mu - \gamma)^2}{2\pi} + \frac{g^2 M\gamma m^2(3m + 10\gamma)}{24\pi f^2(m + 2\gamma)^3} \right] \quad (7.88)$$

$$r_{m,\text{pert}}^2 = \frac{1}{8\gamma^2} + \frac{m^2 R(3m + 10\gamma)}{18\gamma(m + 2\gamma)^3} \quad (7.89)$$

En este caso el resultado KSW contiene una serie de elementos que no están presentes en el cálculo perturbativo. Por una parte hay una escala de renormalización  $\mu$ , debido a la utilización de PDS, un tipo de regularización dimensional, en el conteo KSW. Por otra parte el radio de materia KSW contiene un término no presente en el cálculo perturbativo, el término  $C_2$ . Este es un contratérmino, ya que en el conteo KSW se toma un potencial de contacto que esquemáticamente se puede escribir como

$$\langle p|V_C|p' \rangle = C_0 + D_2 m^2 + C_2 (p^2 + p'^2) \quad (7.90)$$

tomando  $\mu = \gamma$  para la escala de renormalización o  $C_2 = 0$  reproduce nuestro resultado perturbativo. Una situación similar se encuentra comparando los rangos efectivos en la onda  ${}^3S_1$ , en donde de nuevo aparece el término  $C_2$ .

Gracias al término de contacto  $C_2$  es posible obtener mejores resultados en el conteo KSW que mediante un método perturbativo. Esto permite evitar el problema que surgen en observables como  $r_0$ ,  $r_m$  o  $A_S$  en donde el cálculo perturbativo para el deuterón falla. Sin embargo se tienen dos inconvenientes con este término: (i) por una parte el conteo KSW es perturbativo, pero para reproducir los observables es necesario un valor de  $C_2$  grande, lo que indica que tal vez esté en peligro la convergencia perturbativa; (ii) por otra no está claro si este término es compatible con la ortogonalidad perturbativa de las funciones de onda, mediante a las cuales se llegan a resultados idénticos a KSW salvo por el término  $C_2$ . Esto podría significar una inconsistencia formal en el conteo KSW no conocida hasta ahora.

### 7.3. Perturbaciones con el Potencial de Intercambio de Dos Piones

El potencial quiral para la interacción NN se expresa como una expansión en potencias de  $Q^\nu$ , con  $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$U(r) = U^{(0)}(r) + U^{(2)}(r) + U^{(3)}(r) + \dots \quad (7.91)$$

siendo la contribución de orden  $\nu = 1$  nula debido a paridad e inversión temporal. El orden  $\nu = 0$  corresponde con lo que normalmente llamamos LO,  $\nu = 2$  es NLO y  $\nu = 3$  es NNLO.

#### 7.3.1. El Canal Singlete a NLO y NNLO

La función de onda para el canal singlete pueden expandirse en una serie perturbativa acorde con la expansión del potencial quiral, eq. (7.91)

$$u_k(r) = u_k^{(0)}(r) + u_k^{(2)}(r) + u_k^{(3)}(r) + \dots \quad (7.92)$$

en donde cada una de las contribuciones  $\nu = 0, 2, 3$  de la función de onda está descrita por la ecuación de Schrödinger reducida correspondiente a su orden

$$-u_k''^{(0)} + U^{(0)}(r) u_k^{(0)} - k^2 u_k^{(0)} = 0 \quad (7.93)$$

$$-u_k''^{(2)} + U^{(0)}(r) u_k^{(2)} - k^2 u_k^{(2)} = -U^{(2)}(r) u_k^{(0)} \quad (7.94)$$

$$-u_k''^{(3)} + U^{(0)}(r) u_k^{(3)} - k^2 u_k^{(3)} = -U^{(3)}(r) u_k^{(0)} \quad (7.95)$$

La primera de las ecuaciones representa la solución de dispersión no perturbativa para el potencial de intercambio de un pión, que se estudió en detalle en el capítulo (3). Las otras dos ecuaciones representan las contribuciones perturbativas de los potenciales TPE NLO y TPE NNLO. Como se puede ver una ventaja de que el orden de los potenciales NLO y NNLO sea  $\nu = 2$  y  $3$  respectivamente es que sus correspondientes contribuciones son aditivas.

En principio los observables de dispersión se van a poder expandir de la misma manera que las funciones de onda. Se tendría entonces la expansión

$$\alpha_0 = \alpha_0^{(0)} + \alpha_0^{(2)} + \alpha_0^{(3)} + \dots \quad (7.96)$$

$$r_0 = r_0^{(0)} + r_0^{(2)} + r_0^{(3)} + \dots \quad (7.97)$$

$$\delta = \delta^{(0)} + \delta^{(2)} + \delta^{(3)} + \dots \quad (7.98)$$

Sin embargo, en el caso concreto de la longitud de dispersión esto no va a ser así, ya que se va a fijar a su valor experimental a todos los ordenes para tener una teoría de perturbaciones compatible con la prescripción de renormalización usada en los cálculos no perturbativos. En tal caso se tiene

$$\alpha_0^{(0)} = \alpha_{0,\text{exp}} \quad , \quad \alpha_0^{(2)} = 0 \quad \text{y} \quad \alpha_0^{(3)} = 0 \quad (7.99)$$

Una manera de asegurar esta prescripción de renormalización es usar la fórmula integral (7.25) que se dedujo cuando se consideró la teoría de perturbaciones para el potencial OPE, y adaptarla al caso de NLO y NNLO perturbativos, es decir

$$\begin{aligned}
k \cot \delta_0 + \frac{1}{\alpha_0} &= k \cot \delta_0^{(0)} + \frac{1}{\alpha_0^{(0)}} \\
&+ \int_{r_c}^{\infty} dr U^{(2)}(r) \left[ u_k^{(0)}(r)^2 - u_0^{(0)}(r)^2 \right] \\
&+ \int_{r_c}^{\infty} dr U^{(3)}(r) \left[ u_k^{(0)}(r)^2 - u_0^{(0)}(r)^2 \right]
\end{aligned} \tag{7.100}$$

en donde  $u_0^{(0)}$  y  $u_k^{(0)}$  se refiere a la solución OPE completa y se ha tomado un radio de corte  $r_c$  en las integrales debido a que los potenciales NLO y NNLO son singulares y divergen como  $U^{(2)}(r) \sim 1/r^5$  y  $U^{(3)}(r) \sim 1/r^6$ .

A partir de esta fórmula perturbativa para  $k \cot \delta$  puede obtenerse la fórmula integral correspondiente para el rango efectivo. Si se considera la expansión de la solución  $u_k^{(0)}$  en potencias del momento

$$u_k^{(0)}(r) = u_0^{(0)}(r) + k^2 u_2^{(0)}(r) + k^4 u_4^{(0)}(r) + \dots \tag{7.101}$$

se tiene que las correcciones al rango efectivo vienen dadas por

$$r_0^{(2)} = 4 \int_{r_c}^{\infty} dr U^{(2)}(r) u_2^{(0)}(r) u_0^{(0)}(r) \tag{7.102}$$

$$r_0^{(3)} = 4 \int_{r_c}^{\infty} dr U^{(3)}(r) u_2^{(0)}(r) u_0^{(0)}(r) \tag{7.103}$$

Para estimar la convergencia de esta integral con respecto al radio de corte  $r_c$  se considera el comportamiento cerca del origen de las soluciones  $u_0^{(0)}$ ,  $u_2^{(0)}$ , etc. En primer lugar, y por comodidad, reparametrizamos el potencial de intercambio de un pión como

$$U_{\text{OPE}} = -\frac{e^{-mr}}{R_s r} \quad \text{en donde} \quad R_s = \frac{16 f_\pi^2 \pi}{g^2 m^2 M} \tag{7.104}$$

con lo que cerca del origen se tiene que

$$\begin{aligned}
u_0^{(0)}(r) &\sim c_0 \left[ 1 + mr - \frac{3r}{2R_s} - \frac{r}{R_s} \log \left( \frac{r}{R_s} \right) \right] + c_1 r \\
u_2^{(0)}(r) &\sim -c_0 r R_s + \mathcal{O}(r^3) \\
u_4^{(0)}(r) &\sim \frac{1}{3!} c_0 r^3 R_s + \mathcal{O}(r^5) \\
u_6^{(0)}(r) &\sim -\frac{1}{5!} c_0 r^5 R_s + \mathcal{O}(r^7) \\
u_8^{(0)}(r) &\sim \frac{1}{7!} c_0 r^7 R_s + \mathcal{O}(r^9)
\end{aligned} \tag{7.105}$$

Los coeficientes  $c_0$  y  $c_1$  corresponden respectivamente a las soluciones irregular y regular en el origen. Dado que se toma la longitud de dispersión como parámetro libre, los valores de  $c_0$  y  $c_1$  estarán determinados por  $\alpha_0$  y por lo tanto no puede suponerse que la solución irregular no contribuya, lo que equivaldría a  $c_0 = 0$  que fijaría el valor de  $\alpha_0$ . En tal caso y considerando solamente la contribución  $\nu = 2$ , es decir, NLO, se tiene para el rango efectivo

$$r_0^{(2)} \sim 4 \int_{r_c} dr \frac{1}{r^5} (-c_0^2 R_s) r \tag{7.106}$$

$$r_0^{(3)} \sim 4 \int_{r_c} dr \frac{1}{r^6} (-c_0^2 R_s) r \tag{7.107}$$

que divergen como  $1/r_c^3$  y  $1/r_c^4$  respectivamente, por lo que se concluye que los resultados perturbativos a NLO y NNLO son divergentes. Esta situación es bastante extraña ya que el cálculo completo a estos ordenes es finito, lo que sugiere que hay una dependencia no analítica respecto a los acoplamientos. Para comprender mejor esta situación vamos a realizar un cálculo no perturbativo reescalando la contribución correspondiente a NLO y NNLO, es decir

$$U(r) = U_{\text{LO}} + \lambda U_{\text{NLO}} \tag{7.108}$$

$$U(r) = U_{\text{LO}} + \lambda (U_{\text{NLO}} + U_{\text{NNLO}}) \tag{7.109}$$

Con los potenciales reescalados se toma la prescripción de renormalización de reproducir la longitud de dispersión experimental y se calcula el rango efectivo  $r_0(\lambda)$ . En tal caso se va a tener que  $r_0(0) = r_0^{(0)} = r_0^{\text{LO}}$  y  $r_0(1) = r_0^{\text{NLO}}$  o  $r_0^{\text{NNLO}}$  según el caso. Los resultados de este cálculo se muestran en la figura (7.3). Si se analiza el comportamiento de estos resultados para  $\lambda$  pequeño se puede ver que  $r_0(\lambda) - r_0(0) \sim \lambda^{1/3}$  o  $\lambda^{1/4}$  según se trate del potencial NLO y NNLO.

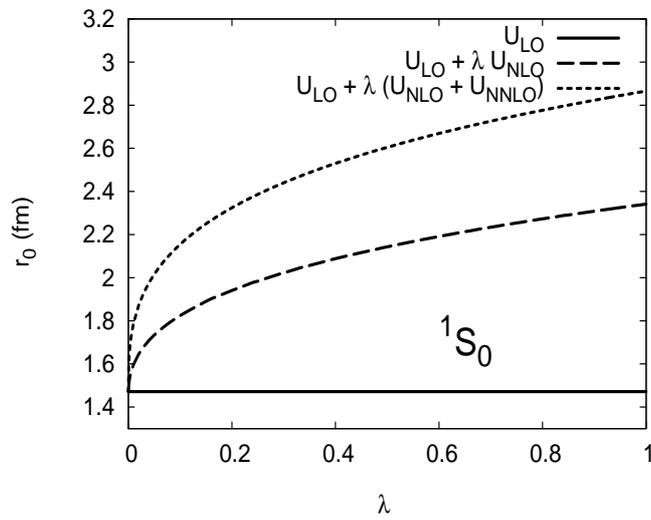


Figura 7.3: Rango efectivo en el canal singlete calculado mediante el reescalamiento de las componentes NLO y NNLO del potencial quiral en dicho canal, es decir, en calcular  $r_0(\lambda)$  para  $U_{LO} + \lambda U_{NLO}$  y  $U_{LO} + \lambda (U_{NLO} + U_{NNLO})$  con las condiciones  $r_0(0) = r_{0,OPE}$  y  $r_0(1) = r_{0,TPENLO}$  y  $r_{0,TPENNLO}$  respectivamente.

En cualquier caso la única manera de eliminar la divergencia del cálculo perturbativo es sustraer términos dependientes de momento hasta que el resultado sea convergente. El comportamiento de estos términos se presentó en la ecuación (7.105). Si por ejemplo se sustrae el rango efectivo a la expresión integral (7.100) para  $k \cot \delta$  se tiene que

$$\begin{aligned}
k \cot \delta_0 &= k \cot \delta_0^{(0)} + \frac{1}{2} (r_0 - r_0^{(0)}) k^2 \\
&+ \int_{r_c}^{\infty} dr [U^{(2)}(r) + U^{(3)}(r)] \times \\
&\left[ u_k^{(0)}(r)^2 - u_0^{(0)}(r)^2 - 2k^2 u_0^{(0)} u_2^{(0)} \right]
\end{aligned} \tag{7.110}$$

en donde  $r_0^{(0)}$  es el rango efectivo que se obtiene fijando  $\alpha_0$  con el potencial OPE. Con esta substracción el comportamiento de la integral es

$$k \cot \delta_0 \sim \int_{r_c}^{\infty} dr r^2 [U^{(2)}(r) + U^{(3)}(r)] \tag{7.111}$$

que diverge como  $1/r_c^2$  para la componente NLO y  $1/r_c^3$  para NNLO, por lo que se debe probar una nueva substracción. El siguiente término en la expansión de rango efectivo es  $v_2$ , que se expresa perturbativamente como

$$\begin{aligned}
v_2^{(2)} + v_2^{(3)} &= \int_{r_c}^{\infty} dr [U^{(2)}(r) + U^{(3)}(r)] \times \\
&\left[ 2u_4^{(0)}(r)u_0^{(0)}(r) + u_2^{(0)}(r)^2 \right]
\end{aligned} \tag{7.112}$$

Este término es divergente, al igual que ocurría con el rango efectivo  $r_0^{(2/3)}$ , y el integrando se comporta como  $1/r^3$  y  $1/r^4$  a NLO y NNLO respectivamente, por lo que para radio de corte pequeño se tiene que  $v_2^{(2)} \sim 1/r_c^2$  y  $v_2^{(3)} \sim 1/r_c^3$ . Cuando se sustraen  $r_0$  y  $v_2$  a la ecuación (7.100) se obtiene una divergencia en  $k \cot \delta$  de tipo  $\log r_c$  para la componente NLO y  $1/r_c$  para NNLO. El siguiente término en la expansión de rango efectivo es  $v_3$ , cuya fórmula integral perturbativa es

$$\begin{aligned}
v_3^{(2)} + v_3^{(3)} &= \int_{r_c}^{\infty} dr [U^{(2)}(r) + U^{(3)}(r)] \times \\
&\left[ 2u_6^{(0)}(r)u_0^{(0)}(r) + 2u_2^{(0)}(r)u_4^{(0)}(r) \right]
\end{aligned} \tag{7.113}$$

que tampoco es convergente, ya que para radio de corte pequeño se comporta como  $v_2^{(2)} \sim \log r_c$  y  $v_2^{(3)} \sim 1/r_c$ . Si por último se sustrae este término y los anteriores en la expansión de rango efectivo en la ecuación (7.100) se obtiene al fin un resultado finito, pues el

comportamiento de la integral en la ecuación para  $k \cot \delta$  es

$$k \cot \delta_0 \sim \int_{r_c}^{\infty} dr r^6 [U^{(2)}(r) + U^{(3)}(r)] \quad (7.114)$$

$$\begin{aligned} v_4^{(2)} + v_4^{(3)} &= \int_{r_c}^{\infty} dr [U^{(2)}(r) + U^{(3)}(r)] \times \\ &\quad \left[ 2u_8^{(0)}(r)u_0^{(0)}(r) + 2u_2^{(0)}(r)u_4^{(0)}(r) + u_4^{(0)}(r)^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.115)$$

### 7.3.2. El Deuterón a NLO y NNLO

Las funciones de onda para el deuterón pueden entonces expandirse en una serie perturbativa acorde con la expansión del potencial quiral, eq. (7.91)

$$\begin{aligned} u_\gamma(r) &= u_\gamma^{(0)}(r) + u_\gamma^{(2)}(r) + u_\gamma^{(3)}(r) + \dots \\ w_\gamma(r) &= w_\gamma^{(0)}(r) + w_\gamma^{(2)}(r) + w_\gamma^{(3)}(r) + \dots \end{aligned} \quad (7.116)$$

en donde cada una de las contribuciones  $\nu = 0, 2, 3$  de la función de onda está descrita por la ecuación de Schrödinger correspondiente a su orden

$$\begin{aligned} -u''^{(0)} + U_s^{(0)}(r) u^{(0)} + U_{sd}^{(0)}(r) w^{(0)} + \gamma^2 u^{(0)} &= 0 \\ -w''^{(0)} + U_{sd}^{(0)}(r) u^{(0)} + \left[ U_d^{(0)}(r) + \frac{6}{r^2} \right] w^{(0)} + \gamma^2 w^{(0)} &= 0 \quad (7.117) \\ -u''^{(2)} + U_s^{(0)}(r) u^{(2)} + U_{sd}^{(0)}(r) w^{(2)} + \gamma^2 u^{(2)} &= -U_s^{(2)}(r) u^{(0)} - U_{sd}^{(2)}(r) w^{(0)} \\ -w''^{(2)} + U_{sd}^{(0)}(r) u^{(2)} + \left[ U_d^{(0)}(r) + \frac{6}{r^2} \right] w^{(2)} + \gamma^2 w^{(2)} &= -U_{sd}^{(2)}(r) u^{(0)} - U_d^{(2)}(r) w^{(0)} \quad (7.118) \\ -u''^{(3)} + U_s^{(0)}(r) u^{(3)} + U_{sd}^{(0)}(r) w^{(3)} + \gamma^2 u^{(3)} &= -U_s^{(3)}(r) u^{(0)} - U_{sd}^{(3)}(r) w^{(0)} \\ -w''^{(3)} + U_{sd}^{(0)}(r) u^{(3)} + \left[ U_d^{(0)}(r) + \frac{6}{r^2} \right] w^{(3)} + \gamma^2 w^{(3)} &= -U_{sd}^{(3)}(r) u^{(0)} - U_d^{(3)}(r) w^{(0)} \quad (7.119) \end{aligned}$$

La primera de las ecuaciones representa al deuterón con el potencial OPE no perturbativo, estudiado en detalle en el capítulo (4). Las otras dos ecuaciones representan las contribuciones perturbativas debido a los potenciales TPE NLO y TPE NNLO. Las soluciones perturbativas para  $\nu = 2, 3$  van a ser divergentes en el origen, como puede comprobarse mediante la

expresión de estas soluciones en términos de funciones de Green. El comportamiento de las funciones de onda a orden cero y de los potenciales NLO y NNLO hacen que las soluciones perturbativas sean divergentes. Por lo tanto habrá que trabajar con un radio de corte finito.

La normalización asintótica  $A_S$  a orden  $\nu = 0$  (potencial OPE) es

$$\frac{1}{(A_S^{(0)})^2} = \int_{r_c}^{\infty} [u_\gamma^{(0)2} + w_\gamma^{(0)2}] dr \quad (7.120)$$

en donde la función de onda del deuterón para  $\nu = 0$  puede descomponerse usando el principio de superposición en dos contribuciones, una que en infinito se comporta como onda s y en otra como onda d

$$\begin{aligned} u_\gamma^{(0)}(r) &= u_S^{(0)} + \eta^{(0)} u_D^{(0)} \\ w_\gamma^{(0)}(r) &= w_S^{(0)} + \eta^{(0)} w_D^{(0)} \end{aligned} \quad (7.121)$$

estando  $\eta^{(0)}$  determinado por la condición de regularidad de la función de onda en el origen. De la misma manera también se pueden descomponer las contribuciones NLO y NNLO

$$\begin{aligned} u_\gamma^{(2)}(r) &= c_S^{(2)} u_S^{(2)} + \eta^{(0)} c_D^{(2)} u_D^{(2)} \\ w_\gamma^{(2)}(r) &= c_S^{(2)} w_S^{(2)} + \eta^{(0)} c_D^{(2)} w_D^{(2)} \end{aligned} \quad (7.122)$$

$$\begin{aligned} u_\gamma^{(3)}(r) &= c_S^{(3)} u_S^{(3)} + \eta^{(0)} c_D^{(3)} u_D^{(3)} \\ w_\gamma^{(3)}(r) &= c_S^{(3)} w_S^{(3)} + \eta^{(0)} c_D^{(3)} w_D^{(3)} \end{aligned} \quad (7.123)$$

La ventaja de esta descomposición a orden  $\nu = 2, 3$  está en que las funciones de onda  $u_S^{(\nu)}, w_S^{(\nu)}$  y  $u_D^{(\nu)}, w_D^{(\nu)}$  sólo dependen de la energía de ligadura del deuterón y de los parámetros del potencial OPE. La dependencia en  $\eta^{(0)}$  se factoriza, mientras que los coeficientes  $c_S^{(\nu)}$  y  $c_D^{(\nu)}$  deben ser determinados mediante condiciones adicionales. Por una parte la normalizabilidad perturbativa a NLO y NNLO de la función de onda del deuterón requiere que las contribuciones NLO y NNLO sean ortogonales a LO

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{r_c}^{\infty} [u_\gamma^{(0)} u_\gamma^{(2)} + w_\gamma^{(0)} w_\gamma^{(2)}] dr \\ 0 &= \int_{r_c}^{\infty} [u_\gamma^{(0)} u_\gamma^{(3)} + w_\gamma^{(0)} w_\gamma^{(3)}] dr \end{aligned} \quad (7.124)$$

Estas condiciones de ortogonalidad implican una relación entre los coeficientes  $c_S^{(\nu)}$  y  $c_D^{(\nu)}$

para  $\nu = 2, 3$

$$\begin{aligned}\eta^{(0)} \frac{c_D^{(2)}}{c_D^{(2)}} &= -\frac{\int_{r_c}^{\infty} [u_{\gamma}^{(0)} u_S^{(2)} + w_{\gamma}^{(0)} w_S^{(2)}] dr}{\int_{r_c}^{\infty} [u_{\gamma}^{(0)} u_D^{(2)} + w_{\gamma}^{(0)} w_D^{(2)}] dr} \\ \eta^{(0)} \frac{c_D^{(3)}}{c_D^{(3)}} &= -\frac{\int_{r_c}^{\infty} [u_{\gamma}^{(0)} u_S^{(3)} + w_{\gamma}^{(0)} w_S^{(3)}] dr}{\int_{r_c}^{\infty} [u_{\gamma}^{(0)} u_D^{(3)} + w_{\gamma}^{(0)} w_D^{(3)}] dr}\end{aligned}\quad (7.125)$$

Por otra parte comparando la forma asintótica de la función de onda completa con la serie perturbativa pueden obtenerse expansiones perturbativas para  $A_S$  y  $\eta$

$$\eta = \eta^{(0)} \frac{1 + c_D^{(2)} + c_D^{(3)} + \dots}{1 + c_S^{(2)} + c_S^{(3)} + \dots} \quad (7.126)$$

$$A_S = A_S^{(0)} (1 + c_S^{(2)} + c_S^{(3)} + \dots) \quad (7.127)$$

Estas expansiones permiten determinar el valor de  $c_S^{(\nu)}$  y  $c_D^{(\nu)}$  mediante una condición de renormalización consistente en fijar algún observable a su valor físico. Para determinar el orden  $\nu = 2$  se va a exigir que se reproduzca la razón asintótica  $\eta$ , lo que genera la siguiente ecuación perturbativa para NLO

$$c_D^{(2)} - c_S^{(2)} = \frac{\eta_{exp} - \eta^{(0)}}{\eta^{(0)}} \quad (7.128)$$

mientras que para determinar el orden  $\nu = 3$  se va a reproducir la normalización asintótica  $A_S$ , con lo que las ecuaciones perturbativas resultantes para NNLO son

$$\begin{aligned}c_D^{(2)} - c_S^{(2)} + c_D^{(3)} - c_S^{(3)} &= \frac{\eta_{exp} - \eta^{(0)}}{\eta^{(0)}} \\ c_S^{(2)} + c_S^{(3)} &= \frac{A_{S,exp} - A_S^{(0)}}{A_S^{(0)}}\end{aligned}\quad (7.129)$$

Las funciones de onda que se obtienen mediante estas dos condiciones pueden verse en la figura (7.4), en donde se ha tomado un radio de corte  $r_c = 0,5\text{fm}$  en la determinación de los coeficientes  $c_S^{(\nu)}$  y  $c_D^{(\nu)}$ <sup>5</sup>. Como puede observarse las funciones de onda perturbadas para NLO son prácticamente idénticas a las OPE hasta  $r \sim 0,5\text{fm}$ , mientras que para NNLO las

---

<sup>5</sup>El radio de corte se usa para la determinación de  $c_S^{(\nu)}$  y  $c_D^{(\nu)}$ , y como radio inferior de integración para todos los observables. Sin embargo es posible dibujar las funciones de onda para cualquier radio, si bien el valor de éstas por debajo del radio de corte es irrelevante.

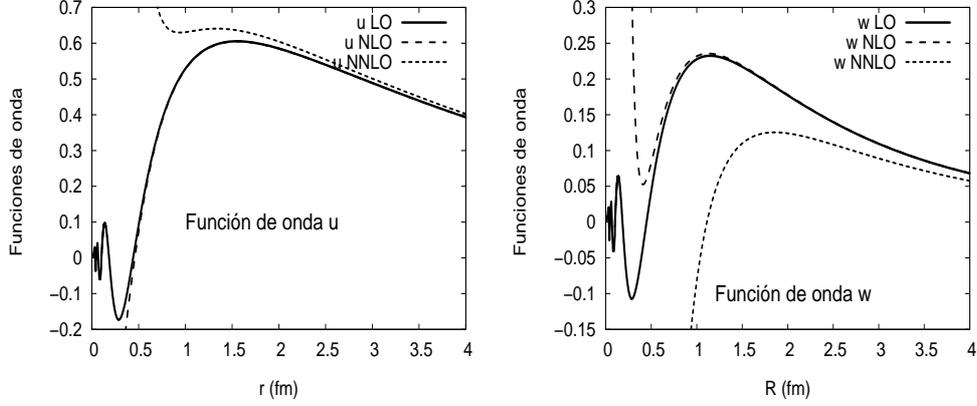


Figura 7.4: Funciones de onda a LO no perturbativas, NLO y NNLO perturbativas. En el panel de la izquierda se muestra la función de onda  $u$ , y en el de la derecha la función de onda  $w$ . Se ha tomado un radio de corte  $r_c = 0,5\text{fm}$  para las condiciones que determinan las soluciones perturbativas. Las funciones de onda a LO se han normalizado tomando  $A_S = 1$ .

funciones de onda difieren de manera apreciable del resultado OPE por debajo de  $r \sim 3,0\text{fm}$ . En principio la distancia a la que las contribuciones NLO y NNLO empiezan a notarse cambia con el radio de corte elegido, aunque no excesivamente.

El resto de los observables también pueden ser expandidos perturbativamente de manera análoga a como se ha hecho en el caso de  $\eta$  y  $A_S$ . Por ejemplo, el momento cuadrupolar puede escribirse hasta orden  $\nu = 3$  como

$$Q_d = Q_d^{(0)} + c_S^{(2)} Q_d^{(S,2)} + \eta^{(0)} c_D^{(2)} Q_d^{(D,2)} + c_S^{(3)} Q_d^{(S,3)} + \eta^{(0)} c_D^{(3)} Q_d^{(D,3)} + \dots \quad (7.130)$$

en donde  $Q_d^{(0)}$  representa la contribución OPE no perturbativa, mientras que las contribuciones perturbativas  $Q_d^{(S(D),\nu)}$  se definen como

$$Q_d^{(S(D),\nu)} = \frac{1}{20} \int_{r_c}^{\infty} r^2 \left[ w_{S(D)}^{(\nu)}(r) (2\sqrt{2}u^{(0)}(r) - w^{(0)}(r)) + w^{(0)}(r) (2\sqrt{2}u_{S(D)}^{(\nu)}(r) - w_{S(D)}^{(\nu)}(r)) \right] dr \quad (7.131)$$

En la figura (7.5) podemos observar la dependencia de los observables perturbativos a NLO y NNLO en función del radio de corte.

El fracaso o la no renormalizabilidad del esquema perturbativo anterior puede de nuevo entenderse estudiando las propiedades analíticas de escalamiento de los observables cuando se reescala el potencial. En este caso vamos a considerar únicamente el cambio

$$U(r) = U_{\text{LO}} + \lambda (U_{\text{NLO}} + U_{\text{NNLO}}) \quad (7.132)$$

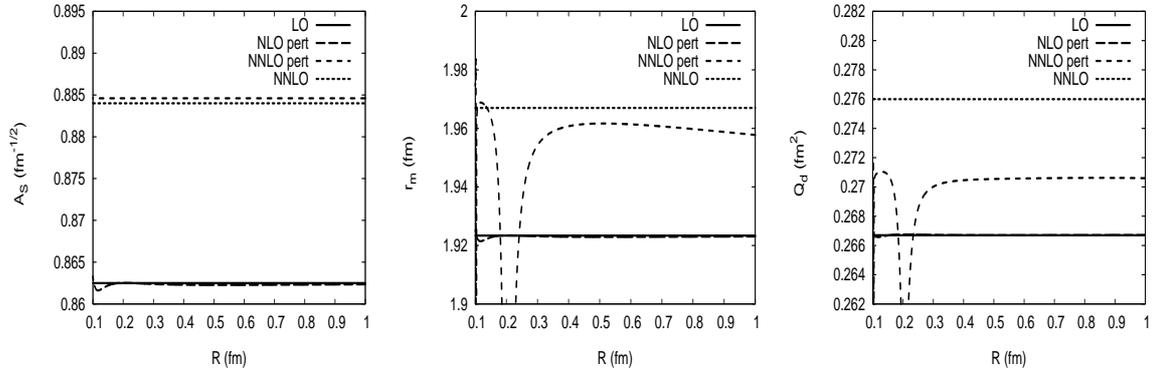


Figura 7.5: Dependencia de los observables perturbados a NLO y NNLO respecto al radio de corte  $r_c$ . En el panel de la izquierda se muestra la normalización asintótica  $A_S(r_c)$ , en el del centro el radio de materia  $r_m(r_c)$ , y en el de la derecha el momento cuadrupolar eléctrico  $Q_d(r_c)$ . En teoría de perturbaciones a NLO se fija la razón asintótica  $\eta$  a su valor experimental, y a NNLO se fija también el valor  $A_S$  al experimental (por esa razón la curva  $A_S(r_c)$  es una línea recta a NNLO). Se compara con los resultados LO y NNLO no perturbativos.

ya que el escalamiento  $U(r) = U_{\text{LO}} + \lambda U_{\text{NLO}}$  llevaría a resultados divergentes (el potencial NLO es singular repulsivo en el canal del deuterón). Este escalamiento tiene que hacerse con cuidado. Según lo visto en el capítulo (4), para tener una solución regular del deuterón es necesario fijar el valor de la razón D/S  $\eta$ . Por tal motivo cuando se considere el potencial reescalado la razón asintótica  $\eta$  se va a fijar al valor que hace que el potencial a LO sea regular. En la figura (7.6) podemos observar los resultados para la dependencia de los observables con el reescalamiento del potencial de intercambio de dos piones. En general es muy difícil determinar si el límite  $\lambda \rightarrow 0$  recupera el resultado OPE, si bien es esperable. En cualquier caso el comportamiento cerca de  $\lambda \rightarrow 0$  es extraño, por lo que no se podrá esperar nada bueno de un desarrollo perturbativo en este caso.

## 7.4. Perturbaciones en Ondas Periféricas

En esta sección se muestra como también en el caso de las ondas periféricas  $l > 0$  con un potencial singular que se comporte en el origen como  $1/r^n$ , con  $n > 2$ , existe siempre un orden en teoría de perturbaciones en el que el resultado perturbativo va a diverger.

Consideremos el caso simplificado de una onda periférica desacoplada de momento angular

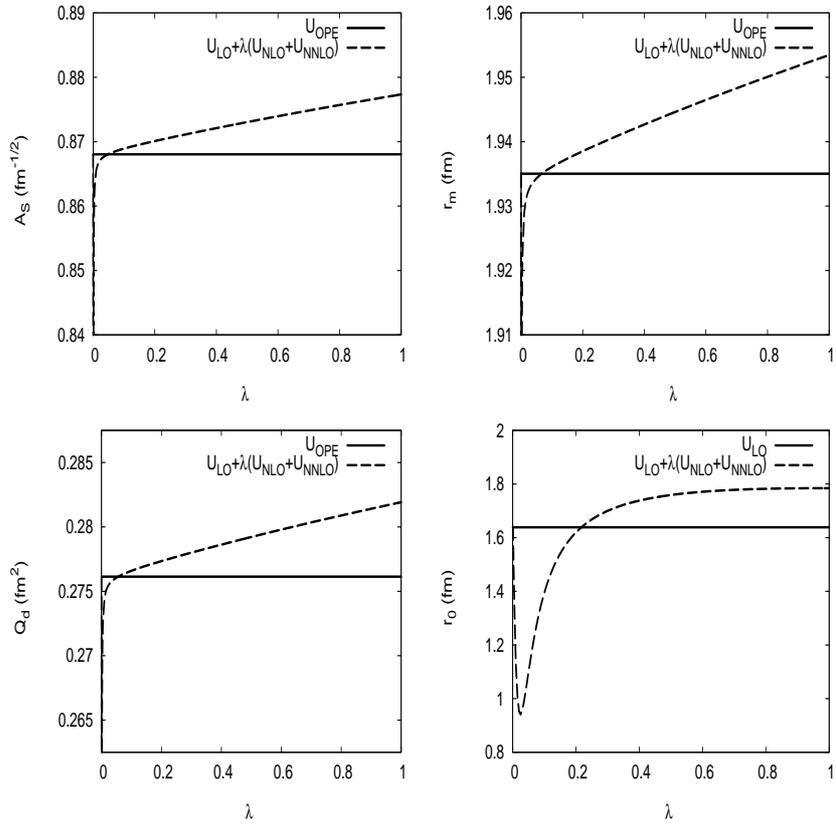


Figura 7.6: Observables del deuterón para el potencial de intercambio de dos piones a NNLO en donde el potencial ha sido escalado en un factor  $\lambda$ , lo que corresponde a sustituir  $U_{TPE} \rightarrow \lambda U_{TPE}$ . En el panel superior izquierdo se muestra la normalización asintótica  $A_S(\lambda)$ , en el superior derecho el radio de materia  $r_m(\lambda)$ , en el inferior izquierdo el momento cuadrupolar  $Q_d(\lambda)$ , y en el inferior derecho del rango efectivo  $r_0(\lambda)$ .

$l$ , para la que la ecuación de Schrödinger reducida se escribe

$$-u_l''(r) + \left[ U(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) = k^2 u_l(r) \quad (7.133)$$

La ecuación radial puede reescribirse como la fórmula integral

$$u_l(r) = \hat{j}_l(kr) + \int_0^\infty G_{k,l}(r, r') U(r') u_l(r') dr' \quad (7.134)$$

en donde la función de Green cumple la ecuación

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] G_{k,l}(r, r') = -\delta(r - r') \quad (7.135)$$

Una solución particular para la función de Green

$$k G_{k,l}(r, r') = \hat{j}_l(kr) \hat{y}_l(kr') \theta(r - r') + \hat{j}_l(kr') \hat{y}_l(kr) \theta(r' - r) \quad (7.136)$$

Por otra parte si se tiene en cuenta que el defasaje viene dado por

$$\tan \delta_l = -\frac{1}{k} \int_0^\infty \hat{j}_l(kr) U(r) u_{k,l}(r) dr \quad (7.137)$$

insertando en esta expresión la ecuación (7.134) se obtiene la expansión perturbativa siguiente para  $\tan \delta_l$

$$\tan \delta_l = -\frac{1}{k} \int_0^\infty [\hat{j}_l(kr)]^2 U(r) dr - \frac{1}{k} \int_0^\infty \hat{j}_l(kr) U(r) G_{k,l}(r, r') U(r') \hat{j}_l(kr) dr dr' + \dots \quad (7.138)$$

es decir, la conocida serie de Born. Si se considera el comportamiento de las funciones de Bessel reducidas a cortas distancias o momento pequeño

$$\hat{j}_l(x) \rightarrow \frac{x^{l+1}}{(2l+1)!!} \quad \hat{y}_l(x) \rightarrow \frac{(2l-1)!!}{x^l} \quad (7.139)$$

podemos a partir de este comportamiento obtener la función de Green de momento cero

$$-(2l+1)G_{0,l}(r, r') = \frac{r^{l+1}}{r'^l} \theta(r' - r) + \frac{r'^{l+1}}{r^l} \theta(r - r') \quad (7.140)$$

y si además se considera que para momento pequeño  $\tan \delta_l \rightarrow -\alpha_l k^{2l+1}$ , entonces se tiene la siguiente expansión perturbativa para la longitud de dispersión

$$\begin{aligned} (2l+1)!!^2 \alpha_l &= \int_0^\infty dr r^{2l+2} U(r) \\ &+ \frac{2}{2l+1} \int_0^\infty dr r \int_0^r dr' (r')^{2l+2} U(r) U(r') + \dots \end{aligned} \quad (7.141)$$

La ventaja de considerar la longitud de dispersión en vez del defasaje está en que nos permite estimar de manera más sencilla la convergencia de la expansión perturbativa a un determinado orden  $k$ , que estará determinada por la integral

$$\int_0^\infty dr_1 r_1 U(r_1) \int_0^{r_1} dr_2 r_2 U(r_2) \dots \int_0^{r_{k-1}} dr_k r_k^{2l+2} U(r_k) \quad (7.142)$$

la cual, si se tiene en cuenta que  $U(r) \sim -1/r^n$  para  $r$  pequeño, sólo convergerá si se cumple la condición  $2l + 1 > k(n - 2)$ , por lo que para  $n > 2$  siempre habrá un  $k$  lo suficientemente grande para el que la aproximación de Born será divergente.

## 7.5. Conclusiones

El problema principal del tratamiento perturbativo en la interacción NN en teoría quiral de perturbaciones está en que ésta no es convergente, lo que limita los tratamientos perturbativos a un orden finito, tal y como se hace por ejemplo al tratar el potencial OPE, sección (7.2), o requieren la introducción de un radio de corte  $r_c$ , sección (7.3). Este problema ocurre incluso en el caso de ondas periféricas de momento angular alto. La razón de estos fallos suele estar en la elección de la función de onda irregular al fijar un parámetro, como ocurre en el singlete con potencial OPE, o en la aparición de términos no analíticos en el escalamiento de los observables respecto a un cambio en el acoplamiento del potencial, cosa inevitable en los potenciales singulares.

En el tratamiento perturbativo del potencial de intercambio de un pión se encuentra que la teoría de perturbaciones es finita tan sólo a primer orden. Para la teoría de perturbaciones en el canal singlete esto es suficiente y se constata que en este canal los piones son perturbativos. En el deuterón sin embargo se puede hablar de un fallo perturbativo al menos en los observables con un límite de acoplamiento débil definido como es el caso de  $A_S$  y  $r_m$  debido a la aparición de términos no analíticos, probablemente debidos a la fuerza tensorial. Sin embargo la característica más impresionante del tratamiento perturbativo con el potencial OPE es su identificación con el esquema de contaje propuesto por Kaplan, Savage y Wise (KSW) [44, 45]. Los resultados entre teoría de perturbaciones y el esquema KSW son idénticos en el caso de que se elimine el término de contacto dependiente de momento. Una consecuencia indirecta de esta identificación es que las amplitudes KSW violan las condiciones de ortogonalidad, lo que indica una posible inconsistencia en dicho contaje. Esto es muy interesante dado que previamente se pensaba que el contaje KSW era de hecho consistente, considerándose ésta una de las virtudes de dicho método. Por otra parte el hecho de que la teoría de perturbaciones para el potencial OPE funcione en el canal singlete pero no tanto en el triplete viene a confirmar los problemas de convergencia ya conocidos del contaje KSW [46].

En el caso del potencial de intercambio de dos piones se tiene que la única manera de realizar un cálculo perturbativo es considerando un radio de corte finito<sup>6</sup>, que cierra la posibilidad sugerida en un trabajo reciente [43] de renormalizar el potencial quiral a NLO y NNLO mediante un tratamiento no perturbativo para el potencial OPE a LO, mientras que se propone calcular perturbativamente las correcciones NLO y NNLO. Es decir, una teoría de perturbaciones basada en ondas distorsionadas tampoco funciona. Por otro lado los cálculos basados en el escalamiento de los potenciales a NLO y NNLO,  $U_{(N)NLO} \rightarrow \lambda U_{(N)NLO}$ , son un indicio muy fuerte en favor de los contajes fraccionales para la interacción NN. Por contajes fraccionales se entiende por un lado alguna organización apriorística de las contribuciones quirales al potencial de manera que pueda determinarse el escalamiento de los observables, como por ejemplo

$$r_0(\lambda) = c_\kappa \lambda^\kappa + c_{\kappa'} \lambda^{\kappa'} + \dots \quad (7.143)$$

con  $\kappa$  y  $\kappa'$  fracciones, así como métodos de cálculo para obtener los coeficientes ( $c_\kappa$  en el ejemplo anterior) de estos contajes. En tal sentido un contaje fraccional es algo así como una modificación de teoría de perturbaciones compatible con potenciales singulares. La determinación de estos exponentes críticos está en curso [82].

---

<sup>6</sup>También está la opción de la proliferación de parámetros

## Capítulo 8

# Renormalización de la Interacción Nuclear con Condiciones de Contorno

### 8.1. Introducción

La interacción nuclear se puede comprender mejor si se tiene en cuenta que existe una separación de escalas entre la física de largas y cortas distancias. Los intercambios piónicos dominan el comportamiento de largas distancias y en ondas este comportamiento puede ser descrito por la ecuación de Schrödinger reducida

$$-u_k''(r) + U(r)u_k(r) = k^2 u_k(r) \quad , \quad u_k(r) \rightarrow \sin(kr + \delta(k)) \quad (8.1)$$

en donde el potencial  $U(r) = U_{\text{LO}}(r) + U_{\text{NLO}}(r) + \dots$  representa la serie de intercambios piónicos de largas distancias ordenada según el conteo de potencias propio de teoría quiral de perturbaciones. Por otra parte, para potenciales de larga distancia regulares, las propiedades de cortas distancias pueden ser descritas mediante una condición de contorno en el origen

$$u_k'(0) - k \cot \delta_c(k) u_k(0) = 0 \quad (8.2)$$

En tal caso el problema de la separación de escalas en la interacción NN puede entenderse como una distorsión de largas distancias de la interacción de cortas distancias cuyo resultado es el defasaje total  $\delta(k)$

$$\delta_c(k) \longrightarrow (\text{Distorsión Piónica}) \longrightarrow \delta(k) \quad (8.3)$$

Sin embargo la relación real entre la física de largas y cortas distancias es mucho más compleja, dado que la contribución de cortas distancias  $\delta_c(k)$  es desconocida, y como el intercambio piónico produce potenciales que son muy singulares cerca del origen, no pueden alcanzarse distancias arbitrariamente cortas.

Esta representación puede ser mejorada mediante la introducción de una escala de renormalización con dimensiones de longitud, es decir, un radio de corte  $r_c$ , por debajo del cual la física de cortas distancias domina el comportamiento del sistema, a la que describiremos con una condición de contorno en  $r_c$

$$u'_k(r_c) - L_k(r_c)u_k(r_c) = 0 \quad , \quad L_k(r_c) = k \cot(kr_c + \delta_c(r_c, k)) \quad (8.4)$$

De nuevo, la relación entre la física de largas y cortas distancias puede entenderse como una distorsión piónica de  $\delta_c(r_c, k)$ , pero con la condición de que el defasaje total  $\delta(k)$  no dependa de la escala de renormalización  $r_c$ .

$$\delta_c(r_c, k) \longrightarrow \delta(k) \quad / \quad \frac{d\delta(k)}{dr_c} = 0 \quad (8.5)$$

Esta condición de regularización conduce a la siguiente ecuación de renormalización para el defasaje de cortas distancias  $\delta_c$

$$\frac{d\delta_c(r_c, k)}{dr_c} = -\frac{1}{k} U(r_c) \sin^2(kr_c + \delta_c)$$

que deduciremos más adelante en este capítulo. A partir de esta ecuación podemos intentar extraer la interacción de cortas distancias tomando el límite  $r_c \rightarrow 0$ , de manera que  $\delta_c(r_c, k) \rightarrow \delta_c(k)$ . Este límite se tiene que tomar con mucho cuidado debido al comportamiento singular de los potenciales derivados de intercambios piónicos. Por otra parte, si tomamos  $r_c \rightarrow \infty$ , estamos de hecho considerando toda la interacción NN, tanto los piones como los términos de contacto, como física de cortas distancias, de forma que  $\delta_c(r_c, k) \rightarrow \delta(k)$ . Esta propiedad puede ser usada como condición de integración de la ecuación de renormalización, evitando así los problemas derivados de intentar hacer un ajuste a los datos.

Los objetivos de este capítulo son la derivación de la ecuación de renormalización anterior y el estudio de ésta y de sus propiedades desde un punto de vista de renormalización Wilsoniana mediante el que puede estudiarse de una manera sencilla y rigurosa la relación entre la física de largas y cortas distancias, además de proporcionar una interpretación físicamente interesante de esta relación. Se estudiarán los puntos fijos infrarrojos ( $r_c \rightarrow \infty$ ) y ultravioletas ( $r_c \rightarrow 0$ ), la relación con los métodos de regularización expuestos en los capítulos anteriores, y la extracción e interpretación de la física de cortas distancias.

## 8.2. Regularización con Condición de Contorno

Consideremos un sistema descrito por la ecuación de Schrödinger en onda  $s$  con el potencial reducido  $U(r) = 2\mu V(r)$ , que describe la interacción a largas distancias, y la función de onda  $u_k(r)$

$$-u_k'' + U(r)u_k = k^2 u_k \quad (\text{onda } s) \quad (8.6)$$

La solución  $u_k$  tiene el siguiente comportamiento asintótico en infinito

$$u_k(r) \rightarrow \sin(kr + \delta(k)) \quad (8.7)$$

y en  $r = R$  cumple la condición de contorno

$$u'_k(R) - L_k(R) u_k(R) = 0 \quad (8.8)$$

en donde se ha llamado  $R$  en vez del habitual  $r_c$  al radio de corte por comodidad.

El coeficiente  $L_k(R)$ , es decir, la derivada logarítmica de la función de onda en  $R$ , representa la física correspondiente a distancias  $r < R$  para momento  $k$ . Dado que la ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial de segundo orden, una condición de contorno como la anterior contiene toda la información necesaria para describir el sistema físico considerado. Por tanto la condición de contorno parametriza el desconocimiento sobre la física para  $r < R$ , mientras que se supone una información completa para distancias  $r > R$ . Para un determinado valor del radio de corte  $R$  se obtiene una solución  $u(r, R)$  que depende del radio de corte. Lo mismo ocurre con el defasaje,  $\delta(k, R)$ .

Sin embargo esperamos poder eliminar la dependencia de los defasajes en el radio de corte variando la derivada logarítmica en el radio de corte  $L_k(R)$ , de manera que finalmente pueda tomarse el límite  $R \rightarrow 0$ . En la práctica basta con que  $R$  sea menor que cualquier otra escala de longitud de largas distancias del sistema para que se obtenga un límite suave en el radio de corte, aunque en algunos casos, como el de los potenciales *NLO* y *NNLO* singulares, el límite debe tomarse con cuidado. Se observará que aunque  $L_k(R)$  no tendrá una dependencia suave con el radio de corte, los resultados físicos se comportarán bien y serán poco sensibles a  $R$ . Este procedimiento de regularización es similar a la renormalización Wilsoniana en espacio de momentos de la ref. [49] <sup>1</sup>.

### 8.2.1. El Grupo de Renormalización Asociado a la Regularización con Condición de Contorno

La evolución de la condición de contorno  $L_k(R)$  respecto al radio de corte  $R$  se determina imponiendo el requerimiento de que los defasajes sean independientes del radio  $R$ , es decir

$$\frac{d\delta(k, R)}{dR} = 0 \quad (8.9)$$

---

<sup>1</sup>En el análisis de Birse se exige que la matriz  $K$  no dependa de un corte abrupto en momento  $\Lambda$  (véase el apéndice (B)), es decir,  $\frac{\partial}{\partial \Lambda} K = 0$ , condición que lleva a la ecuación de renormalización

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} V = \frac{M}{2\pi^2} V(k', \Lambda, p, \Lambda) \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - p^2} V(\Lambda, k, p, \Lambda)$$

En tal caso para encontrar la ecuación que determina  $L_k(R)$  hay que relacionar el efecto que un cambio en el radio de corte  $R \rightarrow R + \Delta R$  tiene en la derivada logarítmica con el que tiene en el defasaje. Por tanto un primer paso es definir la derivada parcial respecto a  $R$ , que denotaremos por el subíndice  $R$

$$\frac{\partial u(r, R)}{\partial R} = u_R(r, R) \quad (8.10)$$

Por una parte si se deriva la ecuación de Schrödinger reducida (8.6) respecto al radio de corte  $R$  se tiene que

$$-u''_R(r, R) + U(r)u_R(r, R) = k^2 u_R(r, R) \quad (8.11)$$

Si se consideran la ecuación anterior y la original (8.6) se puede obtener la identidad de Lagrange siguiente

$$(u''_R u - u'' u_R) = (u'_R u - u' u_R)' = 0 \quad (8.12)$$

Integrando esta identidad desde  $r = R$  hasta infinito se obtiene

$$(u'_R u - u' u_R) \Big|_R = (u'_R u - u' u_R) \Big|_\infty \quad (8.13)$$

El término en infinito puede deducirse con facilidad del comportamiento asintótico de las funciones de onda, es decir

$$\begin{aligned} u(r, R) &\rightarrow \sin(kr + \delta(k, R)) \\ u'(r, R) &\rightarrow \cos(kr + \delta(k, R)) \\ u_R(r, R) &\rightarrow \cos(kr + \delta(k, R)) \delta_R(k, R) \\ u'_R(r, R) &\rightarrow -\sin(kr + \delta(k, R)) \delta_R(k, R) \end{aligned}$$

por lo que se obtiene

$$(u'_R u - u' u_R) \Big|_\infty = -k \frac{d\delta(k, R)}{dR} \quad (8.14)$$

Por otra parte el término en  $R$  de la identidad de Lagrange puede obtenerse considerando la derivada respecto a  $R$  de la condición de contorno (8.8)

$$u''(R, R) + u'_R(R, R) - L'_k(R)u(R, R) - L_k(R) [u'(R, R) + u_R(R, R)] = 0 \quad (8.15)$$

y por tanto

$$(u'_R u - u' u_R) \Big|_R = [k^2 - U(R) + L'_k(R) + L_k(R)^2] u^2 \quad (8.16)$$

Con lo que se llega al resultado que relaciona el cambio en el radio de corte con el cambio en la derivada logarítmica y en el defasaje

$$-k \frac{d\delta}{dR} = [k^2 - U(R) + L'_k(R) + L_k(R)^2] u(R, R)^2 \quad (8.17)$$

Si se impone la condición de renormalización de que el defasaje no dependa en la elección particular de  $R$ , se obtiene la ecuación de renormalización siguiente

$$L'_k(R) + L_k(R)^2 = U(R) - k^2 \quad (8.18)$$

Esta ecuación define la evolución del coeficiente  $L_k(R)$  respecto al radio de corte de manera que los parámetros físicos que se obtienen al resolver la ecuación de Schrödinger con la condición de contorno (8.8) sean independientes de  $R$ . Se puede observar que para garantizar la independencia de los defasajes es necesario que la condición de contorno dependa de la energía. Por otra parte es curioso comprobar que la ecuación (8.18) puede deducirse trivialmente aplicando la ecuación de Schrödinger sobre la propia definición de la derivada logarítmica  $L_k$ , aunque en tal caso la relación con el proceso de renormalización no es directa.

El coeficiente  $L_k(R)$  tiene dimensiones de longitud inversa, aunque también puede resultar adecuado reescalar  $L_k(R)$  de manera que defina un coeficiente adimensional al que se lo llamará  $\xi_k$

$$L_k(R) = \frac{\xi_k(R)}{R} \quad (8.19)$$

La ecuación de renormalización para  $\xi_k(R)$  se reescribe como

$$R \frac{d\xi_k}{dR} = \xi_k(1 - \xi_k) + [U(R) - k^2] R^2 \quad (8.20)$$

que es una ecuación de Ricatti. Puede demostrarse que las soluciones para diferentes radios  $R$  y  $R_0$  se relacionan mediante la transformación de Moebius siguiente

$$\xi_k(R) = \frac{A(R, R_0)\xi_k(R_0) + B(R, R_0)}{C(R, R_0)\xi_k(R_0) + D(R, R_0)} \quad (8.21)$$

de donde puede extraerse la matriz

$$\mathbf{M}(R, R_0) = \begin{pmatrix} A(R, R_0) & B(R, R_0) \\ C(R, R_0) & D(R, R_0) \end{pmatrix} \quad (8.22)$$

que satisface la propiedad de grupo

$$\mathbf{M}(R, R')\mathbf{M}(R', R'') = \mathbf{M}(R, R'') \quad (8.23)$$

### 8.2.2. Comportamiento en el Límite Infrarrojo

El comportamiento del coeficiente adimensional  $\xi_k$  puede estudiarse en el límite infrarrojo, es decir, en el límite  $R \rightarrow \infty$ . En este límite el efecto de un potencial con alcance finito  $a$  puede ignorarse, con lo que la ecuación de renormalización se simplifica

$$R \frac{d\xi_k}{dR} = \xi_k(1 - \xi_k) - k^2 R^2 \quad (8.24)$$

y puede estudiarse de manera analítica el comportamiento de  $\xi_k(R)$ . Se va a distinguir entre los casos de energía cero y energía finita, por lo que será de utilidad la expansión en momentos del coeficiente  $\xi_k$

$$\xi_k(R) = \xi_0 + (kR)^2 \xi_2 + (kR)^4 \xi_4 + \dots \quad (8.25)$$

en donde  $\xi_0, \xi_2, \xi_4$ , etc, obedecen las ecuaciones de renormalización siguientes

$$R \frac{d\xi_0}{dR} = \xi_0(1 - \xi_0) + U(R)R^2 \quad (8.26)$$

$$R \frac{d\xi_2}{dR} = -\xi_2(1 + 2\xi_0) - 1 \quad (8.27)$$

$$R \frac{d\xi_4}{dR} = -\xi_4(3 + 2\xi_0) - \xi_2^2 \quad (8.28)$$

$$\dots = \dots \quad (8.29)$$

Resolviendo estas ecuaciones puede estudiarse la expansión en momentos del grupo de renormalización, y las relaciones entre los distintos coeficientes  $\xi_{2n}$  en el límite infrarrojo.

#### Energía Cero

En el caso de un potencial regular de alcance finito  $a$ , en este límite se tiene que  $R^2 U(R) \rightarrow 0$ , debido a que  $R \gg a$ , por lo que la ecuación de renormalización a energía cero se podrá reescribir como

$$R \frac{d\xi_0}{dR} = \xi_0(1 - \xi_0) \quad (8.30)$$

Esta ecuación es invariante de escala, es decir, no cambia ante la transformación  $R \rightarrow \lambda R$ . Obviamente la invariancia de escala se rompe debido a la presencia del potencial: la validez de la anterior ecuación de renormalización aproximada es  $a \ll R$ , que tras el cambio de escala pasa a ser  $a/\lambda \ll R$ .

Se definen los puntos fijos como aquellos valores de  $\xi_0$  para los que  $\xi_0' = 0$ , y que son por tanto independientes de la escala de renormalización  $R$ . Los puntos fijos para la ecuación de renormalización (8.30) son  $\xi_0 = 0$  y  $\xi_0 = 1$ . El punto fijo  $\xi_0 = 0$  es inestable, lo que significa

que una pequeña diferencia  $\delta\xi_0$  respecto al valor del punto fijo genera una desviación cada vez mayor en el límite infrarrojo  $R \rightarrow \infty$ . Esto puede comprobarse directamente a partir de la ecuación de renormalización considerando  $\xi_0 = \eta$ , con  $\eta$  una pequeña perturbación respecto al punto fijo

$$R \frac{d\eta}{dR} = \eta + O(\eta^2) \quad \Rightarrow \quad \eta \propto R \quad (8.31)$$

por lo que se observa que la perturbación  $\eta$  crece con  $R$ , y por tanto el punto fijo es inestable en el límite  $R \rightarrow \infty$ . Por otra parte el punto fijo  $\xi_0 = 1$  es estable, como se puede comprobar usando el argumento anterior pero considerando en este caso la perturbación  $\xi_0 = 1 + \eta$

$$R \frac{d\eta}{dR} = -\eta + O(\eta^2) \quad \Rightarrow \quad \eta \propto \frac{1}{R} \quad (8.32)$$

por lo que la perturbación  $\eta$  decrece con  $R$  y se vuelve irrelevante en el límite infrarrojo.

La interpretación física de los dos puntos fijos es directa si se tiene en cuenta la relación entre el coeficiente adimensional  $\xi_0$  y las funciones de onda de energía cero a largas distancias

$$\xi_0 = R \frac{u'_0(R)}{u_0(R)} \quad \text{en donde} \quad u_0(R) = 1 - \frac{R}{\alpha_0} \quad (8.33)$$

con  $\alpha_0$  la longitud de dispersión del sistema considerado. Se obtiene entonces que

$$\xi_0(R) = \frac{R}{R - \alpha_0} \quad (8.34)$$

por lo que se ve que el punto fijo inestable corresponde con dispersión anómala,  $\alpha_0 = \pm\infty$ , mientras que el punto fijo estable se identifica con la situación física  $\alpha_0 = 0$ .

## Energía Finita

La ecuación de renormalización para energía finita en el límite infrarrojo se escribe como

$$R \frac{d\xi_k}{dR} = \xi_k(1 - \xi_k) - k^2 R^2 \quad (8.35)$$

en donde la parte correspondiente al potencial se anula debido a que en el límite infrarrojo se están considerando distancias mucho mayores que el alcance del potencial. Esta ecuación de renormalización tiene como solución

$$\xi_k(R) = kR \cot [kR + \delta(k)] \quad (8.36)$$

con  $\delta(k)$  el defasaje. Si se reordenan los términos puede obtenerse la siguiente expresión para  $k \cot \delta$

$$k \cot \delta(k) = \frac{kR + \xi_k(R) \cot(kR)}{kR \cot(kR) - \xi_k(R)} \quad (8.37)$$

a partir de la cual se pueden relacionar las expansiones en potencias de momentos de  $k \cot \delta$  y  $\xi_k(R)$ . Por una parte, para  $k \cot \delta$ , se tiene la expansión de rango efectivo

$$k \cot \delta(k) = -\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{2}r_0k^2 + v_2k^4 + \dots \quad (8.38)$$

y por otra parte para  $\xi_k(R)$  se tiene que

$$\xi_k(R)(R) = \xi_0(R) + (kR)^2\xi_2(R) + (kR)^4\xi_4(R) + \dots \quad (8.39)$$

por lo que la relación entre ambas expansiones es

$$k \cot \delta(k) = \frac{1}{R} \frac{\xi_0}{1 - \xi_0} + \frac{\xi_0^2 - 3\xi_0 + 3\xi_2 + 3}{3(\xi_0 - 1)^2} Rk^2 + \dots \quad (8.40)$$

Este resultado puede conectarse directamente con el análisis anterior de puntos fijos infrarrojos a energía cero. Como se puede ver el punto fijo atractivo  $\xi_0 = 1$  induce correcciones cada vez mayores en la expansión de rango efectivo, estropeando la convergencia de esta serie, mientras que para el punto fijo repulsivo  $\xi_0 = 0$  la expansión de rango efectivo está bien definida y converge rápidamente.

En realidad este resultado es esperable si se consideran las relaciones de universalidad que se obtuvieron en el capítulo () para los parámetros de la expansión de rango efectivo. Los observables de dispersión de baja energía se pueden relaciona con la longitud de dispersión mediante la relación

$$v_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{A_{n,k}}{\alpha_0^k} \quad (8.41)$$

con  $A_{n,k}$  un coeficiente con dimensiones  $L^{2n+k-1}$ , en donde  $L$  representa la longitud. Estos coeficientes pueden ser reexpresados entonces como  $A_{n,k} = \beta_{n,k} a^{2n+k-1}$ , en donde  $a$  es el alcance del potencial y  $\beta_{n,k}$  un coeficiente adimensional cuyo valor de su pondra que es natural ( $\beta_{n,k} = O(1)$ )<sup>2</sup>. El punto fijo atractivo  $\xi_0 = 1$  se identifica con la situación física  $\alpha_0 = 0$ ,

---

<sup>2</sup>El argumento de naturalidad en general será cierto en el caso de que domine el comportamiento de largas distancias del potencial, que depende de la escala  $a$ , el alcance. En caso contrario los coeficientes  $\beta_{2n,k}$  podrían ser bastante grandes. Sin embargo las desviaciones respecto a esta aproximación de escala única  $a$  se verán en los coeficientes asociados con las potencias inversas más bajas de la longitud de dispersión. Esto puede verse por ejemplo en la relación de universalidad para el rango efectivo

$$r_0 = A + \frac{B}{\alpha_0} + \frac{C}{\alpha_0^2}$$

en donde para los potenciales quirales de intercambio piónico se observa que aunque  $A$  depende considerablemente del comportamiento a cortas distancias del potencial,  $C$  sólo depende de la cola piónica de largas distancias, y su valor cambiaba poco para LO, NLO y NNLO.

para la que los observables de dispersión de baja energía se comportan como

$$v_n \propto \frac{a^{3n}}{\alpha_0^{n+1}} \quad (8.42)$$

por lo que cada nuevo término de la expansión de rango efectivo tendrá una contribución mayor a  $k \cot \delta$ , y la convergencia será pobre. Por el contrario el punto fijo repulsivo  $\xi_0 = 0$  se indentifica con  $\alpha_0 = \pm\infty$ , límite en el que

$$v_n \propto a'^{2n+1} \quad (8.43)$$

en donde  $a'$  indica que se trata probablemente de una escala de cortas distancias del sistema,  $a' \ll a$ . En este caso la convergencia de  $k \cot \delta$  será rápida.

Por otra parte también puede considerarse la expansión complementaria a la de rango efectivo, es decir, la expansión de  $\tan \delta/k$ , en la que

$$\frac{\tan \delta}{k} = -\alpha_0 - \beta k^2 + \dots = R \frac{1 - \xi_0}{\xi_0} - R^3 \frac{3 - 3\xi_0 + \xi_0^2 + 3\xi_2}{3\xi_0^2} + \dots \quad (8.44)$$

en donde  $\beta = \frac{1}{2} r_0 \alpha_0^2$ . En este caso la situación es exactamente la contraria que en la expansión de rango efectivo habitual. Para el punto fijo repulsivo  $\xi_0 = 0$  la convergencia de la expansión es pobre o inexistente, mientras que para  $\xi_0 = 1$  esta expansión converge adecuadamente.

Por último es interesante comparar las expansiones de rango efectivo y de  $\xi_k$  para obtener las expresiones de  $\xi_0$  y  $\xi_2$  en función de los observables  $\alpha_0$  y  $r_0$

$$\xi_0(R) = \frac{R}{R - \alpha_0} \quad (8.45)$$

$$\xi_2(R) = \frac{6 \alpha_0 R^2 - 2 R^3 + \alpha_0^2 (-6 R + 3r_0)}{6 (\alpha_0 - R)^2 R} \quad (8.46)$$

En la expresión para  $\xi_2$  es posible eliminar la dependencia explícita respecto a la escala de renormalización  $R$ , con lo que se obtiene

$$\xi_2 = \frac{\xi_0(\xi_0^2 - 3\xi_0 + 3)(3r_0/\alpha_0 - 2) - 3r_0/\alpha_0}{6\xi_0} \quad (8.47)$$

### 8.2.3. Comportamiento en el Límite Ultravioleta

En el límite ultravioleta,  $R \rightarrow 0$ , el comportamiento del coeficiente de energía cero  $\xi_0(R)$  puede estudiarse a partir del comportamiento de las funciones de onda cerca del origen

$$u_0(R) \rightarrow c_0 u_{\text{irreg}}(R) + c_1 u_{\text{reg}}(R) \quad (8.48)$$

por lo que entonces

$$\xi_0(R) = R \frac{u'_0(R)}{u_0(R)} = R \frac{c_0 u'_{\text{irreg}}(R) + c_1 u'_{\text{reg}}(R)}{c_0 u_{\text{irreg}}(R) + c_1 u_{\text{reg}}(R)} \quad (8.49)$$

Esto significa que se puede clasificar el comportamiento de  $\xi_0(R)$  según como sea el potencial de largas distancias cerca del origen, lo que dará lugar a puntos fijos similares a los encontrados en el límite infrarrojo y a dos comportamientos nuevos, ciclos límite y atractores.

Para el potencial de largas distancias se va a distinguir entre el caso de los potenciales regulares, en los que se cumple que

$$\lim_{R \rightarrow 0} R^2 U(R) = 0 \quad (8.50)$$

y el de los potenciales singulares del tipo  $1/R^n$  en los que esta última condición se viola. Dentro de los potenciales singulares se puede distinguir entre los casos atractivo y repulsivo, y también el caso del potencial  $1/r^2$  en el que se encuentra el comportamiento de los ciclos límite. La mayoría de estos casos, salvo  $1/r^2$ , han aparecido en los capítulos anteriores cuando se ha tratado con los potenciales quirales.

### Potenciales Regulares

Para un potencial regular el comportamiento de la función de onda reducida cerca del origen viene dado por

$$u_0(R) = c_0 + c_1 R \quad (8.51)$$

por lo que para  $\xi_0$  se tiene

$$\xi_0(R) = \frac{c_1 R}{c_0 + c_1 R} \quad (8.52)$$

Esto quiere decir que hay dos puntos fijos,  $\xi_0 = 0$  y  $\xi_0 = 1$ . El punto fijo  $\xi_0 = 0$  es atractivo, ya que  $\xi_0$  siempre tenderá a dicho valor en el límite ultravioleta excepto si  $c_0 = 0$ . Este punto fijo puede identificarse con la solución irregular de la ecuación de Schrödinger. La convergencia hacia el valor  $\xi_0 = 0$  es lineal en  $R$  y viene dada por

$$\xi_0(R) \rightarrow \frac{c_1}{c_0} R + O(R^2) \quad (8.53)$$

Por otro lado el punto fijo  $\xi_0 = 1$  es repulsivo: sólo la solución regular en el origen,  $c_0 = 0$ , evolucionará hacia este punto fijo.

En la discusión sobre potenciales regulares merece un interés especial el caso de un potencial regular del tipo

$$U(R) = -\frac{1}{R_s R} \quad (8.54)$$

en donde  $R_s$  es la escala característica del potencial. Este potencial puede identificarse con el comportamiento cerca del origen del potencial de intercambio de un pión en el canal singlete, para el que se tiene que la escala de longitud  $R_s$  viene dada por

$$R_s = \frac{16\pi f_\pi^2}{g^2 m^2 M} \quad (8.55)$$

Para este potencial el comportamiento de la función de onda cerca del origen es

$$u_0(R) = c_0 \left[ 1 - \frac{3R}{2R_s} - \frac{R}{R_s} \log\left(\frac{R}{R_s}\right) \right] + c_1 R \quad (8.56)$$

por lo que se obtienen los mismos puntos fijos que para un potencial regular común, pero con la diferencia de que la convergencia al punto fijo atractivo es logarítmica y no lineal

$$\xi_0(R) \rightarrow \frac{c_1}{c_0} R - \frac{5R}{2R_s} - \frac{R}{R_s} \log\left(\frac{R}{R_s}\right) + O(R^2) \quad (8.57)$$

por lo que  $\xi_0$  se comporta como  $R \log R$  en el límite ultravioleta.

### Potenciales Singulares

En este caso se va a considerar la familia de potenciales singulares

$$U(R) = \pm \frac{1}{R_s^2} \left( \frac{R_s}{R} \right)^n \quad (8.58)$$

en donde  $R_s$  es la escala de longitud característica del potencial singular. Este tipo de potencial representa el comportamiento cerca del origen de las componentes LO, NLO y NNLO del potencial quiral, para las que  $n = 3, 5, 6$  respectivamente. Para estos potenciales se puede definir la variable adimensional  $x$ , dada por la relación  $R = R_s x$ .

En el caso repulsivo las funciones de onda de energía cero vienen dadas por

$$u_0(R = R_s x) = c_0 \sqrt{x} I_{\frac{1}{n-2}} \left( \frac{x^{1-n/2}}{n/2 - 1} \right) + c_1 \sqrt{x} K_{\frac{1}{n-2}} \left( \frac{x^{1-n/2}}{n/2 - 1} \right) \quad (8.59)$$

en donde  $I_\nu(z)$  e  $K_\nu(z)$  son las funciones de Bessel modificadas irregular y regular de orden  $\nu$ . Los puntos fijos son  $\xi_0 = \pm\infty$ , en donde  $\xi_0 = +\infty$  corresponde a tomar  $c_0 = 0$ , es decir, la solución regular, y  $\xi_0 = -\infty$  corresponde a tomar  $c_0 \neq 0$  y por tanto la solución irregular.  $\xi = +\infty$  es inestable y  $\xi_0 = -\infty$  es estable.

En el caso atractivo las funciones de onda vienen dadas por

$$u_0(R = R_s x) = c_0 \sqrt{x} J_{\frac{1}{n-2}} \left( \frac{x^{1-n/2}}{n/2 - 1} \right) + c_1 \sqrt{x} J_{-\frac{1}{n-2}} \left( \frac{x^{1-n/2}}{n/2 - 1} \right) \quad (8.60)$$

en donde  $J_\nu(z)$  son las funciones de Bessel de primer tipo. En este caso el coeficiente adimensional  $\xi_0(R)$  no tendrá puntos fijos, sino que oscilará indefinidamente independientemente de la combinación lineal de soluciones que se elija. Esto se puede ver más fácilmente considerando el comportamiento asintótico  $z \rightarrow \infty$  de las funciones de Bessel  $J_\nu$

$$J_\nu(z) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos((\nu/2 + 1/4)\pi - z) \quad (8.61)$$

A partir de este comportamiento es fácil comprobar que existe la siguiente relación entre  $\xi_0(R)$  y  $\xi_0(R')$

$$\xi_0(R) = \frac{\xi_0(R') \cot \varphi - 1}{\xi_0(R') + \cot \varphi} \quad (8.62)$$

en donde

$$\varphi = \frac{1}{n-2} \left[ \left( \frac{R}{R'} \right)^{1-n/2} - 1 \right] \quad (8.63)$$

por lo que en vez de puntos fijos se tiene un atractor al que todas las trayectorias de renormalización  $\xi_0(R)$  se acercan cuando  $R \rightarrow 0$  independientemente de sus condiciones iniciales.

Una propiedad interesante de este atractor es que la curva  $(R, \xi_0(R))$  tiene una dimensión fractal no trivial  $d = 2 - 2/n$  cuando  $R \rightarrow 0$ . La dimensión fractal puede deducirse del escalamiento de los puntos  $R_N$  para los que  $\xi_0(R_N) = 0$

$$R_N \sim \frac{1}{n^{1/2-1/\sqrt{N}}} \quad (8.64)$$

### El Potencial Cuadrado Inverso $g/R^2$

La ecuación de renormalización a energía cero para el potencial  $U(R) = g/R^2$  se escribe como

$$R \frac{d\xi_0}{dR} = \xi_0(1 - \xi_0) + g \quad (8.65)$$

que es invariante ante el cambio de escala  $R \rightarrow \lambda R$ . Esta simetría de dilatación se rompe explícitamente debido a la existencia de una condición inicial  $\xi_0(R_0)$ . Si en vez de la ecuación de renormalización se considera la ecuación de Schrödinger se tiene que la solución rompe la simetría debido a la longitud de dispersión finita  $\alpha_0$ , que induce una escala de longitud que el problema no contenía originalmente al considerar tan sólo el potencial.

De la ecuación de renormalización anterior se obtienen los puntos fijos

$$\xi_0 = \pm \sqrt{1 + 4g} \quad (8.66)$$

para  $g > -1/4$ . La raíz positiva corresponde al punto fijo estable (atractivo) y la negativa al inestable (repulsivo). Para  $g < -1/4$  las soluciones son imaginarias puras, lo que indica la aparición de un ciclo límite. Las soluciones de energía cero vienen dadas por

$$\begin{aligned} u_0(R) &= c_0 R^{\lambda_-} + c_1 R^{\lambda_+} \\ \lambda_{\pm} &= (1 \pm \sqrt{1+4g})/2 \quad \text{para } g > -1/4 \end{aligned} \quad (8.67)$$

$$\begin{aligned} u_0(R) &= c_0 \sqrt{R} \cos(\lambda \log R) + c_1 \sqrt{R} \sin(\lambda \log R) \\ \lambda &= \sqrt{-1-4g} \quad \text{para } g < -1/4 \end{aligned} \quad (8.68)$$

de forma que para el primero de los casos se obtiene

$$\xi_0(R) = \frac{c_0 \lambda_- R^{\lambda_-} + c_1 \lambda_+ R^{\lambda_+}}{c_0 R^{\lambda_-} + c_1 R^{\lambda_+}} \quad \text{para } g > -1/4 \quad (8.69)$$

por lo que  $\xi_0$  tiene un punto fijo atractivo,  $\xi_0 = \lambda_-$ , y otro repulsivo,  $\xi_0 = \lambda_+$ , mientras que para el segundo de los casos,  $g < -1/4$ ,  $\xi_0(R)$  viene dado por

$$\xi_0(R) = \lambda \cot \left[ \tan^{-1} \frac{2\lambda}{2\xi_0(R_0) - 1} + \lambda \log \frac{R}{R_0} \right] + \frac{1}{2} \quad \text{para } g < -1/4 \quad (8.70)$$

En este se obtiene la propiedad de escalamiento discreta  $\xi_0(R e^{n\pi/\lambda}) = \xi_0(R)$  para  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  característica de los ciclos límite. Por ejemplo, si se consideran los ceros  $\xi_0(R_N) = 0$ , entonces se encuentra el siguiente escalamiento entre ceros:  $R_{N+1} = e^{\pi/\lambda} R_N$ .

### Resumen del Límite Ultravioleta

En vista a la discusión anterior, la situación para el comportamiento de  $\xi_0(R)$  en el límite ultravioleta puede resumirse como

- Para un potencial regular se tienen dos puntos fijos, uno repulsivo que corresponde a la solución regular de la función de onda y otro atractivo que corresponde a la solución irregular. A partir de una condición inicial arbitraria  $\xi_0(R_0)$  se terminará en el punto fijo atractivo cuando  $R \rightarrow 0$ , salvo que  $\xi_0(R_0)$  corresponda exactamente con la solución regular.
- Para un potencial singular atractivo en la forma  $-1/R^n$  con  $n > 2$ , se tiene un atractor con dimensión fractal  $d = 2 - 2/n$ .
- Para un potencial singular atractivo en la forma  $1/R^n$  con  $n > 2$ , se tienen dos puntos fijos, uno atractivo y otro repulsivo.

- Para un potencial cuadrático inverso,  $g/R^2$ , se observan dos situaciones según el valor de  $g$ . Para  $g > -1/4$  se tienen dos puntos fijos, uno atractivo y otro repulsivo, mientras que para  $g < -1/4$  aparecen ciclos límite.

### 8.3. Regularización con Condición de Ortogonalidad y Condición de Contorno

En el capítulo (3) se estudió la regularización de la interacción nuclear en el canal singlete  $^1S_0$ . La manera de obtener un resultado renormalizado consistía en construir las funciones de onda de energía finita por ortogonalidad con una función de energía cero de longitud de dispersión fija. Esto equivalía a imponer una condición de contorno en un radio de corte pequeño, lo que sugiere que la regularización mediante ortogonalidad está relacionada con la regularización con condición de contorno.

En la renormalización con condición de contorno se estudia como debe cambiar la derivada logarítmica  $L_k(R)$  de manera que la física permanezca invariable

$$\frac{u'_k(R)}{u_k(R)} = L_k(R) \quad \text{tal que} \quad \frac{d\delta(k)}{dR} = 0 \quad (8.71)$$

Obviamente para conseguir una independencia absoluta de los defasajes con respecto a la escala  $R$  es necesario que la condición de contorno dependa de la energía. Sin embargo, cuando se regulariza mediante ortogonalidad esta condición se relaja<sup>3</sup>, de manera que se llega a la situación siguiente

$$\frac{u'_k(R)}{u_k(R)} = \frac{u'_0(R)}{u_0(R)} = L_0(R) \quad \text{tal que} \quad \frac{d\alpha_0}{dR} = 0 \quad (8.72)$$

En principio esto significa que el defasaje final va a depender de la escala  $R$ , por lo que se viola la invariancia respecto a la escala de renormalización. Esto es lo que ocurre por ejemplo cuando se resuelve el canal singlete con el potencial de intercambio de un pión, en el que se observa que  $\delta(k, R)$  varía casi linealmente con el radio de corte para  $R$  pequeño, como se puede ver en la figura (8.1). Sin embargo, cuando se tiene un potencial singular se va a obtener invariancia respecto a  $R$  en el límite ultravioleta

$$\frac{d\delta(k)}{dR} \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad R \rightarrow 0 \quad (8.73)$$

Esta última situación puede verse en la figura (8.1), en donde se muestra la curva  $\delta(k, R)$  respecto a  $R$  para distintas energías con el potencial TPE, que es singular, en el canal singlete  $^1S_0$ .

---

<sup>3</sup>Una condición de contorno dependiente de energía rompería la ortogonalidad.

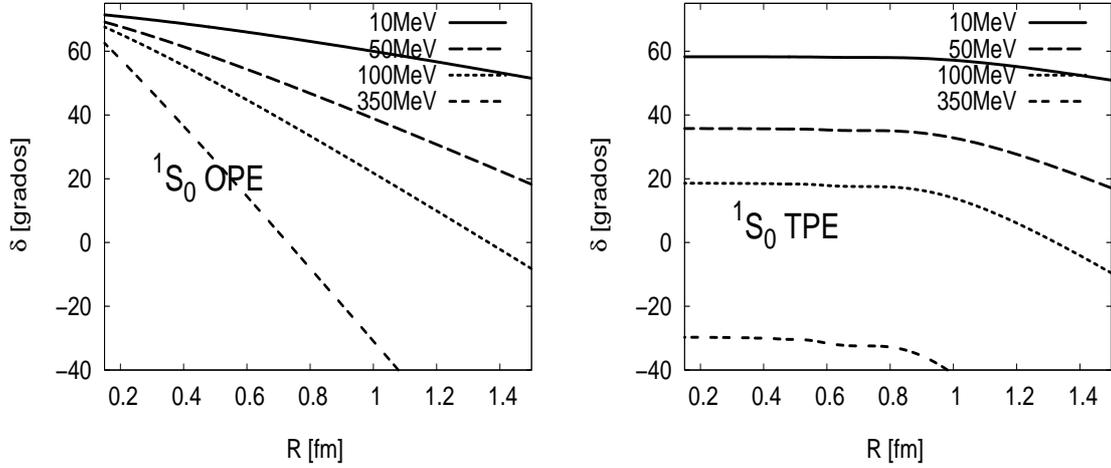


Figura 8.1: Dependencia de los defasajes respecto al radio de corte  $R$  para el canal singlete  $^1S_0$  con el potencial OPE (panel izquierdo) y del potencial TPE (panel derecho). Se presentan los defasajes a energías laboratorio  $E_{\text{LAB}} = 10, 50, 100, 350 \text{ MeV}$ . El defasaje se regulariza en ambos casos mediante una condición de contorno independiente de energía que cumple la ecuación  $L'_0(R) + L_0(R)^2 - U(R) = 0$ , por lo que  $\alpha_0(R) = \text{cte}$  (se toma el valor físico,  $\alpha_0(R) = -23,74 \text{ fm}$  para cualquier  $R$ ). Como puede verse en el caso del potencial OPE el defasaje es decreciente con el radio de corte, con una pendiente que crece con la energía. No se cumple la condición  $\frac{d\delta}{dR} = 0$  para ningún radio  $R$ . En el caso del potencial TPE sí se tiene que  $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{d\delta}{dR} = 0$ .

Esta diferencia entre la renormalizabilidad de un potencial regular y uno singular puede entenderse fácilmente considerando el cambio completo del defasaje con la condición de contorno

$$-k \frac{d\delta}{dR} = [k^2 - U(R) + L'_k(R) + L_k(R)^2] u_k(R, R)^2 \quad (8.74)$$

El límite de energía cero de esta ecuación es

$$\frac{d\alpha_0}{dR} = \lim_{k \rightarrow 0} [L'_0(R) + L_0(R)^2 - U(R)] \left( \frac{u_k(R, R)}{k} \right)^2 \quad (8.75)$$

este límite está bien definido ya que para  $k \rightarrow 0$ ,  $u_k(R) \sim k(R - \alpha_0)$ . La regularización mediante ortogonalidad equivale al truncamiento de la derivada logarítmica a orden  $O(k^0)$ , es decir, a tomar  $L_k(R) = L_0(R)$ , junto con la condición de que  $\frac{d\alpha_0}{dR} = 0$ , con lo que la derivada logarítmica en este caso cumple la ecuación de renormalización siguiente

$$L'_0(R) + L_0(R)^2 - U(R) = 0 \quad (8.76)$$

Si se supone la identificación  $L_k(R) = L_0(R)$  comentada previamente, se tiene para el defasaje

$$\frac{d\delta}{dR} = -k^3 \left( \frac{u_k(R, R)}{k} \right)^2 \quad (8.77)$$

En el caso de un potencial regular,  $u_k(R, R)/k \sim c_0 + c_1 R$ , al menos para energías pequeñas, por lo que el término  $(u_k(R, R)/k)^2$  podrá considerarse como una constante. Esto significa que la variación del defasaje con el radio de corte será decreciente y aproximadamente lineal respecto a  $R$  y la pendiente aumentará conforme aumente la energía. Esta es precisamente la situación que se observa en la figura (8.1) para el potencial de intercambio de un pión que es regular. En el caso de un potencial singular  $U(R) \sim -1/R^n$ , se tiene que  $u_k(R, R) \sim R^{n/4}$ , con lo que el defasaje presentará una dependencia respecto al radio de corte de  $\Delta\delta \sim R^{n/2+1}$ , precisamente la misma dependencia encontrada en el análisis de corte finito del capítulo (3), ecuación (3.77), y que también puede observarse en la figura (8.1) para el potencial de intercambio de dos piones que es singular, y se comporta como  $-1/R^6$  cerca del origen. Por otra parte, desde el punto de vista de regularización con condición de contorno, el régimen  $\Delta\delta \sim R^{n/2+1}$  está relacionado con el límite ultravioleta de los potenciales singulares atractivos. En la figura (8.1) se puede observar el cambio de régimen en la trayectoria del defasaje renormalizado de largas distancias, de una sensibilidad lineal  $\Delta\delta \sim R$  para  $R > 1$  fm a la sensibilidad cuártica  $\Delta\delta \sim R^4$  (para el potencial TPE  $n = 6$ ) para distancias menores. Este cambio está relacionado con la trayectoria de renormalización de la derivada logarítmica escalada  $\xi_0(R) = R L_0(R)$ , que cae en el atractor ultravioleta mencionado en la subsección (8.2.3).

#### 8.4. Relación de la Regularización con Condición de Contorno con la Ecuación de Fase Variable

La condición de contorno, eq. (8.8), puede interpretarse como una condición inicial en el radio inferior de integración  $R$  para la ecuación de Schrödinger considerada en el intervalo  $R \leq r < \infty$ . Es decir, a partir de la condición de contorno se determinan  $u_k(R)$  y  $u'_k(R)$ <sup>4</sup> que sirven como condiciones iniciales para integrar la función de onda reducida  $u_k(r)$  desde  $r = R$  hasta infinito. Sin embargo se puede dar una segunda interpretación de la condición de contorno en términos de un problema de contorno complementario al expuesto anteriormente: si consideramos la familia de potenciales dada por

$$U(r, R) = U(r) \theta(R - r) \quad (8.78)$$

---

<sup>4</sup>La condición de contorno en realidad sólo determina la razón entre  $u_k(R)$  y  $u'_k(R)$ , pero puede tomarse una normalización arbitraria, para luego tomar la normalización correcta *a posteriori*.

que corresponden al potencial  $U(r)$  truncado a distancias mayores que  $R$ , entonces se tiene para  $r > R$  la función de onda asintótica

$$u(r) = \sin(kr + \delta(k, R)) \quad r > R \quad (8.79)$$

en la que se ha conservado explícitamente la dependencia en  $R$  de los defasajes. En tal caso la derivada logarítmica en  $r = R^-$  viene dada por la expresión

$$L_k(R) = k \cot(kR + \delta(k, R)) \quad (8.80)$$

Si se identifica esta expresión para la derivada logarítmica con  $L_k(R)$  en la ecuación de renormalización (8.18) entonces se obtiene la siguiente ecuación para  $\delta(k, R)$

$$\frac{d\delta(k, R)}{dR} = -\frac{1}{k}U(R) \sin^2(kR + \delta(k, R)) \quad (8.81)$$

Es decir, se obtiene la ecuación de fase variable o ecuación de Calogero analizada en la referencia [83], y que describe la evolución del defasaje  $\delta(k, R)$  correspondiente al potencial truncado  $U(r, R) = U(r)\theta(R - r)$ .

Por tanto, si suponemos que el problema está definido por una condición de contorno en el origen,  $L_k(0^+)$ , y un potencial de largas distancias  $U(r)$ , se tiene que la ecuación de renormalización para la condición de contorno con el potencial  $U(r)$  puede resolverse mediante la derivada logarítmica del potencial truncado  $U(r, R) = U(r)\theta(r - R)$ , que a su vez se calcula mediante la ecuación de fase variable (8.81). Es decir, hay una relación uno a uno entre la evolución de la condición de contorno cuando se plantea el problema en la zona exterior  $r > R$  y la ecuación de fase variable en el problema planteado en la zona interior. Esta relación se ilustra gráficamente en la figura (8.2). Por una parte el defasaje físico puede obtenerse mediante la ecuación de fase variable (8.81) como el límite asintótico siguiente

$$\delta(k) = \delta(k, \infty) \quad (8.82)$$

Por otra parte, la extrapolación de la condición de contorno al origen está relacionada con la fase variable en  $R = 0^+$  y viene dada por

$$L_k(0^+) = k \cot \delta(k, 0^+) \quad (8.83)$$

Normalmente, cuando se considera la ecuación de fase variable (8.81) se supone que no hay interacción de contacto, es decir, que  $\delta(k, 0) = 0$ . En tal caso según la relación anterior, eq. (8.83), la derivada logarítmica diverge en el origen,  $L_k(R \rightarrow 0) \rightarrow \infty$ , lo que significa que se toma la solución regular  $u(0) = 0$ .

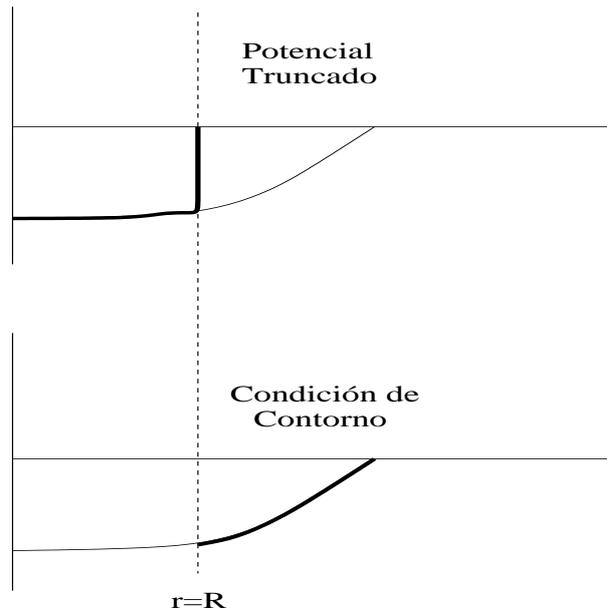


Figura 8.2: Relación entre el problema de una condición de contorno como condición inicial de integración para la ecuación de Schrödinger en la zona exterior  $r > R$  (parte inferior de la figura), con la ecuación de fase variable para un potencial truncado (parte superior de la figura), de manera que define un problema complementario al anterior pero en la zona interior  $r < R$ . La derivada logarítmica en la frontera  $r = R$  proporciona la identificación  $L_k(R) = \cot(kR + \delta(k, R))$  mediante la que se identifican las situaciones en la zona interior y en la zona exterior como complementarios. El potencial truncado genera en  $r = R$  el desfase  $\delta(k, R)$ , mientras que el potencial físico corresponde a tomar el límite  $R \rightarrow \infty$ , es decir,  $\delta(k) = \delta(k, \infty)$ . La condición de contorno puede ser relacionada con el desfase de cortas distancias cuando  $R = 0^+$ , caso en el que se tiene que  $L_k(0^+) = k \cot \delta_c(k)$  en donde  $\delta_c(k)$  es dicho desfase de cortas distancias, es decir, el desfase correspondiente a tomar  $U(r) = 0$  para cualquier  $r > 0$  (consultar el texto)

Sin embargo cuando se considera la existencia de interacciones de contacto puede definirse el defasaje de cortas distancias a partir de la fase variable en  $R = 0^+$  una vez se ha eliminado por completo el potencial de largas distancias  $U(R)$

$$\delta_c(k) = \delta(k, 0^+) \equiv \lim_{R \rightarrow 0^+} \delta(k, R). \quad (8.84)$$

Un ejemplo trivial es el caso en el que no hay potencial de largas distancias,  $U(R) = 0$ , en el que la fase variable es constante y el defasaje total y de cortas distancias coinciden,  $\delta(k) = \delta_c(k)$ . Por otro lado en presencia de un potencial de largas distancias puede interpretarse el defasaje total  $\delta(k)$  como una distorsión del defasaje de cortas distancias  $\delta_c(k)$  debido al potencial, es decir

$$\delta_c(k) \longrightarrow (\text{Distorsión de Largas Distancias}) \longrightarrow \delta(k) \quad (8.85)$$

en esta interpretación la renormalización con condición de contorno puede usarse para eliminar la distorsión de largas distancias y obtener la interacción de cortas distancias  $\delta_c(k)$ , es decir

$$\delta(k) \longrightarrow (\text{Eliminar la Distorsión}) \longrightarrow \delta_c(k) \quad (8.86)$$

lo cual se haría integrando  $\delta(k, R)$  desde infinito hasta  $R = 0^+$ .

En este punto es conveniente definir las matrices  $\hat{M}$  y  $\hat{V}$  como

$$\hat{M}(k, R) = k \cot \delta(k, R) \quad (8.87)$$

$$\hat{V}(k, R) = \frac{\tan \delta(k, R)}{k} \quad (8.88)$$

Si se aplica la ecuación de fase variable (8.81) sobre estas dos cantidades recién definidas se obtiene

$$\frac{d\hat{M}(k, R)}{dR} = U(R) \left[ \hat{M}(k, R) \frac{\sin kR}{k} + \cos kR \right]^2 \quad (8.89)$$

y

$$\frac{d\hat{V}(k, R)}{dR} = -U(R) \left[ \frac{\sin kR}{k} + \hat{V}(k, R) \cos kR \right]^2 \quad (8.90)$$

respectivamente.

### 8.4.1. Grupo de Renormalización para los Parámetros Baja Energía

La equivalencia entre la ecuación de fase variable y la renormalización con condición de contorno puede utilizarse para estudiar la evolución de los parámetros de dispersión de baja energía, como la longitud de dispersión o el rango efectivo, según las trayectorias de renormalización inducidas por la ecuación (8.18). Por ejemplo, para energía cero se tiene que

$$\alpha(R) \equiv - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\delta(k)}{k} \quad (8.91)$$

por lo que puede comprobarse que

$$\frac{d\alpha_0}{dR} = U(R) (\alpha_0 - R)^2 \quad (8.92)$$

Según lo comentado anteriormente la interpretación física de la longitud de dispersión para radio  $R$  puede por una parte ser la longitud de dispersión que se obtendría con un potencial de largas distancias truncado en  $r = R$ , con condición inicial  $\alpha_0(0^+) = \alpha_{0,c}$ , la longitud de dispersión asociada a la interacción de cortas distancias, y por otra parte la longitud de dispersión resultante de eliminar el potencial de largas distancias desde infinito hasta  $r = R$  con condición inicial  $\alpha_0(\infty) = \alpha_0$ , con  $\alpha_0$  la longitud de dispersión física o experimental del sistema considerado. En la primera interpretación la longitud de dispersión física puede obtenerse a partir de la de cortas distancias integrando la ecuación anterior (8.92) desde  $R = 0^+$  hasta infinito, lo que se identifica con el esquema mental

$$\alpha_{0,c} \longrightarrow (\text{Distorsión de Largas Distancias}) \longrightarrow \alpha_0 \quad (8.93)$$

En la segunda interpretación, integrar la ecuación (8.92) desde infinito hasta  $R = 0^+$  corresponde a

$$\alpha_0 \longrightarrow (\text{Eliminar la Distorsión}) \longrightarrow \alpha_{0,c} \quad (8.94)$$

Si se toma  $\alpha_{0,c} = 0$  se recupera el problema usual de mecánica cuántica en el que se resuelve la ecuación de Schrödinger para un potencial  $U(R)$  con la condición de regularidad en el origen.

Se pueden obtener ecuaciones equivalentes a la anterior para la longitud de dispersión (8.92) expandiendo la matriz  $\hat{M}$  en potencias de momento, es decir, usando la expansión de rango efectivo

$$\hat{M}(k, R) = k \cot \delta(k, R) = -\frac{1}{\alpha_0(R)} + \frac{1}{2}r_0(R)k^2 + v_2(R)k^4 + \dots \quad (8.95)$$

si se incluye esta expansión en la ecuación de fase variable para la matriz  $\hat{M}$ , eq. (8.89), se obtiene que

$$\frac{d\alpha_0}{dR} = U(R) (\alpha_0 - R)^2 \quad (8.96)$$

$$\frac{dr_0}{dR} = 2U(R)R^2 \left(1 - \frac{R}{\alpha_0}\right) \left(\frac{r_0}{R} + \frac{R}{3\alpha_0} - 1\right) \quad (8.97)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_2}{dR} = R^4 U(R) & \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{r_0}{R} + \frac{R}{3\alpha_0} - 1\right)^2 \right. \\ & \left. + 2 \left(1 - \frac{R}{\alpha_0}\right) \left(-\frac{1}{12} \frac{r_0}{R} + \frac{v_2}{R^3} - \frac{1}{120} \frac{R}{\alpha_0} + \frac{1}{24}\right) \right\} \end{aligned} \quad (8.98)$$

Estas ecuaciones están sujetas a las condiciones de contorno siguientes

$$\alpha(0^+) = \alpha_{0,c} \quad \alpha(\infty) = \alpha \quad (8.99)$$

$$r_0(0^+) = r_{0,c} \quad r_0(\infty) = r_0 \quad (8.100)$$

$$v_2(0^+) = v_{2,c} \quad v_2(\infty) = v_2 \quad (8.101)$$

en donde  $\alpha_{0,c}$ ,  $r_{0,c}$  y  $v_{2,c}$  son los parámetros de baja energía de cortas distancias, mientras que  $\alpha_0$ ,  $r_0$  y  $v_2$  son los parámetros físicos.

Una posible utilidad de estas ecuaciones es resolverlas para un determinado potencial  $U(R)$  con la condición de contorno  $\alpha_{0,c} = 0$ ,  $r_{0,c} = 0$ ,  $v_{2,c} = 0$ , etc, y obtener en  $R \rightarrow \infty$  el valor de  $\alpha_0$ ,  $r_0$ ,  $v_2$ , etc. Es decir, usar las ecuaciones de fase variable para calcular los parámetros de baja energía para un potencial dado. Eso es lo que se hace en el apéndice (D) para obtener el  $\alpha_0$ ,  $r_0$ ,  $v_2$ , etc, de los potenciales fenomenológicos Nijmegen II y Reid 93.

Otra aplicación, esta vez en el canal  $^1S_0$ , es utilizar las ecuaciones de fase variable con el potencial de intercambio de un pión para obtener los parámetros de dispersión de baja energía correspondientes a cortas distancias. En tal caso se obtiene

$$\alpha_{0,c} = 0 \quad (8.102)$$

$$r_{0,c} = 4,04 \text{ fm} \quad (8.103)$$

$$v_{2,c} = 1,07 \text{ fm}^3 \quad (8.104)$$

En [57] puede encontrarse un análisis más detallado, aunque se obtiene un resultado sensiblemente diferente para  $v_{2,c}$  debido al corte infrarrojo utilizado (10 fm). Mediante un análisis en espacio de momentos se llega a un resultado similar para el rango efectivo ( $r_{0,c} = 4,0 \text{ fm}$ ) en la referencia [26]. En [84] se obtiene un resultado algo menor ( $r_{0,c} = 3,10 \text{ fm}$ ), aunque se usa un corte ultravioleta en momento de la mitad de la masa del mesón  $\rho$ ,  $p = m_\rho/2$ .

## 8.5. Conclusiones

La renormalización en espacio de coordenadas permite una separación transparente e intuitiva entre la física de cortas y largas distancias mediante un radio de corte  $R$  en donde se propone una condición de contorno. Esta imagen ha inspirado un planteamiento de regularización Wilsoniano, similar en espíritu a la derivación de la ecuación de Callan-Symanzik en teoría cuántica de campos, que se traduce en una ecuación de evolución para la condición de contorno respecto al radio de corte. Mediante esta ecuación se estudian los puntos fijos e infrarrojos del grupo de renormalización que ya se conocían, y se encuentran comportamientos nuevos como ciclos límite o atractores ultravioleta. Este tratamiento también permite entender los errores de corte finito encontrados anteriormente al regularizar mediante condiciones de ortogonalidad equivalentes a proponer una condición de contorno independiente de la energía.

Por otra parte la regularización mediante condición de contorno tiene varias ventajas sobre otros métodos de regularización, que listamos por claridad

- No rompe ninguna simetría. En el contexto en que la hemos presentado esto resulta trivial, ya que se ha aplicado al problema de dispersión por un potencial una vez que se ha pasado a sistema centro de masa y de ha hecho una separación en canales según momento angular.
- En este método pueden incorporarse interacciones de contacto de cualquier orden. Esto se hace fácilmente expandiendo la derivada logarítmica en potencias de momento  $L_k(R) = L_0(R) + k^2 L_2(R) + k^4 L_4(R) + \dots$  y truncando al orden deseado. Un ejemplo sencillo es cuando nos quedamos con el término independiente de momento,  $L_k(R) = L_0(R)$ , que equivale a tomar un único contratérmino independiente de momento, o a la regularización mediante condiciones de ortogonalidad.
- Se trata de un procedimiento de regularización no perturbativo, lo que es especialmente interesante si uno quiere discutir aproximaciones perturbativas, contajes, etc.
- Puede aplicarse a potenciales singulares. Curiosamente estos potenciales son renormalizables no perturbativamente, como sabemos por el tratamiento que hemos hecho de los potenciales singulares a lo largo de este trabajo, y perturbativamente no renormalizables, como vimos en el capítulo (7), en donde para hacer finitos los resultados perturbativos se necesitaban un número cada vez mayor de parámetros libres.
- La regularización con condición de contorno genera trayectorias de renormalización únicas y bien definidas. Por el contrario, cuando se renormaliza con un potencial, como por ejemplo un pozo cuadrado [85], se generan trayectorias de renormalización con varias ramas como consecuencia del problema de dispersión inverso: son posibles varias

intensidades distintas del potencial regulador para obtener el mismo resultado físico y no está claro que rama se debe elegir a priori.

- Permite la eliminación numérica del radio de corte, para lo que también ayuda el hecho de que podamos establecer la existencia de un límite ultravioleta y su comportamiento antes de realizar ningún cálculo numérico.
- Es una regularización física en el sentido de que para cualquier valor del corte  $R$  se tiene una solución intermedia que es interpretable como la solución de un problema físico concreto descrito por un potencial *on-shell*.

## Capítulo 9

# Conclusiones

En la presente tesis se ha analizado la interacción NN en teoría quiral de perturbaciones. El objetivo principal era encontrar las predicciones de los potenciales quirales en sistemas de dos nucleones, tanto en el caso del deuterón como en el de los estados de dispersión, así como restricciones y correlaciones de largas distancias entre los parámetros que ayudasen por una parte a incrementar el poder predictivo de la descripción quiral al producirse una reducción paramétrica y por otra a comprender mejor el comportamiento y la física del sistema NN a bajas energías.

Desde un punto de vista formal podemos afirmar que es posible regularizar las interacciones quirales imponiendo condiciones generales y razonables como la regularidad de las funciones de onda en el origen o las condiciones de ortogonalidad. La existencia de un límite cuando se elimina la escala auxiliar, es decir, el radio de corte, en el proceso de renormalización se establece rigurosamente gracias al estudio del comportamiento de las funciones de onda cerca del origen con los potenciales quirales. Esto es posible gracias al uso extensivo del espacio de coordenadas: aunque en el tratamiento tradicional de la renormalización en espacio de posiciones es más sencillo tratar situaciones más generales como por ejemplo potenciales no locales, en este tratamiento es muy difícil establecer la existencia de un límite al tomar el corte  $\Lambda \rightarrow \infty$  así como el comportamiento del proceso de renormalización. Al tratar el problema en espacio de coordenadas se establece la existencia de un límite renormalizado antes de llevar a cabo los cálculos, y se explican además muchas de las tendencias observadas en cálculos previos en el espacio de momentos, lo que supone un gran avance en la discusión sobre la finitud de los resultados y el conteo.

Es interesante comprobar que el proceso de regularización usado limita enormemente el efecto de las interacciones residuales de cortas distancias, a diferencia de lo que ocurría en el tratamiento tradicional basado en regularización en espacio de momentos y un potencial de cortas distancias determinado a priori mediante el conteo. Este efecto se reduce a la necesidad de fijar unos pocos parámetros relacionados con la física de bajas energías, lo

que consigue una reducción notable de parámetros libres, aumentando el poder predictivo. Además, la posibilidad de usar directamente un observable como entrada directa elimina la necesidad de realizar un ajuste como ocurre con los contratérminos tradicionales.

Por otra parte la obtención de correlaciones de largas distancias a partir del principio de superposición es especialmente sencilla y atractiva desde el punto de vista físico. Es posible establecer paralelismos entre sistemas en principio tan diferentes como la interacción átomo-átomo y nucleón-nucleón, y encontrar relaciones de universalidad que agrupen a una gran cantidad de sistemas físicos. En este sentido se encuentran resultados tan interesantes y sugerentes como el de las fuerzas de van der Waals quirales y la conexión con el modelo de gota líquida. También se obtienen otros resultados más teóricos como las propiedades del deuterón cuando su energía de ligadura va a cero, o la discusión del límite quiral y la masa variable del pión.

Además, la regularización en espacio de coordenadas permite una separación transparente e intuitiva entre la física de largas y cortas distancias mediante un radio de corte, que ha inspirado un planteamiento Wilsoniano [48] del proceso de regularización, similar en espíritu a la derivación de las ecuaciones de Callan-Symanzik en teoría cuántica de campos. No solamente se reproducen los puntos fijos infrarrojos del grupo de renormalización que ya se conocían en el caso de la regularización en espacio de momentos [49], sino que en el límite ultravioleta se encuentran comportamientos como ciclos límite o atractores que resultan muy novedosos. Una discusión más detallada de la ecuaciones de renormalización está en curso, así como una relación más rigurosa entre los tratamientos en espacio de posiciones y momentos mediante el teorema de Nyquist, usado en teoría de la señales, y que tiene una inesperada aplicación en teorías efectivas.

Desde un punto de vista físico se ha determinado por primera vez las predicciones exactas del potencial de intercambio de un pión para el deuterón, a partir de un tratamiento matemático sencillo basado en estudiar las soluciones cerca del origen de la ecuación de Schrödinger. Los resultados son además sorprendentemente buenos, si bien es esperable teniendo en cuenta que la separación media de los nucleones en el deuterón es de  $\sim 4,2$  fm, mayor que la longitud de onda Compton del pión,  $\sim 1,4$  fm. También se determina por primera vez el coeficiente asociado a la exponencia decreciente de la función de onda, que anteriormente se había supuesto nulo. Se determina que la descripción del deuterón depende de un único parámetro, la energía de ligadura del deuterón; fijada ésta el resto de propiedades del deuterón quedan completamente determinadas. Se encuentran resultados curiosos teóricamente como que el momento cuadrupolar no se anula en el límite de energía de ligadura cero.

Este tratamiento del deuterón es extensible al potencial de intercambio de dos piones. En este punto se ha tenido un cuidado especial en el tratamiento de los errores de las constantes de acoplamiento quirales y se ha intentado encontrar la importancia relativa de estas, ya que

son el efecto de orden más bajo genuinamente quiral en el deuterón. Comparando los resultados con los del potencial OPE, se puede concluir que intercambio de un pión proporciona el grueso de la descripción del deuterón, mientras que simetría quiral afina esta descripción hasta obtenerse descripciones teóricas comparables con experimento. Sin embargo también se observa que debido a las incertidumbres en los acoplamientos quirales y los parámetros de entrada se llega a un límite en la precisión de la descripción quiral de la interacción NN. Los errores teóricos en el caso del potencial de intercambio de dos piones son mayores que para el potencial OPE, por lo que desde el punto de vista de la descripción teórica no estaría justificado un cálculo que incluyese efectos de intercambio de tres piones. También se realiza un ajuste de los acoplamientos quirales a los observables de baja energía de los canales singlete y triplete, novedosa ya que normalmente estos parámetros quirales se determinan ajustando procesos de dispersión a energías intermedias, y en la que no hay contaminación espúrea debido a efectos de corte finito, como probablemente ocurre en otras determinaciones.

Por otra parte se sugiere la posibilidad de realizar una predicción teórica para la razón asintótica  $D/S$  del deuterón más precisa que el actual valor experimental, si bien aún no es posible debido a las incertidumbres con las que se conoce los acoplamientos quirales  $c_1$ ,  $c_3$  y  $c_4$ . De confirmarse tal cálculo constituiría un hito en física hadrónica, comparable únicamente con la determinación teórica de la longitud de dispersión entre piones llevada a cabo recientemente [74, 75, 76].

Respecto a las ondas parciales periféricas se explica por ejemplo la modificación que otros autores han encontrado en el conteo de Weinberg para obtener renormalizabilidad en estas ondas. También es posible identificar que ondas parciales son más sensibles a los acoplamientos quirales, sugiriendo un posible procedimiento para mejorar las determinaciones de dichas constantes mediante ajuste a procesos de dispersión.

En teoría de perturbaciones se determina que hay un problema de convergencia que limita la aplicación del tratamiento perturbativo. Este problema puede superarse o trabajando únicamente hasta un orden finito o usando un radio de corte finito. En el tratamiento perturbativo del potencial de intercambio de un pión se encuentra una notable relación con los resultados que se obtenían en el conteo de Kaplan, Savage y Wise (KSW) [44, 45], que ya había sido sugerida anteriormente [80]. Una consecuencia indirecta de esta conexión es que se determina que las amplitudes KSW violan las relaciones de ortogonalidad, y por tanto también causalidad. Esto indica la posible inconsistencia de este conteo, lo cual es una conclusión interesante ya que previamente se pensaba que aunque el conteo KSW no era convergente sí era consistente, considerándose esta una de las virtudes de dicho esquema. Otra consecuencia del tratamiento perturbativo es que cierra la posibilidad sugerida en un trabajo reciente [43] de que se trate no perturbativamente el potencial de intercambio de un pión, y se calculen perturbativamente las correcciones debidas a intercambio de dos piones. La única manera de hacer finito este tipo de cálculos es la proliferación incontrola-

da de parámetros libres. Por último se encuentran indicios para un contaje fraccional en la interacción NN.

## 9.1. Publicaciones

Por último se listan aquí las publicaciones en las que se basa el trabajo hecho en esta tesis. Estas son

1. M. P. Valderrama and E. R. Arriola “*Low-energy NN scattering at next-to-next-to-next-to-next-to-leading order for partial waves with  $j \leq 5$* ” Phys. Rev. C **72**, 044007 (2005)
2. M. Pavon Valderrama and E. Ruiz Arriola “*Renormalization of NN interaction with chiral two pion exchange potential: Non-central phases*” arXiv:nucl-th/0507075
3. M. P. Valderrama and E. R. Arriola “*Renormalization of NN interaction with chiral two pion exchange potential: Central phases and the deuteron*” arXiv:nucl-th/0506047
4. M. Pavon Valderrama and E. Ruiz Arriola “*Renormalization of the deuteron with one pion exchange*” Phys. Rev. C **72**, 054002 (2005) [arXiv:nucl-th/0504067]
5. M. Pavon Valderrama and E. Ruiz Arriola “*Singlet NN Regularization using a Boundary Condition for OPE and TPE potentials*” arXiv:nucl-th/0410020 *To appear in the proceedings of Workshop on the Physics of Excited Nucleons (NSTAR 2004), Grenoble, France, 24-27 Mar 2004*
6. M. Pavon Valderrama and E. Ruiz Arriola “*Determination of low energy parameters for NN-scattering at  $N^4LO$  in all partial waves with  $j \leq 5$* ” arXiv:nucl-th/0407113
7. M. Pavon Valderrama and E. Ruiz Arriola “*Renormalization of NN-Scattering with One Pion Exchange and Boundary Conditions*” Phys. Rev. C **70**, 044006 (2004) [arXiv:nucl-th/0405057]
8. M. Pavon Valderrama and E. Ruiz Arriola “*Renormalization of singlet NN scattering with one pion exchange and boundary conditions*” Phys. Lett. B **580**, 149 (2004) [arXiv:nucl-th/0306069]
9. J.Ñieves, M. Pavon Valderrama and E. Ruiz Arriola “*The inverse amplitude method in pi pi scattering in chiral perturbation theory to two loops*” Phys. Rev. D **65**, 036002 (2002) [arXiv:hep-ph/0109077]

## Apéndice A

# La Interacción NN en Teoría Quiral de Perturbaciones

### A.1. Introducción

Este apéndice está dedicado a la interacción nucleón-nucleón en teoría quiral de perturbaciones. En principio el apéndice no está pensado como una introducción a estos potenciales sino más bien como un resumen útil que consultar cuando se busque alguna fórmula. No sólo se incluyen los potenciales, sino que también se repasan algunos de los aspectos más importantes de la cinemática asociada a la interacción nuclear, como la descomposición en ondas parciales o las parametrizaciones usuales de los defasajes en los canales acoplados.

### A.2. Componentes Generales de la Interacción NN

La forma más general de un potencial no relativista para la interacción entre dos nucleones puede derivarse a partir de principios de invariancia generales (invariancia ante traslaciones, transformaciones de Galileo, rotaciones, paridad e inversión temporal), de donde se deduce que las componentes permitidas del potencial nuclear son la central, espín-espín, tensorial, espín-órbita, y espín-órbita cuadrático

$$\mathcal{V}_{NN} = \mathcal{V}_C + \mathcal{V}_S \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + \mathcal{V}_T \mathbf{S}_{12} + \mathcal{V}_{LS} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + \mathcal{V}_{LL} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})^2 \quad (\text{A.1})$$

en donde el operador tensorial viene dado por

$$\mathbf{S}_{12} = 3(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r}) - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \quad (\text{A.2})$$

También existen términos isospín-isospín no expresados explícitamente en la descomposición anterior, que pueden ser tenidos en cuenta descomponiendo cada una de las contribuciones,

central, espín-espín, tensorial, espín-órbita y espín-órbita cuadrático, como

$$\mathcal{V}_i = V_i(r) + W_i(r) \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \quad (\text{A.3})$$

con  $i = C, S, T, LS, LL$  y en donde  $\vec{\tau}_1$  y  $\vec{\tau}_2$  son los operadores de isospín, con  $\tau_i$  las matrices de Pauli. En los potenciales quirales se añade a estas condiciones la de simetría quiral, que sirve para obtener la expansión más general posible para las interacciones entre nucleones y piones. A partir de este lagrangiano es posible calcular los potenciales nucleares. Dado que el número de interacciones posibles permitidas por simetría quiral son infinitas, estas se ordenan conforme a su dimensionalidad, y se limita el cálculo hasta dicho orden. Para determinar las dimensiones de un término se establece un contaje, es decir, a una serie de contribuciones se las considera del mismo orden. En el contaje de Weinberg, que se usa para calcular los potenciales nucleares, se toma  $Q \sim m \sim p$ , por lo que se considera que la masa del pión  $m$  y el momento de los nucleones  $p$  son contribuciones del mismo orden. En tal caso se tiene por ejemplo que la energía cinética de los nucleones es de orden  $Q^2$ , ya que  $E = p^2/M$  contiene dos potencias de momento, y la masa del nucleón no influye ya que no contribuye al contaje (se la considera una escala de alta energía).

El contaje genera una jerarquía de contribuciones al potencial nuclear, de manera que a un orden dado las interacciones que se deben considerar para calcular el potencial son finitas. Se tiene que el potencial se expande como una serie de términos de orden  $Q^\nu$  con  $\nu = 0, 2, 3, \dots$

$$\mathcal{V}_{NN} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{V}^{(\nu)} = \mathcal{V}^{(0)} + \mathcal{V}^{(2)} + \mathcal{V}^{(3)} + \dots \quad (\text{A.4})$$

en donde la contribución de orden  $\nu = 1$  es nula debido a paridad e inversión temporal. A la contribución  $\nu = 0$  también se la llama LO (*Leading Order*), NLO (*Next to Leading Order*) a la  $\nu = 2$ , NNLO (*Next Next to Leading Order*) a la  $\nu = 3$ , y así sucesivamente. Este último etiquetado de las contribuciones, es decir LO, NLO y NNLO, es el que usaremos habitualmente. Sin embargo cuando hablemos del potencial NLO, NNLO, etc, nos referiremos normalmente a la suma de las contribuciones al potencial hasta dicho orden.

El potencial quiral a LO no es otra cosa que el potencial de intercambio de un pión, y sólo contiene las componentes central y tensorial. La contribución NLO contiene además una componente espín-espín y la NLO todas las componentes permitidas en (A.1) salvo la espín-órbita cuadrática.

### A.3. Descomposición en Ondas Parciales

#### A.3.1. Potencial Central

Para un potencial central la ecuación de Schrödinger en el sistema centro de masas se escribe como

$$\left[ \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mathbf{L}^2}{2\mu r^2} + V(r) \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad (\text{A.5})$$

en donde  $\mu$  es la masa reducida del sistema,  $\mathbf{L}$  el operador momento angular,  $E$  la energía en el sistema centro de masas y  $V(r)$  el potencial central considerado. Como el potencial es central el hamiltoniano del sistema conmuta con  $\mathbf{L}^2$ , es decir  $[H, \mathbf{L}^2] = 0$ , por lo que las soluciones a la ecuación de Schrödinger se podrán descomponer como suma de funciones propias del operador  $\mathbf{L}^2$

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \psi_{lm}(\vec{r}) \quad (\text{A.6})$$

en donde  $\psi_{lm}$  son soluciones en la forma

$$\psi_{lm}(\vec{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{r}) \quad (\text{A.7})$$

con  $Y_{lm}(\hat{r})$  un armónico esférico que contendrá la dependencia angular de la solución  $\psi_{lm}(\vec{r})$ , y  $u_l(r)$  la función de onda reducida, que contiene la dependencia radial de  $\psi_{lm}(\vec{r})$ . Si se considera la descomposición (A.7) en la ecuación de Schrödinger (A.5) se obtiene que la función de onda reducida cumple la ecuación diferencial siguiente

$$-u_l''(r) + \left[ U(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) = k^2 u_l(r) \quad (\text{A.8})$$

en donde  $U(r) = 2\mu V(r)$  es el potencial reducido, y  $k = \sqrt{2\mu E}$  es el momento en el sistema centro de masas. A la ecuación anterior se la llama ecuación de Schrödinger reducida.

#### A.3.2. Potencial Tensorial

Para un potencial no central la ecuación de Schrödinger en el sistema centro de masas puede escribirse como

$$\left[ \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mathbf{L}^2}{2\mu r^2} + \mathbf{V}(r) \right] \Psi_{\vec{\sigma}}(\vec{r}) = E \Psi_{\vec{\sigma}}(\vec{r}) \quad (\text{A.9})$$

en donde la función de onda  $\Psi_{\vec{\sigma}}(\vec{r})$  es ahora un espinor de dos componentes<sup>1</sup> y el potencial  $V(r)$  puede descomponerse como

$$\mathbf{V}(r) = \mathbf{V}_{\text{NT}}(r) + V_{\text{T}}(r) \mathbf{S}_{12} \quad \text{con} \quad \mathbf{S}_{12} = 3(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r}) - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \quad (\text{A.10})$$

con  $\mathbf{V}_{\text{NT}}$  la suma de las componentes no tensoriales del potencial (términos central, espín-espín, espín-órbita y espín-órbita cuadrático),  $V_{\text{T}}(r) \mathbf{S}_{12}$  la componente tensorial del potencial, que no conmutará con el momento angular orbital ya que  $[\mathbf{S}_{12}, \mathbf{L}^2] \neq 0^2$ . Sin embargo el operador tensorial  $\mathbf{S}_{12}$  conmuta con el momento angular total y el espín del sistema

$$[\mathbf{S}_{12}, \mathbf{J}^2] = 0 \quad \text{y} \quad [\mathbf{S}_{12}, \mathbf{S}^2] = 0 \quad (\text{A.11})$$

El primero de estos conmutadores significa que la función de onda puede expresarse como suma de componentes con momento angular total bien definido, mientras que el segundo de los conmutadores indica que es también posible distinguir entre canales singletes con espín total  $s = 0$  y canales tripletes con  $s = 1$ . En los canales singletes se tiene además que el momento angular orbital y total coinciden,  $l = j$ , mientras que en los canales triplete el momento angular orbital puede valer  $l = j - 1, j, j + 1$  en donde  $j$  es el momento angular total.

La función de onda  $\Psi_{\vec{\sigma}}(\vec{r})$  puede descomponerse como suma de funciones de momento angular  $j$  bien definido en la forma

$$\Psi_{jm}(\vec{r}) = \sum_l \frac{u_{jl}(r)}{r} \Phi_{jml}(\hat{r}) \quad (\text{A.12})$$

en donde para los canales singletes la suma contiene un sólo término,  $l = j$ , mientras que para los tripletes la suma corre en  $l = j - 1, j, j + 1$ . La función  $\Phi_{jml}(\hat{r})$  contiene la dependencia angular de la función de onda y se puede escribir en término de los armónicos esféricos como

$$\Phi_{jml}(\hat{r}) = \sum_{m_l=-l}^l \langle j \ 1 \ l \ m \ m_s \ m_l \rangle Y_{lm_l}(\hat{r}) \chi_{m_s} \quad (\text{A.13})$$

con  $\langle j \ 1 \ l \ m \ m_s \ m_l \rangle$  un coeficiente de Clebsh-Gordan, y  $\chi_{m_s}$  un espinor. Se cumple la condición adicional  $m = m_l + m_s$ . En los canales singletes se tiene directamente que  $\Phi_{jml}(\hat{r}) = Y_{lm}(\hat{r})$ .

Desarrollando la función de onda  $\Psi_{jm}$  en la ecuación de Schrödinger (A.9) se obtiene que las funciones de onda reducidas  $u_{jl}$  cumplen las ecuaciones diferenciales acopladas

$$-u_{jl}'' + \left[ U_{l,\text{NT}}^{sj} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_{jl}(r) + U_{\text{T}}(r) \sum_{l'} S_{jl'l'} u_{j'l'} = k^2 u_{jl}(r) \quad (\text{A.14})$$

<sup>1</sup>Se han ignorado otros posibles grados de libertad de la función de onda como el isospín.

<sup>2</sup>El resto de las componentes del potencial sí conmutan con  $\mathbf{L}^2$ .

siendo  $S_{jW}$

$$S_{jW} = \langle jml | \mathbf{S}_{12} | jml' \rangle = \int d^2 \hat{r} \Phi_{jml}(\hat{r}) \mathbf{S}_{12} \Phi_{jml'}(\hat{r}) \quad (\text{A.15})$$

y en donde  $U_{l,\text{NT}}^{sj}$  es la parte del potencial que no contiene al operador tensorial  $\mathbf{S}_{12}$ , aunque sí depende de espín y de los momentos angulares y orbitales del sistema, razón por la que se ha añadido el superíndice  $sj$  al potencial;  $U_{l,\text{NT}}^{sl}$  se define como

$$U_{l,\text{NT}}^{sj} = \langle jml | U_{\text{NT}} | jml \rangle \quad (\text{A.16})$$

La ecuación de Schrödinger reducida (A.14) puede simplificarse algo más si se tiene en cuenta el valor de los  $S_{jW}$

$$S_{jjj}(r) = 0 \quad \text{para canales singletes (s=0)} \quad (\text{A.17})$$

$$S_{jW}(r) = \begin{pmatrix} -\frac{2(j-1)}{2j+1} & 0 & \frac{6\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{6\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} & 0 & -\frac{2(j+2)}{2j+1} \end{pmatrix} \quad \text{para canales tripletes (s=1)} \quad (\text{A.18})$$

$$(\text{A.19})$$

en donde el orden de índices en la matriz es  $j-1, j, j+1$  tanto en filas como columnas, es decir,  $S_{jj-1j-1} = -\frac{2(j-1)}{2j+1}$ ,  $S_{jj-1j} = 0$ , etc. De esta matriz se deduce que para los canales con  $l = j$  la ecuación de Schrödinger reducida (A.14) no mezcla componentes de distinto momento angular orbital y las ecuaciones desacoplan.

Por otra parte si escribimos el potencial de la siguiente manera

$$U_{lW}^{sj} = \delta_{lW} U_{l,\text{NT}}^{sj} + S_{jW} U_{\text{T}} \quad (\text{A.20})$$

y renombramos las ecuaciones reducidas como  $u = u_{jj}$  en los canales singletes y  $u = u_{jj-1}$ ,  $v = u_{jj}$  y  $w = u_{jj+1}$  en los canales tripletes, se tiene que las ecuaciones de Schrödinger reducidas pueden escribirse según el caso como

(i) canal singlete ( $s = 0, l = j$ )

$$-u''(r) + \left[ U_{jj}^{0j}(r) + \frac{j(j+1)}{r^2} \right] u(r) = k^2 u(r) \quad (\text{A.21})$$

(ii) canal triplete desacoplado ( $s = 1, l = j$ )

$$-v''(r) + \left[ U_{jj}^{1j}(r) + \frac{j(j+1)}{r^2} \right] v(r) = k^2 v(r) \quad (\text{A.22})$$

(iii) canal triplete acoplado ( $s = 1, l = j \pm 1$ )

$$\begin{aligned}
-u''(r) + \left[ U_{j-1,j-1}^{1j}(r) + \frac{(j-1)j}{r^2} \right] u(r) + U_{j-1,j+1}^{1j}(r) w(r) &= k^2 u(r) \\
-w''(r) + \left[ U_{j+1,j+1}^{1j}(r) + \frac{(j+1)(j+2)}{r^2} \right] w(r) + U_{j+1,j-1}^{1j}(r) u(r) &= k^2 w(r)
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Por otra parte si se tiene en cuenta la descomposición del potencial nuclear en términos central, espín-espín, tensorial y espín-órbita, eq. (A.1), y en partes independientes y dependientes de isospin, eq. (A.3), se tiene que

$$U_{jj}^{0j}(r) = M [(V_C - 3V_S) + \tau(W_C - 3W_S)] \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned}
U_{jj}^{1j}(r) &= M [(V_C + V_S - V_{LS}) \\
&\quad + \tau(W_C + W_S - W_{LS}) + 2(V_T + \tau W_T)]
\end{aligned} \tag{A.25}$$

$$\begin{aligned}
U_{j-1,j-1}^{1j} &= M [(V_C + \tau W_C + V_S + \tau W_S) + (j-1)(V_{LS} + \tau W_{LS}) \\
&\quad + \frac{2(j-1)}{2j+1} (V_T + \tau W_T)]
\end{aligned} \tag{A.26}$$

$$U_{j-1,j+1}^{1j} = -\frac{6\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} M (V_T + \tau W_T) \tag{A.27}$$

$$\begin{aligned}
U_{j+1,j+1}^{1j} &= M [(V_C + \tau W_C + V_S + \tau W_S) + 2(j+2)(V_{LS} + \tau W_{LS}) \\
&\quad + \frac{2(j+2)}{2j+1} (V_T + \tau W_T)]
\end{aligned} \tag{A.28}$$

con  $\tau = 2t(t+1) - 3$ , siendo  $t = 0, 1$  el isospín total del canal considerado y en donde la componente espín-órbita cuadrática se ha ignorado debido a que los potenciales quirales a LO, NLO y NNLO no la poseen. Se tiene que tener en cuenta que la función de onda de los nucleones debe ser antisimétrica, lo que requiere que  $l + s + t$  sea impar.

#### A.4. Comportamiento Asintótico y Defasajes

En esta sección se repasa el comportamiento asintótico en infinito de las soluciones de energía finita de la ecuación de Schrödinger reducida y su relación con los defasajes y la matriz S. Para un canal desacoplado con momento angular orbital  $l$  descrito por la ecuación

radial reducida (A.8) con un potencial de alcance finito  $a$ , se tiene que la función de onda reducida  $u_l(r)$  se comporta asintóticamente como

$$u_l(r) \rightarrow \hat{h}_l^-(kr) - \hat{h}_l^+(kr)S_l(k) \quad (\text{A.29})$$

con  $\hat{h}_l^\pm(x)$  las funciones de Hankel esféricas reducidas de orden  $l$ , y  $S_l(k)$  la matriz S unitaria *on-shell*. Se tiene  $\hat{h}_l^\pm(x) = x h_l^\pm(x)$ , con

$$h_l^\pm(x) = x^n \left( -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{e^{\pm ix}}{x} \quad (\text{A.30})$$

por lo que  $\hat{h}_0^\pm(x) = e^{\pm ix}$ . Dado que la matriz S es unitaria,  $S_l S_l^+ = 1$ , se deduce que en un canal acoplado debe equivaler a la exponencial de una fase,  $e^{i\phi}$ . Se toma

$$S_l(k) = e^{2i\delta_l(k)} \quad (\text{A.31})$$

en donde  $\delta_l(k)$  es el defasaje. Mediante el defasaje las funciones de onda asintóticas  $u_l(r)$  pueden reescribirse en forma real como

$$u_l(r) \rightarrow \cot \delta_l \hat{j}_l(kr) - \hat{y}_l(kr) \quad (\text{A.32})$$

siendo  $\hat{j}_l(x) = x j_l(x)$  y  $\hat{y}_l(x) = x y_l(x)$  las funciones de Bessel esféricas reducidas, con  $j_l(x)$  e  $y_l(x)$

$$j_l(x) = x^n \left( -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\sin x}{x} \quad \text{e} \quad y_l(x) = -x^n \left( -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\cos x}{x} \quad (\text{A.33})$$

por lo que para onda s  $\hat{j}_0(x) = \sin x$  e  $\hat{y}_0(x) = -\sin x$ . La matriz  $M_l(k)$  se define como

$$M_l(k) = i \frac{S_l(k) + 1}{S_l(k) - 1} = \cot \delta_l(k) \quad (\text{A.34})$$

mientras que la matriz escalada  $\hat{M}_l(k)$  se relaciona con  $M_l(k)$  mediante

$$\hat{M}_l(k) = k^{2l+1} M_l(k) \quad (\text{A.35})$$

Esta matriz tiene la propiedad de que su expansión a momento pequeño es la expansión de rango efectivo

$$\hat{M}_l(k) = k^{2l+1} \cot \delta_l = -\frac{1}{\alpha_l} + \frac{1}{2} r_l k^2 + v_{2,l} k^4 + \dots \quad (\text{A.36})$$

en donde  $\alpha_l$  es la longitud<sup>3</sup> de dispersión,  $r_l$  el rango efectivo,  $v_{2,l}$  el parámetro de curvatura, etc.

---

<sup>3</sup>Aunque  $\alpha_l$  no tiene dimensiones de longitud para  $l > 0$ , se la llama longitud de dispersión por abuso del lenguaje.

En el caso de un canal acoplado de momento angular total  $j$  con un potencial de alcance finito  $a$ , descrito por la ecuación de Schrödinger radial reducida (A.23) se tiene que las funciones de onda reducidas  $u_j$  y  $w_j$  se comportan como

$$u_j(r) \rightarrow a_{j-1}(k) \hat{h}_{j-1}^-(kr) - b_{j-1}(k) \hat{h}_{j-1}^+(kr) \quad (\text{A.37})$$

$$w_j(r) \rightarrow a_{j+1}(k) \hat{h}_{j+1}^-(kr) - b_{j+1}(k) \hat{h}_{j+1}^+(kr) \quad (\text{A.38})$$

en donde los coeficientes  $a_{j\pm 1}$  y  $b_{j\pm 1}$  se relacionan mediante

$$\begin{pmatrix} b_{j-1} \\ b_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{j-1,j-1} & S_{j-1,j+1} \\ S_{j+1,j-1} & S_{j+1,j+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{j-1} \\ a_{j+1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.39})$$

en donde la matriz  $\mathbf{S}$  se define

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{j-1,j-1} & S_{j-1,j+1} \\ S_{j+1,j-1} & S_{j+1,j+1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.40})$$

Dado que la matriz  $\mathbf{S}$  es unitaria,  $\mathbf{S}\mathbf{S}^+ = 1$ , ésta puede ser descrita por tres parámetros, aunque son posibles varias maneras de expresarla. Una de ellas es la parametrización de Blatt-Biedenharn (BB) [77]

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos \epsilon_j & -\sin \epsilon_j \\ \sin \epsilon_j & \cos \epsilon_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2i\delta_{1j}} & 0 \\ 0 & e^{2i\delta_{2j}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \epsilon_j & \sin \epsilon_j \\ -\sin \epsilon_j & \cos \epsilon_j \end{pmatrix} \quad (\text{A.41})$$

con  $\delta_{1j}$ ,  $\delta_{2j}$  y  $\epsilon_j$  los defasajes de Blatt-Biedenharn, o defasajes propios. En esta parametrización la unitariedad de la matriz  $\mathbf{S}$  es manifiesta. La otra parametrización comúnmente usada para la matriz  $\mathbf{S}$  y los defasajes es la de de Stapp-Ypsilantis-Metropolis (SYM) [79]

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos(2\bar{\epsilon}_j) e^{2i\bar{\delta}_{1j}} & i \sin(2\bar{\epsilon}_j) e^{i(\bar{\delta}_{1j} + \bar{\delta}_{2j})} \\ i \sin(2\bar{\epsilon}_j) e^{i(\bar{\delta}_{1j} + \bar{\delta}_{2j})} & \cos(2\bar{\epsilon}_j) e^{2i\bar{\delta}_{2j}} \end{pmatrix}$$

La relación entre los defasajes SYM y BB viene dada por

$$\bar{\delta}_{1j} + \bar{\delta}_{2j} = \delta_{1j} + \delta_{2j} \quad (\text{A.42})$$

$$\sin(\bar{\delta}_{1j} - \bar{\delta}_{2j}) = \frac{\tan(2\bar{\epsilon}_j)}{\tan(2\epsilon_j)} \quad (\text{A.43})$$

## A.5. La Interacción NN Quiral

Los potenciales quirales, calculados por ejemplo en la referencia [20], que usamos a lo largo de este trabajo pueden escribirse de forma general en espacio de coordenadas como

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{NN} &= V_C(r) + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 W_C(r) \\
&+ [V_S(r) + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 W_S(r)] \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \\
&+ [V_T(r) + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 W_T(r)] (3\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r} \vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \\
&+ [V_{LS}(r) + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 W_{LS}(r)] \vec{L} \cdot \vec{S}
\end{aligned} \tag{A.44}$$

cada una de las componentes del potencial completo para un determinado canal pueden expresarse como la suma de una componente LO, otra NLO, etc. A LO (OPE) las componentes del potencial quiral se escriben ( $x = m_\pi r$ )

$$W_S^{\text{LO}} = \frac{g^2 m^3}{48\pi f^2} \frac{e^{-x}}{x} \tag{A.45}$$

$$W_T^{\text{LO}} = \frac{g^2 m^3}{48\pi f^2} \frac{e^{-x}}{x} \left( 3 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \tag{A.46}$$

anulándose el resto de las componentes. Para NLO las componentes no nulas del potencial son

$$V_T^{\text{NLO}}(r) = \frac{g^4 m^5}{128\pi^3 f^4 x^4} \left\{ -12K_0(2x) - (15 + 4x^2)K_1(2x) \right\} \tag{A.47}$$

$$\begin{aligned}
W_C^{\text{NLO}}(r) &= \frac{g^4 m^5}{128\pi^3 f^4 x^4} \left\{ [1 + 2g^2(5 + 2x^2) - g^4(23 + 12x^2)] K_1(2x) \right. \\
&\quad \left. + x [1 + 10g^2 - g^4(23 + 4x^2)] K_0(2x) \right\}
\end{aligned} \tag{A.48}$$

$$V_S^{\text{NLO}}(r) = \frac{g^4 m^5}{32\pi^3 f^4} \left\{ 3xK_0(2x) + (3 + 2x^2)K_1(2x) \right\} \tag{A.49}$$

con  $K_0$  y  $K_1$  las funciones de Bessel modificadas.

Por último, para NNLO se tienen las siguientes componentes no nulas

$$V_C^{\text{NNLO}}(r) = \frac{3g^2m^6}{32\pi^2f^4} \frac{e^{-2x}}{x^6} \left\{ \left( 2c_1 + \frac{3g^2}{16M} \right) x^2(1+x)^2 + \frac{g^5x^5}{32M} + \left( c_3 + \frac{3g^2}{16M} \right) (6 + 12x + 10x^2 + 4x^3 + x^4) \right\} \quad (\text{A.50})$$

$$W_T^{\text{NNLO}}(r) = \frac{g^2m^6}{48\pi^2f^4} \frac{e^{-2x}}{x^6} \left\{ - \left( c_4 + \frac{1}{4M} \right) (1+x)(3+3x+x^2) + \frac{g^2}{32M} (36 + 72x + 52x^2 + 17x^3 + 2x^4) \right\} \quad (\text{A.51})$$

$$V_T^{\text{NNLO}}(r) = \frac{g^4m^5}{128\pi^3f^4x^4} \left\{ \frac{3\pi m e^{-2x}}{8Mx} (12x^{-1} + 24 + 20x + 9x^2 + 2x^3) \right\} \quad (\text{A.52})$$

$$W_C^{\text{NNLO}}(r) = \frac{g^4m^5}{128\pi^3f^4x^4} \left\{ \frac{g^2m\pi e^{-2x}}{4Mx} [2(3g^2 - 2)(6x^{-1} + 12 + 10x + 4x^2 + x^3)] + g^2x(2 + 4x + 2x^2 + 3x^2) \right\} \quad (\text{A.53})$$

$$V_S^{\text{NNLO}}(r) = \frac{g^4m^5}{32\pi^3f^4} \left\{ - \frac{3\pi m e^{-2x}}{16Mx} (6x^{-1} + 12 + 11x + 6x^2 + 2x^3) \right\} \quad (\text{A.54})$$

$$W_S^{\text{NNLO}}(r) = \frac{g^2m^6}{48\pi^2f^4} \frac{e^{-2x}}{x^6} \left\{ \left( c_4 + \frac{1}{4M} \right) (1+x)(3+3x+2x^2) - \frac{g^2}{16M} (18 + 36x + 31x^2 + 14x^3 + 2x^4) \right\} \quad (\text{A.55})$$

$$V_{LS}^{\text{NNLO}}(r) = - \frac{3g^4m^6}{64\pi^2Mf^4} \frac{e^{-2x}}{x^6} (1+x)(2+2x+x^2) \quad (\text{A.56})$$

$$W_{LS}^{\text{NNLO}}(r) = \frac{g^2(g^2 - 1)m^6}{32\pi^2Mf^4} \frac{e^{-2x}}{x^6} (1+x)^2 \quad (\text{A.57})$$

## Apéndice B

# Relación entre Regularización en Espacio de Configuración y Espacio de Momento

### B.1. Teoría sin Piones

La interacción NN se puede entender mejor si se tiene en cuenta que existe una separación de escalas entre componentes de largas y cortas distancias de la interacción. Podemos dividir el potencial nuclear en una contribución de largo alcance y otra de corto alcance

$$V = V_L + V_C \quad (\text{B.1})$$

La interacción de largo alcance viene dada por intercambios piónicos. mientras que la de corto alcance o de contacto se considera desconocida. En general la interacción de contacto comprende todas aquellas partes de la interacción que no pueden resolverse a la escala de energías considerada. Por ejemplo, a energías muy pequeñas la longitud de onda Compton de los nucleones es mucho mayor que la componente de más largo alcance de la interacción nuclear, la debida a intercambio de un pión, por lo que toda la interacción nuclear parece de corto alcance. Esta situación es conocida como teoría sin piones, en la que tomamos  $V_L = 0$ .

Como ya se ha comentado la interacción de corto alcance entre los nucleones es desconocida, aunque es posible parametrizarla como una serie de potencias del momento

$$\langle p|V_C|p' \rangle = C_0 + C_2 (p^2 + p'^2) + C_2' p^2 p'^2 + \dots \quad (\text{B.2})$$

en donde  $C_0$ ,  $C_2$ ,  $C_2'$ , etc, reciben el nombre de contratérminos. En espacio de posiciones este potencial representa interacciones de contacto del tipo  $\delta$  de Dirac y sus derivadas. Este

potencial es muy singular y esta mal definido. Resulta necesario regularizarlo, por ejemplo mediante una función que suavice el comportamiento de  $V_C$  a alto momento

$$\langle p|V_C|p' \rangle = \left( C_0 + C_2 (p^2 + p'^2) + C_2' p^2 p'^2 + \dots \right) g\left(\frac{p}{\Lambda}, \frac{p'}{\Lambda}\right) \quad (\text{B.3})$$

en donde  $g(x, y)$  es una función que cumple

$$(i) \ g(x, y) = g(y, x) \quad (ii) \ \lim_{x, y \rightarrow 0} g(x, y) = 1 \quad (iii) \ \lim_{x \rightarrow \infty} x^n g(x, y) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad (\text{B.4})$$

Lo más sencillo es utilizar una función de regularización producto

$$g(x, y) = f(x) f(y) \quad \text{con} \quad (i) \ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad (ii) \ \lim_{x \rightarrow \infty} x^n f(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad (\text{B.5})$$

Una de las regularizaciones más usuales es la regularización espectral, en la que se toma como función de regularización

$$g(x, y) = f_{2n}(x) f_{2n}(y) \quad \text{con} \quad f_{2n}(x) = e^{-x^{2n}} \quad (\text{B.6})$$

en donde  $2n$  se debe tomar mayor que la potencia más alta incluida en el potencial de contacto. Por ejemplo, si incluimos sólo el término  $C_0$  bastará con tomar la función  $f_2$ , con los términos  $C_0$  y  $C_2$ , habrá que tomar  $f_4$ , y así sucesivamente.

Consideremos el potencial de contacto más simple

$$\langle p|V_C|p' \rangle = C_0 \quad (\text{B.7})$$

que es la representación de la  $\delta$  de Dirac en el espacio de momento. La regularización más sencilla del potencial de contacto consiste en utilizar como función de regularización un corte abrupto en espacio de momentos, es decir, en tomar  $g(x, y) = \theta(1 - x)\theta(1 - y)$

$$\langle p|V_C|p' \rangle = C_0 \theta(\Lambda - p)\theta(\Lambda - p') \quad (\text{B.8})$$

La ecuación de Lippmann-Schwinger para la teoría sin piones con este potencial de corto alcance se lee

$$\langle p|T(k)|p' \rangle = \langle p|V_C|p' \rangle + \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{k^2 - q^2 + i\epsilon} \langle p|V_C|q \rangle \langle q|T(k)|p' \rangle \quad (\text{B.9})$$

en tal caso la solución para la matriz T se puede escribir como

$$\langle p|T(k)|p' \rangle = \tau_0(k)\theta(\Lambda - p)\theta(\Lambda - p') \quad (\text{B.10})$$

que cumple

$$\frac{1}{\tau_0(k)} = \frac{1}{C_0} - I_0(k, \Lambda) \quad (\text{B.11})$$

en donde

$$\begin{aligned} I_{2n}(k, \Lambda) &= \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{q^{2n+2} dq}{k^2 - q^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{M}{2\pi^2} \left[ -\frac{\Lambda^{2n+1}}{2n+1} - \frac{\Lambda^{2n-1}}{2n-1} k^2 + \dots - \Lambda k^{2n} + \frac{k^{2n+1}}{2} \log \frac{\Lambda+k}{\Lambda-k} \right] - i \frac{M p}{4\pi} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

por lo que los defasajes vienen dados por

$$k \cot \delta = -\frac{4\pi}{MC_0} + \frac{2}{\pi} \left( -\Lambda + \frac{k}{2} \log \frac{\Lambda+k}{\Lambda-k} \right) \quad (\text{B.13})$$

Si se toma la prescripción de renormalización de reproducir la longitud de dispersión, entonces la relación entre  $\alpha_0$  y el acoplamiento  $C_0$  del potencial de corto alcance para un corte  $\Lambda$  queda descrita por

$$\frac{1}{C_0} = \frac{M}{4\pi} \left( \frac{1}{\alpha_0} - \frac{2}{\pi} \Lambda \right) \quad (\text{B.14})$$

En la regularización con condición de contorno la interacción de corto alcance es representada mediante una condición de contorno para la derivada logarítmica de la función de onda a una distancia  $r_c$ , el radio de corte. La derivada logarítmica <sup>1</sup> puede expandirse en potencias del momento como

$$L_k(r_c) = L_0 + L_2 k^2 + \dots \quad (\text{B.15})$$

Al igual que hicimos con el potencial de corto alcance, consideraremos que la derivada logarítmica no depende de la energía, es decir

$$\frac{u'_k(r_c)}{u_k(r_c)} = \frac{u'_0(r_c)}{u_0(r_c)} \quad (\text{B.16})$$

En realidad esto es equivalente a un potencial  $\delta$  en  $r_c$

$$V_C(r) = \frac{\hat{C}_0(r_c)}{4\pi r_c^2} \delta(r - r_c) \quad (\text{B.17})$$

---

<sup>1</sup>

$$L_k(r_c) = \frac{u'_k(r_c)}{u_k(r_c)}$$

en donde

$$\frac{M\hat{C}_0(r_c)}{4\pi r_c} = r_c \frac{u'_0(r_c)}{u_0(r_c)} - 1 \quad (\text{B.18})$$

y la relación con el potencial en espacio de momentos es

$$\langle p|V|p' \rangle = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 j_0(pr)V(r)j_0(p'r) \quad (\text{B.19})$$

es decir

$$\langle p|V|p' \rangle = \hat{C}_0(r_c) \frac{\sin p r_c}{p r_c} \frac{\sin p' r_c}{p' r_c} \rightarrow \hat{C}_0(r_c) \quad (\text{B.20})$$

por lo que

$$\frac{1}{\hat{C}_0(r_c)} = \frac{M}{4\pi} \left( \frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{r_c} \right) \quad (\text{B.21})$$

con lo cual obtenemos la relación entre escalas de regularización

$$\Lambda = \frac{\pi}{2r_c} \quad (\text{B.22})$$

Esto significa que la regularización en espacio de momentos con corte abrupto y la basada en condición de contorno en espacio de posiciones son equivalentes a orden  $O(p^0)$ , en donde la relación entre las escalas auxiliares está dada por la expresión (B.22). La equivalencia entre las dos teorías se rompe cuando se considera el comportamiento correspondiente a momento finito. Por ejemplo, el rango efectivo en el caso de corte abrupto viene dado por

$$r_0 = \frac{4}{\pi\Lambda} \quad (\text{B.23})$$

mientras que para la condición de contorno independiente de energía se tiene

$$r_0 = 2r_c \left( 1 - \frac{r_c}{\alpha_0} + \frac{r_c^2}{3\alpha_0^2} \right) \quad (\text{B.24})$$

que coincide con la cota de Wigner. Por otra parte esto es esperable observando el potencial de contacto equivalente a la condición de contorno independiente de energía, eq. (B.20), que contiene términos de orden  $O(p^2)$  y superiores que no están presentes en el potencial de contacto en espacio de momentos, eq. (B.8). Sin embargo estos términos son también de orden  $O(r_c^2)$ , en efecto se trata de una expansión en potencias de  $(p r_c)^2$ , por lo que las diferencias desaparecerán cuando se elimine el corte. En tal caso ( $\Lambda \rightarrow \infty$ ,  $r_c \rightarrow 0$ ) ambas regularizaciones son equivalentes, obteniéndose para el defasaje el resultado siguiente

$$k \cot \delta = -\frac{1}{\alpha_0} \quad (\text{B.25})$$

es decir, teoría de rango efectivo a orden  $O(k^0)$ .

## B.2. Teoría con Piones

Vamos a considerar la dispersión NN en onda s con potencial de intercambio de un pión y un contratérmino, es decir

$$\langle p|V_C|p' \rangle = C_0 \quad (\text{B.26})$$

$$\langle p|V_L|p' \rangle = \frac{g^2 m^2}{16 f_\pi^2 p p'} \frac{\log[(p-p')^2 + m^2]}{\log[(p+p')^2 + m^2]} \quad (\text{B.27})$$

en donde  $g = 1,29$  es la constante de acoplamiento axial del pión,  $m = 138,03 \text{ MeV}$  la masa del pión y  $f_\pi = 92,4 \text{ MeV}$  la constante de decaimiento débil del pión. La ecuación de Lippmann-Schwinger en este caso se escribe

$$\langle p|T(k)|p' \rangle = \langle p|V|p' \rangle + \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{k^2 - q^2 + i\epsilon} \langle p|V|q \rangle \langle q|T(k)|p' \rangle \quad (\text{B.28})$$

con  $V = V_C + V_L$ . Sin embargo resulta más útil calcular tan sólo la parte real de la matriz T, llamada matriz de reactancia K, que tiene como ventaja una relación más directa con los defasajes

$$K(E) = \text{Re}T(E + i\epsilon) \quad \text{con} \quad \langle k|K(k)|k \rangle = -\frac{4\pi}{M} \frac{1}{k \cot \delta} \quad (\text{B.29})$$

La matriz K cumple la ecuación integral

$$\langle p|K(k)|p' \rangle = \langle p|V|p' \rangle + \frac{M}{2\pi^2} \mathcal{P} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{k^2 - q^2} \langle p|V|q \rangle \langle q|K(k)|p' \rangle \quad (\text{B.30})$$

en donde  $\mathcal{P}$  indica el valor principal de la integral. Para la integral anterior hay un polo en  $q = k$ , que puede ser eliminado debido a la prescripción de tomar el valor principal. Si se tiene en cuenta que

$$\mathcal{P} \int_0^\infty dq \frac{f(q)}{k - q} = \int_0^\infty dq \frac{f(q) - f(k)}{k - q} \quad (\text{B.31})$$

entonces la ecuación integral para la matriz K se escribe

$$\langle p|K(k)|p' \rangle = \langle p|V|p' \rangle + \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\infty dq \frac{1}{k^2 - q^2} [q^2 \langle p|V|q \rangle \langle q|K(k)|p' \rangle - k^2 \langle p|V|k \rangle \langle k|K(k)|p' \rangle] \quad (\text{B.32})$$

en donde la integral correspondiente al propagador es ahora regular.

Para renormalizar la ecuación de Lippmann-Schwinger se va a aplicar un corte abrupto  $\Lambda$  y va a tomarse la condición de regularización de reproducir la longitud de dispersión física para cualquier valor del corte, que es la misma condición que se toma al regularizar en espacio

de posiciones. Esta condición genera una dependencia entre el acoplamiento del potencial de contacto y el corte, es decir,  $C_0 = C_0(\Lambda)$ . Si se tiene en cuenta que la relación entre la matriz de reactancia y la longitud de dispersión es

$$\langle 0|K(0, \Lambda)|0\rangle = \frac{4\pi a_0}{M} \quad (\text{B.33})$$

en donde se ha incluido explícitamente la dependencia en  $\Lambda$  de la matriz  $K$ , entonces la dependencia de  $C_0$  respecto a  $\Lambda$  viene dada por la condición siguiente

$$C_0(\Lambda) \quad \text{tal que} \quad \frac{\partial}{\partial \Lambda} \langle 0|K(0, \Lambda)|0\rangle = 0 \quad (\text{B.34})$$

Con esta condición la dependencia  $C_0(\Lambda)$  puede calcularse de manera sencilla resolviendo la ecuación de Lippmann-Schwinger para  $\langle 0|K(0)|0\rangle$

$$\langle 0|K(0, \Lambda)|0\rangle = C_0(\Lambda) + \langle 0|V_L|0\rangle - \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dq [C_0(\Lambda) + \langle 0|V_L|q\rangle] \langle q|K(0, \Lambda)|0\rangle \quad (\text{B.35})$$

donde  $V_L$  es el potencial de intercambio de un pi6n.

La trayectoria de renormalizaci6n  $C_0(\Lambda)$  generada puede verse en la figura (B.1). Para valores peque1os del corte,  $\Lambda < 100$  MeV, la trayectoria puede aproximarse por la expresi6n siguiente

$$\frac{1}{C_0 - \frac{g^2}{4f^2}} = \frac{M}{4\pi} \left( \frac{1}{\alpha_0} - \frac{2}{\pi} \Lambda \right) \quad (\text{B.36})$$

que representa el l6mite  $\Lambda \rightarrow 0$  de  $C_0(\Lambda)$  y es an6loga a la trayectoria de renormalizaci6n correspondiente a la teor6a de contacto, eq. (B.14), pero modificada por la transformada de Fourier a momento cero del potencial de largo alcance, cuyo efecto es equivalente a la sustituci6n  $C_0 \rightarrow C_0 + \langle 0|V_L|0\rangle$  en (B.14). Por otra parte para  $\Lambda \rightarrow \infty$  se puede observar que la diferencia entre el valor exacto y el correspondiente a la teor6a de contacto sin modificaciones, eq. (B.14), es peque1a, en acuerdo con los resultados vistos en el cap6tulo 3. para el efecto del potencial OPE en el canal  $^1S_0$ .

Se puede estudiar la relaci6n entre las regularizaciones en espacio de momentos y coordenadas considerando respectivamente las cantidades adimensionales siguientes

$$g_0(\Lambda) = \frac{M\Lambda C_0(\Lambda)}{2\pi^2} \quad (\text{B.37})$$

$$\hat{g}_0(r_c) = \frac{M\hat{C}_0(r_c)}{4\pi r_c} = r_c \frac{u'_0(r_c)}{u_0(r_c)} - 1 \quad (\text{B.38})$$

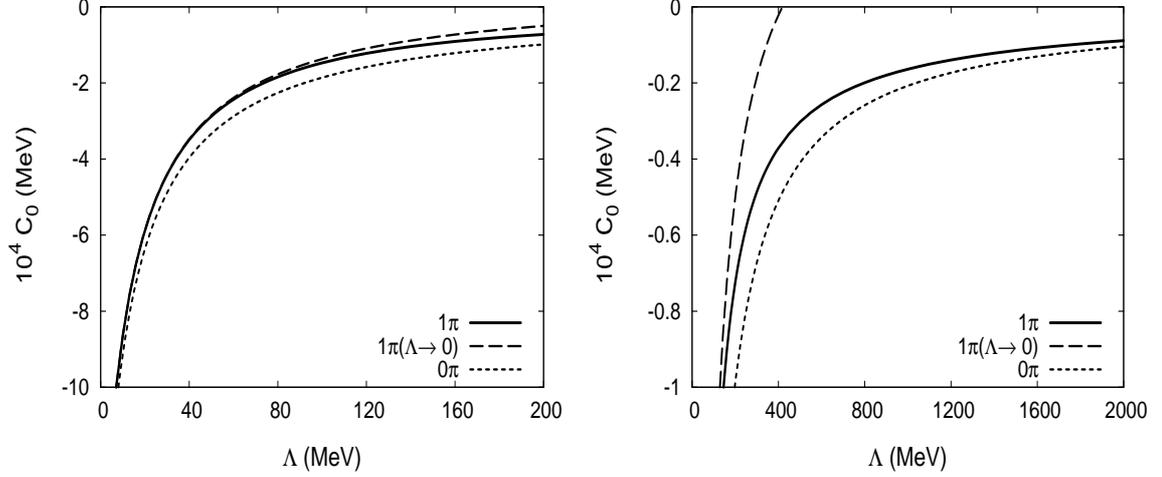


Figura B.1: Evolución del contratérmino  $C_0(\Lambda)$  respecto al corte, curva  $1\pi$ , para la condición de renormalización de reproducir la longitud de dispersión física  $\alpha_{0,\text{exp}} = -23,74 \text{ fm}$  con el potencial de intercambio de un pión. Se muestran también las trayectorias correspondientes al límite  $\Lambda \rightarrow 0$  de  $C_0(\Lambda)$ , eq. (B.36) en el texto y curva  $1\pi(\Lambda \rightarrow 0)$  en la figura, y la correspondiente a que no haya potencial de largas distancias, eq. (B.14), curva  $0\pi$ . Cuando  $\Lambda \rightarrow 0$  todas las curvas se acercan al valor  $4\pi\alpha_0/M \sim -16 \cdot 10^{-4} \text{ MeV}^{-2}$ .

Estas dos cantidades están basadas en la equivalencia entre la condición de contorno y el potencial delta, eq. (B.17), y en la relación entre escalas  $r_c = \frac{\pi}{2\Lambda}$  que se obtenía en la teoría sin piones. Como se verá más adelante la equivalencia entre la condición de contorno y el contratérmino  $C_0$  sigue siendo válida en presencia del potencial OPE. Sin embargo la relación entre escalas es más arbitraria en este caso. A estas dos funciones adimensionales  $g_0(\Lambda)$  y  $\hat{g}_0(r_c)$  las llamaremos contratérminos reescalados o adimensionalizados.

La función  $\hat{g}_0(r_c)$  tiene un punto fijo atractivo y otro repulsivo para  $r_c \rightarrow 0$ . Estos puntos fijos se pueden obtener considerando el comportamiento de la función de onda cerca del origen del potencial de intercambio de un pión

$$u_0(r) \sim c_0 \left[ 1 + mr - \frac{3r}{2R_s} - \frac{r}{R_s} \log\left(\frac{r}{R_s}\right) \right] + c_1 r \quad \text{con} \quad R_s = \frac{16\pi f_\pi^2}{g^2 m^2 M} \quad (\text{B.39})$$

Así, dada la relación de  $\hat{g}_0(r_c)$  con la función de onda a energía cero, se encuentra que para la solución regular,  $c_0 = 0$ , se tiene el punto fijo repulsivo  $\hat{g}_0 = 0$ , mientras que para la solución irregular,  $c_0 \neq 0$ , se encuentra el punto fijo atractivo  $\hat{g}_0 = -1$ . Este resultado no es sólo válido para el potencial de intercambio de un pión, sino para todo potencial regular en el

origen <sup>2</sup>. Sin embargo una propiedad especial del potencial de intercambio de un pión es la manera en que  $\hat{g}_0(r_c)$  converge al punto fijo. Para un potencial regular convencional se tiene que cerca del origen la función de onda se comporta como  $u_0(r) \sim c_0 + c_1 r$ , por lo que

$$\hat{g}_0(r_c) \rightarrow -1 + \frac{c_1}{c_0} r_c + O(r_c^2) \quad (\text{B.40})$$

mientras que debido a la componente logarítmica en (B.39) inducida por el comportamiento cerca del origen del potencial OPE se tiene para  $\hat{g}_0(r_c)$  que

$$\hat{g}_0(r_c) \rightarrow -1 + \frac{c_1}{c_0} r_c + m r_c - \frac{5r_c}{2R_s} - \frac{r_c}{R_s} \log\left(\frac{r_c}{R_s}\right) + O(r_c^2) \quad (\text{B.41})$$

por lo que para  $r_c \rightarrow 0$  domina el término  $r_c \log r_c$  y  $\hat{g}_0(r_c)$  se acerca al punto fijo con pendiente infinita.

En la figura (B.2) puede observarse la evolución de  $g_0(\Lambda)$  y  $\hat{g}_0(r_c)$  respecto al radio de corte  $r_c$ , o al radio de corte equivalente  $r_c = \frac{\pi}{2\Lambda}$  en el caso de  $g_0(\Lambda)$ . También se muestra la curva correspondiente a la teoría sin piones, para la que cortar en espacio de momentos o posiciones es equivalente y en la que se tiene

$$g_0^{0\pi}(\Lambda) = \frac{\alpha_0}{\frac{\pi}{2\Lambda} - \alpha_0} \quad (\text{B.42})$$

$$\hat{g}_0^{0\pi}(r_c) = \frac{\alpha_0}{r_c - \alpha_0} \quad (\text{B.43})$$

Estas expresiones coinciden con el comportamiento asintótico para  $r_c \rightarrow \infty$  de  $\hat{g}_0(r_c)$ , pero no con el de  $g_0(\Lambda)$ . Este desacuerdo se debe a que para  $\Lambda \rightarrow 0$  el contratérmino  $C_0$  se comportaba como el correspondiente a la teoría sin piones tras la sustitución  $C_0 \rightarrow C_0 + \langle 0|V_L|0\rangle$ . como ya se comentó al obtener la ecuación (B.36). Si se realiza esta sustitución se obtiene que el comportamiento asintótico del contratérmino reescalado  $g_0(\Lambda)$  para  $\Lambda \rightarrow 0$  viene dado por la siguiente expresión

$$g_0(\Lambda) = \frac{M g^2}{16\pi f_\pi^2} \frac{2\Lambda}{\pi} + \frac{\alpha_0}{\frac{\pi}{2\Lambda} - \alpha_0} \quad (\text{B.44})$$

es decir, se añade un término  $-\alpha_{0,\text{pert}}/r_c$  a la teoría sin piones, en donde  $\alpha_{0,\text{pert}} = -0,718$  fm es la longitud de dispersión perturbativa para el potencial OPE cuando no hay contratérminos.

Por otra parte si se considera el comportamiento para  $r_c \rightarrow 0$  o  $\Lambda \rightarrow \infty$  puede observarse en la figura (B.2) que todos los contratérminos reescalados convergen al punto fijo atractivo

---

<sup>2</sup>Es decir, que cumpla la condición

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 V_L(r) = 0$$

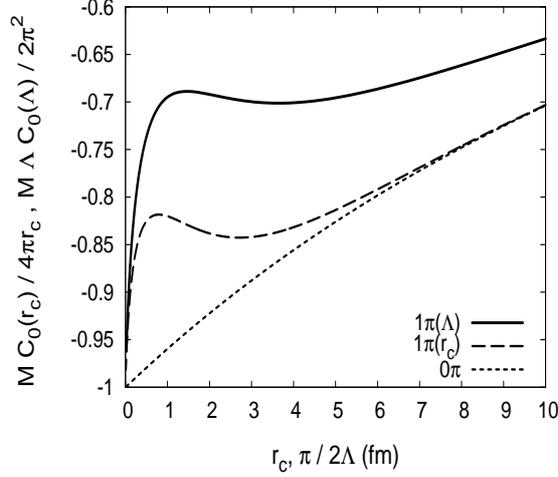


Figura B.2: Evolución de los contratermino adimensionalizados  $g_0(\Lambda)$  y  $\hat{g}_0(r_c)$ , definidos en eq. (B.37), respecto al radio de corte  $r_c = \frac{\pi}{2\Lambda}$  para las regularizaciones en espacio de momentos y de coordenadas con la condición de regularización de reproducir la longitud de dispersión física  $\alpha_{0,\text{exp}} = -23,74$  fm. También se muestra la evolución de  $g_0$  para la teoría sin piones, eq. (B.14). Se puede observar que las tres curvas van al punto fijo  $g_0 \rightarrow -1$  para  $r_c \rightarrow 0$ , y que para  $r_c \rightarrow \infty$  la curva correspondiente a la teoría sin piones y  $\hat{g}_0(r_c)$  correspondiente a la regularización en espacio de coordenadas se superponen. En el caso de la regularización en espacio de momentos  $g_0(\Lambda)$  esto no ocurre debido a la influencia de la transformada de Fourier del potencial a momento cero, eq. (B.36).

$g_0 = -1$ . La convergencia es lineal en el caso de la teoría sin piones, y de tipo logarítmico,  $\propto r_c \log r_c$  ó  $\propto \log \Lambda/\Lambda$ , para el potencial OPE. Mientras que para tanto para la teoría sin piones como para el potencial de intercambio de un pión regularizado en el espacio de configuración es evidente que el contratermino reescalado evoluciona al punto fijo atractivo  $\hat{g}_0(r_c = 0) = -1$ , esta propiedad no es en absoluto obvia cuando se renormaliza en espacio de momentos, aunque los resultados numéricos de la figura (B.2) parecen confirmar que el contratermino reescalado también tiene el punto fijo atractivo asintótico  $g_0(\Lambda \rightarrow \infty) = -1$ .

### B.2.1. Defasajes

Los defasajes que se obtienen para el potencial OPE con un corte abrupto en momento se muestran en la figura (B.3). Para el cálculo en espacio de momentos sólo se muestran los defasajes que se obtienen para  $\Lambda = 400$  MeV y  $\Lambda = 1000$  MeV. La convergencia entre estos dos valores es lenta pero uniforme. También se muestra en la figura el defasaje que

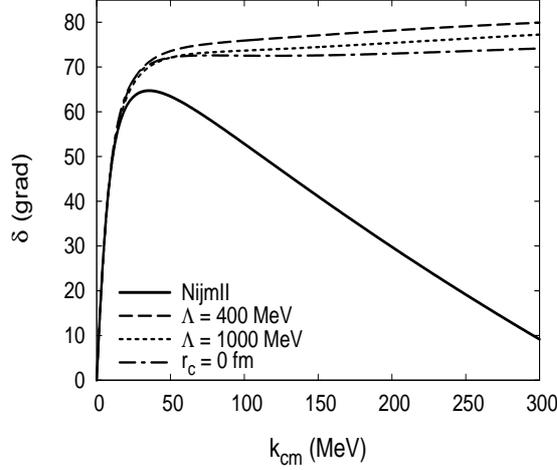


Figura B.3: Defasajes NN en el canal singlete para el potencial de intercambio de un pión con cortes  $\Lambda = 400, 1000 \text{ MeV}$  y  $r_c = 0$  equivalente a  $\Lambda = \infty$ . Se ha tomado la condición de renormalización de reproducir la longitud de dispersión física  $\alpha_{0,\text{exp}} = -23,74 \text{ fm}$ . También se muestran los defasajes correspondientes al potencial fenomenológico Nijmegen II. Como se puede ver la convergencia respecto al corte  $\Lambda$  es lenta.

se obtiene mediante la regularización por ortogonalidad en espacio de posiciones, capítulo (3), y se ve que el cálculo en espacio de momentos converge hacia el cálculo en espacio de posiciones, cosa natural ya que en el límite  $\Lambda \rightarrow \infty$  o  $r_c \rightarrow 0$  se está resolviendo el mismo problema mecano-cuántico. Sin embargo no es sencillo obtener una confirmación numérica de este hecho: por desgracia resulta numéricamente difícil obtener un defasaje fiable y que reproduzca la longitud de dispersión experimental para cortes mayores que  $\Lambda = 1 \text{ GeV}$ . En concreto si nos fijamos en el defasaje para  $\Lambda = 1000 \text{ MeV}$  de la figura (B.3) se puede observar una ligera discrepancia en el valor de la longitud de dispersión aunque es difícil de ver.

Otro hecho curioso es que aunque los defasajes convergen al mismo valor para  $\Lambda \rightarrow \infty$  o  $r_c \rightarrow 0$  no existe ningún par de valores  $(\Lambda, r_c)$  para los que los defasajes con corte finito coincidan. Esto se debe a que  $d\delta/d\Lambda < 0$  y  $d\delta/dr_c < 0$ , por lo que los defasajes calculados en espacio de momentos convergen por encima del defasaje renormalizado mientras que los calculados en espacio de posiciones lo hacen por debajo, como se veía en la figura (3.5) del capítulo (3).

### B.2.2. Relación con Contratérminos

Al igual que ocurre en en la teoría sin piones, es posible encontrar una equivalencia formal entre los contratérminos en espacio de posiciones y momentos en presencia de un potencial de largas distancias que vamos a derivar en este apartado. Para tal fin dividiremos el potencial reducido completo  $U(r)$  en una contribución de largo alcance y otra de corto alcance

$$U(r) = U_L(r) + U_C(r) \quad (\text{B.45})$$

en donde  $U_L(r)$  es la contribución de largas distancias, y  $U_C(r)$  la contribución de cortas distancias, que en principio es desconocida. El potencial  $U_L$  comienza a ser relevante a distancias menores o del orden de  $R_L$ . A  $R_L$  la llamaremos la escala de largas distancias. De la misma manera se define  $R_C$  para el potencial  $U_C$ ;  $R_C$  es la escala de cortas distancias.

El sistema físico estará descrito a largas distancias por la ecuación de Schrödinger reducida para el potencial  $U_L(r)$  <sup>3</sup>

$$-u_L'' + U_L(r)u_L = k^2 u_L \quad (\text{onda } s) \quad (\text{B.46})$$

en donde  $u_L$  es la función de onda de largas distancias. Para distancias  $r \gg R_C$ , la solución de largas distancias  $u_L$  básicamente coincide con la solución completa  $u$ . Sólo a muy cortas distancias diferirán la solución de largas distancias y la solución completa, y la forma en que esta diferencia se manifestará será la violación de la condición de regularidad.

Para estudiar las consecuencias de la violación de la condición de regularidad es mejor considerar el comportamiento de la función de onda completa <sup>4</sup> en vez de la función de onda reducida. La función de onda completa se define como

$$\psi_L(r, \hat{r}) = \frac{u_L(r)}{r} Y_{00}(\hat{r}) \sim \frac{c_0}{r} + c_1 \quad (\text{B.47})$$

En donde  $Y_{00}$  es el armónico esférico correspondiente a  $l = 0$  y  $m = 0$ . La ecuación de Schrödinger ahora se escribe como

$$-\nabla^2 \psi + U_L(r) \psi(r, \hat{r}) = k^2 \psi(r, \hat{r}) \quad (\text{B.48})$$

El problema que se encuentra a cortas distancias con esta ecuación está en que el comportamiento a cortas distancias de la función de onda (B.47) genera un término singular tipo

<sup>3</sup>La descripción completa la daría la ecuación  $-u'' + U(r)u = k^2 u$ , con  $u$  la función de onda reducida válida a todas las distancias.

<sup>4</sup>Por completa nos referimos aquí a que no hemos proyectado la ecuación de Schrödinger sobre un canal de momento angular bien definido.

$\delta(\vec{r})$  que no es contrarrestado por ningún otro término en la ecuación de Schrödinger. El origen del término tipo  $\delta$  se deduce de un conocido resultado

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\vec{r}) \quad (\text{B.49})$$

Para contrarrestar este término es necesario añadir un contratérmino singular al potencial de larga distancia

$$U_L(r) \rightarrow U_L(r) + \delta U_L(r) = U_L(r) + \tilde{U}_C(r) \quad (\text{B.50})$$

El contratérmino  $\delta U_L$ , al que denotaremos por comodidad  $\tilde{U}_C$ , debe ser también de tipo  $\delta$  para poder absorber la singularidad producida por el comportamiento de la función de onda cerca del origen.

Para poder calcular el contratérmino  $\tilde{U}_C$  es conveniente encontrar una representación más manejable de la distribución  $\delta$ . Por ejemplo podemos definir  $\delta(\vec{r})$  como un límite

$$\delta(\vec{r}) = \lim_{r_c \rightarrow 0^+} \bar{\delta}(r, r_c) \quad \text{en donde} \quad \bar{\delta}(r, r_c) = \frac{1}{4\pi r_c^2} \delta(r - r_c) \quad (\text{B.51})$$

En este contexto  $r_c$  es un radio de corte, no la auténtica escala de cortas distancias. Se puede comprobar que esta es una buena representación de la delta mediante la aplicación de este límite a una función

$$\int d^3 \vec{r} \delta(\vec{r}) F(r) = \lim_{r_c \rightarrow 0^+} \left[ \int d^3 \vec{r} \bar{\delta}(r, r_c) F(r) = F(r_c) \right] = F(0) \quad (\text{B.52})$$

en donde hemos supuesto sin ninguna pérdida de generalidad que  $F(r)$  es esféricamente simétrico<sup>5</sup>. El contratérmino  $\tilde{U}_C$  también puede expresarse en tal caso como un límite

$$\tilde{U}_C(r) = \lim_{r_c \rightarrow 0^+} \tilde{U}_C(r, r_c) \quad (\text{B.53})$$

En principio se trabaja con un radio de corte  $r_c$  finito, y se determina entonces  $\tilde{U}_C(r, r_c)$ .

El potencial contratérmino  $\tilde{U}_C$  se determina mediante la exigencia de que absorba la singularidad producida por  $\nabla^2 \psi_L$ , es decir

$$-\nabla^2 \psi_L + \tilde{U}_C \psi_L = 0 \quad (\text{B.54})$$

Si usamos un corte finito  $r_c$ , esta condición es equivalente a la siguiente

$$4\pi a F(r_c) + \int d^3 \vec{r} \tilde{U}_C(r, r_c) \left( \frac{c_0}{r} + c_1 \right) F(r) = 0 \quad (\text{B.55})$$

---

<sup>5</sup>Si  $F(r)$  no fuera esféricamente simétrico se lo podría expandir como una suma de armónicos esféricos  $F(\vec{r}) = \sum_{lm} F_{lm}(r) Y_{lm}(\hat{r})$ . En tal caso el único término de esta suma que sobreviviría en la integral B.52 sería el esféricamente simétrico,  $F_{00}(r) Y_{00}(\hat{r})$ , pues el resto de los términos se anulan al hacer la integral angular.

que tiene como solución

$$\tilde{U}_C(r, r_c) = -\frac{c_0}{r_c c_0 + c_1 r_c} \delta(r - r_c) = \frac{MC_0(r_c)}{4\pi r_c^2} \delta(r - r_c) \quad (\text{B.56})$$

en donde

$$\frac{MC_0(r_c)}{4\pi r_c} = -\frac{c_0}{(c_0 + c_1 r_c)} = r_c \frac{u'(r_c)}{u(r_c)} - 1 \quad (\text{B.57})$$

Este es el contratérmino que la violación de la condición de regularidad en el origen induce, que es idéntico al que se obtiene cuando no hay potencial de largas distancias, eqs. (B.17) y (B.18).

### B.3. Conclusiones

La relación entre regularización en espacio de posiciones y espacio de momentos con un corte abrupto  $r_c$  o  $\Lambda$  despierta cierto interés, sobre todo debido al uso tan extendido de esquemas de regularización en los que se implementa un corte en espacio de momentos. Si bien no existe una prueba formal, hay buenas razones para suponer la equivalencia de ambos tipos de cálculos. Por una parte se está resolviendo el mismo problema mecano-cuántico independientemente de si éste se plantea mediante la ecuación de Schrödinger o de Lippmann-Schwinger cortadas. Por otra el efecto de tomar la solución irregular para la función de onda, base por ejemplo de los esquemas de regularización estudiados a lo largo de este trabajo, es equivalente a considerar un potencial tipo delta a cortas distancias y por tanto un contratérmino. En el caso de una teoría sin piones, ambos tipos de regularización son idénticos al orden formulado, presentando incluso la misma evolución de los contratérminos respecto al corte, eqs. (B.14) y (B.21). Cuando los piones se tienen en cuenta los cálculos numéricos indican que sigue habiendo una equivalencia entre los dos tratamientos considerados para la regularización al menos cuando el corte  $\Lambda$  es grande. Por otra parte, independientemente de la equivalencia entre espacio de posiciones y momento, hay que reconocer las ventajas que tiene trabajar en espacio de posiciones, en donde se puede mostrar a priori la existencia de un límite renormalizado mediante el comportamiento de las soluciones a la ecuación de Schrödinger cerca del origen.

## Apéndice C

# Expansión de Cortas Distancias para la Función de Onda del Deuterón con el Potencial OPE

En este apéndice se muestra la expansión de cortas distancias de la función de onda del deuterón para el potencial de intercambio de un pión, discutida en la sección (4.6) del capítulo (4). La solución general se escribe como combinación lineal de cuatro soluciones linealmente independientes que se corresponden con los coeficientes  $C_{1A}$ ,  $C_{2A}$ ,  $C_{1R}$  y  $C_{2R}$

$$u(r) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{r}{R}\right)^{3/4} \left[ -C_{1R}f_{1R}(r)e^{+4\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{r}}} - C_{2R}f_{2R}(r)e^{-4\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{r}}} + \sqrt{2}C_{1A}f_{1A}(r)e^{-4i\sqrt{\frac{R}{r}}} + \sqrt{2}C_{2A}f_{2A}(r)e^{4i\sqrt{\frac{R}{r}}} \right] \quad (\text{C.1})$$

$$w(r) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{r}{R}\right)^{3/4} \left[ \sqrt{2}C_{1R}g_{1R}(r)e^{+4\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{r}}} + \sqrt{2}C_{2R}g_{2R}(r)e^{-4\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{r}}} + C_{1A}g_{1A}(r)e^{-4i\sqrt{\frac{R}{r}}} + C_{2A}g_{2A}(r)e^{4i\sqrt{\frac{R}{r}}} \right] \quad (\text{C.2})$$

en donde la función  $f(r)$  viene dada por la expresión (con  $x = r/R$ )

$$\begin{aligned}
f_{1A} &= 1 - \frac{35i}{32} \sqrt{x} - \frac{1811x}{6144} + \frac{2441i}{65536} x^{\frac{3}{2}} - \frac{34805x^2}{8388608} \\
&+ x^3 \left( \frac{9873675}{17179869184} + \frac{m^2 R^2}{36} - \frac{m^3 R^3}{32} - \frac{3 R^2 \gamma^2}{64} \right) \\
&+ x^{\frac{7}{2}} \left( \frac{193405905i}{549755813888} + \frac{353i}{24192} m^2 R^2 - \frac{709i}{92160} m^3 R^3 + \frac{i}{28} m^4 R^4 - \frac{709i}{61440} R^2 \gamma^2 \right) \\
&+ x^{\frac{5}{2}} \left( \frac{-333725i}{268435456} - \frac{i}{15} m^3 R^3 - \frac{i}{10} R^2 \gamma^2 \right) + \mathcal{O}(x^4) \tag{C.3}
\end{aligned}$$

$$f_{2A} = f_{1A}^* \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned}
f_{2R} &= 1 + \frac{67\sqrt{x}}{32\sqrt{2}} + \frac{7763x}{12288} + \left( \frac{8873}{131072\sqrt{2}} - \frac{m^2 R^2}{3\sqrt{2}} \right) x^{\frac{3}{2}} + \left( -\frac{105845}{33554432} - \frac{55m^2 R^2}{192} \right) x^2 \\
&+ \left( \frac{881405}{1073741824\sqrt{2}} - \frac{10807m^2 R^2}{184320\sqrt{2}} + \frac{m^3 R^3}{15\sqrt{2}} + \frac{R^2 \gamma^2}{10\sqrt{2}} \right) x^{\frac{5}{2}} \\
&+ \left( -\frac{23360715}{137438953472} - \frac{332899m^2 R^2}{11796480} + \frac{47m^3 R^3}{960} + \frac{m^4 R^4}{36} + \frac{47R^2 \gamma^2}{640} \right) x^3 \\
&+ \left( \frac{419268465}{4398046511104\sqrt{2}} + \frac{30559591m^2 R^2}{31708938240\sqrt{2}} + \frac{2141m^3 R^3}{1290240\sqrt{2}} + \frac{229m^4 R^4}{8064\sqrt{2}} + \frac{2141R^2 \gamma^2}{860160\sqrt{2}} \right) x^{\frac{7}{2}} + \mathcal{O}(x^4) \tag{C.5}
\end{aligned}$$

$$f_{1R} = f_{2R} \quad (x \rightarrow e^{2\pi i} x) \tag{C.6}$$

mientras que para la función  $g(r)$  se tiene

$$\begin{aligned}
g_{1A} &= 1 - \frac{35i}{32}\sqrt{x} - \frac{4883x}{6144} + \frac{82075i}{196608}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1245195x^2}{8388608} \\
&+ \left( \frac{-5136285i}{268435456} - \frac{i}{15}m^3R^3 - \frac{i}{10}R^2\gamma^2 \right) x^{\frac{5}{2}} \\
&+ \left( \frac{42237195}{17179869184} - \frac{m^2R^2}{18} - \frac{m^3R^3}{32} - \frac{3R^2\gamma^2}{64} \right) x^3 \\
&+ \left( \frac{494999505i}{549755813888} - \frac{65i}{12096}m^2R^2 + \frac{2363i}{92160}m^3R^3 + \frac{i}{28}m^4R^4 + \frac{2363i}{61440}R^2\gamma^2 \right) x^{\frac{7}{2}} + \mathcal{O}(x^4) \quad (C.7)
\end{aligned}$$

$$g_{2A} = g_{1A}^* \quad (C.8)$$

$$\begin{aligned}
g_{2R} &= 1 + \frac{67\sqrt{x}}{32\sqrt{2}} + \frac{13907x}{12288} + \left( \frac{307195}{393216\sqrt{2}} - \frac{m^2R^2}{3\sqrt{2}} \right) x^{\frac{3}{2}} + \left( \frac{5075595}{33554432} - \frac{55m^2R^2}{192} \right) x^2 \\
&+ \left( \frac{19661565}{1073741824\sqrt{2}} - \frac{41527m^2R^2}{184320\sqrt{2}} + \frac{m^3R^3}{15\sqrt{2}} + \frac{R^2\gamma^2}{10\sqrt{2}} \right) x^{\frac{5}{2}} \\
&+ \left( -\frac{143137995}{137438953472} - \frac{128033m^2R^2}{3932160} + \frac{47m^3R^3}{960} + \frac{m^4R^4}{36} + \frac{47R^2\gamma^2}{640} \right) x^3 \\
&+ \left( \frac{1476620145}{4398046511104\sqrt{2}} - \frac{45736601m^2R^2}{31708938240\sqrt{2}} + \frac{45149m^3R^3}{1290240\sqrt{2}} + \frac{229m^4R^4}{8064\sqrt{2}} + \frac{45149R^2\gamma^2}{860160\sqrt{2}} \right) x^{\frac{7}{2}} + \mathcal{O}(x^4) \quad (C.9)
\end{aligned}$$

$$g_{1R} = g_{2R} \quad (x \rightarrow e^{2\pi i}x) \quad (C.10)$$

## Apéndice D

# Parámetros de Baja Energía para los Potenciales Fenomenológicos Nijmegen II y Reid 93

Como se ha visto en el capítulo (8), el método de fase variable está íntimamente relacionado con la renormalización de potenciales de largas distancias mediante condiciones de contorno. Sin embargo la idea original de la ecuación de fase variable es utilizarla para calcular los defasajes de un potencial usual en mecánica cuántica. Es decir, en el caso de onda  $s$  se integra la ecuación diferencial

$$\frac{d\delta(k, R)}{dR} = -\frac{1}{k} U(R) \sin(kR + \delta(k, R))^2 \quad (\text{D.1})$$

desde  $r = 0$  hasta infinito con las condiciones iniciales  $\delta(k, 0) = 0$ . Por otra parte si se tiene en cuenta la expansión del defasaje en potencias de momento en la ecuación de fase variable, se obtienen ecuaciones análogas a eq. (D.1) para la longitud de dispersión  $\alpha_0$ , el rango efectivo  $r_0$  y el parámetro de curvatura  $v_2$ , que para onda  $s$  se escriben

$$\frac{d\alpha_0}{dR} = U(R) (\alpha_0 - R)^2 \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{dr_0}{dR} = 2U(R)R^2 \left(1 - \frac{R}{\alpha_0}\right) \left(\frac{r_0}{R} + \frac{R}{3\alpha_0} - 1\right) \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{dv_2}{dR} = R^4 U(R) \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{r_0}{R} + \frac{R}{3\alpha_0} - 1\right)^2 + 2 \left(1 - \frac{R}{\alpha_0}\right) \left(-\frac{1}{12} \frac{r_0}{R} + \frac{v_2}{R^3} - \frac{1}{120} \frac{R}{\alpha_0} + \frac{1}{24}\right) \right\} \quad (\text{D.4})$$

Para los parámetros de curvatura  $v_3$  y  $v_4$  hay ecuaciones similares pero no se muestran por su tamaño. Estas ecuaciones se resuelven integrando desde  $r = 0$  hasta infinito con las condiciones iniciales  $\alpha_0(0) = 0$ ,  $r_0(0) = 0$ ,  $v_2(0) = 0$ , etc, estando el resultado físico dado por  $\alpha_0(\infty) = \alpha_0$ ,  $r_0(\infty) = r_0$ ,  $v_2(\infty) = v_2$ , etc. En este apéndice se calculan dichos parámetros en todas las ondas parciales neutrón-próton con  $j \leq 5$  para los potenciales fenomenológicos Nijmegen II y Reid 93. La utilidad de calcularlos está en que sólo hay valores experimentales para  $\alpha_0$  y  $r_0$  en los canales  $^1S_0$  y  $^3S_1$ . A lo largo de este trabajo nos hemos encontrado con que para renormalizar los potenciales efectivos de largo alcance es necesario proporcionar unos parámetros de entrada, normalmente longitudes de dispersión u otros parámetros de baja energía. A falta de datos experimentales la mejor opción en vez de ajustarlos es obtener estos parámetros a partir de potenciales fenomenológicos, ya que se supone que son capaces de ajustar correctamente los análisis de ondas parciales de los datos de dispersión NN, ref. [54], por lo que podemos considerar los resultados de estos potenciales como compatibles con los hipotéticos datos experimentales.

Cuando se consideran los canales acoplados de la interacción NN hay que tener en cuenta que para cada canal hay tres longitudes de dispersión, rangos efectivos, etc, por lo que las ecuaciones análogas a (D.2,D.3,D.4) son matriciales. Estos parámetros de baja energía se obtienen a partir de la expansión a momento pequeño de la matriz  $\hat{\mathbf{M}}$ , que es el equivalente en canales acoplados de  $k \cot \delta$ . Es decir, mientras que para onda s se tiene

$$\hat{\mathbf{M}} = k \cot \delta = -\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{2} r_0 k^2 + v_2 k^4 + v_3 k^6 + \dots \quad (\text{D.5})$$

para un canal acoplado genérico se tendrá

$$\hat{\mathbf{M}} = -\mathbf{a}^{-1} + \frac{1}{2} \mathbf{r} k^2 + \mathbf{v}_2 k^4 + \mathbf{v}_3 k^6 + \dots \quad (\text{D.6})$$

en donde  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{r}$ , etc, son las matrices de longitud de dispersión, rango efectivo, etc. La fórmula anterior es por tanto una generalización de la expansión de rango efectivo para los canales acoplados en la interacción nucleón-nucleón. En el caso de que se considere para los defasajes la parametrización de Blatt-Biedenharn, la matriz  $\hat{\mathbf{M}}$  puede expresarse como

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} k [\cos^2 \epsilon_j \cot \delta_{1j}^{1j} + \sin^2 \epsilon_j \cot \delta_{2j}^{1j}] & k^3 \cos \epsilon_j \sin \epsilon_j [\cot \delta_{2j}^{1j} - \cot \delta_{1j}^{1j}] \\ k^3 \cos \epsilon_j \sin \epsilon_j [\cot \delta_{2j}^{1j} - \cot \delta_{1j}^{1j}] & k^5 [\sin^2 \epsilon_j \cot \delta_{1j}^{1j} + \cos^2 \epsilon_j \cot \delta_{2j}^{1j}] \end{pmatrix} \quad (\text{D.7})$$

Una exposición completa de estas ecuaciones y de su derivación se presenta en la referencia [86]. Por sencillez y como ejemplo aquí se mostrará únicamente la ecuación correspondiente a la longitud de dispersión que se escribe genéricamente como

$$\frac{d}{dR} [\mathbf{a}(R)]^{-1} = -([\mathbf{a}(R)]^{-1} \mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0) \mathbf{U}(R) (\mathbf{A}_0 [\mathbf{a}(R)]^{-1} + \mathbf{B}_0) \quad (\text{D.8})$$

en donde  $\mathbf{a}$  es la matriz de longitudes de dispersión y  $\mathbf{U}$  el potencial reducido en forma matricial

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} & e_j \\ e_j & \alpha_{2j} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{U}(R) = \begin{pmatrix} U_{j-1,j-1}^{1j}(R) & U_{j-1,j+1}^{1j}(R) \\ U_{j-1,j+1}^{1j}(R) & U_{j+1,j+1}^{1j}(R) \end{pmatrix} \quad (\text{D.9})$$

$\mathbf{A}_0$  y  $\mathbf{B}_0$  son matrices diagonales relacionadas con la expansión de las funciones de Bessel esféricas a cortas distancias, que para un canal acoplado con momento angular total  $j$  se escriben

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \frac{R^j}{(2j-1)!!} & 0 \\ 0 & \frac{R^{j+2}}{(2j+3)!!} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_0 = - \begin{pmatrix} \frac{(2j-3)!!}{R^{j-1}} & 0 \\ 0 & \frac{(2j+1)!!}{R^{j+1}} \end{pmatrix} \quad (\text{D.10})$$

En el caso de que el potencial matricial  $\mathbf{U}$  sea diagonal se obtienen dos ecuaciones independientes para la evolución de las longitudes de dispersión  $\alpha_{1j}$  y  $\alpha_{2j}$ . Las ecuaciones se integran con las condición de contorno en el origen  $\mathbf{a}(0) = 0$ , correspondiendo los valores físicos con el valor en infinito,  $\mathbf{a}(\infty) = \mathbf{a}$ . Lo mismo se hace para integrar el resto de los parámetros de dispersión de bajas energías.

En la tabla (D.1) se muestra el resultado de calcular los parámetros de dispersión de baja energía para los potenciales fenomenológicos Nijmegen II y Reid 93. Se presentan todos los dígitos significativos hasta el límite de precisión numérica de cada caso, y en los casos en los que el parámetro de baja energía no ha podido estimarse con precisión numérica suficiente se ha indicado con (—). A partir de esta tabla puede calcularse la expansión de rango efectivo para obtener una estimación de baja energía de la matriz  $\hat{M}$

$$\hat{M}_{l,l'} = -(\mathbf{a}^{-1})_{l,l'} + \frac{1}{2}(\mathbf{r})_{l,l'}k^2 + (\mathbf{v}_2)_{l,l'}k^4 + (\mathbf{v}_3)_{l,l'}k^6 + (\mathbf{v}_4)_{l,l'}k^8 + \dots \quad (\text{D.11})$$

En las figuras (D.1,D.2, D.3,D.4,D.5, D.6) se presenta la expansión de rango efectivo hasta orden  $k^4$  que se obtiene con esta fórmula para todas las ondas parciales con  $j \leq 5$ , y se la compara con la matriz  $\hat{M}$  completa que se obtiene al calcularla en su correspondiente ecuación de fase variable con el potencial Nijmegen II. Como puede observarse la convergencia de la serie  $k^0 \rightarrow k^2 \rightarrow k^4$  es muy rápida en las ondas parciales bajas mientras que en las altas son necesarios más términos de la expansión de rango efectivo.

Onda	$\alpha(\text{fm}^{l+l'+1})$	$r_0(\text{fm}^{l+l'+1})$	$v_2(\text{fm}^{l+l'+3})$	$v_3(\text{fm}^{l+l'+5})$	$v_4(\text{fm}^{l+l'+7})$
	Nijm(Reid)	Nijm(Reid)	Nijm(Reid)	Nijm(Reid)	Nijm(Reid)
$^1S_0$	-23.727(-23.735)	2.670(2.753)	-0.4759(-0.4942)	3.962(3.652)	-19.88(-18.30)
$^3P_0$	-2.468(-2.469)	3.914(3.870)	1.099(0.9616)	3.816(3.712)	-7.6(-7.4)
$^1P_1$	2.797(2.736)	-6.399(-6.606)	-1.580(-1.834)	0.404(1.024)	7.8(8.4)
$^3P_1$	1.529(1.530)	-8.580(-8.556)	-0.0181(+0.01006)	-0.86(-0.934)	0.3(0.2)
$^3S_1$	5.418(5.422)	1.833(1.833)	-0.131(-0.141)	1.444(1.433)	-7.95(-7.9)
$^3D_1$	6.505(6.453)	-3.523(-3.566)	-3.699(-3.803)	1.12(1.023)	-3(-2.6)
$E_1$	1.647(1.645)	0.404(0.413)	-0.274(-0.264)	1.447(1.423)	-7.3(-7.3)
$^1D_2$	-1.389(-1.377)	14.87(15.04)	16.37(16.73)	-13.2(-13.0)	34.0(34.0)
$^3D_2$	-7.405(-7.411)	2.858(2.851)	2.395(2.370)	-0.99(-1.00)	2.0(2.0)
$^3P_2$	-0.2844(-0.2892)	-8.270(-8.363)	-6.91(-7.13)	-6.0(-6.3)	-20(-30)
$^3F_2$	-0.9763(-0.9698)	-5.640(-5.821)	-22.96(-23.78)	-79.32(-83.0)	-117(-127)
$E_2$	1.609(1.600)	-15.70(-15.89)	-25.18(-25.72)	-23.3(-24.8)	-67(-70)
$^1F_3$	8.383(8.365)	-3.924(-3.936)	-9.888(-9.937)	-15.4(-15.6)	-4(-4)
$^3F_3$	2.703(2.686)	-9.932(-9.994)	-20.56 (-20.73)	-19(-19.4)	-20(-20)
$^3D_3$	-0.1449(-0.1770)	1.369(1.365)	2.06(2.040)	2(2)	—(—)
$^3G_3$	4.880(4.874)	-0.03306(-0.0529)	-0.0166(-0.1261)	-0.117(-0.662)	-3.1(-4.1)
$E_3$	-9.695(-9.683)	3.255(3.249)	7.655(7.618)	9.5(9.3)	—(—)
$^1G_4$	-3.229(-3.210)	10.78(10.82)	34.4(34.50)	80(84)	—(—)
$^3G_4$	-19.17(-19.14)	2.056(2.059)	6.810 (6.822)	16.6(16.7)	10(14)
$^3F_4$	-0.01045(-0.01053)	-3.02(-3.04)	-8.0(-8.0)	-10(—)	—(—)
$^3H_4$	-1.250(-1.240)	-0.1762(-0.178)	-1.52(-1.527)	-11(-11)	-35(-40)
$E_4$	3.609(3.586)	-9.489(-9.539)	-29.60(-29.72)	-68(-69)	-80(-70)
$^1H_5$	28.61(28.57)	-1.724(-1.727)	-7.925(-7.92)	-32(-32.5)	-60(-60)
$^3H_5$	6.128(6.082)	-6.41(-6.45)	-24.9(-25.1)	-87(-86)	—(—)
$^3G_5$	-0.0090(-0.010)	0.48(0.481)	1.9 (1.874)	6(6)	—(—)
$^3I_5$	10.68(10.66)	0.0108(0.0107)	0,145(0,143) $10^{-5}$	1.43(1.4)	6.4(6)
$E_5$	-31.34(-31.29)	1.554(1.553)	6.99 (7.018)	28(28)	50(50)

Cuadro D.1: Parámetros de baja energía para todas las ondas parciales con momento angular  $j \leq 5$  en el caso de dispersión neutrón-protón para los potenciales fenomenológicos Nijmegen II y Reid 93. Se muestran la longitud de dispersión  $\alpha$ , el rango efectivo  $r$  y los parámetros de curvatura  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_4$ . Las unidades están en las potencias correspondientes de fm, con  $l'$ ,  $l = j, j \pm 1$  el momento angular orbital de la onda parcial considerada. A partir de estos parámetros puede calcularse la matriz  $M$  a bajas energías usando la fórmula  $\hat{M}_{l,l'} = -(\mathbf{a}^{-1})_{l,l'} + \frac{1}{2}(\mathbf{r})_{l,l'}k^2 + (\mathbf{v}_2)_{l,l'}k^4 + (\mathbf{v}_3)_{l,l'}k^6 + (\mathbf{v}_4)_{l,l'}k^8 + \dots$ . Todos los dígitos presentados son significativos y se usa (—) para indicar que no pudo realizarse una estimación fiable de dicho parámetro debido a errores numéricos.

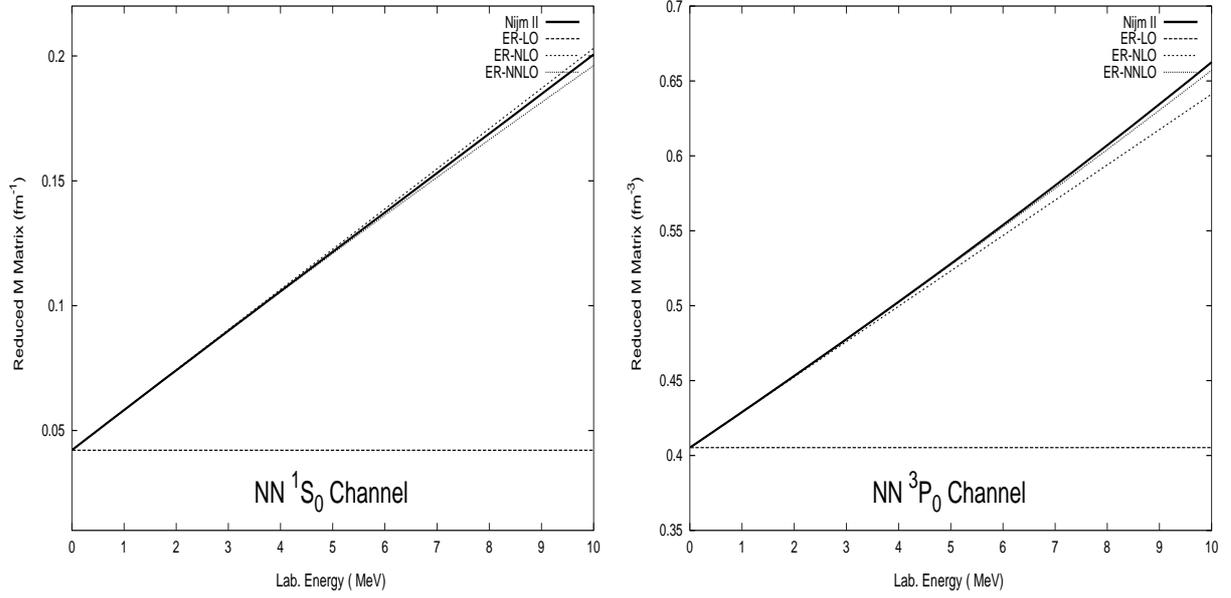


Figura D.1: La matriz  $\hat{M}$  para el potencial de Nijmegen II y comparada con la expansión de rango efectivo para dicha matriz para las ondas con momento angular  $j = 0$  en dispersión neutrón-protón. La expansión de rango efectivo para  $\hat{M}$  se construye mediante la ecuación (D.11); LO significa que se incluyen términos hasta orden  $k^0$ , NLO hasta orden  $k^2$  y NNLO hasta  $k^4$ . La matriz  $\hat{M}$  exacta se calcula mediante la ecuación de fase variable para el potencial Nijmegen II.

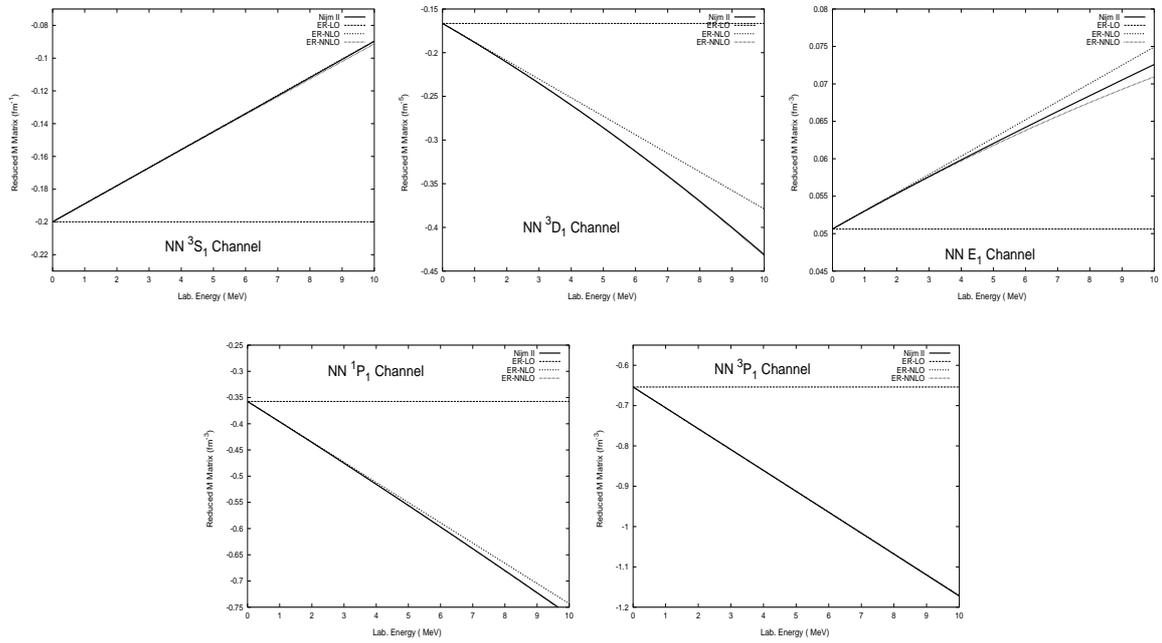


Figura D.2: Ídem Fig. D.1 con  $j = 1$ .

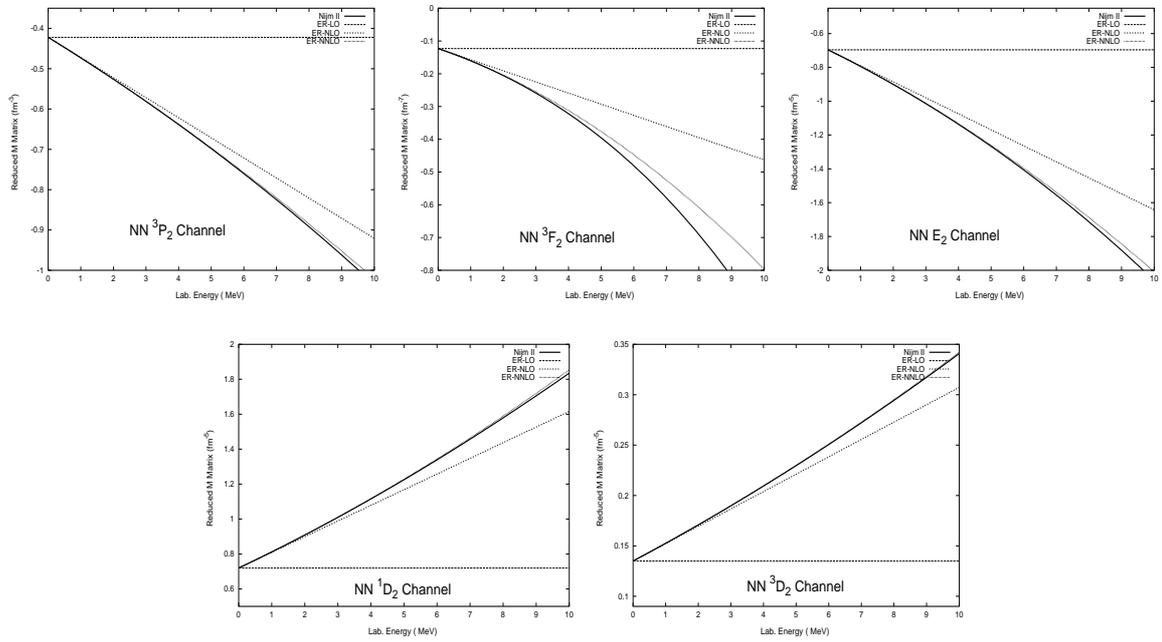


Figura D.3: Ídem Fig. D.1 con  $j = 2$ .



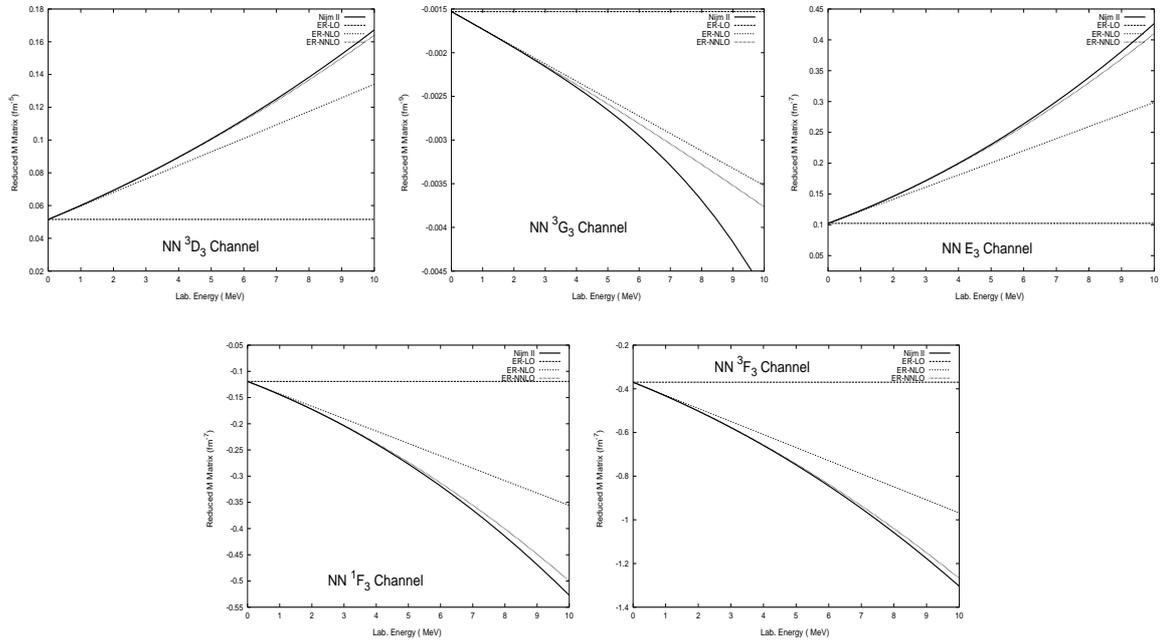


Figura D.4: Ídem Fig. D.1 con  $j = 3$ .

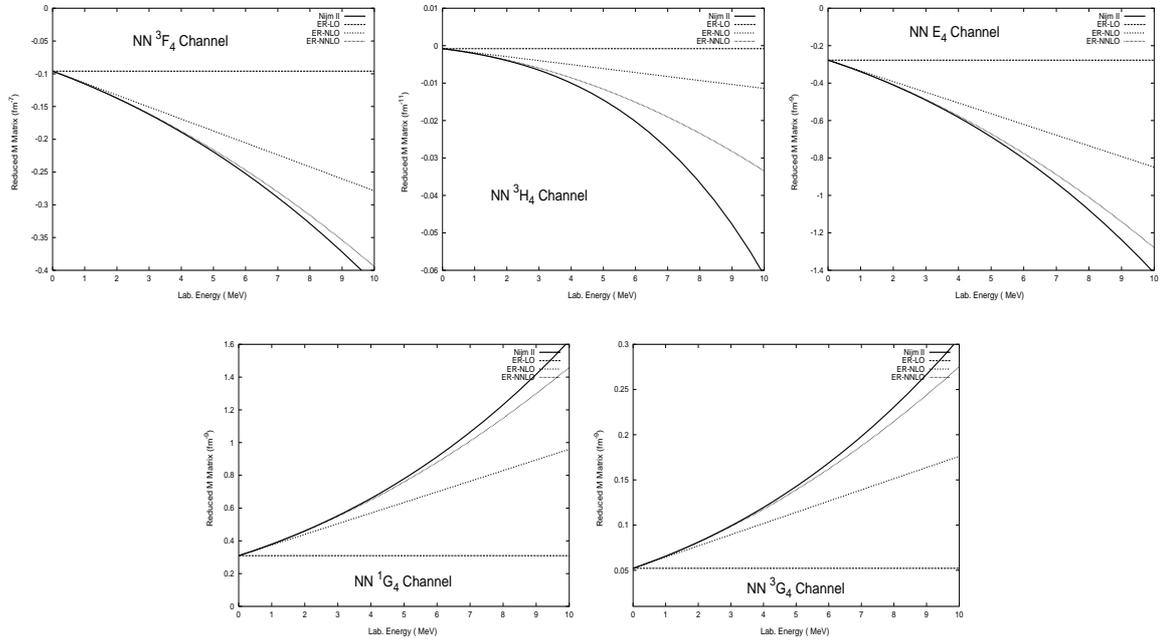


Figura D.5: Ídem Fig. D.1 con  $j = 4$ .

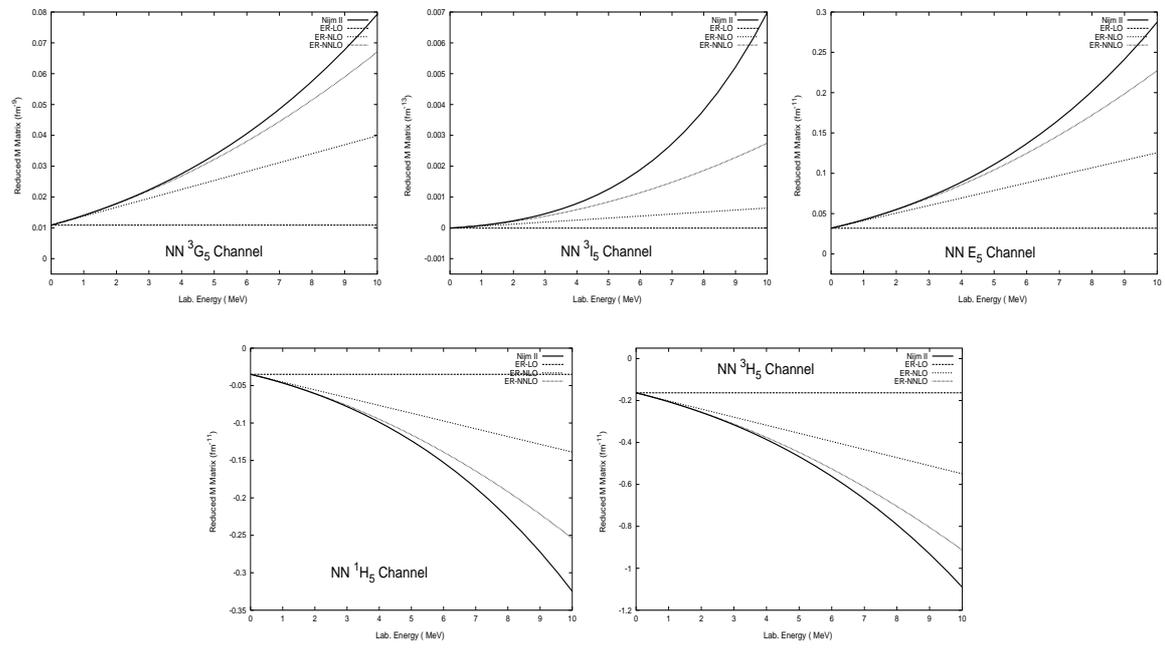


Figura D.6: Ídem Fig. D.1 con  $j = 5$ .

# Bibliografía

- [1] H. Yukawa. *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, 17:48, 1935.
- [2] Taketani M., Nakamura S., and Sasaki M. *Prog. Theor. Phys.*, 6:581, 1951.
- [3] H.A. Bethe. *Phys. Rev.*, 76:38, 1949.
- [4] H.A. Bethe and C. Longmire. *Phys. Rev.*, 77:647, 1950.
- [5] A.C. Phillips. *Nucl. Phys.*, A107:209, 1968.
- [6] Paulo F. Bedaque, H. W. Hammer, and U. van Kolck. Effective theory of the triton. *Nucl. Phys.*, A676:357–370, 2000.
- [7] F. Coester, Cohen S., Day B.D., and Vincent C.M. *Phys. Rev.*, C1:769, 1970.
- [8] Steven Weinberg. Phenomenological lagrangians. *Physica*, A96:327, 1979.
- [9] J. Gasser and H. Leutwyler. On the low-energy structure of qcd. *Phys. Lett.*, B125:321, 1983.
- [10] H. Leutwyler. Chiral effective lagrangians. Lectures given at 30th Int. Universitätswochen für Kernphysik, Schladming, Austria, Feb 27 - Mar 8, 1991 and at Advanced Theoretical Study Inst. in Elementary Particle Physics, Boulder, CO, Jun 2-28, 1991.
- [11] Steven Weinberg. Nuclear forces from chiral lagrangians. *Phys. Lett.*, B251:288–292, 1990.
- [12] Steven Weinberg. Effective chiral lagrangians for nucleon - pion interactions and nuclear forces. *Nucl. Phys.*, B363:3–18, 1991.
- [13] Ubirajara Lourencao Van Kolck. Soft physics: Applications of effective chiral lagrangians to nuclear physics and quark models. UMI-94-01021.

- [14] C. Ordonez, L. Ray, and U. van Kolck. The two-nucleon potential from chiral lagrangians. *Phys. Rev.*, C53:2086–2105, 1996.
- [15] J. L. Goity, D. Lehmann, G. Prezeau, and J. Saez. Regularization for effective field theory with two heavy particles. *Phys. Lett.*, B504:21–27, 2001.
- [16] Dirk Lehmann and Gary Prezeau. Effective field theory dimensional regularization. *Phys. Rev.*, D65:016001, 2002.
- [17] Matthias R. Schindler, Jambul Gegelia, and Stefan Scherer. Infrared regularization of baryon chiral perturbation theory reformulated. *Phys. Lett.*, B586:258–266, 2004.
- [18] Matthias R. Schindler, Jambul Gegelia, and Stefan Scherer. Infrared and extended on-mass-shell renormalization of two-loop diagrams. *Nucl. Phys.*, B682:367–376, 2004.
- [19] T. A. Rijken and V. G. J. Stoks. Soft two-meson-exchange nucleon nucleon potentials. i: Planar and crossed-box diagrams. *Phys. Rev.*, C54:2851–2868, 1996.
- [20] Norbert Kaiser, R. Brockmann, and W. Weise. Peripheral nucleon nucleon phase shifts and chiral symmetry. *Nucl. Phys.*, A625:758–788, 1997.
- [21] Norbert Kaiser, S. Gerstendorfer, and W. Weise. Peripheral n n scattering: Role of delta excitation, correlated two-pion and vector meson exchange. *Nucl. Phys.*, A637:395–420, 1998.
- [22] E. Epelbaum, Walter Gloeckle, and Ulf-G. Meissner. Nuclear forces from chiral lagrangians using the method of unitary transformation. i: Formalism. *Nucl. Phys.*, A637:107–134, 1998.
- [23] E. Epelbaum, Walter Gloeckle, and Ulf-G. Meissner. Nuclear forces from chiral lagrangians using the method of unitary transformation. ii: The two-nucleon system. *Nucl. Phys.*, A671:295–331, 2000.
- [24] M. C. M. Rentmeester, R. G. E. Timmermans, J. L. Friar, and J. J. de Swart. Chiral two-pion exchange and proton proton partial-wave analysis. *Phys. Rev. Lett.*, 82:4992–4995, 1999.
- [25] J. L. Friar. Equivalence of nonstatic two-pion-exchange nucleon nucleon potentials. *Phys. Rev.*, C60:034002, 1999.
- [26] Keith George Richardson. Chiral symmetry and the nucleon nucleon interaction. 1999.
- [27] Norbert Kaiser. Chiral 3pi exchange n n potentials: Results for representation-invariant classes of diagrams. *Phys. Rev.*, C61:014003, 2000.

- [28] Norbert Kaiser. Chiral 3pi exchange n n potentials: Results for diagrams proportional to  $g(a)^{**4}$  and  $g(a)^{**6}$ . *Phys. Rev.*, C62:024001, 2000.
- [29] Norbert Kaiser. Chiral 2pi-exchange n n potentials: Relativistic  $1/m^{**2}$ - corrections. *Phys. Rev.*, C65:017001, 2002.
- [30] Norbert Kaiser. Chiral 2pi exchange n n potentials: Two-loop contributions. *Phys. Rev.*, C64:057001, 2001.
- [31] Norbert Kaiser. Chiral 3pi-exchange n n potentials: Results for dominant next-to-leading order contributions. *Phys. Rev.*, C63:044010, 2001.
- [32] D. R. Entem and R. Machleidt. Accurate nucleon nucleon potential based upon chiral perturbation theory. *Phys. Lett.*, B524:93–98, 2002.
- [33] D. R. Entem and R. Machleidt. Chiral 2pi exchange at order four and peripheral n n scattering. *Phys. Rev.*, C66:014002, 2002.
- [34] M. C. M. Rentmeester, R. G. E. Timmermans, and J. J. de Swart. Determination of the chiral coupling constants  $c(3)$  and  $c(4)$  in new p p and n p partial-wave analyses. *Phys. Rev.*, C67:044001, 2003.
- [35] Evgeny Epelbaum, Walter Gloeckle, and Ulf-G. Meissner. Improving the convergence of the chiral expansion for nuclear forces. i: Peripheral phases. *Eur. Phys. J.*, A19:125–137, 2004.
- [36] E. Epelbaum, Walter Gloeckle, and Ulf-G. Meissner. Improving the convergence of the chiral expansion for nuclear forces. ii: Low phases and the deuteron. *Eur. Phys. J.*, A19:401–412, 2004.
- [37] D. R. Entem and R. Machleidt. Comment on 'determination of the chiral coupling constants  $c(3)$  and  $c(4)$  in new p p and n p partial-wave analyses'. 2003.
- [38] R. Higa and M. R. Robilotta. Two-pion exchange nucleon nucleon potential: Relativistic chiral expansion. *Phys. Rev.*, C68:024004, 2003.
- [39] Renato Higa, Manoel R. Robilotta, and Carlos A. da Rocha. Relativistic  $o(q^4)$  two-pion exchange nucleon-nucleon potential: configuration space. *Phys. Rev.*, C69:034009, 2004.
- [40] Renato Higa. Low-energy constants and relativity in peripheral nucleon- nucleon scattering. 2004.
- [41] D. R. Entem and R. Machleidt. Accurate charge-dependent nucleon-nucleon potential at fourth order of chiral perturbation theory. *Phys. Rev.*, C68:041001, 2003.

- [42] E. Epelbaum, W. Glockle, and Ulf-G. Meissner. The two-nucleon system at next-to-next-to-next-to-leading order, 2005.
- [43] A.Ñogga, R. G. E. Timmermans, and U. van Kolck. Renormalization of one-pion exchange and power counting. *Phys. Rev.*, C72:054006, 2005.
- [44] David B. Kaplan, Martin J. Savage, and Mark B. Wise. Nucleon-nucleon scattering from effective field theory. *Nucl. Phys.*, B478:629–659, 1996.
- [45] David B. Kaplan, Martin J. Savage, and Mark B. Wise. A new expansion for nucleon nucleon interactions. *Phys. Lett.*, B424:390–396, 1998.
- [46] Sean Fleming, Thomas Mehen, and Iain W. Stewart. Nnlo corrections to nucleon nucleon scattering and perturbative pions. *Nucl. Phys.*, A677:313–366, 2000.
- [47] S. R. Beane, Paulo F. Bedaque, M. J. Savage, and U. van Kolck. Towards a perturbative theory of nuclear forces. *Nucl. Phys.*, A700:377–402, 2002.
- [48] K. G. Wilson and John B. Kogut. The renormalization group and the epsilon expansion. *Phys. Rept.*, 12:75–200, 1974.
- [49] Michael C. Birse, Judith A. McGovern, and Keith G. Richardson. A renormalization-group treatment of two-body scattering. *Phys. Lett.*, B464:169–176, 1999.
- [50] M. Pavon Valderrama and E. Ruiz Arriola. Renormalization of n n interaction with chiral two pion exchange potential: Central phases and the deuteron. 2005.
- [51] M. Pavon Valderrama and E. Ruiz Arriola. Renormalization of the deuteron with one pion exchange. *Phys. Rev.*, C72:054002, 2005.
- [52] M. Pavon Valderrama and E. Ruiz Arriola. Renormalization of n n interaction with chiral two pion exchange potential: Non-central phases. 2005.
- [53] V. G. J. Stoks, R. A. M. Klomp, C. P. F. Terheggen, and J. J. de Swart. Construction of high quality n n potential models. *Phys. Rev.*, C49:2950–2962, 1994.
- [54] V. G. J. Stoks, R. A. M. Kompl, M. C. M. Rentmeester, and J. J. de Swart. Partial wave analysis of all nucleon-nucleon scattering data below 350-mev. *Phys. Rev.*, C48:792–815, 1993.
- [55] V.V. Flambaum, G.F. Gribakin, and D. Harabati. *Phys. Rev.*, A59:1998, 1999.
- [56] Paul Buettiker and Ulf-G. Meissner. Pion nucleon scattering inside the mandelstam triangle. *Nucl. Phys.*, A668:97–112, 2000.

- [57] M. Pavon Valderrama and E. Ruiz Arriola. Renormalization of singlet  $n\ n$  scattering with one pion exchange and boundary conditions. *Phys. Lett.*, B580:149–156, 2004.
- [58] N.K. Glendenning and G. Kramer. *Phys. Rev.*, 126:2159, 1962.
- [59] S. Klarsfeld, J. Martorell, and Sprung D.W.L. Ope constraints on the deuteron wave function. *Nucl. Phys.*, A352:113, 1980.
- [60] S. Klarsfeld, J. Martorell, and D. W. L. Sprung. Deuteron properties and the nucleon nucleon interaction. *J. Phys.*, G10:165–179, 1984.
- [61] Torleif E. O. Ericson and M. Rosa-Clot. A model independent description of the deuteron asymptotic  $d$  state. *Phys. Lett.*, B110:193, 1982.
- [62] Torleif E. O. Ericson and M. Rosa-Clot. The deuteron asymptotic  $d$  state as a probe of the nucleon- nucleon force. *Nucl. Phys.*, A405:497, 1983.
- [63] T.E.O. Ericson and M. Rosa-Clot.  $D$ -state admixture and tensor forces in light nuclei. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 35:271, 1985.
- [64] J.L. Friar, Gibson B.F., and Payne G.L. One pion exchange potential deuteron. *Phys. Rev.*, C30:1084, 1984.
- [65] J. L. Ballot, A. M. Eiro, and M. R. Robilotta. Pions in the deuteron. *Phys. Rev.*, C40:1459–1467, 1989.
- [66] J. L. Ballot and M. R. Robilotta. Pionic values for deuteron observables. *Phys. Rev.*, C45:986–989, 1992.
- [67] Sprung D.W.L., van Dijk E., Wang E., Zheng D.C., Sarriguren P., and J. Martorell. Deuteron properties using a truncated one-pion exchange potential. *Phys. Rev.*, C49:2942, 1994.
- [68] J. J. de Swart, M. C. M. Rentmeester, and R. G. E. Timmermans. The status of the pion nucleon coupling constant. *PiN Newslett.*, 13:96–107, 1997.
- [69] Torleif E. O. Ericson, B. Loiseau, and Anthony W. Thomas. Determination of the pion nucleon coupling constant and scattering lengths. *Phys. Rev.*, C66:014005, 2002.
- [70] Ronald A. Gilman and Franz Gross. Electromagnetic structure of the deuteron. *J. Phys.*, G28:R37–R116, 2002.
- [71] Evgeny Epelbaum, Ulf-G. Meissner, and Walter Gloeckle. Nuclear forces in the chiral limit. *Nucl. Phys.*, A714:535–574, 2003.

- [72] Silas R. Beane and Martin J. Savage. Variation of fundamental couplings and nuclear forces. *Nucl. Phys.*, A713:148–164, 2003.
- [73] R. Machleidt. Comunicación privada.
- [74] J.Ñieves and E. Ruiz Arriola. Error estimates for pi pi scattering threshold parameters in chiral perturbation theory to two loops. *Eur. Phys. J.*, A8:377–384, 2000.
- [75] G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler. The pi pi s-wave scattering lengths. *Phys. Lett.*, B488:261–268, 2000.
- [76] G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler. pi pi scattering. *Nucl. Phys.*, B603:125–179, 2001.
- [77] J.M. Blatt and Biedenharn L.C. *Phys. Rev.*, 86:399, 1952.
- [78] J.M. Blatt and Biedenharn L.C. *Rev. Mod. Phys.*, 24:258, 1952.
- [79] H.P. Stapp, Ypsilantis T.J., and Metropolis N. *Phys. Rev.*, 105:302, 1957.
- [80] Thomas D. Cohen and James M. Hansen. Systematic power counting in cutoff effective field theories for nucleon nucleon interactions and the equivalence with pds. *Phys. Lett.*, B440:233–238, 1998.
- [81] David B. Kaplan, Martin J. Savage, and Mark B. Wise. A perturbative calculation of the electromagnetic form factors of the deuteron. *Phys. Rev.*, C59:617–629, 1999.
- [82] A. Calle Cordon, Pavon Valderrama M., and Ruiz Arriola E. En preparación.
- [83] F. Calogero. Variable phase approach to potential scattering. Academic Press, New York (1967).
- [84] James V. Steele and R. J. Furnstahl. Removing pions from two-nucleon effective field theory. *Nucl. Phys.*, A645:439–461, 1999.
- [85] S. R. Beane et al. Singular potentials and limit cycles. *Phys. Rev.*, A64:042103, 2001.
- [86] M. Pavon Valderrama and E. Ruiz Arriola. Determination of low energy parameters for nn-scattering at  $n^4l_0$  in all partial waves with  $j \leq 5$ . 2004.