TALLER: LÍMITE EN EL ESTUDIO DEL MOVIMIENTO

José Antonio Fernández-Plaza, Luis Rico y Juan Francisco Ruiz-Hidalgo
Universidad de Granada

INTRODUCCIÓN

En este taller vamos a explorar los modos en que el movimiento puede interpretarse según cuáles sean los diversos conjuntos numéricos que modelen las magnitudes físicas espacio y tiempo. Tomamos en consideración tres tipos esenciales de modelos: El discreto (Números decimales con un número acotado de cifras decimales significativas, incluyendo los números naturales), el denso (números racionales, del cual destaca el subconjunto denso de los números decimales exactos) y el continuo (Números reales). Cada uno de estos modelos provee al movimiento resultante de unas propiedades deducidas de manera lógica y que pueden, o no, contradecir la observación empírica del fenómeno real.

OBJETIVOS DEL TALLER

Este taller tiene dos objetivos:

1) Analizar la interpretación del movimiento en términos de modelos discretos, densos y continuos, deduciendo las propiedades más relevantes.
2) Desde las paradojas de Zenón, explorar las contradicciones que surgen de discretizar un proceso continuo, cuando en matemáticas, tal continuo se recupera mediante un paso al límite de las discretizaciones.

CONJUNTOS NUMÉRICOS PARA MODELAR LAS MAGNITUDES ESPACIO Y TIEMPO

En los siguientes apartados describimos los modelos numéricos en los tres casos mencionados

Modelo discreto

Consideremos aquellos números decimales con un número máximo de n cifras decimales, que vamos a denotar como D_n.
D_0 es igual al conjunto de los números naturales. Las propiedades del conjunto D_n son las siguientes:

- En la notación decimal, es cerrado para la adición y el 0 tiene siguiente que es $10^{-n}=1/10^n$.
- Cada elemento no nulo tiene un siguiente, luego este conjunto no es denso, pues entre un elemento y su siguiente no hay ningún otro.
- En cada intervalo natural [k, k+1[, D_n tiene 10^n términos.
- D_n es unión numerable de conjuntos finitos; por tanto es un conjunto infinito numerable.
- La clase de los D_n para n natural, es ordenada mediante inclusión. Estos conjuntos forman una cadena creciente mediante inclusión, es decir, $D_n \subset D_{n+1}$ para todo n.

Todos los instrumentos de medida estandarizados tienen una estructura D_n para cierto valor n. Por ejemplo, Por ejemplo, la regla graduada escolar (D_3) báscula de cocina, un cronómetro (D_2), una calculadora, etc.

Modelo denso

Existen dos conjuntos numéricos numerables con la propiedad de densidad que describimos a continuación:

Números decimales

Denotamos por D el conjunto de las expresiones decimales finitas irreducibles, que serán únicas para cada elemento. Incluye a los conjuntos D_n, esto es, $D_n \subset D$ para cualquier valor de n; además si $x \in D$ entonces, como x ha de tener un número finito (n) de cifras decimales, $\exists$n tal que $x \in D_n$. Por tanto $D = \cup_n D_n$, es una ampliación del modelo discreto.

Cualquier segmento (intervalo) con extremos en D es conmensurable respecto del segmento unidad, con razón irreducible de la forma p/q cumpliendo que $q=2^a5^b$ con a, b naturales. Además tiene otras propiedades:

- D es la unión numerable de conjuntos infinito numerable, por tanto es infinito numerable
- Es cerrado para adición y para la multiplicación, algebraicamente es un anillo de integridad y toda ecuación de la forma $10^nx=a$, con a natural y n natural tiene solución en D. Según Socas (2002), las soluciones de estas ecuaciones son los únicos números que merecen el calificativo de ser decimales, aunque nosotros restamos importancia a este convenio.
- Entre cualesquiera dos elementos de D existe un tercero del mismo conjunto, por ejemplo, la media aritmética de ambos; en particular, no existe siguiente de 0. D es denso en el conjunto de los racionales y en el conjunto de los reales.
- En su consideración como medidas de una magnitud, a todo segmento cuyos extremos sean puntos de D, se puede dividir en razón como máximo igual al mínimo de los órdenes decimales de los extremos. Por ejemplo, el segmento [10^{-4}, 10^{-3}], admite divisiones en razón 10^{-4} como máximo. Los

únicos operadores para los cuales es cerrado D es para la división por 2 y por 5 y sus composiciones.

Se pueden construir instrumentos de medida estandarizados, basados en el sistema métrico decimal, cuya precisión sea tan pequeña como se desee, si bien, no cero, de ahí que se agrupen todas esas medidas en D.

Números racionales (Periódicos y periódicos mixtos)

Para dar sentido a una notación decimal infinita se necesita realizar un proceso de paso al límite de las expresiones decimales finitas. Si la notación decimal es periódica pura o mixta, entonces el objeto límite es un número racional. Una notación decimal infinita expresa tanto la sucesión de sumas parciales, como el límite o suma de dicha serie. Es decir, la igualdad 0'9999... = 1, expresa la sucesión de sumas parciales 0'9+ 0'09 + 0'009 +... y el límite 1.

Los números racionales podemos considerarlos como el conjunto de aquellos números que tienen notación decimal finita junto aquellos otros números que tienen las notaciones decimales infinitas periódicas teniendo en cuenta las peculiaridades del paso al límite. Entre sus propiedades destacamos las siguientes:

- ♦ Respecto de la adición y la multiplicación tiene estructura de cuerpo.
- ♦ Es denso en sí mismo y en los números reales. Además contiene a los números decimales como subconjunto denso.
- ♦ Todo número racional, excepto 0, además de la notación fraccionaria, admite una notación decimal infinita periódica, en particular, todo número racional es límite de una sucesión de números decimales finitos.
- ♦ No es cerrado algebraicamente; existen raíces de polinomios con coeficientes racionales que no son racionales. Tampoco es cerrado para el límite, ya que las expresiones decimales infinitas no periódicas no dan lugar a números racionales.

Modelo Continuo

Para construir el modelo continuo asociado al conjunto de los números reales, seguiremos a Russell (1973), que a partir de la noción de cortadura de Dedekind, define un número real como la sección inferior de una cortadura de Q que no tenga máximo, denominada segmento. Algunos de esos segmentos representarán a elementos de Q, y otros representarán a los irracionales.

Un número real se dirá racional si el segmento tiene frontera racional. Un número real se dirá irracional si el segmento no tiene frontera.

Las operaciones de adición y multiplicación de números reales serán operaciones entre segmentos definidas de la manera natural. Respecto de estas operaciones los números reales tienen estructura de cuerpo y además son un conjunto denso.

El conjunto de números reales tiene continuidad en el sentido de Dedekind, es decir, toda familia de segmentos tiene frontera que es el segmento unión de todos los segmentos de la familia. Cumple el axioma del supremo, de que todo subconjunto acotado de números reales tiene supremo, luego toda notación decimal infinita expresa un único número real. Todo punto de la recta geométrica corresponde biyectivamente con un número real.

Además tiene a Q, I (Irracionales) y a D como subconjuntos densos. Un número real irracional tiene asociado un segmento de números racionales que es frontera o límite de una serie de segmentos de números racionales. La expresión decimal infinita no es periódica.

Existen varios tipos de números reales irracionales.

- *Algebraicos*. Son solución de ecuaciones polinómicas con coeficientes racionales. Aplicando técnicas de cálculo de raíces, se pueden obtener sucesiones de números racionales convergentes a tales números, Por ejemplo, raíz de cualquier valor k es solución de la ecuación $x^2 - k = 0$, que mediante técnicas de cálculo de raíces es límite de la siguiente secuencia $x_{n+1}= 1/2(x_n+k/x_n)$. Forman un cuerpo y es numerable.
- *Trascendentes*. No son algebraicos y por el cardinal numerable de los algebraicos tiene cardinal no numerable. π y e son trascendentes.
- *Construibles con regla y compás*. Un número construible es aquel que puede representarse mediante finitas operaciones de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíz cuadrada de números enteros. Recibe este nombre porque el segmento de magnitud igual a tal número es construible con regla y compás. Es un subcuerpo propio de los algebraicos, por ejemplo, raíz cúbica de 2, a pesar de ser algebraico no es construible con regla y compás.
- *Fracciones continuas.* Las fracciones continuas son una representación de los números reales, que entre otras propiedades tienen las siguientes:
    - Salvan la infinitud de la representación en notación decimal de algunos racionales, es decir, la notación en fracción continua es finita sí y sólo sí el número al que representa es racional.
    - También salvan las representaciones decimales infinitas no periódicas de los irracionales solución de ecuaciones cuadráticas mediante fracciones continuas infinitas periódicas.
    - Casos excepcionales son que el número e, que es trascendente, tiene una expresión en fracción continua con un patrón regular de construcción, si bien, no periódico.

En la figura 1, se sintetizan los diferentes modelos numéricos anteriormente descritos.

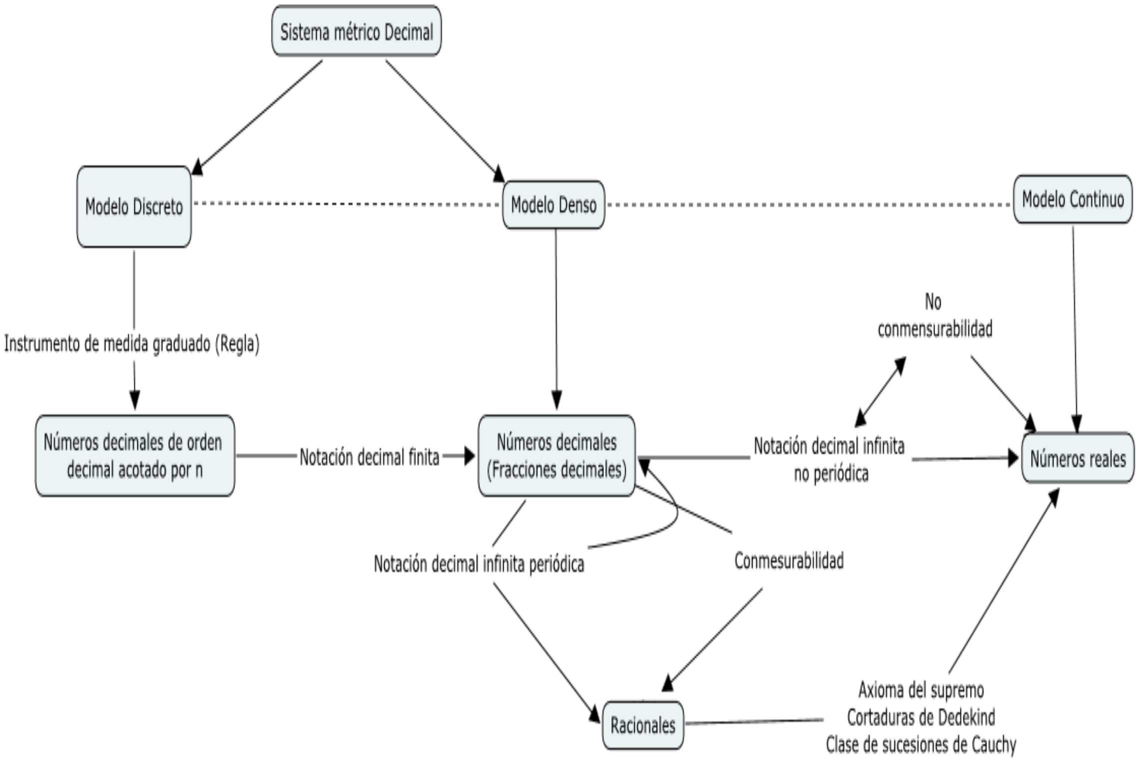

Figura 1: Ampliaciones de los diferentes modelos numéricos

INTERPRETACIÓN DEL MOVIMIENTO SEGÚN LOS DIFERENTES MODELOS NUMÉRICOS

En estos apartados vamos a discutir qué propiedades tiene el movimiento resultante de atribuir al espacio y el tiempo diferentes combinaciones de los modelos numéricos anteriores y contrastar dichas propiedades con aquéllas que la experiencia sensible y empírica muestra del fenómeno real.

Tiempo y espacio con estructura isomorfa a un modelo discreto

Supongamos el espacio y el tiempo son discretos, lo cual interpretamos como que el espacio tiene una estructura métrica lineal isomorfa a D_n y que, asimismo la estructura métrica del tiempo es isomorfa a D_m con n y m no necesariamente iguales.

El modelo discreto D_n, descrito en la sección anterior, se compone de puntos consecutivos colocados a distancia 10^{-n}. Observe el lector el movimiento de una luz en una baliza de dirección (figura 2).

Figura 2: Movimiento de una luz en una baliza de dirección

Consideremos un movimiento x(t) de un móvil puntual con inicio en x=0 y en t=0, se tiene pues, que en cierto segmento indivisible de tiempo, es decir, de duración 10^{-m} u_t (obviamente instantáneo para nuestra percepción, u_t denota la unidad de tiempo, m natural) (el tránsito de un instante a su siguiente), el móvil necesariamente ha de recorrer 1 indivisible de espacio con extensión 10^{-n} u_e (el tránsito de una posición a su siguiente, n natural) o quedar en reposo, debido a la condición de indivisibilidad impuesta por el modelo y de asumir otra condición adicional de que el móvil recorre todas las posiciones intermedias entre dos dadas; dicha condición la llamamos de "condición de valor intermedio".

Se justifica así que la velocidad del móvil es 0 o 1 u_e/u_t . Existe un único movimiento sin reposo, cualquier otro movimiento tiene indivisibles de reposo.

Razonamiento con dos móviles: Modelización discreta de movimientos rápidos y lentos

Podemos dar otra interpretación del modelo. El fenómeno físico muestra que existen movimientos más rápidos que otros. Sean A y B dos móviles partiendo de un origen común, tal que A avanza en un determinado indivisible de tiempo r indivisibles de espacio, y B avanza s indivisibles de espacio en dicho tiempo. Si A avanza más rápido que B, se tiene que r>s. Si el móvil B ha pasado por la posición $s10^{-n}$, es natural que A también haya tenido que pasar por dicha posición, lo cual es absurdo, porque al ser s<r, el tiempo empleado por A en ello es estrictamente una parte del indivisible considerado común a ambos móviles.

Entonces se deduce que en un determinado indivisible de tiempo A y B se mueven la misma cantidad de indivisibles de espacio o B está en reposo, deducimos también que existe un único movimiento sin reposo. La condición de indivisibilidad y de valor intermedio hacen que la velocidad sea 1. Es decir, en la baliza hay una única posibilidad para el movimiento sin reposo que será el más rápido, y cualquier otro movimiento más lento tiene que tener momentos de reposo.

En la figura 3 se muestran varias representaciones de la relación tiempo (x)-espacio (y). En azul, está representado el único movimiento posible sin reposo. En rojo, un movimiento que no es posible realizarse en este modelo; y en verde, otro movimiento más lento que el azul, en el sentido en que incluye un instante de reposo, pero en todo lo que resta de tramo no se diferencia del azul, es decir, cuando el móvil se mueve la velocidad es constante, no es posible reducir la velocidad o aumentarla sin eliminar o incluir instantes de reposo.

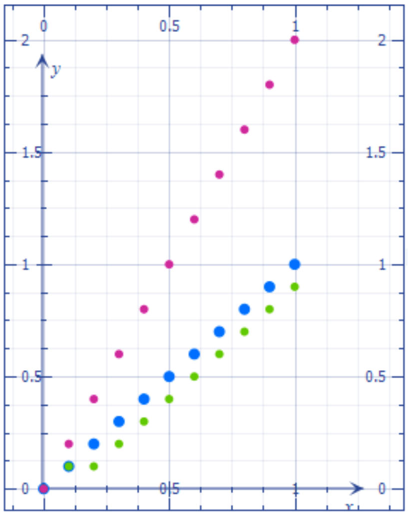

Figura 3. Representación de movimientos en un modelo discreto en tiempo (x) y en espacio (y).

Como conclusión general, si asumimos la existencia física de movimientos rápidos y lentos sin reposo, necesariamente se ha de imponer la densidad e infinita divisibilidad del tiempo y del espacio. En el siguiente apartado razonaremos que basta sólo imponer la densidad a uno de ellos para que necesariamente la otra la tenga de manera automática. Por tanto, se hará patente la incompatibilidad entre el modelo denso y el discreto.

Tiempo con estructura isomorfa a un modelo denso (Numerable o Continuo). Necesidad de densidad en el modelo asociado al espacio

Supongamos el tiempo siguiendo un modelo denso y el espacio un modelo discreto. La única propiedad que exigimos al tiempo es la de densidad, luego es irrelevante si se trata de un modelo decimal, racional o real.

Asumimos el fenómeno físico de movimiento de un móvil sin reposo en ningún intervalo de tiempo. Si en un intervalo ƛT se recorren r posiciones. Al ser dicho intervalo infinitamente divisible, consideramos una sucesión de intervalos $ƛT_n$, decreciente, $ƛT_{n+1} \subset ƛT_n$. En consecuencia, en cada $ƛT_n$ se recorre una cantidad r_n de posiciones para cada n. Como el movimiento no tiene reposo, necesariamente, $r_{n+1} < r_n < r$. Al ser los r_n naturales, existe un i, tal que en $ƛT_i$ se recorren 0 indivisibles, es decir, el móvil está en reposo durante $ƛT_n$ para n>i. Es decir, existe un intervalo de tiempo en el que el móvil está en reposo, lo cual es absurdo. Luego el espacio tiene que tener también la propiedad de infinita divisibilidad, es decir, ser denso.

Se deduce fácilmente que la condición es necesaria y suficiente, pues si el espacio es infinitamente divisible, el tiempo en recorrer cada una de las partes divide al tiempo en el que se recorre la totalidad.

La figura 3 permite ilustrar también un argumento de cardinalidad, pues al no existir reposo, existe una biyección entre el intervalo de tiempo (cardinal infinito, por densidad) y el intervalo de posiciones ocupadas por el móvil en dicho tiempo (cardinal finito, por la condición de ser discreto), lo cual es absurdo.

CONCLUSIONES

Podemos llegar a las siguientes conclusiones en referencia a cuáles modelos se ajustan más a la experiencia y observación empírica del movimiento.

- La existencia de movimientos rápidos y lentos sin reposo sólo es interpretable en un modelo denso o continuo. Una modelización discreta permite modelar movimientos "rápidos y lentos", pero se necesitan introducir instantes o intervalos de reposo. De hecho, la experiencia sensible se ajusta a un modelo discreto, al existir un umbral de percepción.
- Queda pendiente la discusión de si el tiempo y el espacio han de tener la misma estructura densa. Ponemos de manifiesto el interés de esta cuestión, pues es natural imponer a un modelo del movimiento que sea cerrado para procesos de paso al límite, en cuyo caso, se ha de desechar el modelo denso numerable y aceptar el modelo continuo como el único coherente y actualmente aceptado, no obstante, con dificultades para asumirlo de forma empírica debido al umbral de percepción del observador.

CUESTIONES PARA REFLEXIONAR EN EL TALLER

He aquí las dos primeras paradojas de Zenón para argumentar la no existencia del movimiento "continuo" en dos variantes, extraídas de Cajori (1915, pp. 2-3):

> Paradoja 1 (La de la dicotomía). No puedes recorrer un número infinito de puntos en un tiempo finito. Debes recorrer primeramente la mitad del todo, después la mitad de lo que te resta, y así sucesivamente. Por tanto, dado que hay un número infinito de distancias por recorrer, esto no se puede hacer en un tiempo finito.
>
> Paradoja 2 (La de Aquiles y la tortuga). Aquiles disputa una carrera con una tortuga. Supongamos que la tortuga mantiene una distancia de ventaja respecto de Aquiles. Primero, Aquiles debe alcanzar el lugar del que partió la tortuga, pero durante el tiempo empleado en ello, la tortuga ha avanzado un poco. Por tanto Aquiles debe recorrer todavía esa ventaja adicional. Por tanto, el estará tan cerca de la tortuga como se quiera pero nunca la alcanzará.

Las cuestiones referidas a ambas paradojas son las siguientes:

1. Identifica el modelo de espacio y el modelo de tiempo en cada paradoja. ¿Son realmente paradojas, según el modelo adoptado de espacio y tiempo?

2. ¿Qué contradicciones aparecen al intentar "discretizar" el fenómeno que es idealmente denso y/o continuo?

3. ¿Qué objeto matemático es lógicamente anterior, el punto o el segmento, el número real o el racional? ¿Qué se recorren en un movimiento, puntos o distancias infinitesimales?

4. ¿Qué es el movimiento, una composición de estados (modelo continuo Real) o una composición de submovimientos (actualización o límite de una familia numerable de discretizaciones)?

REFERENCIAS

Russell, B. (1973). Números racionales, reales y complejos. En *Obras Completas, t.2, Ciencia y Filosofía.* pp. 1303-1311. Madrid: Aguilar.

Socas, M. (2002). La organización de los sistemas numéricos desde su escritura decimal. Algunas expresiones ambiguas, *Números,* Vol.50*,* pp. 19-34.

Cajori, F. (1915a). The History of Zeno's Arguments on Motion: Phases in the Development of the Theory of Limits. Part I. *The American Mathematical Monthly,* vol. XXII, no. 1, pp.1-6.