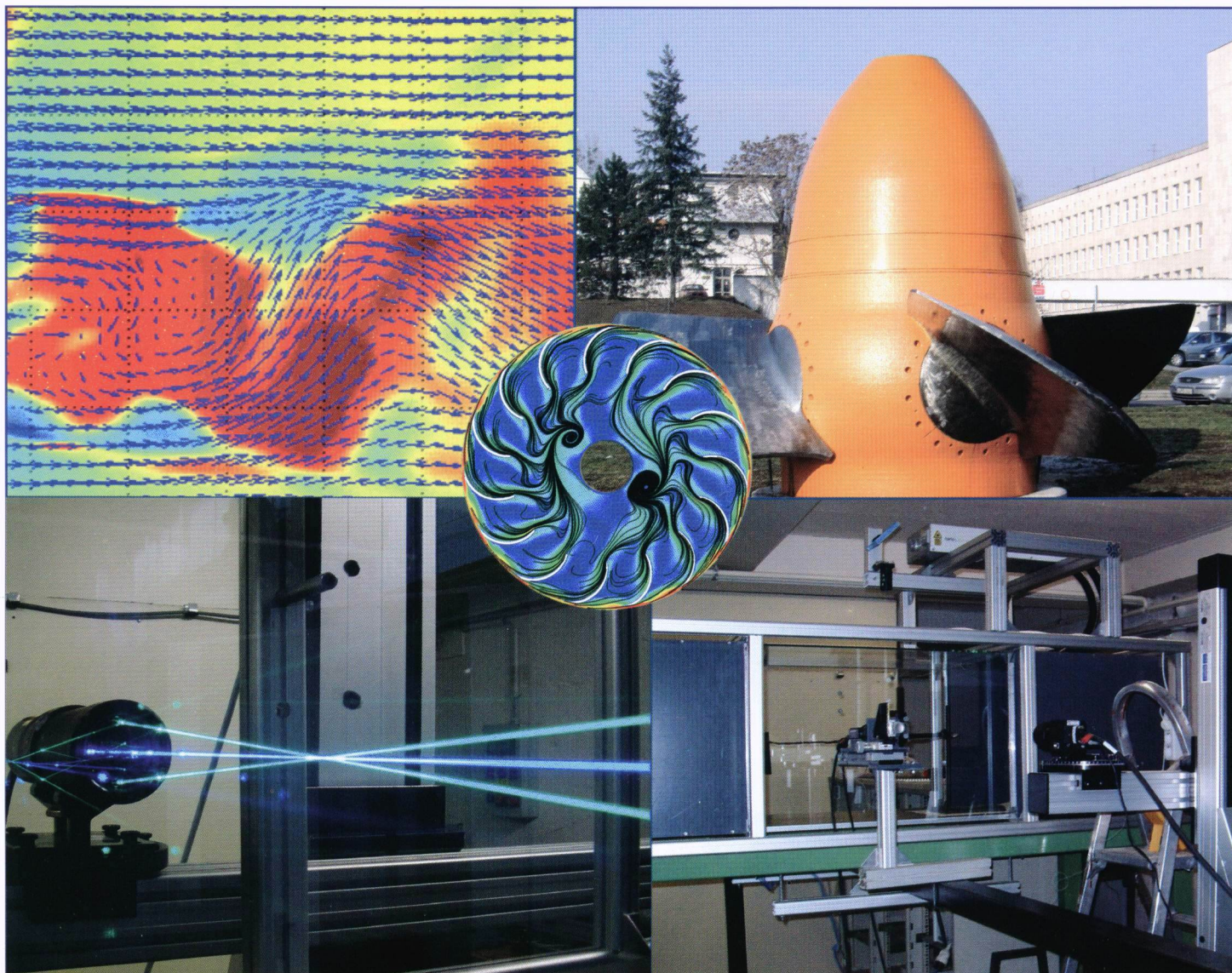


# GÉP

A GÉPIPARI TUDOMÁNYOS EGYESÜLET MŰSZAKI FOLYÓIRATA



60 ÉVES A MISKOLCI EGYETEM  
ÁRAMLÁS- ÉS HŐTECHNIKAI GÉPEK TANSZÉKE

2012/9.



Nemzeti  
Kulturális  
Alap

76 oldal  
LXIII. évfolyam

# GÉP

## A GÉPIPARI TUDOMÁNYOS EGYESÜLET

műszaki, vállalkozási, befektetési, értékesítési, kutatás-fejlesztési, piaci információs folyóirata

### SZERKESZTŐBIZOTTSÁG

Dr. Döbröczeni Ádám

**elnök**

Vesza József

**főszerkesztő**

Dr. Jármái Károly

Dr. Péter József

Dr. Szabó Szilárd

**főszerkesztő-helyettesek**

Dr. Barkóczi István

Bányai Zoltán

Dr. Beke János

Dr. Bercsey Tibor

Dr. Bukoveczky György

Dr. Czitán Gábor

Dr. Danyi József

Dr. Dudás Illés

Dr. Gáti József

Dr. Horváth Sándor

Dr. Illés Béla

Kármán Antal

Dr. Kulcsár Béla

Dr. Kalmár Ferenc

Dr. Orbán Ferenc

Dr. Pálincás István

Dr. Patkó Gyula

Dr. Péter László

Dr. Penninger Antal

Dr. Rittinger János

Dr. Szabó István

Dr. Szántó Jenő

Dr. Timár Imre

Dr. Tóth László

Dr. Varga Emilné Dr. Szűcs Edit

A szerkesztésben közreműködött:

Farkas András



### TISZTELT OLVASÓ!

A mai Miskolci Egyetem Dudujka völgyi kampuszát 1949-ben alapították Nehézipari Műszaki Egyetem néven. Az ezt követő egy évtized az építkezés és a születés utáni gyors fejlődés időszaka volt. Karok költöztek Miskolcra, illetve tanszékek sora alakult. Ebbe a folyamatba illett bele az 1952-es esztendő, amikor több más tanszékkel együtt megalapításra került a Gépüzemtan Tanszék.

A tanszék alapító professzorának Lancsarics Alajost kérték fel. A tanszékvezető – a korra jellemző lendülettel – igen hamar működőképessé oktatógárdát és oktatási rendszert alakított ki, annak ellenére, hogy akkor is még minden ideiglenes volt. A semmiből kellett a személyi és tárgyi feltételeket megteremteni. Lancsarics professzor korai halála után Czibere Tibor professzor vette át a tanszéket és alapozta meg máig érvényes formáját. Új nevet kapott a Tanszék, Áramlás- és Hőtechnikai Gépek Tanszéke elnevezés fejezte ki jobban a végleges oktatási, kutatási profilt. Megépült a laboratórium, a Tanszék végleges helyére költözött. Mindez az 1970-es évek közepére, végére alakult ki. Ezt követően a jól felépített rendszer sorra érte el sikereit, mind az oktatás, mind a kutatás és az ipari kapcsolatok területén.

Az országos rendszerváltás nem kerülte el a tanszéket sem. Új tanszékvezetők követték egymást és az addig biztos háttér ipar fokozatosan szűkült. Új kihívásként jelentkezett viszont az energetika. E területre fókuszált ezt követően a Tanszék mind oktatási mind kutatási téren.

Az évezred fordulóját követően a Miskolci Egyetem életében is az alapításhoz hasonló jelentőségű megújulás kezdődött. TIOP és TÁMOP projektek révén teljesen megújult az Egyetem és ezen belül a Tanszék infrastruktúrája. Tanszéki helyiségeink, laboratóriumaink építészeti korszerűsödtek, jelentős értékű új, világszínvonalú kutató, oktató berendezésekhez, műszerekhez, szoftverekhez jutottunk. Korszerű oktatási anyagok készültek.

Most, amikor a Tanszék alapításának 60. évfordulóját ünnepeljük, az ünnep szólnak az újjászületésnek is. Azért, hogy ez egyértelmű legyen, az ünnep kapcsán kerül felavatásra a legújabb oktató-kutató egységünk a Lancsarics Motorvizsgáló Laboratórium. A névválasztással is igyekeztünk utalni a 60 évvel ezelőtti erőfeszítésekre, és fejet hajtani mindazok előtt, akik ezt a 60 évet tisztességgel végigküzdötték. Végezetül legyen ez az ünnep jelzés a mai fiataloknak, hogy van értelme erőfeszítéseket tenni, az eredmények elnyerik jutalmukat és az utódok tisztelgetést.

Miskolc-Egyetemváros, 2012. szeptember

Prof. Dr. Szabó Szilárd

A szerkesztésért felelős: Vesza József. A szerkesztőség címe: 3534 Miskolc, Szervezet utca 67.

Telefon/fax: +36-46/379-530, +36-30/9-450-270 • e-mail: mail@gepujsag.hu

Kiadja a Gépipari Tudományos Egyesület, 1027 Budapest, Fő u. 68. Levélcím: 1371 Bp. Pf.: 433.

Telefon: 202-0656, fax: 202-0252, e-mail: a.gaby@gteportal.eu, internet: www.gte.mtesz.hu

A GÉP folyóirat internetcíme: <http://www.gepujsag.hu>

Kereskedelmi és Hitelbank: 10200830-32310236-00000000

Felelős kiadó: Dr. Igaz Jenő ügyvezető igazgató.

Gazdász Nyomda Kft. 3534 Miskolc, Szervezet u. 67. Tel.: (46) 379-530, e-mail: gazdasz@chello.hu.

Előfizetésben terjeszti a Magyar Posta Rt. Hírlap Üzletága 1008 Budapest, Orczy tér 1.

Előfizethető valamennyi postán, kézbesítőknél, e-mailen: [hirlapelofizetes@posta.hu](mailto:hirlapelofizetes@posta.hu), faxon: 303-3440. További információ: 06 80/444-444

Egy szám ára: 1260 Ft. Dupla szám ára: 2520 Ft.

Külföldön terjeszti a Kultúra Könyv és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat,  
H-1389 Budapest, Pf. 149. és a Magyar Média, H-1392 Budapest, Pf. 272.

Előfizethető még közvetlenül a szerkesztőségben is.

INDEX: 25 343 ISSN 0016-8572

**A megjelent cikkek lektoráltak.**

A kiadvány a Nemzeti Kulturális Alap támogatásával jelenik meg.

# ELSŐ- ÉS MÁSODRENDŰ IDŐBELI DISZKRETIZÁCIÓ KÖRHENGER KÖRÜLI ÁRAMLÁS ESETÉN

## FIRST- AND SECOND-ORDER TEMPORAL DISCRETIZATION FOR COMPUTATION OF FLOW AROUND A CIRCULAR CYLINDER

Daróczy László<sup>1</sup>, dr. Baranyi László<sup>2</sup>

### ABSTRACT

*This paper deals with the two-dimensional numerical simulation of low-Reynolds number flow past a stationary circular cylinder using the finite difference method. We investigate the effect of temporal discretization (1<sup>st</sup> order Euler and 2<sup>nd</sup> order Runge-Kutta) on force coefficients and Strouhal number. Additionally, solvers for two types of hardware: CPU and GPGPU (General-Purpose computing on Graphics Processing Units) are used for validation of the code. Computations were carried out for Reynolds numbers 100 and 150, for different dimensionless time steps (0.0001; 0.0002; 0.0004; 0.0005) and at different mesh sizes (512x450; 360x260).*

*Computational results obtained for the 1<sup>st</sup> and 2<sup>nd</sup> order methods agree well using both CPU and GPGPU, though the latter is much faster. Results also compare well with values in the literature. The 2<sup>nd</sup> order method is generally considered better, but its advantage of high accuracy at larger time steps cannot be utilized here, since the code demands relatively small time steps (it diverges at larger time steps due to using successive over-relaxation). Results obtained with 1<sup>st</sup> order Euler discretization proved to be equally accurate in this case.*

### 1. BEVEZETÉS

A különféle testek körüli áramlások nagy pontosságú szimulációja során nagyon fontos egy megfelelő egyensúlyt találnunk a számítási idő és a pontosság között. A magasabbrendű numerikus eljárások alkalmazása sem kivétel ez alól, mivel bár azonos idő- és térbeli diszkretizáció alkalmazása esetén a magasabb

rendű eljárások pontosabbak, azonban magasabb a számítás igényük is. Másképpen megfogalmazva ugyanolyan pontosság érhető el kisebb méretű háló vagy nagyobb időlépcső esetén is, amennyiben a magasabbrendű eljárásokat alkalmazzuk.

A kereskedelmi szoftverekben, de talán még sok kutatásban is legelterjedtebben alkalmazott eljárás a sok tekintetben már elavultnak tekintett elsőrendű Euler eljárás. A másodrendű eljárások között a legelterjedtebb a sokféle változatban létező Runge-Kutta (RK) illetve Adams-Bashforth eljárások [1]. A még magasabb rendű módszerek közül leggyakrabban a negyedrendű Runge-Kutta eljárást használják.

A jelen tanulmány során a másod- és negyedrendű Runge-Kutta eljárást is megvizsgáltuk, bár ez utóbbi a probléma jelen megfogalmazása mellett sem a SOR (successive over-relaxation), sem a BiCGSTAB (Bilinear Conjugate Gradient STABILized method) eljárás mellett nem bizonyult hatékonynak a rendkívül nagy futási idő miatt. A másodrendű Runge-Kutta (RK2) módszereken belül a Heun, Midpoint, Ralston és Taylor sorozatok [2, 3] módszerei közül végül a Heun eljárást választottuk ki, majd hasonlítottuk össze az Euler-eljárás eredményeivel különböző időlépcsők, hálóméretetek, Reynolds számok és számítási hardver esetén a két-dimenziós (2D), kis Reynolds számú, homogén párhuzamos áramlásba helyezett körhenger körüli áramlás esetén [4].

### 2. SZÁMÍTÁSI ELJÁRÁS

A számításokat egy saját fejlesztésű, véges differenciák módszerén alapuló szoftver segítségével végeztük el, melyet a kis Reynolds számú síkbeli, álló vagy rezgő mozgást végző henger körüli áramlások vizsgálatára fejlesztettünk ki.

Az eljárás az összenyomhatatlan, konstans tulajdonságokkal rendelkező newtoni folyadékokra felírt dimenziótlan Navier-Stokes egyenletet, a kontinuitási egyenletet, valamint a nyomásra felírt Poisson egyenletet oldja meg, [5].

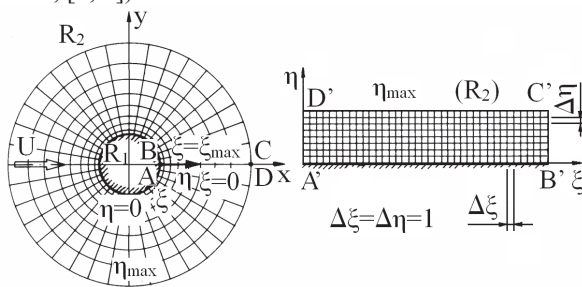
<sup>1</sup>gépészmérnök MSc, Miskolci Egyetem

<sup>2</sup>egyetemi tanár, Miskolci Egyetem, Áramlás és Hőtechnikai Gépek Tanszéke

A tényleges fizikai tartomány két,  $R_1$  (körhenger fala) és  $R_2$  (számítási tartomány külső pereme) dimenziótlan sugarú koncentrikus kör közötti terület (l. 1. ábra).  $R_1$  mentén a sebesség zéró, a nyomásra pedig egy Neumann típusú peremfeltételt használunk, míg  $R_2$  mentén potenciáláramlást tételezünk fel, [5].

A peremfeltételek pontos kielégítése érdekében peremre illeszkedő görbevonalú koordináta-rendszert használunk. A fizikai tartomány logaritmikusan diszkrétizált hálóját egy téglalap alakú, ekvidisztáns felosztású számítási tartományra képezzük le (l. 1. ábra), majd a transzformált egyenleteket véges differenciák módszerével oldjuk meg, [6, 7].

A térkoordináták szerinti deriváltakat negyedrendű centrális differenciákkal közelítjük, kivéve a konvektív tagot, amelyet egy harmadrendű módosított „upwind” sémával kezelünk. A mozgásegyenletet időben explicit módon integráljuk, nyomásra vonatkozó Poisson egyenletet a SOR eljárással oldjuk meg, miközben a kontinuitási egyenletet is kielégítjük. További részletek az [5, 6] dolgozatokban találhatóak. A második szerző által kifejlesztett 2D FORTRAN kód alapos vizsgálatnak lett alávetve az évek során, és eredményei nagyon jól megegyeznek a szakirodalmi kísérleti és számítási eredményekkel mind álló, mind rezgő henger esetén, [6, 7].



1. ábra. Fizikai és számítási tartomány

### 3. EULER ÉS RUNGE-KUTTA IDŐLÉPTETÉSEK

Nézzük meg először az egyenletek megoldásának menetét a Runge-Kutta eljárás alkalmazásával! A rezgő hengerhez rögzített, nem-inerciarendszerben felírt dimenziótlan Navier-Stokes egyenlet:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} - \mathbf{a}_0, \quad (1)$$

ahol  $\mathbf{v} = \{u, v\}$  a sebességvektor,  $p$  a nyomás,  $Re = Ud/\nu$  a Reynolds szám,  $U$  a párhuzamos áramlás sebessége,  $d$  a henger átmérője,  $\nu$  a folyadék kinematikai viszkozitása,  $\mathbf{a}_0$  a henger gyorsulása,  $t$  az idő; minden változó dimenziótlan formában felírva [5,6]. A nyomásra vonatkozó Poisson egyenlet [6]:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = 2 \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \nabla^2 p. \quad (2)$$

Az  $n$ . időlépcsőben a  $\mathbf{v}^n, p^n$  megoldások ismeretében az (1) egyenlet idő szerinti integrálása Heun RK2 módszere alapján az alábbiak szerint történik.

**1. lépés.** A  $\mathbf{k}_1$  Runge-Kutta tényező meghatározása:

$$\mathbf{k}_1 = - \left[ (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n + \nabla p^n - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v}^n \right]. \quad (3)$$

Ezt felhasználva meghatározhatjuk a  $\mathbf{v}^* = \{u^*, v^*\}$  átmeneti sebességet

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^n + \mathbf{k}_1 \Delta t - \mathbf{v}_0^n + \mathbf{v}_0^{n+1}, \quad (4)$$

ahol  $\mathbf{v}_0$  a henger sebessége és  $\Delta t$  az időlépcső. Ezek alapján, (2) felhasználásával meghatározható a  $p^*$  átmeneti nyomás

$$\frac{0 - D^n}{\Delta t} = 2 \left[ \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial v^*}{\partial y} - \frac{\partial u^*}{\partial y} \frac{\partial v^*}{\partial x} \right] - \nabla^2 p^*, \quad (5)$$

ahol  $D^n = \text{div}(\mathbf{u}^n)$ . Így az (5) Poisson egyenlet megoldásával párhuzamosan a  $D^* = \text{div}(\mathbf{v}^*) = 0$  kontinuitási egyenletet is kielégítjük.

**2. lépés.** A  $\mathbf{k}_2$  Runge-Kutta tényező meghatározása:

$$\mathbf{k}_2 = - \left[ (\mathbf{v}^* \cdot \nabla) \mathbf{v}^* + \nabla p^* - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v}^* \right]. \quad (6)$$

A  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  tényezők ismeretében kapjuk a következő  $(n+1)$  időlépcsőhöz tartozó  $\mathbf{v}^{n+1} = \{u^{n+1}, v^{n+1}\}$  sebességet, illetve a  $p^{n+1}$  nyomást:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \frac{1}{2} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \Delta t - \mathbf{v}_0^n + \mathbf{v}_0^{n+1}, \quad (7)$$

$$\frac{0 - D^n}{\Delta t} = 2 \left[ \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x} \right] - \nabla^2 p^{n+1}. \quad (8)$$

Amennyiben a fenti két lépcsőből csak az első hajtjuk végre, akkor az Euler módszert kapjuk. A fentiekből látható, hogy az RK2 módszernél az időigényes SOR eljárást kétszer is végre kell hajtani egyetlen időlépcsőn belül, míg az Eulernél csak egyszer. A számítások folyamán azt tapasztaltuk, hogy a futásidő ennek ellenére nem duplázódik meg, mivel a SOR eljárás a 2. lépés során gyorsabban konvergál.

### 4. A HASZNÁLT SZOFTVER

A jelen tanulmányban az első szerző által kifejlesztett FlowCFD nevű program segítségével végeztük el a számításokat. A FlowCFD egy C++ nyelven megírt, körhenger körüli áramlások vizsgálatára kidolgozott, [5-7] algoritmusán alapuló szoftvercsomag, amely lehetővé teszi a szimulációk párhuzamos ütemezését a processzoron és grafikai kártyákon, valamint kiterjedt poszt-processzálási lehetőséget biztosít.

A szoftver számítási motorja négy különböző számítási eljárást tartalmaz. Az első változat a CPU-n fut Euler-típusú időléptetést alkalmazva, ez a kód a második szerző által korábban kifejlesztett FORTRAN program (l. [6]) C++ nyelvre történő átirása. A FORTRAN és C++ program változatok teljes

mértékben megegyező eredményt adnak, amely megfelelő validálást nyújt ezen számítási eljárás számára, hiszen az eredeti FORTRAN programot a publikációk során alaposan teszteltük, [7]. A második változat a grafikai kártyák nyújtotta hatalmas számítási teljesítményből profitál a GPGPU technika révén, akár 8-20x gyorsulást is elérve, de továbbra is az Euler-típusú időléptetést alkalmazva. A kernelek itt NVIDIA® CUDA™ C nyelven vannak megírva, de az eredeti SOR eljárás helyett a vörös-fekete Gauss-Seidel SOR módszert alkalmazza [8], amely jól párhuzamosítható.

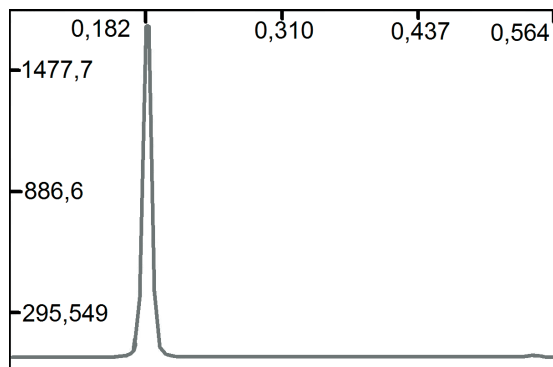
A későbbiekben a programot kiegészítettük az Euler mellett másodrendű Runge-Kutta időléptetéssel is, mind a processzoron (harmadik változat), mint a grafikai kártyán (negyedik változat).

A processzoron végzett számításokat egy Intel® Core i7™ 980X processzoron, míg a GPU-n végzett számításokat egy Tesla™ C2050 GPU 448 magján, duplapontossággal és ECC (error correcting code memory) beállítással futtattuk le.

## 5. VIZSGÁLT ESETEK, KIÉRTÉKELÉS

A szimulációkat álló hengerre vonatkozóan,  $Re=100$  és 150 esetén,  $\Delta t=(1,2,4,5)\times 10^{-4}$  dimenzióatlanított időlépcsővel, minimum  $t=400$  dimenzióatlan időtartamig számítottuk. A  $\Delta t\geq 6\times 10^{-4}$  esetén a SOR eljárás nem konvergált, így a SOR és RK eljárások valamilyen fokon inkompatibilisek a számítási eljárásban.

A CPU és GPU számítások során a számítási tartományt  $512\times 450$  (kerület x radiális) háló segítségével diszkretizáltuk ( $R_2/R_1=160$ ). Emellett a CPU-n  $Re=100$  esetén még egy kisebb,  $360\times 260$  ( $R_2/R_1=60$ ) elemet tartalmazó hálót is megvizsgáltunk.



2. ábra. FFT frekvenciaspektrum ( $Re=150$ ,  $C_L$ )

Az adatok feldolgozásánál igen fontos a periódusidő pontos meghatározása, mivel ez alapján számítható a felhajtó- és ellenállás-tényező időátlag illetve rms (root-mean-square) értéke. A gyors Fourier transzformáció (FFT) minden esetben egyetlen frekvenciacsúcsot talált a frekvencia-spektrumon (ld. 2. ábra), így az adatok kiértékeléséhez szükséges periódusidő egyértelműen meghatározható. A program ezt az értéket a beépített

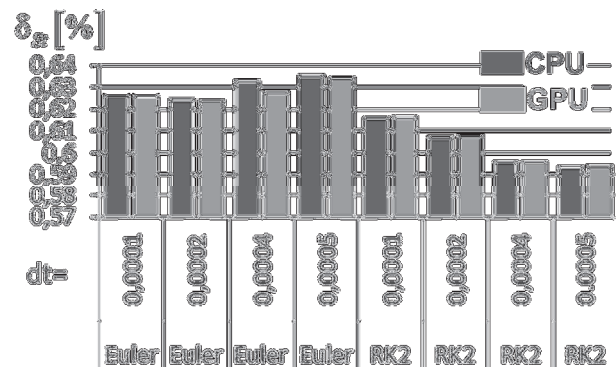
MaxCut algoritmussal állapította meg, mely az egyes tényezők lokális maximumainak elhelyezkedése alapján határozza meg a periódusidő értékét nagy pontossággal.

## 6. EREDMÉNYEK

A vizsgálatok során meghatároztuk az ellenállás-tényező ( $C_D$ , átlag), felhajtóerő-tényező ( $C_L$  amplitúdó), hátsó nyomástényező ( $-C_{pb}$ , átlag) és a dimenzióatlan örvényleválási frekvencia, azaz a Strouhal szám ( $St=f/d/U$ ) értékeit. Ezeket hasonlítottuk össze a egyrészt a jelen tanulmány különböző beállításai alapján nyert, valamint Posdziech és Grundmann [9] eredményeivel, akik a spektrális elem módszer alkalmazásával egy olyan vizsgálatot végeztek az álló körhenger körüli 2D áramlásokra, amely során szisztematikusan változtatták a számítási tartomány méretét. Az összehasonlítás nagyfokú egyezést mutatott minden vizsgált esetben.

A fentiek illusztrálására szeretnénk itt bemutatni néhány példát. A  $C_L$  felhajtóerő-tényező amplitúdójára a legnagyobb számítási tartománya esetén [9]  $Re=100$  esetben 0,3161 értéket ad meg. A FlowCFD szoftver ugyanezen értékre a kisebb háló esetén 0,3225-0,3240, a nagyobb tartomány esetén pedig 0,3197-0,3204 értékeket adott (időlépcső nagyságától függően). Az  $Re=150$  esetre [9] 0,5030, míg a FlowCFD 0,5093-0,5105 értéket adott, amely jó egyezésnek mondható.

A  $C_D$  ellenállás-tényezőre vonatkozóan [9]  $Re=100$  esetén 1,3123,  $Re=150$  esetén pedig 1,2992 értéket ad meg. Ugyanezen esetekre a FlowCFD 1,3221-1,3238, illetve 1,3102-1,3122 értéktartományt adott mind a CPU, mind a GPU kódok esetén.



3. ábra. Strouhal szám – Relatív hiba ( $Re=100$ )

A Strouhal szám esetén  $Re=100$  esetén [9] 0,1633 (legnagyobb tartomány), míg  $Re=150$  esetén 0,18366 értéket ad meg (legkisebb hibát adó nem-egész polinom alapján). Az  $Re=100$  esetén a FlowCFD 0,1642-0,1643 közötti értékeket adott meg a nagy (0,576-0,636% relatív hiba [9]-hoz képest, l. 3. ábra), és 0,1652-0,1654-ot a kisebb hálóra (1,169-1,292% relatív hiba). Az  $Re=150$  esetén a FlowCFD 0,18356-0,18365 közötti értékeket adott (0,0006%-0,0518% hiba).

Az elmondottak alapján látható, hogy az elsőrendű és másodrendű időbeli léptetések szinte azonos eredményt szolgáltatottak, azaz az alkalmazott paraméterek mellett az elsőrendű eljárás is képes volt megfelelni, a magasabb rendű eljárásokkal megegyező eredményt adni.

## 7. ÖSSZEFOGLALÁS

A vizsgált időlépcsők esetében az első és másodrendű eredmények is jó egyezést mutattak, azaz a vizsgált körülmények között az elsőrendű eredmények is elegendő pontosságot tudtak biztosítani. Ugyanakkor a kapott eredmények a spektrális elem módszer eredményeivel is megegyeztek [9].

Bár a Runge-Kutta eljárást sikerült implementálni a meglévő és jól-kipróbált kódba, azonban ennek ellenére képtelenek voltunk profitálni a magasabb rendű eljárás előnyeiből – azaz növelni az idő-lépcső értékét azonos pontosság esetén, ugyanis az időlépcső növelése esetén a SOR eljárás nem konvergált. Úgy tűnik, hogy jelen implementáción belül a SOR és RK eljárások inkompatibilisek valamilyen fokon, így a SOR eljárás lecserélésének lehetőségét már vizsgáljuk. Azonban az mindenképpen pozitív eredmény, hogy az alkalmazott paraméterek mellett az elsőrendű eljárás is ugyanazt a pontosságot biztosítja, mint a másodrendű eljárás.

Az eredmények alapján azt a következtetést is levonhatjuk, hogy a CPU és GPGPU kód eredményei között nem mutatkozik jelentős különbség (csak a definiált pontosságon belül,  $10^{-5}$ ), de a GPGPU kód 8-20x nagyobb sebességet nyújt.

## 8. SUMMARY

For the investigated time steps the 2nd order results agreed very well with the results of the 1st order temporal discretisation. Additionally, all the results agree well with the spectral element results given in [9].

Although we were able to implement the Runge-Kutta method into our existing and proven code, we found that we were unable to take advantage of the benefits of higher order methods, i.e., being able to use larger time steps and still obtain the same accuracy. When the time step was increased the SOR method failed to converge. It appears that in the current implementation the SOR method and the Runge-Kutta method are somewhat incompatible. We are currently investigating ways to replace SOR.

However it is a clearly positive result that the 1st order method is able to provide the same accuracy as the 2nd order method within the applied parameters. This confirms that the 1st order method yields accurate results under the conditions investigated.

While the CPU and GPGPU codes result in no significant differences (only up to the defined precision,  $10^{-5}$ ), the GPGPU version is 8-20 times faster.

## 9. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A szerzők köszönetüket fejezik ki a K 76085 sz. OTKA projekt keretében megvalósult támogatásért. A kutató munka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként – az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg. Külön köszönet jár az NVIDIA™ részére, amiért az „Academic Partnership Program” keretében egy NVIDIA® Tesla™ C2050-t adományozott a kutatás támogatására.

## 10. IRODALOM

- [1] FERZIGER, J.H., PERIĆ, M.: *Computational Methods for Fluid Dynamics* (3rd edition). Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [2] CHEEVER, E.: The 2nd order Runge-Kutta method. <http://www.swarthmore.edu/NatSci/cheevee1/Ref/NumericalInt/RK2.html>.
- [3] KAW, A.K., KALU, E.E.: Numerical Methods with Applications. Ed. World Wide Web, <http://www.autarkaw.com>, 2009.
- [4] DARÓCZY, L., BARANYI, L.: Euler and second-order Runge-Kutta methods for computation of flow around a cylinder, Proc. XXVI. microCAD International Scientific Conference, Section N, pp. 1-6, Paper No. N10, 2012.
- [5] BARANYI L.: Mozgó henger körüli lamináris áramlás vizsgálata. Miskolci Egyetem Habilitációs füzetek, 2007.
- [6] BARANYI, L.: Computation of unsteady momentum and heat transfer from a fixed circular cylinder in laminar flow. *Journal of Computational and Applied Mechanics* 4(1), 13-25, 2003.
- [7] BARANYI, L.: Numerical simulation of flow around an orbiting cylinder at different ellipticity values. *Journal of Fluids and Structures* 24, 883-906, 2008.
- [8] SHINN, A.F.: Computational Fluid Dynamics (CFD) using Graphics Processing Units. [http://impact2.crhc.illinois.edu/gpucourses/courses/slecture/CaseStudy\\_CFD\\_GPU.pdf](http://impact2.crhc.illinois.edu/gpucourses/courses/slecture/CaseStudy_CFD_GPU.pdf).
- [9] POSDZIECH, O., GRUNDMANN, R.: A systematic approach to the numerical calculation of fundamental quantities of the two-dimensional flow over a circular cylinder. *Journal of Fluids and Structures* 23, 479-499, 2007.