Retardo temporal en las lentes por galaxias en el contexto de Reissner - Nordstrom

C. Miranda[a], U. Molina[b] y P. Viloria[c]
[a]*Departamento de física, Universidad de Sucre.*
[b]*Departamento de física, Universidad del Atlántico.*
[c]*Departamento de Ciencias Básicas, Universidad de la Costa CUC.*

Received 6 January 2014; accepted 7 March 2014

En este trabajo se deducen las expresiones matemáticas para el retardo temporal entre dos imágenes debidas a una lente gravitacional con distribuciones simétricas tanto de masa como de carga eléctrica a partir del elemento de línea en el contexto de Reissner - Nordstrom (RN). Para esto, se estudia el movimiento de fotones que se curvan cerca de la distribución de masa cargada, mediante la métrica de RN, obteniendo las expresiones para el ángulo de desviación y el potencial de deflexión, estudiando así el fenómeno de lentes gravitacionales tanto para una masa puntual como para una distribución de masa. Luego se aplican los resultados obtenidos, al modelo de la esfera singular isoterma (ESI), y se comparan con aquellos en los cuales únicamente se considera galaxias con distribución de masa. Pero, cabe destacar que esta expresión del retardo temporal es aplicable a cualquier modelo de lente gravitacional cargado.

Descriptores: Retardo temporal; lentes gravitacionales con carga eléctrica.

In this work we derive the mathematical expressions for the time delay between two images due to gravitational lensing with symmetric distributions of both: mass and electric charge from the line element in the context of Reissner - Nordstrom (RN). For this, is important to study the motion of photons that are curved around the mass distribution charged by RN metric, obtaining expressions for the deflection angle and deflection potential studying the phenomenon of so much for a lensing precise mass to mass distribution. Then applied the results, the singular sphere model isotherm (ESI), and compared with those in which only considers galaxies mass distribution. But, that this expression of the time delay is applicable to any gravitational lens model loaded too.

Keywords: Time delay; electrically charged gravitational lenses.

PACS: 95.30.Sf; 98.62.Sb; 98.80.Es; 98.62.Py

1. Introducción

El estudio sobre lentes gravitacionales nace a partir de la deflexión de un rayo de luz cuando pasa cerca de una masa, el cual se desvía de su camino. Este hecho se evidencia teóricamente cuando se resuelve la ecuación de campo de Einstein, realizada por Schwarszchild, encontrándose el ángulo de desviación y aplicando el resultado para el caso de rayos de luz que pasan cerca del Sol.

Después que Arthur Eddington el 29 de mayo de 1919 en sus observaciones durante un eclipse de Sol observó cómo se curvaba la trayectoria de la luz proveniente de objetos distantes al pasar cerca del Sol, produciéndose un desplazamiento aparente en las posiciones, las lentes gravitacionales toman un impulso tanto en la parte teórica como en la observacional [2]. En la parte teórica se encuentran expresiones matemáticas que relacionan los elementos encontrados en ella, tales como: ángulo de desviación, potencial de deflexión, magnificación, ecuación de la lente, retardo temporal, para el caso en que se consideran masas puntuales en el contexto cosmológico. El concepto de lentes gravitacionales se extiende a distribuciones de masa, y es así que se hace el estudio para galaxias y cúmulos de galaxias, teniéndose expresiones mucho más complicadas, lo cual condujo a definir la lente delgada, que consiste en proyectar la distribución de masa, en un plano perpendicular al rayo de luz, teniéndose una densidad superficial de masa y las distribuciones volumétricas de masa pueden tener diferentes modelos dependiendo de su forma y también de la manera como se distribuyan las componentes de la galaxia o cúmulos de galaxia.

Paralelamente, se empiezan a encontrar las primeras evidencias experimentales de lentes gravitacionales como es el caso de QSO 0957 +561 A / B (cuásar con doble imagen), descubierto en 1979, y en este sentido se hacen mediciones de las posiciones de las imágenes, retardo temporal entre dos de las imágenes, velocidad de dispersión de las componentes de la lente, etc.

Algunos teóricos en los temas sobre lentes gravitacionales han propuesto que algunos objetos astrofísicos podrían estar provistos, además de masa, de una carga eléctrica neta que generaría un campo escalar, que no podría ser detectado por medios clásicos, pero sí mediante las variables asociadas al fenómeno de deflexión de la luz.

Hasta el momento se han estudiado las lentes gravitacionales en el contexto de RN únicamente considerando que la lente es un cuerpo puntual de masa y carga eléctrica. En nuestro caso, extenderemos el fenómeno a las lentes gravitacionales considerando que estas tienen una distribución tanto de masa como de carga eléctrica.

2. Ecuaciones de campo de Einstein

Las ecuaciones de Campo de Einstein (ECE) determinan la métrica del espacio-tiempo a partir del fenómeno en estudio o de la distribución de materia, que perturba el espacio tiempo. Se trata de igualdades que involucran las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ (tensor de curvatura que se construye a partir de las segundas derivadas del tensor métrico), la curvatura escalar R (que se obtiene a partir del tensor de curvatura) y el tensor de energía impulso $T_{\mu\nu}$ que describe la configuración de masa y energía en un punto del espacio tiempo.

Las ecuaciones describen cómo el espacio-tiempo se curva por la materia y, recíprocamente, cómo la materia es influenciada por la curvatura del espacio-tiempo, es decir, cómo la curvatura da lugar a gravedad [1]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}\nu R = K T_{\mu\nu} \tag{1}$$

Estas ecuaciones son la base para la construcción del elemento de línea correspondiente al fenómeno físico en estudio.

3. Métrica de Reissner Nordstrom (RN)

Considerando una distribución de masa m, *estática y con simetría esférica*, y una carga Q con simetría esférica, se hace el estudio del movimiento de una partícula que viaja desde el infinito y pasa cerca a esta distribución. Este estudio se hace mediante las ecuaciones de campo de Einstein (1), y las ecuaciones de las geodésicas y las de Euler-Lagrange, las cuales se usan para encontrar el elemento de línea.

Para el caso de Reissner - Nordstrom (RN), el término $T_{\mu\nu}$ (Tensor momento energía), de la Ecuación de Campo de Einstein (1), es diferente de cero, ya que, representa la energía debida a la radiación electromagnética producida por la carga eléctrica contenida dentro de la distribución de masa en consideración.

Reissner propone una métrica que mantiene la forma de la métrica de Schwarszchild, pero introduce una función $f(r)$, la cual depende tanto de la masa como de la carga eléctrica de la distribución de materia en estudio, esto es [1]:

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 \\ & - r^2 d\theta^2 - r^2 (\sin\theta)^2 d\varphi^2 \end{aligned} \tag{2}$$

El tensor momento-energía asociado a dicha métrica no se anula idénticamente, rebelando que dicho espacio-tiempo está “inmerso” por un campo electromagnético estático con simetría esférica.

4. Métrica de Reissner Nordstrom en coordenadas isotrópicas

Para abordar las lentes gravitacionales con todo el rigor, se requiere que las coordenadas espaciales tengan isotropía. Bajo éstas argumentos se realizan en el elemento de línea de Reissner-Nordstrom un cambio de variable con el cual se aborda el tema de lentes gravitacionales con carga eléctrica, éste queda finalmente expresado en la forma [7]:

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left[1 - \frac{2M}{\rho} - 2\frac{M^2}{\rho^2}\left(1 - \frac{a^2}{2}\right)\right] dt^2 \\ & - \left[1 + \frac{2M}{\rho} + \frac{3}{2}\frac{M^2}{\rho^2}\left(1 - \frac{a^2}{3}\right)\right] d\sigma^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Donde se ha definido $a \equiv \frac{Q}{M} \leq 1$

5. Cálculo del índice de refracción y el potencial de RN

Se puede calcular la velocidad de la luz en el medio, v, cuando pasa cerca de la masa considerada que esta tiene una carga neta, generando radiación electromagnética. Para ello se parte de la Ec. (3), cambiando ρ por r, y tomando $dS = 0$, para el caso de un rayo de luz.

Teniendo en cuenta la definición para el índice de refracción $n = c/v$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío y v es la velocidad de la luz en el medio de propagación, podemos escribir el índice de refracción en términos de las unidades originales para el caso de RN, el cual queda definido entonces como [16]:

$$n = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{7G^2M^2 + GkQ^2}{4c^4 r^2} \tag{4}$$

Comparando con la expresión del índice de refracción, $n = 1 - 2\Phi$, donde Φ es el potencial análogo al Newtoniano, en este caso sería el potencial gravitacional incluyendo el de Coulomb (eléctrico) para una carga puntual. De esto tenemos que en el caso de RN [16]:

Así, el potencial de RN es entonces,

$$\Phi = -\frac{GM}{c^2 r} - \frac{7G^2M^2 + GkQ^2}{8c^4 r^2} \tag{5}$$

Con estos cambios se tendrán los elementos de las lentes gravitacionales con carga con las unidades adecuadas para su posterior análisis dimensional.

6. Ángulo de deflexión de RN para una distribución de masa cargada

Para obtener el ángulo de deflexión $\hat{\alpha}$, utilizamos la definición:

$$\hat{\alpha} = -\int \nabla_\perp n dl = 2\int \nabla_\perp \Phi dz \tag{6}$$

Se introduce el potencial (5) en la expresión (6) y se llega al ángulo de desviación para una masa puntual. Como nuestro trabajo consiste en extender las lentes cargadas para distribuciones tanto de masa como de carga, se debe hacer la aproximación de una lente delgada sobre un plano perpendicular. En consecuencia se define una densidad superficial de masa cargada tomando un elemento diferencial de masa y de carga, respecto de en un punto cuyo parámetro de impacto se encuentre en la posición: $\vec{\xi}-\vec{\xi'}$, se tiene,

$$d\hat{\alpha} = \frac{4G(\vec{\xi}-\vec{\xi'})}{c^2|\vec{\xi}-\vec{\xi'}|}dM + \frac{\pi G^2}{2c^4}(7+\eta)\frac{(\vec{\xi}-\vec{\xi'})}{|\vec{\xi}-\vec{\xi'}|}MdM$$

El cual se puede desarrollar independientemente dos contribuciones del ángulo de desviación, una correspondiente al caso Schwarszchild y el otro a Reissner-Nordstrom, es decir,

$$\hat{\vec{\alpha}} = \hat{\vec{\alpha}}_{S_{ch}} + \hat{\vec{\alpha}}_{RN} \tag{7}$$

El primer término de la Ec. (7) ya se ha tratado en la literatura normal, por lo que, nos dedicamos a resolver y encontrar una expresión para el segundo término que es la parte de correspondiente a Reissner-Nordstrom (RN), de la Ec. (7):

$$\hat{\vec{\alpha}}_{RN} = \frac{\pi^2 G^2}{c^4}(7+\eta)\chi\int_0^{\chi}\chi'\Sigma(\vec{\chi'})M(\vec{\chi'}) \times \frac{\chi-2\chi}{(\chi-\chi')^3(\chi+\chi')}d\chi' \tag{8}$$

Siendo: $\eta = kQ^2/GM^2$, un parámetro adimensional introducido para escribir la cantidad de carga en términos del contenido de masa total de la Lente, $\Sigma(\chi)$ es la densidad superficial de masa de la Lente.

Con ésta expresión se hace el estudio del ángulo de desviación que experimenta un rayo de luz cuando pasa cerca de una distribución de masa que tenga simetría esférica, y que contenga una carga eléctrica neta. En la expresión encontrada en la Ec. (8), se obtiene las correcciones al ángulo de desviación de Schwarszchild. Se observa que estas correcciones se hacen cuando se considera términos superiores a primer orden en la expansión en series del índice de refracción de la luz que es desviada en su recorrido, pero estudiada ahora en el contexto de Reissner-Nordstrom.

7. Potencial de deflexión de RN para una distribución de masa cargada

Se sabe que el potencial debido a una masa esférica cargada está dado por la Ec. (5), y por tanto el potencial de deflexión,

$$\hat{\psi} = 2\int\Phi(\xi,z)dz \tag{9}$$

Reemplazando Φ para el caso RN, obtenemos:

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}_{S_{ch}} + \hat{\psi}_{RN} \tag{10}$$

Donde,

$$\hat{\psi}_{RN} = -\frac{G^2(7+\eta)M^2}{4c^4\xi}\left[\pi - \frac{D_s}{D_L D_{LS}}\xi\right] \tag{11}$$

corresponde al potencial de RN.

Al igual que se hizo con el ángulo de desviación, nos centramos únicamente en los términos que contienen la carga eléctrica. Para una distribución de masa, se toma un dM ubicado en $\vec{\xi}-\vec{\xi'}$ y produce un potencial de deflexión:

Resolviendo y escribiendo todo en términos de χ y χ', el potencial de RN será:

$$\hat{\psi}_{RN} = \frac{G^2\xi_0(7+\eta)\pi}{c^4}\int\chi' M(\vec{\chi'})\Sigma(\vec{\chi'})d\chi' \times\left[\frac{\pi(\chi^2-3\chi\chi'+\chi'^2)}{(\chi+\chi')^3} + \frac{D_s\xi_0}{D_L D_{LS}}\right]$$

Este es el potencial de desviación en el contexto de RN, el cual se debe adicionar al encontrado con la lente de Schwarzschild de la literatura normal.

8. Retardo temporal de RN para una distribución de masa cargada

De acuerdo con la teoría sobre Lentes Gravitacionales en el caso de distribuciones de masa el retardo temporal para una imagen está dado por la expresión:

$$\Delta t = \frac{(1+z_L)}{c}\frac{D_S D_L}{D_{LS}}\left[\frac{1}{2}\alpha^2(\chi) - \psi(\chi)\right] \tag{12}$$

Donde: D_S en la distancia diametral angular desde la fuente hasta el observador, D_L es la distancia diametral angular de la lente al observador, $D_l S$ es la distancia de la lente a la fuente y z_L es el corrimiento hacia el tojo e la lente.

9. Retardo temporal para el modelo de la ESI cargada

En el caso en particular se aplicaran los resultados obtenidos al modelo de la esfera singular isoterma ESI, para este modelo, la densidad superficial de masa está dada por: $\Sigma(\xi) = \sigma_v^2/2G\xi$ y la masa de la distribución es $M(\xi) = (\pi\sigma_v^2/G)\xi$.

Reemplazando estos valores en las expresiones encontradas para el ángulo y el potencial de deflexión (8) y (12) respectivamente.

Aplicando primero a la expresión para el **ángulo de deflexión**, se tiene,

$$\hat{\vec{\alpha}}_{RN} = \frac{\pi^3(7+\eta)\chi\sigma_v^4}{2c^4}\int_0^{\chi}\chi'\frac{\chi-2\chi'}{(\chi-\chi')^3(\chi+\chi')}d\chi' \tag{13}$$

Teniendo en cuenta el desarrollo del binomio de Newton tanto para potencias positivas como negativas se llega finalmente y después de despreciar términos de orden 3 o superior,

$$\hat{\vec{\alpha}}_{RN} = \frac{\pi^3}{4}(7+\eta)\frac{\sigma_v^4}{c^2} \tag{14}$$

La cual no depende de la posición de las imágenes, siendo, $\eta = kQ^2/GM^2$ el factor que relaciona la carga de la lente respecto de su masa.

Procediendo de manera similar, y después de introducir las expresiones del modelo de la ESI, en el potencial de desviación, Ec. (12), se tiene,

$$\hat{\psi}_{RN} = \frac{\xi_0^2(7+\eta)\pi^2\sigma_v^4}{4c^4}\frac{D_S}{D_L D_{LS}}\chi^2 \qquad (15)$$

Que depende cuadráticamente de la posición de las imágenes representado por χ, mientras que en el caso de usual de lentes gravitacionales sin carga, depende linealmente.

Ahora bien para introducir en el retardo temporal, la Ec. (12), se debe usar los operadores de proyección del **ángulo de deflexión**, $\alpha(x) = D_{LS}D_L/(\xi_0 D_S)\hat{\alpha}$ y del **potencial de desviación**, $\hat{\psi}_{RN} = D_S\xi_0^2/D_L D_{LS}$.

De esta forma el retardo temporal entre dos imágenes queda en la forma,

$$\Delta t = \frac{(1+z_L)}{c}\frac{D_S D_L}{D_{LS}}\frac{(7+\eta)\pi^2\sigma_v^4}{4c^4}|\chi_2^2 - \chi_1^2| \qquad (16)$$

Siendo: D_S es la distancia desde el observador hasta la fuente, D_L es la distancia desde el observador hasta la lente, $D_L S$ es la distancia desde la lente hasta la fuente, z_L es el corrimiento hacia el rojo de la lente, σ_v es la velocidad de dispersión de las componentes de la galaxia deflectora, χ_2 y χ_1 son las posiciones de las dos imágenes.

Este resultado indica que el retardo temporal entre las imágenes depende cuadráticamente de la diferencia de posiciones angulares de las dos imágenes, y no linealmente como es el caso para la lente de schwarszchlid aplicado a éste modelo particular. Este retado temporal con carga produce efectos muy pequeños comparados con obtenido en la lente de schwarszchlid.

10. Conclusiones

Se desarrolló la métrica de Reissne-Nordstrom para una masa estática con simetría esférica considerando que tiene una carga eléctrica neta, teniendo en cuenta la ecuación de campo de Einstein con tensor electromagnético.

Se transformó esta métrica a coordenadas Isotrópicas para estudiar el rayo de luz en todas las direcciones, sin hacer aproximaciones en parte angular, para que la parte espacial tenga la misma forma que la métrica plana.

Se encontró el índice de refracción de la luz en términos de la masa y la carga de la lente, y se hizo una expansión en series de Fourier tomándose contribuciones cuadráticas de masa y carga hasta segundo orden.

Se encontraron expresiones para el ángulo de deflexión y potencial de desviación para el caso de distribuciones de masa y carga eléctrica (Lentes por Galaxias).

Se extendieron los resultados obtenidos para el caso de lentes gravitacionales de masas y cargas puntuales en el contexto de Reissner - Nordstrom, al caso de distribuciones de materia (Masa y Carga), y poder estudiar posteriormente modelos de lentes.

Se encontró una expresión para el retardo temporal entre dos imágenes en lentes por galaxias en el contexto de Reissner-Nordstrom.

En la literatura normal sobre lentes gravitacionales al hacer la expansión en serie únicamente se toman términos a primer orden en la masa, despreciando las demás contribuciones.

Se aplicó la expresión del retardo temporal al caso particular de lentes por galaxias modeladas como una esfera singular isoterma.

Se observa que el retardo temporal en el modelo de esfera singular isoterma, para el caso Schwarszchild es una función lineal de la posición de las imágenes, mientras que para el caso Reissner-Nordstrom la variación es cuadrática.

1. R. Adler, M. Schiffer, y J. Bazin, *Introduction to General Relativity*. (McGraw-Hill co, New York, 1975).
2. P. Schneider, J. Ehlers, E. Falco. *Gravitational Lenses*. (Springer. Berlin. A&A Library 1992).
3. R. Narayan, y M. Bartelmann, *Lectures on Gravitational Lensing*. (Max Planck-Institut für Astrophisik, 1997).
4. S. Mollerach, y E. Roulet, *Gravitational Lensing and Microlensing*. (Centro Atómico Bariloche, Argentina. World Scientific Publishing, 2002).
5. V. Bozza, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 103001.
6. Ernesto F. Eiroa, *Phys Rev D* **73** (2006) 043002.
7. Mauro Sereno, *Weak field limit of Reissner-Nordstrom black hole lensing*
8. E. Román-Hernández, J.G. Santiago-Santiago, G. Silva-Ortigoza, R. Suárez- Xique y B. Zenteno-Mateo, *Rev. Mex Fis* (2007).
9. E. F. Eiroa, G. E. Romero and D. F. Torres, *Nordstrom black hole lensing*. arXiv:gr-qc/0203049v3. 14 Febrero 2003.
10. C. Miranda, "*Estimación de la Constante Cosmológica a partir del retardo temporal en el modelo de la esfera singular isoterma aplicado al sistema* PG 1115+080". (Universidad del Atlántico 2007).
11. J. M. Tejeiro, L. Castañeda, "*Estadistica de lentes gravitacionales en diferentes modelos evolutivos de galaxias*" (Universidad Nacional de Colombia. 2001).
12. J. M. Tejeiro, *Notas de Clase* (Universidad Nacional de Colombia. Bogotá).
13. S. López, *Lentes Gravitacionales* (Departamento de Astronomía, Universidad de Chile. 2006).
14. R. Casadio, *Phys Rev D* **58** 044015.

15. M. Bartelmann and P. Schneider, *Weak Gravitational Lensing*, (Max-Planck-Institut für Astrophysik, P.O. Box 1523, D-85740 Garching, Germany).
16. C. Cabra, *Efecto lente gravitacional en la métrica de Reissner-Nordstr∅m* (Tesis de Maestría, Universidad de Sucre 2008).