УДК 622. 776

**И.К. МЛАДЕЦКИЙ,** д-р техн. наук,
**Я.Г. КУВАЕВ, К.А. ЛЕВЧЕНКО,** кандидаты техн. наук,
**А.А. ЛЫСЕНКО**
(Украина, Днепропетровск, Национальный горный университет)
**А.А. ПАВЛЕНКО**
(Украина, Днепропетровск, Национальная металлургическая академия)

# МИНИМАЛЬНЫЕ МАССЫ ПРОБ ДЛЯ АНАЛИЗА ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА СЫРЬЯ

Для того, чтобы выполнить правильное опробование необходимо знать закономерности распределения ценного компонента в руде, а для того, чтобы узнать эти закономерности необходимо выполнить опробование. Таким образом, если массив полезного ископаемого не исследован или не подвергался разработке, имеется противоречие. Обычно такое противоречие разрешается итеративным путем. Для чего проводят опробование на основании инженерной интуиции и после обработки проб, получают искомые закономерности. На основании полученных закономерностей определяют параметры опробования и производят повторное опробование и получают уточненные закономерности. Сравнивая два полученных результата, делают вывод о необходимости дальнейших исследований и так, в конце концов, получают правильные показатели опробования. С целью определения аналитических зависимостей показателей опробования от закономерностей распределения показателей свойств полезного ископаемого будем полагать, что последние достоверно определены.

Показателями свойств сырья являются текстурно-структурные признаки: вкрапление ценного компонента ($d_{ВК}$) и размеры рудных, мало-рудных и нерудных прослоев ($L_P$, $L_{MP}$, $L_H$).

Опробование производят монолитного массива или состоящего из сыпучего материала. От монолитного массива при опробовании откалывают куски и из них формируют пробу. Таким образом, в любом случае, проба состоит из кусков полезного ископаемого. В зависимости от соотношения размеров кусков и текстурно-структурных признаков, куски могут быть открытым рудным или нерудным минералом или сростком. Содержание ценного минерала в сростках изменяется от минимального значения $\alpha_{МИН}$ до максимального $\alpha_{МАКС}$ ($\alpha_{МИН} < \alpha < \alpha_{МАКС}$) в зависимости от соотношения размеров кусков и текстурно-структурных признаков полезного ископаемого. Рассмотрим модель структуры рудных вкраплений (рис. 1). Когда размеры частиц лежат в пределах $L_{вк} < d < 2L_{вк}$, то содержание ценного компонента будет максимальным при $d = L_{вк} + d_{вк}$. В этом случае соседнее зерно вкрапления принадлежит частице с максимально возможным содержанием в ней ценного минерала (рис. 1а).

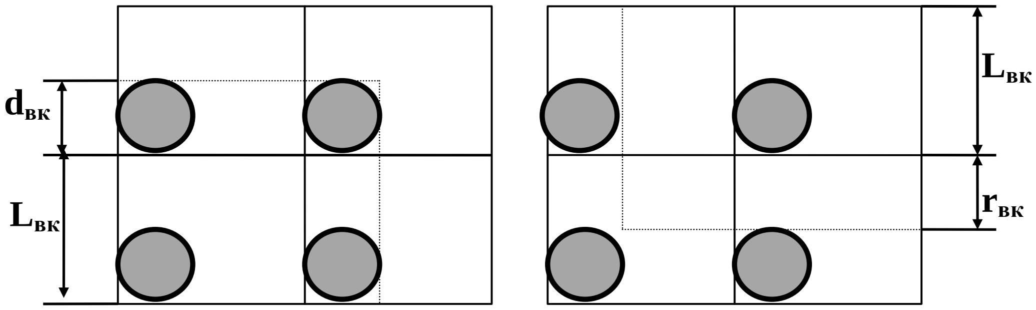


Рис. 1. Возможные виды сростков

$$\alpha_{\max} = \left( \frac{2d_{вк}}{r_{вк} + 2d_{вк}} \right)^3. \tag{1}$$

Если в частице всего одно зерно, а расстояние между зернами вкрапления двойное, то минимальное содержание ценного минерала (рис. 1,б)

$$\alpha_{\min} = \left( \frac{d_{вк}}{2r_{вк} + d_{вк}} \right)^3. \tag{2}$$

При размерах частицы $2L_{вк} < d < 3L_{вк}$ максимально возможное содержание в ней ценного минерала ($n$=2)

$$\alpha_{\max} = \left( \frac{3d_{вк}}{2r_{вк} + 3d_{вк}} \right)^3,$$

а минимальное

$$\alpha_{\min} = \left( \frac{2d_{вк}}{3r_{вк} + 2d_{вк}} \right)^3.$$

Обобщив полученные данные для частиц любого дискретного размера ($nL_{вк}$), определим пределы изменения содержания в них ценного минерала (рис. 2):

$$\left( K \frac{nd_{BK}}{r_{BK} + nL_{BK}} \right)^3 \le \alpha \le \left( K \frac{(n+1)d_{BK}}{d_{BK} + nL_{BK}} \right)^3, \tag{3}$$

где $K$ – коэффициент, учитывающий фактор формы вкрапления.

В соответствии с этими кривыми весь продукт распределяется на богатые и бедные сростки. Открытые зерна представляют частный случай сростков. Рассмотрим, каким образом распределяются частицы между фракциями. Определив значение размера куска, в котором разность содержаний ценного минерала между максимальным и минимальным значениями несущественна, получим минимальный кусок, который по свойствам не отличается от монолита.

*Пример*

Вкрапление ценного минерала составляет $d_{BK}$ = 0,2 мм, содержание ценного минерала $\alpha$ = 0,3. Каков размер куска, в котором различие между предельными значениями содержания ценного минерала не превышает 1% отн.

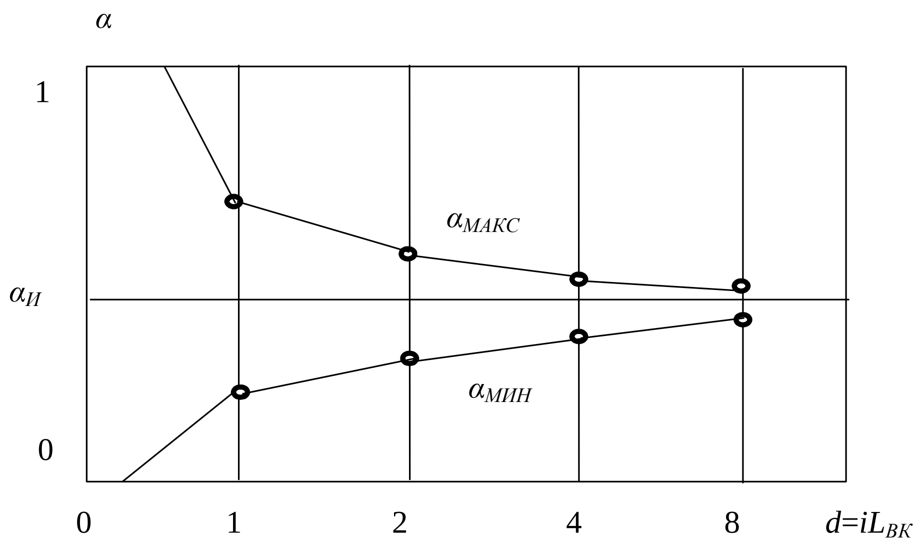


Рис. 2. Графики изменения предельных значений содержания ценного компонента в частицах заданной крупности

*Решение*

Будем задаваться все большими значениями $n$ до тех пор, пока относительная погрешность не достигнет заданного значения.

$n$ = 1.

$$\left(K\frac{nd_{BK}}{r_{BK}+nL_{BK}}\right)^3 = \left(\frac{0{,}2}{0{,}06+0{,}26}\right)^3 = 0{,}24;$$

$$\left(K\frac{(n+1)d_{BK}}{d_{BK}+nL_{BK}}\right)^3 = \left(\frac{2\times 0{,}2}{0{,}2+0{,}26}\right)^3 = 0{,}65;$$

$$\varepsilon = \frac{0{,}65-0{,}24}{0{,}65} = 0{,}7.$$ Погрешность весьма высокая.

$n$ = 10.

$$\left(K\frac{nd_{BK}}{r_{BK}+nL_{BK}}\right)^3=(\frac{10\times0{,}2}{0{,}06+10\times0{,}26})^3=0{,}42;$$

$$\left(K\frac{(n+1)d_{BK}}{d_{BK}+nL_{BK}}\right)^3=(\frac{11\times0{,}2}{0{,}2+10\times0{,}26})^3=0{,}48;$$

$\varepsilon=\dfrac{0{,}48-0{,}42}{0{,}48}$ = 0,125. Погрешность высокая.

Увеличиваем размер кусков дальше.

При $n$ = 40 имеем погрешность около 3%, а при $n$ =150 погрешность составляет менее 1%.

Поиск закончен. Минимальный размер куска, который по свойствам вкрапленности и содержанию ценного компонента не отличается от монолита, составит $d = 150d_{BK}$ = 30 мм.

Аналогично представляя пульпу в матричном строении ее структуры возможно определение минимального ее объема для определения содержания твердого в ней. Опорными характеристиками служат максимальная крупность частиц $d$ и объемное содержание твердого $p$. Расстояние между частицами твердой фазы в пульпе будет равно:

$$r=d(\sqrt[3]{\frac{0{,}65}{p}}-1),$$

а различие в содержании твердого может быть выражено как:

$$\left(K\frac{nd}{r+nL}\right)^3<p<\left(K\frac{(n+1)d}{d+nL}\right)^3.$$

При заданной погрешности в 1%, максимальной крупности частиц в пульпе 1 мм и объемном содержании твердого $p$=0,3 требуемый объем пульпы составляет 7,5 литров.

Рассмотрим случай влияния на массу пробы текстурных признаков руды.

В железной руде выделяют рудные прослои, малорудные и нерудные. Каждый слой характеризуют средним размером, т.е. $L_P$, $L_{MP}$, $L_H$; в которых находится среднее содержание ценного минерала: $\alpha_P$, $\alpha_{MP}$, $\alpha_H$. Содержание ценного минерала в руде составляет:

$$\alpha=\frac{\alpha_P L_P+\alpha_{MP}L_{MP}+\alpha_H L_H}{L_P+L_{MP}+L_H}.$$

При дроблении в кусках сосредотачивается различное количество всех прослоев и содержание ценного минерала в них теоретически будет различное. Наконец существует кусок такого размера, больше которого качественные характеристики кусков будут несущественно отличаться. Минимальное содержание в кусках будет таким, если кроме набора всех прослоев будет включено в куске еще один нерудный прослой, а максимальное содержание будет, когда включается один рудный прослой. В общем виде, эти соотношения выглядят так:

$$\alpha_{МАКС} = \frac{\alpha_P L_P + N\sum \alpha_i L_i}{L_P + N\sum L_i}, \ \alpha_{МИН} = \frac{\alpha_H L_H + N\sum \alpha_i L_i}{L_H + N\sum L_i},$$

здесь $N$ – количество наборов прослоев в куске руды.

Проведем оценку различия данных величин при условии, что $L_P$ =0,5 см, $L_{MP}$ = 1 см, $L_H$ = 1,5 см, $\alpha_P$ = 0,5, $\alpha_{MP}$ =0,2, $\alpha_H$ =0,1.

$N$=10.

$$\alpha_{МИН} = \frac{6+0{,}15}{30+1{,}5} = 0{,}195, \ \alpha_{МАКС} = \frac{6+0{,}25}{30+0{,}5} = 0{,}205,$$ погрешность $\varepsilon$ =0,05.

$N$=50.

$$\alpha_{МИН} = \frac{30+0{,}15}{150+1{,}5} = 0{,}1990, \ \alpha_{МАКС} = \frac{6+0{,}25}{30+0{,}5} = 0{,}20,$$ погрешность $\varepsilon$ =0,01.

Размер кусков для $N$=10 составляет $d = N^*\sum L_i$ = 30 см, Масса пробы при этом: $q = \frac{\pi}{6} d^3 \delta = 0{,}52 \times 0{,}3^3 \times 3500 \approx 50$ кг – для $\varepsilon$=0,05 . Взяв $N$=50 размер куска составит $d$ = 150 см а масса пробы $q = \frac{\pi}{6} d^3 \delta = 0{,}52 \times 1{,}5^3 \times 3500 = 6132$ кг.

Таким образом, высокая точность определения показателей требует значительной массы пробы. Промышленное значение может иметь, как всегда 5% точность.

Рассмотрим случай формирования пробы из малых кусков.

Возьмем некоторый объем в виде куба, у которого измерение равно $L$. В нем может разместиться матрично и плотно упакованных шаров (частиц) диаметром $d$ в количестве $n = \frac{L}{d}$ штук. Но в соответствии с аксиомой Архимеда величина $n$ может быть или целым числом или будет остаток $C$, меньший 1: $C < 1$. Целая часть $n_1$ дает количество шаров в объеме, а $C$ – незанятую часть. Оценим коэффициент заполнения $K_3$ произвольного объема одинаковыми шарами диаметром *d*. Объем занятый шарами равен

$$V_T = \frac{\pi}{6} d^3 n_1. \tag{4}$$

Общий объем измерения равен $V = L^3$. Коэффициент заполнения будет таким:

$$K_З = \frac{V_T}{V} = \frac{\pi}{6L^3} d^3 n_1. \tag{5}$$

Количество шаров равно $n_1 = \left(\frac{L}{d} - C\right)^3$ и, таким образом, получаем

$$K_З = \frac{\pi d^3}{6L^3}\left(\frac{L}{d} - C\right)^3 = \frac{\pi d^3}{6L^3}\left(\frac{L^3}{d^3} - 3\frac{L^2}{d^2}C + 3\frac{L}{d}C^2 - C^3\right) =$$
$$= \frac{\pi}{6}\left(1 - 3\frac{d}{L}C + 3\frac{d^2}{L^2}C^2 - C^3\right).\ C = \frac{L}{d} - \mathrm{int}\left(\frac{L}{d}\right). \tag{6}$$

Отсюда: коэффициент заполнения зависит от размера частиц, и чем меньше отношение $\frac{d}{L}$, тем меньше эта зависимость, и когда $d \to 0$, $K_З \to \frac{\pi}{6}$. Поскольку это идеальный результат, то в действительности всегда имеется зависимость $K_З = f(d)$ и поэтому о стабильном значении коэффициента заполнения можно говорить с определенной погрешностью. Примем значение малой ошибки (по нашему мнению) такую, что ею можно пренебречь. Пусть это будет, например, $\varepsilon = 0{,}05$.

Так как $\frac{d}{L} \le 1$ и $C < 1$, то произведения этих величин при высоких степенях стремятся к нулю достаточно быстро при уменьшении $\frac{d}{L}$. Второе слагаемое на порядок больше третьего и на два порядка больше четвертого. Поэтому сосредоточимся на первых двух членах разложения, т.е. $1 - 3\frac{d}{L}C = 0{,}95$. Отсюда определяем минимальное значение измерения кубической емкости, для которой коэффициент заполнения уже не изменяется с увеличением объема пробы: $3dC = (1 - 0{,}95)L$; $L = \frac{3dC}{\varepsilon}$, $(L)^3 = \left(\frac{3dC}{\varepsilon}\right)^3$; а минимальный объем при этом будет

$$V=\left(\frac{3C}{\varepsilon}\right)^3 d^3.$$

Обращаем внимание на то, что в числителе стоит величина, отражающая ошибку метода измерения, а в знаменателе требуемая точность измерения. Минимальная масса получается, если учесть плотность вещества, которое опробуется, т.е.

$$q=\left(\frac{3C}{\varepsilon}\right)^3 \delta d^3. \qquad (7)$$

В дальнейшем примем обозначения $\varepsilon_И \equiv C$, $\varepsilon \equiv \varepsilon_З$.

*Пример*

Определить минимальную массу пробы при условии, что $\varepsilon_И = 0{,}05$, $\varepsilon_З = 0{,}01$, плотность руды 3500 кг/м$^3$, максимальный размер куска 30 мм.

Выразим все величины в одной системе единиц: кг, см.

$$30 \text{ мм} = 3 \text{ см},\ 3500 \text{ кг/м}^3 = 0{,}0035 \text{ кг/см}^3;$$

$$q=\left(\frac{3\times 0{,}05}{0{,}01}\right)^3 0{,}0035\times 3^3 \approx 319 \text{ кг}.$$

Выполняя, например, фракционный анализ или анализируя функцию распределения частиц по крупности необходимо для каждого класса иметь представительную массу с тем, чтобы достоверно выполнить измерение содержания этого класса. На этом основании можно записать, что в общей массе частиц минимальная масса определенного класса занимает содержание в количестве

$$p_i(d)=\frac{q_i}{m_П},$$

где $m_П$ общая масса пробы.

Тогда минимальная масса общей пробы составит

$$m_П=\left(\frac{k\varepsilon_И d}{\varepsilon_З}\right)^3 \delta \frac{1}{p(d_i)}.$$

Соотношение между размером частиц и содержанием их в продукте весьма разнообразно, поэтому необходима уверенность в том, что выбранная фракция всесторонне представляет пробу. Такой уверенности заранее нет, поэтому, как обычно, в общем случае необходимо некоторое усреднение. Средневзвешенная величина составит

$$\overline{m}_{\Pi} = \sum \frac{q_i}{p(d_i)} p(d_i) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{k\varepsilon_И}{\varepsilon_З})^3 d_i^3 \delta .$$

Таким образом, определив минимальные массы для каждого узкого класса крупности, минимальная масса общей пробы для определения гранулометрического состава равна сумме минимальных масс узких классов крупности

$$m_{\Pi} = (\frac{k\varepsilon_И}{\varepsilon_З})^3 \delta \sum_{i=1}^{n} d_i^3 .$$

Отсюда следует, что чем уже диапазон изменения крупностей частиц в классе, тем больше должна быть минимальная масса пробы и не зависит от ее содержания в общей массе частиц.

*Пример*

1.Диапазон изменения крупностей частиц разбит на 3 интервала со значениями 1, 3, 7 мм. Определить массу пробы, при условии, что $\varepsilon_И = 0,05$, $\varepsilon_З = 0,01$, плотность руды 3500 кг/м$^3$.

*Решение*

$$m_{\Pi} = (\frac{1 \times 0,05}{0,01})^3 0,0035(0,1^3 + 0,2^3 + 0,7^3) = 0,154 \text{ кг.}$$

2. Диапазон изменения крупностей частиц разбит на 5 интервалов со значениями 1, 5, 10, 15, 20 мм. Определить массу пробы, при условии, что $\varepsilon_И = 0,05$, $\varepsilon_З = 0,01$, плотность руды 3500 кг/м$^3$.

$$m_{\Pi} = (\frac{1 \times 0,05}{0,01})^3 0,0035(0,1^3 + 0,5^3 + 1,0^3 + 1,5^3 + 2^3) = 5,9 \text{ кг}$$

Распределение полезного ископаемого по плотности $\delta_i$ (фракционный состав) приводит к аналогичной формуле, приняв в качестве общего параметра максимальную крупность $d_{\max}$ частиц, находящуюся в опробуемом массиве, масса общей пробы составит

$$m_{\Pi} = (\frac{k\varepsilon_И d_{\max}}{\varepsilon_З})^3 \sum_{i=1}^{n} \delta_i .$$

Таким образом: чем меньше интервал разбиения аргумента величины, тем больше масса пробы.

Поскольку плотность частиц связана с содержанием в них ценного минерала $\alpha$

$$\delta_i = \frac{\delta_2 \delta_1}{\delta_2 - \alpha_i(\delta_2 - \delta_1)},$$

где $\delta_2 > \delta_1$ плотности ценного и неценного минералов частиц, соответственно; то можно записать выражение для минимальной массы определения функции распределения сростков.

Таким образом, если необходимо определить распределение сростков по содержанию в них ценного минерала, то формула минимальной массы примет вид:

$$m_{\Pi} = \left(\frac{k\varepsilon_{И} d_{\max}}{\varepsilon_{З}}\right)^3 \delta_2 \delta_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\delta_2 - \alpha_i(\delta_2 - \delta_1)}.$$

Известно, что в зависимости от размера частиц диапазон изменения содержания в ней ценного минерала изменяется. Поэтому измельченная масса частиц характеризуется двумерной функцией распределения: по крупности и по плотности.

В этом случае соотношение между содержанием класса и фракции и минимальной массой составят:

$$p(\alpha_j / d_i) p(d_i) = \frac{C d_i^3 \delta_j}{m_{\Pi}}.$$

На основании данного соотношения при усреднении, получаем:

$$\sum_j \sum_i \; p(\alpha_j / d_i) p(d_i) \frac{C d_i^3 \delta_j}{p(\alpha_j / d_i) p(d_i)} = \sum_j \sum_i C d_i^3 \delta_j = m_{\Pi},$$

где $C = \left(\frac{k\varepsilon_{И}}{\varepsilon_{З}}\right)^3$.

Когда для каждого измерения регламентируется своя точность измерения и заданная точность, тогда под символ суммы переходят и точностные характеристики

$$\sum_j \sum_i C_{ij} d_i^3 \delta_j = m_{\Pi}, \quad C_{ij} = \left(\frac{k\varepsilon_{ijИ}}{\varepsilon_{ijЗ}}\right)^3.$$

Таким образом, при определении минимальной массы пробы для исследования функций распределения параметров полезного ископаемого необходимо суммировать значения параметров, характеризующих узкие классы.

Поскольку для анализа раскрытия в свою очередь необходимо опробование, для которого необходимо знать минимальную массу, которую определяют на основании закономерностей распределения ценного компонента, то для разрешения такого противоречия следует воспользоваться экспериментальным поиском. Суть такого поиска состоит в следующем.

От массива измельченного полезного ископаемого отбирают пробу в количестве, которое определено на основании опыта опробования – $q_1$.

Выполняют фракционный анализ и получают функцию раскрытия – $F_1(\alpha)$.

Отбирают вторую, например, большую пробу – $q_2$.

Снова выполняют фракционный анализ и получают – $F_2(\alpha)$.

В соответствии с полученными функциями проверяют их на идентичность в соответствии, например, критерием $\chi^2$-Пирсона:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{F_1(\alpha_i) - F_2(\alpha_i)}{F_1(\alpha_i)}\right)^2.$$

Затем по таблицам распределения $\chi^2$-Пирсона, для заданной доверительной вероятности $P_{ДОВ}$ и количестве интервалов фракционного анализа $n$ определяют теоретическое значение критерия $\chi_T^2 = f(P_{ДОВ}, n)$. И если $\chi_T^2 > \chi^2$, то расхождение между функциями $F_1(\alpha)$ и $F_2(\alpha)$ несущественное, следует продолжить поиск минимальной массы пробы. Так как вторая проба была большей, то следует взять третью пробу меньшей массы, чем первая. Снова выполнить фракционный анализ и найти функцию $F_3(\alpha)$. Проверить соответствие функций $F_1(\alpha)$ и $F_3(\alpha)$. И если $\chi_T^2 < \chi^2$, то первая проба будет и минимальной.

Младецкий И.К., Мостыка Ю.С. Аналитическое определение показателей раскрытия руд. – Д.: Системные технологии, 1999. – 106 с.



*Надійшла до редколегії 20.12.2012 р.*
*Рекомендовано до публікації д.т.н. В.П. Франчуком*