Diàleg entre iguals a l'aula. Eina per a la construcció del coneixement matemàtic

Xavier Vilella Miró

Resum

La construcció del coneixement matemàtic implica que l'alumne estableixi les connexions adients entre el nou coneixement i aquells dels quals ja disposa, que els connecti amb la seva xarxa personal de pensament. El procés d'aprenentatge que es pot esdevenir en una aula és determinat pel tipus d'ensenyament de les matemàtiques que es plantegi. Hem de partir del principi que totes les persones saben matemàtiques, poden aprendre'n i poden comunicar les seves idees als altres. El diàleg entre iguals és una eina potent per a aconseguir que a l'aula hi hagi construcció de coneixement matemàtic. Per a facilitar aquesta mena de diàleg, cal que es donin algunes condicions (relacionades amb els objectius d'alt nivell que es persegueixen, les tasques i el seu enriquiment, les intervencions del professor, el tractament de l'error i el paper del contrast, etc.). A l'aula de matemàtiques també hem d'ajudar a aprendre a dialogar.

Abstract

The building of mathematical knowledge implies that the students establish the appropriate connections between the new knowledge and their prior knowledge, connecting them with their personal network of thought. The learning process that can occur in a classroom is determined by the type of teaching of mathematics devised. We start from the principle that all people know mathematics, can learn mathematics and are able to communicate their ideas to others. Dialogue among peers is a powerful tool to accomplish the building of mathematical knowledge in the classroom. To facilitate such dialogue certain conditions are necessary (related to the high-level goals to be achieved, tasks and their enrichment, teacher's interventions, the treatment of errors and the role of contrast, etc.). In the math classroom we also need to help learning how to dialogue.

«Ah, és clar, ara ho veig!»

Ara ho veu, abans no ho veia. Quan aquesta afirmació, veritable declaració pública d'haver arribat a un punt final en la comprensió, apareix de forma espontània a l'aula de matemàtiques, enmig d'un diàleg entre alumnes (o amb el professor o professora), acostuma a indicar que algun aspecte del coneixement matemàtic ha trobat on col·locar-se en la xarxa de sabers d'un alumne, ha passat de ser informació a coneixement. Si s'han establert les connexions entre el nou coneixement i aquells dels quals l'alumne ja disposava —la xarxa personal—, s'està construint coneixement matemàtic.

En una entrevista vaig sentir dir a Jorge Wagensberg que un bon educador és, sobretot, un bon proveïdor d'estímuls. Cal que ens preguntem: quina mena d'estímuls hem de proveir a l'aula de matemàtiques? I per a obtenir quins resultats?

El diàleg entre iguals que condueix a la construcció de coneixement matemàtic acostuma a donar-se de forma espontània per part de l'alumnat si es troba en la situació adient. El paper del professorat no és conduir l'alumnat per un diàleg previst —programat prèviament pel professor—, sinó afavorir que flueixi allò que es troba a l'interior del cap de l'alumne, en una interacció que mai podrem saber del tot per on anirà i on acabarà. Aquí hi ha l'oportunitat i la fortalesa i, alhora, la feblesa del mètode dialògic. Per tant, caldrà mesurar amb molta cura la intervenció del professor perquè, a destemps, pot tallar la riquesa i la creativitat de l'alumnat. En canvi, una intervenció oportuna pot conduir (o reconduir) el diàleg entre iguals cap a la desitjada construcció del coneixement matemàtic.

Condicions per a un diàleg constructiu a l'aula

El primer que cal fer és preparar una bona proposta de tasca, enriquida[1] des del punt de vista del desenvolupament de les competències matemàtiques, que contingui algun repte matemàtic (Burgos i altres, 2006).

També cal establir, de comú acord amb l'alumnat, les condicions que permetin un debat que porti a construir col·lectivament coneixement matemàtic.

Aquestes condicions són:

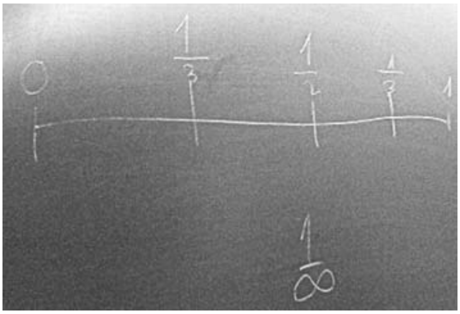
- A la classe de matemàtiques només parla una persona, sigui el professor o sigui un alumne. Quan una persona parla, les altres escoltem.
- Si qualsevol de nosaltres vol dir alguna cosa (perquè no està d'acord amb qui ha parlat, perquè vol demanar un aclariment, perquè vol ampliar el que s'ha dit...), aixeca la mà i espera que se li concedeixi la paraula.
- Quan escoltem una persona que parla, reflexionem sobre allò que diu: no estem esperant que acabi per a dir-hi la nostra, sinó que intentem esbrinar si el que s'ha dit fa innecessària la nostra intervenció, o bé podem lligar el que volem dir amb el que ha plantejat qui ens ha precedit o contradir algun dels arguments escoltats.
- Quan una persona surt a la pissarra i exposa allò que pensa escrivint, operant, argumentant davant de tota la classe, deixarem que acabi d'exposar la seva opinió i, si no hi estem d'acord, aixecarem la mà: serà l'alumne que ha sortit qui donarà la paraula a un company o companya, escoltarà el que li ha de dir i hi mostrarà el seu acord o el seu desacord. Llavors podrà donar la paraula a un altre company o companya.
- En el moment que s'arribi a un acord, s'acabarà el debat.

S'ha d'intentar negociar aquestes condicions amb l'alumnat. Una bona manera de fer-ho és plantejar el tema a la classe i esperar (d'una manera conduïda, si cal) que els alumnes vagin plantejant-les perquè les vegin molt raonables.

1. Les característiques d'aquesta mena de tasques riques es poden trobar a l'article «La participación en el aula de matemáticas» esmentat a la bibliografia.

Primer exemple: La fracció que més s'acosta a 0

Treballant les fraccions a primer d'ESO.



Professor: «Escriu fraccions pròximes a 0».

Els alumnes van dient 1/10, 1/30, 1/1 milió...

Nil: «*La fracció més pròxima a zero és* $1/\infty$*, oi, Xavier?*».

Alguns companys li demanen explicacions; surt a la pissarra i fa un dibuix. Primer dibuixa una recta, marca 0 i 1, en fa meitats i terços, i diu:

Nil: «Si anem dividint per nombres cada vegada més grans, ens acostem a zero; la fracció que té el denominador més gran serà dividida per infinit i, per tant, la més pròxima a zero és $1/\infty$».

Discutim si és una fracció, quina mena de nombres hi ha en el numerador i en el denominador, i si l'infinit, tot i disposar d'un símbol, és un nombre o no.

L'ensenyament de les matemàtiques en un aula determina l'aprenentatge que s'hi pot adquirir. Si allò que pretenem és que l'alumnat construeixi coneixement matemàtic, caldrà ensenyar d'una determinada manera, ben diferent de com ho farem si el que volem és que hi hagi reproducció del que el professor o la professora presenta.

Si el que volem és que el nou coneixement matemàtic es relacioni amb coherència amb allò que l'alumne ja sap, permetent que d'aquesta manera es reestructurin els seus esquemes mentals, caldrà que plantegem una situació que ho faciliti.

Aquestes situacions es basaran en l'activitat de l'alumnat, però això no vol dir necessàriament que hagi de ser manipulativa o exploratòria compulsiva, sinó més aviat activitat interna, basada en les connexions i les reflexions. La interacció entre alumnes i entre aquests i el professor és una de les formes més indicades de promoure aquestes connexions i reflexions.

El paper del professor és actiu i significatiu

La intervenció del professor o professora durant el debat és un punt molt important: com ja he dit abans, cal trobar el moment adequat per a intervenir, si és que cal fer-ho. Des del punt de vista del que es vol aconseguir en aquesta proposta que presento, el fet que un alumne cometi un error en una argumentació, per exemple, no implica necessàriament que el professor hagi de rectificar-lo immediatament. Ben al contrari, allò que interessa és veure si alguna persona de la classe se n'adona i intervé per a entrar en debat o per a comunicar la seva opinió. No aconseguirem desenvolupar l'esperit crític ni les opinions personals en els alumnes, de les quals parla Skovmose (1994), si no els deixem equivocar-se i rectificar gràcies al debat entre iguals.

Al final dels debats, després de la sessió de classe, o quan el professor ho cregui oportú, convé fer una intervenció que reculli el que ha passat, allò que ha sortit en forma d'arguments, la conclusió, i estructurar el coneixement adquirit. Si cal, és ara que el professor pot arrodonir el debat i els seus resultats, omplir els buits que encara hagin quedat. Aquesta intervenció queda lluny de la tradicional classe magistral perquè s'esdevé després del debat, cosa que afavoreix que l'alumnat pugui trobar amb més facilitat els punts d'enllaç entre el seu pensament i les idees que presenta —que completa— el professor.

Durant el debat, cal anar prenent nota del que cada alumne ens està mostrant: la construcció del coneixement matemàtic i el desenvolupament de les competències no es poden veure d'una manera directa, cal observar-los en les intervencions de tota mena que es van fent a l'aula i també en les produccions escrites (quaderns d'aula, apunts, treballs, exàmens).

Però les anotacions d'aquests debats són una eina fonamental per a l'avaluació. En aquest article no podré desenvolupar més aquest aspecte, però puc assegurar que el desenvolupament de les habilitats del professorat per fer anotacions d'aquesta mena durant les classes de matemàtiques és un objectiu constant en les meves sessions de formació del professorat.

El diàleg que ens porta més enllà del que havíem previst

No és gens estrany que un debat entre iguals a classe vagi molt més enllà del contingut que el professor pensava donar. Aquesta és una situació que pot resultar complicada per al professor o professora, perquè anem justos de temps, no volem allargar-nos gaire en un tema determinat, tenim programats uns continguts per a determinades hores, etc. La veritat és que aquest problema no té una resposta única perquè penso que depèn de cada cas. En molts casos que jo he viscut, el debat m'ha mostrat nous camins per a ensenyar un contingut, o bé algunes causes de les dificultats que representa l'aprenentatge d'un contingut per a alguns alumnes, o bé he vist clar que el sostre del que podia donar era més alt del que em pensava. En el segon exemple que presento a continuació es pot observar, entre d'altres aspectes, com alumnes de segon d'ESO poden anar molt més lluny del que ens indica el currículum oficial de l'ESO.

Per tant, allò que aconsello és que el professor o professora decideixi en cada cas el que cregui més oportú, tenint en compte les possibilitats que el debat entre iguals ens pot oferir.

Segon exemple: Duplicar la longitud dels costats d'un quadrat

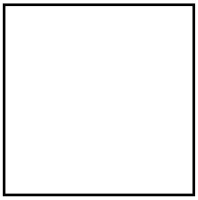
Segon d'ESO. Primer tema del curs, primer dia de classe.

Professor: «Pensa en un quadrat, imagina-te'l. Ara, dobla la longitud dels seus costats, conservant la forma quadrada. Te'ls imagines doblats? D'acord, ara pensa: si a l'àrea del quadrat que has pensat inicialment li donem el valor d'1, quina àrea té el quadrat de costats doblats?».

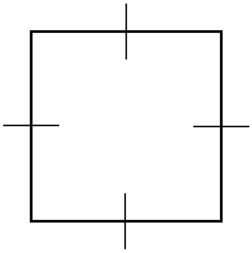
El professor anota les propostes de resultat a la pissarra i invita que cada resultat sigui defensat per una persona de la classe:

Núria: «1».
Pep: «2».
Marina: «8».
Hajar: «4».
Andy: «0,5».

La Núria (proposta de resultat 1) surt a la pissarra i dibuixa un quadrat:



Seguidament, a l'ordre «Dobla els seus costats» dibuixa això:

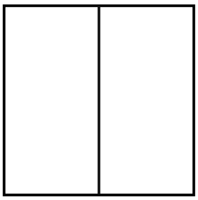


I diu: «He doblat els costats, ara n'hi ha 8, i l'àrea segueix essent 1».

La Mariona li explica: «El que has fet és tallar els costats per la meitat, però no tens 8 costats, en tens 4 com abans i no són més llargs».

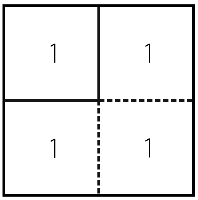
La Núria ho ha comprès de seguida: «És veritat! Això no és doblar els costats. No és 1».

Surt en Pep, que ha proposat el resultat 2. Dibuixa un quadrat. Seguidament, «dobla els seus costats», dibuixant això:



Pep: «Ui, no, no és un quadrat, m'he equivocat, és 4».

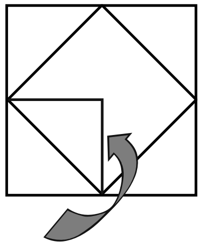
Llavors dibuixa les línies discontínues i escriu els nombres.



La Marina, que pensava defensar el resultat 8, demana la paraula per rectificar abans de sortir a la pissarra i explica que havia doblat el nombre de costats, no la llargària. Hajar, que havia de defensar el valor 4, afirma que ja ho ha fet en Pep.

Queda l'Andy, que defensa el valor 0,5. Em crida fortament l'atenció aquest resultat. La seva argumentació és la següent:

L'Andy surt a la pissarra i dibuixa un quadrat. Quan ha de doblar els costats doblega els costats cap a dins, i afirma, coherentment amb aquesta interpretació de l'enunciat, que:



—La figura que li dóna és un quadrat.

—La seva àrea és ara la meitat de la inicial: 0,5.

En Manel li critica aquesta interpretació: «Això que has fet és doblegar les puntes, el que havies de fer era doblar la longitud dels costats».

L'Andy admet la crítica, però diu que és un quadrat i que el resultat és correcte, però no per a aquest problema. El professor assenyala que dins de la seva interpretació el que afirma és correcte, encara que no era el que esperava de la interpretació de l'enunciat.

La seqüència de classe segueix així:

Professor: «Què passarà amb l'àrea si tripliquem la llargària dels costats?».

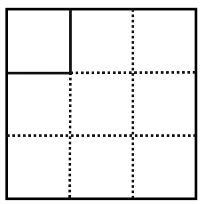
Mariona: «Serà 6».

Robert: «No, serà 12».

Irene: «Serà 9».

Josep: «12 no pot ser, tornes a triplicar el número de costats».

Robert: «6 tampoc és, perquè n'hi caben més». Surt a la pissarra i dibuixa:



Assentiment general; ningú demana cap aclariment. Prosseguim la petita investigació.

Professor: «I si quadrupliquem els costats?».

Diversos alumnes: «16». Bona part de la classe dóna l'aprovació afirmant movent el cap amunt i avall.

Professor: «I si quintupliquem els costats?».

Molts alumnes: «25».

Professor: «Prepareu una taula amb els valors d'increment de costat i el seu corresponent increment d'àrea».

El que surt s'assembla a això:

costat	**àrea**
2	4
3	9
4	16
5	25

Professor: «Mireu de descobrir-hi algun patró» (els patrons s'han treballat a primer d'ESO especialment amb els projectes matemàtics).

Josep: «El primer surt sumant 2 i 2, però el segon, no».

Marina: «Multiplicant surten tots: 2 per 2, 3 per 3, 4 per 4...».

Hajar: «Això no és allò de...?» i amb un dit dibuixa a l'aire el símbol d'una arrel.

Professor: «Què en penseu? És l'arrel quadrada?».

Molts alumnes afirmen que és elevar al quadrat. El professor demana que posin una nova columna a la taula utilitzant la representació en forma de potència.

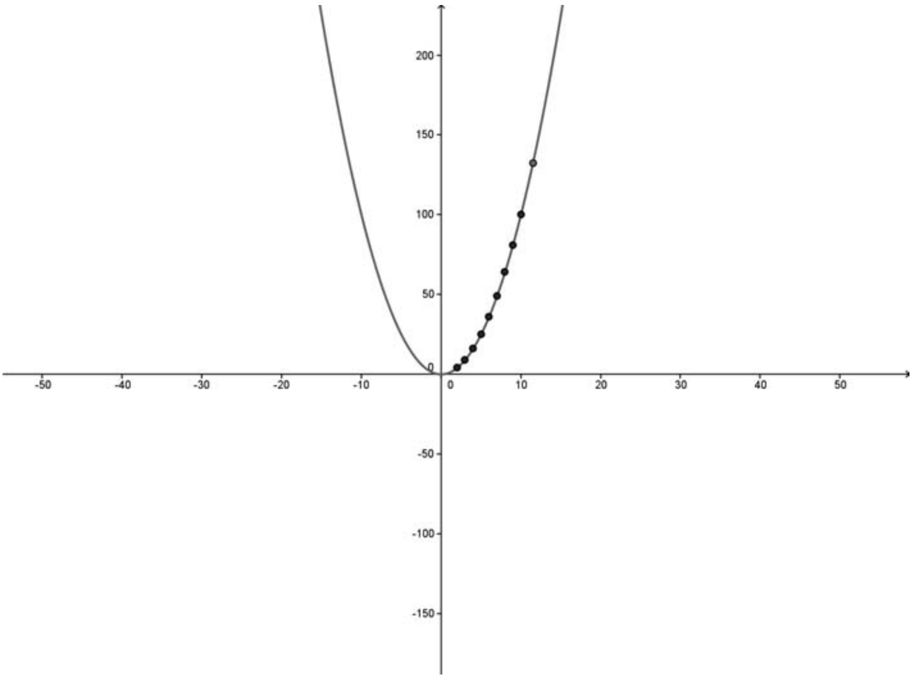
costat	**àrea**	**àrea = costat^2**
2	4	2^2
3	9	3^2
4	16	4^2
5	25	5^2

Professor: «*Representeu les dades de la taula en un gràfic. A l'eix horitzontal, poseu-hi els increments del costat i a l'eix vertical, els increments de l'àrea. Una vegada ho tingueu, intenteu esbrinar quina mena de línia és*».

Els alumnes ho van fent, alguns amb ajuda del professor, i s'adonen de seguida que la línia no és, com habitualment, una recta, sinó una corba estranya. Demanen si està ben fet...

Una vegada feta a mà, se'ls demana que representin el mateix amb el Geogebra (apareix la paràbola sencera i genera noves preguntes en l'alumnat més competent).

Podem, finalment, establir una comparació entre situacions lineals i proporcionals i situacions quadràtiques.



A1: «Per què surten dues branques en el Geogebra? A mi m'ha sortit una branca a la llibreta...».

A2: «És com un mirall, hi ha valors a dreta i esquerra».

A1: «No ho entenc».

A2: «Un mirall; tant podem elevar al quadrat els positius com els negatius».

A3: «Però llavors, si fos com un mirall, també hauria d'anar cap avall».

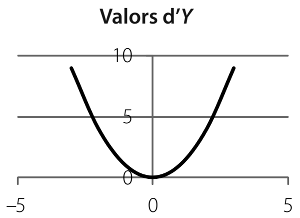
A4: «Amb els quadrats, no pot ser avall».

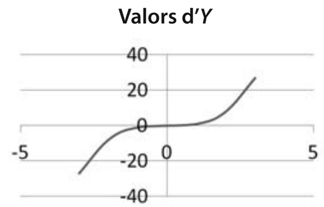
P: «I si no fossin quadrats?».

A4: «Podríem elevar el costat al cub...».

P: «Què ens sortirà?».

A4: «Una branca anirà amunt i l'altra anirà avall».



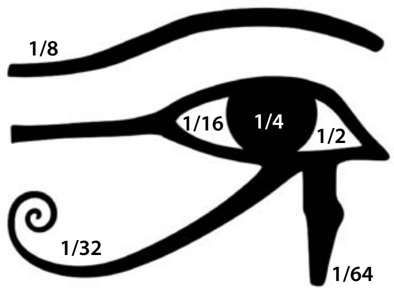


Professor: «Hi ha altres situacions que es resolen amb aquesta relació».

Poden buscar-les a Internet. També se'ls anima perquè inventin una situació problemàtica que es resolgui amb aquesta relació.

Tercer exemple: L'ull d'Horus i l'infinit

Es presenta l'ull d'Horus en una classe de primerd'ESO. Es demana que es fixin en les fraccions que hi apareixen. Hi ha alguna relació entre elles?



S'adonen de la relació entre les fraccions, i cal aclarir quines són el doble o la meitat de quines. Posteriorment, es planteja què creuen que donarà la suma de totes elles: alguns alumnes intueixen que donarà 1.

P: «Suma les fraccions representades a l'ull d'Horus».

Passa alguna cosa... No dóna 1. Intenten sumar una meitat de l'última fracció, discuteixen la fracció que segueix i acorden que és 1/128.

Abans que facin la prova de sumar el 128è, se'ls proposa que hi pensin un moment, que facin una previsió d'allò que passarà.

Professor: «Si hi afegim 1/128, aconseguirem arribar a l'ull sencer, a l'1?».

Rebeca: «... És infinit!».

Jaume: «No hi arribarem, perquè ens faltarà un altre 128è».

P: «I si hi afegim 1/256, arribarem a 1?».

Rebeca: «No, mai no hi arribarem, ho podem fer tantes vegades com vulguem; no hi arribarem mai: és infinit».

Hem d'ensenyar a dialogar a l'aula de matemàtiques?

Freire (1997) afirmava que, a dialogar, se n'aprèn. Dialogar implica una disciplina força exigent: cal escoltar, i cal parlar. Totes dues accions són complexes i cada persona les viu de maneres molt diferents. A més, cal saber centrar-se en un problema definit i concret. Tenia raó Freire: des de l'aula de matemàtiques (no solament des d'aquesta aula, però és molt important per a l'aprenentatge matemàtic que també des d'ella) hem d'ajudar a l'aprenentatge del diàleg.

Tanmateix Flecha (1997) i altres han insistit en el fet que un aprenentatge dialògic facilita que l'alumne prengui consciència del seu procés d'aprenentatge, metareflexiu. I això passa en un ambient en el qual es va consolidant el pensament argumentatiu i crític.

Mesurar la superfície d'algunes illes gregues i comparar-ho

En el tema de la mesura de la superfície, a primer d'ESO se'ls planteja com mesurarien l'àrea d'algunes illes gregues que se'ls presenten en paper. Disposen, a la taula del professor, de fil de cosir, transparència amb una quadrícula, regles, compassos... i poden agafar qualsevol d'aquests materials si creuen que els pot ser d'utilitat. No se'ls indica cap ús concret per part del professorat. Treballen una estona, primer individualment, després en petits grups. Finalment, posada en comú.

Ferran: «Jo crec que el paper quadriculat serveix per a posar-lo al damunt de l'illa i comptar els quadrets».

Edgard: «I què fas quan un quadret té terra i té aigua?».

Ferran: «El que he fet jo ha sigut comptar-los també».

Josep: «Bé, però jo no estic d'acord amb en Ferran; aquest mètode és molt poc exacte. Jo crec que el que s'ha de fer és que si un quadret té la meitat de terra i la meitat d'aigua, cal ajuntar-lo amb un altre que tingui el mateix i així comptes un sol quadret».

Ferran: «No crec que hi hagi problema amb el meu mètode, perquè si fas el mateix a totes les illes es corregeix l'error i sortirà bé la comparació».

Alba: «Jo estic d'acord amb en Josep, perquè si comptes l'aigua dels quadrets de la costa, la mesura de l'illa et sortirà més gran, i si ho fas a totes, aleshores totes les mesures seran massa grans».

Jaume: «Jo estic d'acord amb en Ferran. Això d'ajuntar trossets és poc exacte, perquè (dibuixa un exemple a la pissarra) mai no saps quant trosset de mar hi ha a cada quadret».

Josep: «Segueixo pensant que la meva proposta és millor: el que cal és agafar quadrets més petits quan arribes a la costa, i així la part que agafes de mar és molt petita».

Edgard: «Però, com comptaràs aquests quadrets petits? Com saps quina part són dels quadrets grans?».

Toni: «Jo també opino que els quadrets més petits seran molt complicats de comptar».

Jaume: «Només vull dir que ara he canviat d'opinió. El que ha proposat en Josep m'ha convençut. Recordo que per a mesurar l'amplària de la classe, quan arribem al final i no hi cap una passa, agafem mitja passa, i un quart de passa i així. És el mateix amb els quadrets».

Javier: «Puc sortir a la pissarra?». Surt i fa dibuixos sobre com fer quadrets més petits i comptar-los. «Tenim els quadrets grans que tenen terra. Ara arribem a la costa i passa això (dibuix de quadrets amb mar). Ara agafem el quadret i el partim en quatre parts, per exemple. Ja deixem molt de mar fora i la mesura és molt més exacta».

Es nota a la classe un moviment de confirmació del que diu en Javier. Discuteixen sobre com aplicar aquest mètode de fer-ne quadrets de costat més petit i de com comptar-los.

El professor intervé per mostrar com es fan les subdivisions del quadret inicial en el sistema mètric decimal: un dm^2 conté 100 cm^2, etc. Llavors intervé l'Esther:

Esther: «Això és com la forma fractal, que vam estudiar, oi?».

(Esther. Tres suspensos en el primer trimestre, suspeses les matemàtiques, habitualment poca participació... Recorda i connecta amb el que han treballat mesos abans, les formes i la funció que fan a la natura i a la societat. Una de les formes estudiades fou la forma fractal.)

Dialogar a l'aula obre moltes possibilitats

Si desitgem que els nostres alumnes ordenin el seu pensament i argumentin les seves opinions quan els ho proposem, cal que se'ls demani sistemàticament que justifiquin les seves respostes i que comentin les dels altres. D'aquesta manera s'anirà establint el costum de pensar en els arguments sempre que s'arriba a una solució.

Una vegada s'han establert alguns debats a l'aula, l'alumnat arriba a comprendre fins a quin punt el treball col·laboratiu pot ajudar en l'exploració i la solució de problemes matemàtics. En les situacions de treball en petit grup posteriors a aquests debats, es pot observar una millora en la relació col·laborativa de molts i moltes alumnes, que han comprès millor que abans quines intervencions en l'equip donen bons resultats.

Respecte del professorat, convé estar més pendent de la utilització del diàleg per a implicar l'alumnat en el pensament matemàtic que de tractar d'obtenir ràpidament respostes correctes. El camí pel qual l'alumnat arribi a aquestes respostes pot ser la diferència entre aconseguir un nivell alt, connectiu i reflexiu, o un nivell baix, purament reproductiu.

També es pot observar una millora en l'evolució de les representacions de l'alumnat,[2] que s'explica per la negociació de significats que s'estableix a l'aula en els debats entre iguals.

2. Al capítol titulat «Teacher-researchers and encultured negotiation of meanings» del *Handbook of mathematics Teaching Research* (2008) inclòs a la bibliografia, hi ha exemples de situacions d'aula en els quals es pot veure aquesta evolució de les representacions i l'anàlisi.

D'altra banda, quan el professor o la professora escolta les aportacions de l'alumnat, hi pot haver un canvi en la seva manera de veure algun aspecte de l'aprenentatge dels seus alumnes. La millor manera de conèixer com pensa un alumne consisteix a fer-li produir algun tipus de missatge oral o escrit, que ens doni pistes del recorregut de les seves idees sobre el problema plantejat. Aquesta ruta mental ens pot ajudar a descobrir com donar suport en el punt adequat i preparar la bastida per ajudar-lo a avançar.

El diàleg a l'aula, connectat amb el tractament de l'error i l'atenció a la diversitat

La forma d'interaccionar més habitual en el tracte entre persones és el diàleg. Parlar, escoltar, decidir si estàs d'acord o no amb el que sents, criticar, donar suport, argumentar... Habermas (1987) afirma, en la seva teoria de la competència comunicativa, que totes les persones són capaces de comunicar-se i de generar accions. Per tant, cal que a l'aula de matemàtiques tothom tingui oportunitats de posar en pràctica aquestes habilitats comunicatives. I el diàleg que comporta aprenentatge és capaç de transformar les relacions entre les persones i el seu entorn. No és aquest un dels objectius fonamentals de l'educació en general i de l'educació matemàtica en particular?

Si, com afirma Goffman (1970), les persones actuen i construeixen la realitat en funció de les regles del context i de les expectatives dels altres, resulta essencial que el professorat mostri una actitud de respecte i d'interès vers les opinions que l'alumnat defensa a classe de matemàtiques, destacant especialment aquelles opinions basades en argumentacions sòlides (equivocades o no) que apareguin en el diàleg promogut per la proposta del professorat. De la mateixa manera, els estereotips a classe influencien l'alumnat, i per prestar una atenció correcta a les diversitats que són presents en qualsevol grup classe[3] caldrà que el diàleg hi sigui present de forma habitual, promovent, entre d'altres, hàbits de correcció respecte als errors de companys i companyes, crítica argumentada de les opinions amb les quals no estem d'acord, ordre en les intervencions i tancament de les discussions amb una conclusió que hem de recollir de forma escrita.

Per anar construint una aula inclusiva haurem d'escoltar tothom i discutir totes les aportacions. No importa qui les fa, totes mereixen la nostra atenció, i no hem de fer cas de les etiquetes habituals. La idea forta és que totes les persones saben matemàtiques, poden aprendre'n i poden comunicar les seves idees als altres. El procés d'aprenentatge inclou necessàriament reflexionar, prendre posició i contrastar: l'error forma part d'aquest procés i n'aprenem si som capaços d'analitzar-lo i repensar el camí seguit.

Allò que caracteritza la vida en societat no és tant callar i obeir com participar, i la primera forma de participació és la paraula, el diàleg i les decisions que se'n desprenen.

Bibliografia

Alrø, H., Skovmose, O. (2003). *Dialogue and learning in Mathematics Education. Intention, Reflexions, Critique*. Mathematics Education Library. Dordrecht: Kluwer.

3. Al meu llibre *Matemáticas para todos. Enseñar en un aula multicultural*, inclòs a la bibliografia, es pot trobar una anàlisi extensa i algunes propostes per a afrontar el repte de la diversitat a l'aula de matemàtiques.

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva multicultural*. Temas de Educación. Barcelona: Paidós.

Burgos, S., Domínguez, M., Rojas, F. J., Planas, N., Vilella, X. (2006). La participación en el aula de matemáticas. *Aula de Innovación Educativa*, 232, 49-62.

Euclides (1999). *Los seis libros primeros de la Geometría de Euclides*. Traducció al castellà de Rodrigo Zamorano en 1576. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Flecha, R. (1997). *Compartiendo palabras*. Barcelona: Paidós.

Freire, P. (1997). *A la sombra de este árbol*. Barcelona: El Roure.

Goffman, E. (1970). *Ritual de la interacción*. Buenos Aires: Tiempo Contemporáneo.

Gorgorió, N., Planas, N., Vilella, X. (2002). Inmigrant children learning mathematics in mainstream schools. Dins G. d'Abreu, A. J. Bishop i N. Presmeg (ed.), *Transitions Between Contexts of Mathematical Practices*. Mathematics Education Library. Dordrecht: Kluwer.

Habermas, J. (1987). *Teoría de la acción comunicativa*. Vol. I i II. Madrid: Taurus.

Planas, N., Gorgorió, N. (2004). Interacción, negociación y diálogo en el aula de matemáticas. *Aula de Innovación Educativa*, 132, 22-26.

Skovmose, O. (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Mathematics Education Library. Dordrecht: Kluwer.

Vilella, X. (2007). *Matemáticas para todos. Enseñar en un aula multicultural*. Cuadernos de Educación, 53. Barcelona: ICE-UAB, HORSORI.

Vilella, X., Giménez, J. (2008). Teacher researcher amb encultured negotiation of meanings. Dins B. Czarnocha (ed.) *Handbook of Mathematics Teaching Research: Teaching Experiment. A tool for Teacher-Researchers*. Cracòvia: University of Rzeszów.