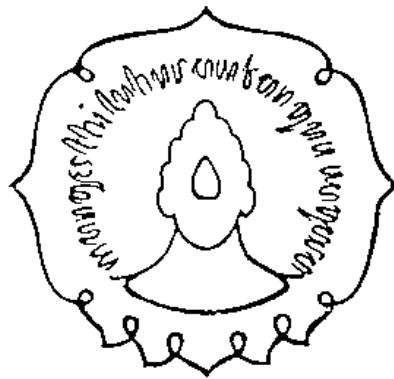


**PELABELAN TOTAL *SUPER VERTEX-MAGIC* PADA  
*CYCLE* DAN GRAF *CIRCULANT***



Oleh :

**NONY OKTAVY LILIYANI**

**M0102039**

**SKRIPSI**

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar  
Sarjana Sains Matematika

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS SEBELAS MARET SURAKARTA**

**2010**

**SKRIPSI**  
PELABELAN TOTAL *SUPER VERTEX-MAGIC* PADA *CYCLE* DAN  
*GRAF CIRCULANT*

Yang disiapkan dan disusun oleh

NONY OKTAVY LILYANI

NIM M0102039

dibimbing oleh

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Dra. Mania Roswitha, M.Si

NIP 19520628198303 2 001

Bowo Winarno, M.Kom

NIP 19810430 200812 1 001

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji  
pada hari Jumat, tanggal 25 Juni 2010  
dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Anggota Tim Penguji

Tanda Tangan

- |  |         |
|--|---------|
| 1. Drs. Tri Atmojo K., M.Sc, Ph.D<br>NIP. 19630826 1988031 002 | 1. .... |
| 2. Dra. Diari Indriati, M.Si<br>NIP. 19610112 1988112 001      | 2. .... |
| 3. Drs. Santoso B. W., M.Si<br>NIP. 19620203 1991031 001       | 3. .... |

Surakarta, 30 April 2010

Disahkan oleh

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dekan,

Ketua Jurusan Matematika,

Prof. Drs. Sutarno, M.Sc, Ph.D

NIP. 19600809 198612 1 001

Drs. Sutrima, M.Si

NIP.19661007 199302 1 001

## ABSTRAK

**Nony Oktavy Liliyani, 2010, PELABELAN TOTAL SUPER VERTEX-MAGIC PADA CYCLE DAN GRAF CIRCULANT. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret Surakarta.**

Pelabelan graf adalah pemberian label pada *vertex*, *edge* atau *vertex* sekaligus *edge*. Pemberian label pada *vertex* sekaligus *edge* disebut pelabelan total.  $G = (V, E)$  menyatakan sebuah graf berhingga, sederhana dan tak berarah, dengan  $V$  dan  $E$  masing-masing adalah himpunan *vertex* dan *edge* dalam  $G$ . Diasumsikan  $N(v)$  adalah himpunan *vertex* di persekitaran  $v \in V$ ,  $v$  adalah *order* dan  $\epsilon$  adalah *size* dalam graf  $G$ . Pelabelan total *vertex-magic* adalah suatu bijeksi  $\lambda : V \rightarrow \{1, 2, \dots, v\}$  dengan syarat bahwa untuk setiap  $uv \in E$  berlaku

$$\lambda(u) + \lambda(v) = k, \quad \forall uv \in E$$

dengan  $k$  adalah konstanta *magic* yang bernilai konstan. Pelabelan total *vertex-magic* disebut *super* jika  $\lambda(V) = \{1, 2, \dots, v\}$ . Graf yang memuat pelabelan total *super vertex-magic* disebut graf *super vertex-magic*. Graf yang digunakan sebagai objek penulisan skripsi adalah *cycle*  $C_n$ , gabungan *disjoint m cycle*  $mC_n$ , graf *circulant*  $C(1, S)$ ,  $C(1, 2, 3)$ ,  $C(1, 2, 3, 4)$  dan gabungan *disjoint m graf circulant*  $mC(1, S)$ .

Pembahasan skripsi merupakan kaji ulang jurnal yang bertujuan mengetahui *cycle* dan graf *circulant* yang memuat pelabelan total *super vertex magic*, mengetahui pelabelan total *super vertex-magic* pada graf-graf objek penulisan. Metode penulisan yang digunakan adalah studi literatur.

Kesimpulan dari hasil pembahasan skripsi adalah sebagai berikut.

1. Pelabelan total *super vertex-magic* termuat dalam *cycle*  $C_n$  dan graf *circulant*  $C(1, S)$ ,  $n \geq 3$  yang memiliki  $n$  ganjil. Gabungan *disjoint m cycle*  $mC_n$  dan gabungan *disjoint m graf circulant*  $mC(1, S)$ ,  $n \geq 3$  mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* jika  $m$  dan  $n$  ganjil.
2. Konstanta *magic* pada pelabelan total *super vertex-magic* ditentukan dengan rumus

$$k = \frac{v-1}{2} + \frac{v-1}{2}$$

Pelabelan graf dilakukan dengan aturan tertentu sedemikian hingga dihasilkan konstanta *magic*  $k$ .

Kata kunci : pelabelan *magic*, pelabelan total *super vertex-magic*, *cycle*, graf *circulant*.

## ABSTRACT

**Nony Oktavy Liliyani, 2010, SUPER VERTEX-MAGIC TOTAL LABELINGS OF CYCLE AND CIRCULANT GRAPH. Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Sebelas Maret University.**

Graph labeling is a labeling of vertices, edges or vertices as well as edge. Labeling of both edge and vertices are called total labelings. Let  $G = (V, E)$  be a finite, simple and undirect graph, where  $V$  and  $E$  are sets of vertices and edges of  $G$ . We call  $N(v)$  is a set of vertices in neighborhood of  $v \in V$ ,  $v$  is order and  $|V|$  is size of graph  $G$ . A vertex-magic total labelings is a bijection  $\lambda : \{1, 2, \dots, v+1\} \rightarrow V \cup E$  with the property that for every  $v \in V$  applies,

$$\sum_{j \in N(v)} \lambda(j) + \lambda(v) = k$$

for some constant  $k$ . A vertex-magic labeling  $\lambda$  is called super vertex-magic labelings if  $\lambda(v) = 1, 2, \dots, v$ . A graph containing a super vertex-magic total labeling is called a super vertex-magic graph. In this final project, graphs which discussed are cycles  $C_n$ , disjoint union of  $m$  cycles  $mC_n$ , circulant graphs  $C(1, S)$ ,  $C(1, 2, 3)$ ,  $C(1, 2, 3, 4)$  and disjoint union of  $m$  circulant graphs  $mC(1, S)$ .

The final project are analyzing and studying the science journal with purposes to find out whether a cycle and circulant graph contain super vertex-magic labelings, to know the super vertex-magic total labelings on the discussed graphs. The methode of writing used is a literary study.

The discussion can be concluded as follows.

1. There are super vertex-magic total labelings on cycles  $C_n$  and circulant graphs  $C(1, S)$ ,  $n \geq 1/2$  if  $n$  is odd. There are super vertex-magic total labelings on disjoint union of  $m$  cycles  $mC_n$  and disjoint union of  $m$  circulant graphs  $mC(1, S)$ ,  $n \geq 1/2$  if  $m$  and  $n$  are odd.
2. The magic constant of super vertex-magic total labelings is determined by the formula

$$k = \frac{v+1}{2} + \frac{v-1}{2}$$

Graph labeling is given based on certain rules so that it produced magic constant  $k$ .

Key word : magic labeling, super vertex-magic total labeling, cycle, circulant graph

## **MOTO**

“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan”

(QS. Al-Insyiroh : 5)

“Kebaikan sekecil apapun, pantas diperjuangkan”

(penulis)

“Gagal adalah saat kita berhenti berusaha”

(Mario Teguh)

## PERSEMBAHAN

*Karya sederhana ini, saya persembahkan untuk :*

- ✦ Papah dan Ibu terhormat*
- ✦ Adikku Yudis dan Yoga tercinta*
- ✦ Sahabatku Tina, Rettob, Wiwin dan  
teman-teman angkatan 2002 yang  
tersayang*

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur penulis panjatkan kepada Allah Subhanahu wa Ta'ala, atas limpahan rahmat, hidayah dan karunia-Nya sehingga penulisan skripsi terselesaikan.

Ucapan terimakasih penulis sampaikan kepada semua pihak yang telah membantu penulisan skripsi, antara lain

1. Ibu Dra. Mania Roswitha, M.Si, selaku Dosen Pembimbing Skripsi I, yang telah sabar dan sepenuh hati memberikan bimbingan selama penulisan skripsi.
2. Bapak Bowo Winarno, M. Kom selaku Dosen Pembimbing II, yang telah memberikan dukungan dan bimbingan selama penulisan skripsi.
3. Bapak Drs. Sutrima, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA UNS. Oleh karena kebijaksanaan beliau yang telah memberikan kesempatan dan kemudahan hingga penulisan skripsi selesai.
4. Semua pihak yang telah membantu dan memperlancar penulisan skripsi.

Semoga Allah Subhanahu wa Ta'ala memberikan balasan yang terbaik atas semua bantuan dan dukungan yang telah diberikan kepada penulis. Amin.

Surakarta, April 2010

Penulis

## DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PENGESAHAN.....	ii
ABSTRAK.....	iii
ABSTRACT.....	iv
MOTO.....	v
PERSEMBAHAN.....	vi
KATA PENGANTAR.....	vii
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR TABEL.....	x
DAFTAR GAMBAR.....	xi
DAFTAR NOTASI DAN SIMBOL.....	xiii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Perumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan Penulisan.....	3
1.5 Manfaat Penulisan.....	3
BAB II LANDASAN TEORI.....	4
2.1 Tinjauan Pustaka.....	4
2.1.1 Pengertian Graf.....	4
2.1.2 Konsep Dasar Graf.....	5
2.1.3 Graf Regular.....	7
2.1.4 <i>Cycle</i> .....	8
2.1.5 Graf <i>Circulant</i> .....	8
2.1.6 Graf Terhubung.....	9
2.1.7 Graf Tak Berarah.....	9
2.1.8 Graf Isomorfik dan Gabungan Graf.....	10
2.1.9 Pemetaan.....	12
2.1.10 Pelabelan Graf dan Bobot Graf.....	13
2.1.11 Pelabelan Total <i>Super Vertex-magic</i> .....	14
2.1.12 Matriks <i>Adjacency</i> Label dan Tabel <i>Adjacency</i> .....	15
2.2 Kerangka Pemikiran.....	17



BAB III	METODE PENELITIAN.....	18
BAB IV	PEMBAHASAN .....	20
	4.1 Pelabelan Total <i>Super Vertex-Magic</i> pada Graf .....	20
	4.2 Pelabelan Total <i>Super Vertex-Magic</i> pada <i>Cycle C</i> .....	23
	4.3 Pelabelan Total <i>Super Vertex-Magic</i> pada Gabungan <i>Disjoint m Cycle mC</i> .....	28
	4.4 Pelabelan Total <i>Super Vertex-Magic</i> pada Graf <i>Circulant C</i> 1, .....	31
	4.5 Pelabelan Total <i>Super Vertex-Magic</i> pada Graf <i>Circulant C</i> 1,2,3 .....	35
	4.6 Pelabelan Total <i>Super Vertex-Magic</i> pada Graf <i>Circulant C</i> 1,2,3,4 .....	39
	4.7 Pelabelan Total <i>Super Vertex-Magic</i> pada Gabungan <i>Disjoint m Graf Circulant mC</i> 1, .....	44
BAB V	KESIMPULAN DAN SARAN.....	52
	5.1 Kesimpulan .....	52
	5.2 Saran.....	52
	DAFTAR PUSTAKA .....	53
	LAMPIRAN.....	54

## DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1	Tabel <i>adjacency</i> ..... 15
Tabel 2.2	Tabel <i>adjacency</i> graf $G$ ..... 16
Tabel 4.1	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C_3$ 1,2,3 dengan 205 ..... 39
Tabel 4.2	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C_3$ 1,2,3,4 dengan 323 ..... 41
Tabel 4.3	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C_4$ 1,2,3,4 dengan 51 ..... 42

## DAFTAR GAMBAR

		Halaman
Gambar 2.1	Graf .....	4
Gambar 2.2	Graf sederhana .....	5
Gambar 2.3	Graf $G$ dengan <i>order</i> 6 dan <i>size</i> 9 .....	6
Gambar 2.4	Graf (a) 0-regular, (b) 1-regular, (c) 2-regular, (d) 3-regular, (e) 4-regular, (f) 5-regular.....	7
Gambar 2.5	Cycle $C_3$ dan $C$ .....	8
Gambar 2.6	Graf <i>Circulant</i> (a) $C_{1,2}$ (b) $C_{1,2}$ , (c) $C_{1,3}$ , (d) $C_{1,2,3}$ (e) $C_{1,2,3,4}$ .....	8
Gambar 2.7	(a) Graf terhubung, (b) Graf tak terhubung.....	9
Gambar 2.8	(a) Graf berarah, (b) Graf tak berarah.....	10
Gambar 2.9	Graf $G$ dan Graf $G_3$ non-isomorfik dengan $G$ , $G$ .....	10
Gambar 2.10	Gabungan graf (a) $G$ dan $G$ , (b) $G_3$ dan $G$ .....	11
Gambar 2.11.	(a) Fungsi satu-satu, (b) Fungsi <i>onto</i> , (c) Fungsi bijeksi.....	12
Gambar 2.12	Pelabelan total pada graf .....	13
Gambar 2.13	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> dengan $k = 12$ .....	15
Gambar 2.14	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada graf $G$ .....	16
Gambar 4.1	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C_3$ dengan $k = 12$ .....	26
Gambar 4.2	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C$ dengan $k = 1$ .....	26
Gambar 4.3	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C$ dengan $k = 26$ .....	26
Gambar 4.4	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C_3$ dengan $k = 47$ .....	27
Gambar 4.5	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C$ .....	27

Gambar 4.6	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $3C_3$ dengan	33 .....	30
Gambar 4.7	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $5C_3$ dengan	54 .....	31
Gambar 4.8	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $5C$ dengan	8 .....	31
Gambar 4.9	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C_{1,2}$ dengan	62 .....	34
Gambar 4.10	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C_{1,3}$ dengan	62 .....	34
Gambar 4.11	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C_{1,2}$ dengan	45 .....	35
Gambar 4.12	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C_{1,2,3}$ dengan	112 .....	38
Gambar 4.13	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C_{1,2,3,4}$ dengan	225 .....	40
Gambar 4.14	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C_{1,2,3,4}$ dengan	274 .....	41
Gambar 4.15	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $3C_{1,2}$ dengan	130 .....	45
Gambar 4.16	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $5C_{1,2}$ dengan	215 .....	46
Gambar 4.17	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $3C_{1,2}$ dengan	181 .....	46
Gambar 4.18	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $3C_{1,3}$ dengan	181 .....	47
Gambar 4.19	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $5C_{1,4}$ dengan	385 .....	47



- $E$  : himpunan *edge* dari graf  $G$
- $v \mid G \mid$  : *order* atau banyaknya *vertex* pada graf  $G$
- $\mid G \mid$  : *size* atau banyaknya *edge* pada graf  $G$
- deg : derajat *vertex*
- $N(v)$  : himpunan *vertex* di persekitaran *vertex*
- $G \cup G$  : union (gabungan) graf  $G$  dan  $G$
- $mG$  : gabungan *disjoint* dari  $m$  graf  $G$  yang isomorfik
- $G \cong G$  : graf  $G$  isomorfik dengan graf  $G$
- $G \vee G$  : penggabungan himpunan *vertex* dari graf  $G$  dan  $G$
- $G \oplus G$  : penggabungan himpunan *edge* dari graf  $G$  dan  $G$
- $\lfloor x \rfloor$  : fungsi *floor*
- $\sim$  : ekuivalen
- $\square$  : akhir bukti

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Penelitian tentang pelabelan graf mulai berkembang sejak tahun 60-an. Selang puluhan tahun, teknik pelabelan graf dipelajari lebih dari 1000 tulisan (Gallian [4]). Menurut Slamin [9], pelabelan graf merupakan salah satu topik yang banyak mendapat perhatian karena model-model yang terdapat dalam pelabelan graf berguna untuk aplikasi luas, seperti masalah teori koding, masalah kristalografi sinar  $x$ , radar, sistem alat jaringan komunikasi dan desain sirkuit. Pelabelan *magic* diperkenalkan oleh Sedláček pada tahun 1963 (Gallian [4]). Suatu pelabelan disebut *magic* apabila terdapat suatu nilai konstan yang disebut konstanta *magic*. Pelabelan total *vertex-magic* pertama kali diperkenalkan oleh MacDougall, Miller, Slamin dan Wallis pada tahun 1999 (Gallian [4]). Pelabelan total *super vertex-magic* diperkenalkan oleh MacDougall, Miller dan Sugeng [8] pada tahun 2004.

Pelabelan graf dalam teori graf adalah pemberian nilai (label) pada *vertex*, *edge* atau keduanya, yaitu *vertex* dan *edge*. Label yang digunakan berupa bilangan bulat positif atau bilangan bulat non-negatif. Pemberian label pada *vertex* disebut pelabelan *vertex*, pemberian label pada *edge* disebut pelabelan *edge*, sedangkan pemberian label pada *vertex* dan *edge* disebut pelabelan total. Jumlah antara label *vertex* dan *edge-edge* yang *incident* dengan *vertex* tersebut disebut bobot *vertex*. Jumlah antara label *edge* dan *vertex-vertex* yang *incident* dengan *edge* tersebut disebut bobot *edge*. Jika suatu pelabelan total mengakibatkan bobot *vertex* konstan maka disebut pelabelan total *vertex-magic*. Suatu pelabelan total yang mengakibatkan bobot setiap *edge* konstan disebut pelabelan total *edge magic*.

Pelabelan total *super vertex-magic* (*Super Vertex-Magic Total Labelings*) juga dikenal sebagai pelabelan total *strongly vertex-magic* (*Strongly Vertex-Magic Total Labelings*). Konsep pelabelan total *super vertex-magic* diperkenalkan oleh MacDougall *et al.* [8]. Jika *order* graf  $G$  adalah  $|G| = v$ , *size*  $|G| = e$  dan

himpunan *vertex* di persekitaran dalam graf  $G$  dinyatakan dengan  $N(v)$ , maka pelabelan total *vertex-magic* adalah suatu bijeksi

$$\lambda : V \rightarrow \{1, 2, \dots, v\}$$

dengan syarat bahwa untuk setiap  $v \in V$  berlaku

$$\sum_{j \in N(v)} \lambda(j) + \lambda(v) = k$$

dengan  $k$  adalah konstanta *magic* yang bernilai konstan. Graf  $G$  disebut graf *vertex-magic* jika memuat pelabelan total *vertex-magic*. Pelabelan total *vertex-magic* disebut *super* jika  $\lambda(v) \in \{1, 2, \dots, v\}$ . Graf yang memuat pelabelan total *super vertex-magic* disebut graf *super vertex-magic*.

Pembahasan skripsi merupakan kaji ulang secara teoritis dari jurnal karya MacDougall *et al.* [8] dan Balbuena *et al.* [1]. Graf-graf yang dikaji adalah *cycle*  $C_n$ , gabungan *disjoint m cycle*  $mC_n$ , graf *circulant*  $C_n(1, S)$ ,  $C_n(1, 2, 3)$ , dilanjutkan penerapan kaji ulang pada keluarga graf *circulant* yang lain yaitu  $C_n(1, 2, 3, 4)$  dan gabungan *disjoint m graf circulant*  $mC_n(1, S)$ ,

## 1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam penulisan skripsi adalah

1. bagaimana menentukan *cycle*, gabungan *disjoint m cycle*, graf *circulant* dan gabungan *disjoint m graf circulant* yang mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* ?
2. bagaimana pelabelan total *super vertex-magic* pada *cycle*  $C_n$ , gabungan *disjoint m cycle*  $mC_n$ , graf *circulant*  $C_n(1, S)$ ,  $C_n(1, 2, 3)$ ,  $C_n(1, 2, 3, 4)$  dan gabungan *disjoint m graf circulant*  $mC_n(1, S)$ , sedemikian hingga diperoleh graf *super vertex-magic* ?



### 1.3 Batasan Masalah

Skripsi membahas mengenai pelabelan total *super vertex-magic* pada *cycle*  $C$ , gabungan *disjoint  $m$  cycle*  $mC$ , graf *circulant*  $C(1, \dots, C(1,2,3, \dots, C(1,2,3,4$  dan gabungan *disjoint  $m$  graf circulant*  $mC(1, \dots)$ , yang dibatasi oleh graf berhingga, sederhana dan tidak berarah.

### 1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi mengenai pelabelan total *super vertex-magic* adalah

1. mengetahui *cycle*, gabungan *disjoint  $m$  cycle*, graf *circulant* dan gabungan *disjoint  $m$  graf circulant* yang memuat pelabelan total *super vertex-magic*,
2. mengetahui pelabelan total *super vertex-magic* pada *cycle*  $C$ , gabungan *disjoint  $m$  cycle*  $mC$ , graf *circulant*  $C(1, \dots, C(1,2,3, \dots, C(1,2,3,4$  dan gabungan *disjoint  $m$  graf circulant*  $mC(1, \dots)$  sedemikian hingga diperoleh graf-graf *super vertex-magic*.

### 1.5 Manfaat Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah

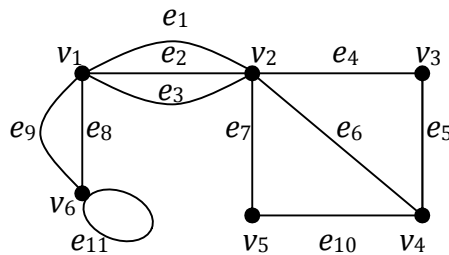
1. menambah wawasan tentang teori graf,
2. mengetahui tentang pelabelan graf khususnya pelabelan total *super vertex-magic*,
3. mengetahui graf-graf yang memuat pelabelan total *super vertex-magic*, khususnya *cycle* dan graf *circulant*.

**BAB II**  
**LANDASAN TEORI**

**2.1 Tinjauan Pustaka**

**2.1.1 Pengertian Graf**

Johnsonbaugh [7] mengemukakan bahwa suatu graf  $G$ , atau graf tak berarah terdiri dari himpunan tak kosong *vertex*  $V$  dan himpunan *edge*  $E$ , dengan  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dan  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , sedemikian hingga setiap *edge*  $e$  merupakan pasangan tak berurutan dari anggota-anggota  $V$ . Jika suatu *edge*  $e$  menghubungkan *vertex*  $v_i$  dan  $v_j$  maka  $e = (v_i, v_j)$  atau  $e = (v_j, v_i)$ . Selanjutnya graf  $G = (V, E)$  disebut graf  $G$ .



Gambar 2.1 Graf

Suatu graf  $G$  dikatakan kosong jika  $E = \emptyset$  (Harary [5]). Jika graf  $G$ , merupakan graf kosong maka setiap *vertex*-nya terisolasi. Graf yang memiliki hanya satu *vertex* disebut graf *trivial*. Contoh gambar graf ditunjukkan oleh Gambar 2.1. Graf pada Gambar 2.1 memiliki himpunan *vertex*  $V$  dan himpunan *edge*  $E$  yaitu

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}\}$$

dengan *edge-edge* yang dapat ditulis  $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_1, v_6), (v_5, v_4), (v_6, v_6)$ ,  
 $(v_2, v_1), (v_3, v_2), (v_4, v_3), (v_4, v_2), (v_5, v_2), (v_6, v_1), (v_6, v_6)$ ,  
 $(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_4, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_2), (v_2, v_5), (v_5, v_2), (v_5, v_4), (v_4, v_5), (v_1, v_6), (v_6, v_1), (v_6, v_6)$ ,  
 Selanjutnya *edge*  $e$  dinotasikan  $(v_i, v_j)$  dengan  $i, j$

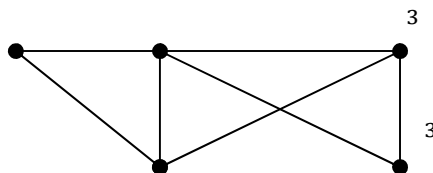
bilangan asli.

### 2.1.2 Konsep Dasar Graf

Fletcher *et al.* [3] mengemukakan bahwa sebuah *edge*  $e_j$  dalam sebuah graf  $G$  yang menghubungkan *vertex*  $v_i$  dan  $v_j$  disebut *incident* dengan  $v_i$  dan  $v_j$ , demikian juga *vertex*  $v_i$  dan  $v_j$  disebut *incident* dengan  $e_j$ . *Vertex*  $v_i$  disebut *initial vertex* dan  $v_j$  disebut *terminal vertex*. *Vertex*  $v_i$  dan  $v_j$  merupakan *vertex-vertex* yang *adjacent*. Pasangan *vertex* dan *edge* yang *adjacent* ditunjukkan oleh Gambar 2.1. *Vertex*  $v_i$  *adjacent* dengan  $e_3$  karena dihubungkan sebuah *edge* yaitu *edge*  $e_4$ . *Vertex*  $v_i$  juga *adjacent* dengan *vertex*  $v_1, v_2, v_3$ . *Edge*  $e_4$  *adjacent* dengan *edge*  $e_1, e_2, e_3$ , karena keduanya *incident* dengan *vertex*  $v_i$  maka dapat dikatakan *edge*  $e_1$  dan *edge*  $e_2$  *incident* dengan  $v_i$ .

Menurut Chartrand dan Oellermann [2], suatu graf  $G$  dikatakan memiliki *multiple edge* jika terdapat lebih dari satu *edge* yang menghubungkan pasangan *vertex* yang sama. Graf  $G$  dikatakan memiliki *loop* jika terdapat *edge* yang menghubungkan dirinya sendiri. Suatu graf yang memiliki *multiple edge* dan *loop* disebut *pseudograph*.

Graf yang ditunjukkan oleh Gambar 2.1 memiliki *multiple edge* karena terdapat lebih dari satu *edge* yang menghubungkan pasangan *vertex* yang sama. *Edge*  $e_1, e_2, e_3$ , menghubungkan *vertex*  $v_1$  dan  $v_2$ , sedangkan *edge*  $e_8, e_9$  menghubungkan *vertex*  $v_2$  dan  $v_3$ . Selain memiliki *multiple edge*, graf di Gambar 2.1 juga memiliki *loop* karena *edge*  $e_{11}$  menghubungkan satu *vertex* yaitu *vertex*  $v_1$ . Karena memiliki *multiple edge* dan *loop* maka graf yang ditunjukkan oleh Gambar 2.1 disebut *pseudograph*. Suatu graf disebut graf sederhana (*simple graph*) jika tidak mengandung *loop* dan *multiple edge* (Harary [5]). Graf sederhana disajikan dalam Gambar 2.2

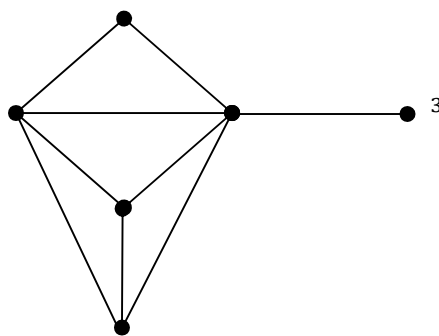


Gambar 2.2 Graf sederhana

*Path*  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$  untuk  $n \geq 0$  adalah barisan *vertex* dan *edge* yang bergantian dan tidak memuat perulangan *vertex* dan *edge* (Chartrand dan Oellermann [2]). Graf dalam Gambar 2.2 mempunyai *path*  $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$ .

*Order* adalah banyak *vertex* yang terdapat dalam graf  $G$ . *Order* graf  $G$  dinotasikan dengan  $|V(G)|$  atau  $v$  (baca : nu). Banyak *edge* dalam graf  $G$  disebut *size*. *Size* graf  $G$  dinotasikan dengan  $|E(G)|$  atau  $\epsilon$  (baca : epsilon). Contoh graf yang memiliki *order* 6 dan *size* 9 disajikan oleh Gambar 2.3.

$G :$



Gambar 2.3 Graf  $G$  dengan *order* 6 dan *size* 9

*Neighborhood vertex* dinotasikan  $N(v)$ , didefinisikan untuk setiap *vertex* dalam graf  $G$

$$N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$$

dengan derajat dinotasikan  $\deg(v) = |N(v)|$  yaitu banyak *vertex* yang *adjacent* dengan  $v$  (Chartrand dan Oellermann [2]). *Neighborhood* dan derajat setiap *vertex* graf  $G$  pada Gambar 2.3 adalah sebagai berikut.

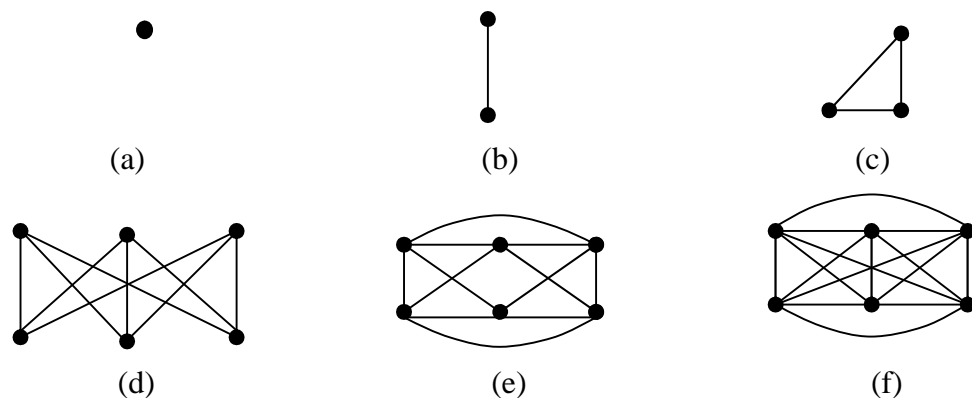
$$\begin{aligned} \deg(v_{top}) &= 2, & \deg(v_{left}) &= 2 \\ \deg(v_{right}) &= 5, & \deg(v_{middle}) &= 5 \\ \deg(v_{bottom}) &= 2, & \deg(v_{far-right}) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \dots, \dots, \dots & \text{deg} &= 3 \\
 &= \dots, \dots, \dots & \text{deg} &= 3 \\
 &= \dots, \dots, \dots & \text{deg} &= 4
 \end{aligned}$$

Menurut Fletcher *et al.* [3], jika suatu graf  $G$ , dengan himpunan *vertex*  $G$  dan himpunan *edge*  $G$  sedemikian hingga  $G$ ,  $\dots$ , dan  $G$ ,  $\dots$ , maka  $\sum \text{deg} = 2q$ . Graf pada Gambar 2.3 memiliki *order* 6 dan *size* 9 sehingga jumlah derajat semua *vertex*-nya adalah  $\sum \text{deg} = 2+5+1+3+3+4 = 2 \cdot 9 = 18$ .

### 2.1.3 Graf Regular

Harary [5] menuliskan bahwa suatu graf  $G$  disebut *r-regular* atau *regular* berderajat  $r$ , jika setiap *vertex* dalam graf  $G$  memiliki derajat  $r$ . Beberapa contoh graf *regular* berderajat 0, 1, 2, 3, dan 4 disajikan oleh Gambar 2.4. Graf *regular* berderajat 0 tidak memiliki *edge*. Jika graf *regular*  $G$  berderajat satu maka memuat tepat satu *edge*. Graf *2-regular*  $G$  berbentuk *cycle*. Graf *3-regular* disebut graf *cubic*.



Gambar 2.4 Graf (a) 0-regular, (b) 1-regular, (c) 2-regular, (d) 3-regular, (e) 4-regular, (f) 5-regular

### 2.1.4 Cycle

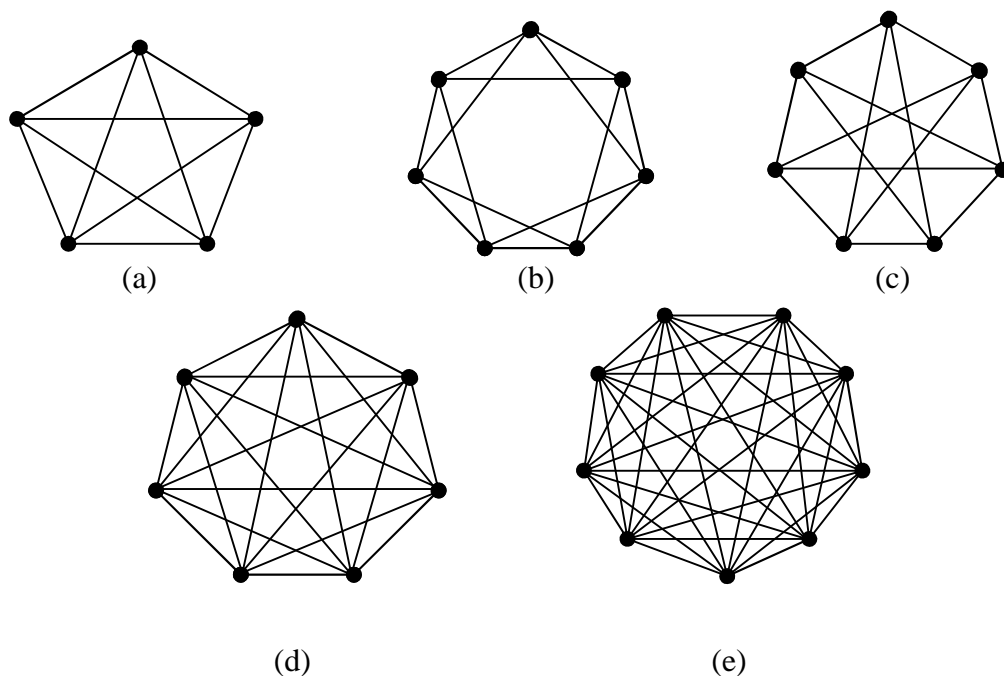
Chartrand dan Oellermann [2] mendefinisikan *cycle* adalah barisan *vertex-vertex*  $v_1, v_2, \dots, v_n$  dengan  $n \geq 3$ , dan  $v_1, v_2, \dots, v_n$  adalah *vertex-vertex* yang berbeda.



Gambar 2.5 Cycle  $C_3$  dan  $C_6$

Sebuah *cycle* dengan panjang  $n$  atau memiliki sejumlah  $n$  *vertex* disebut  $n$ -*cycle* atau  $C_n$ . Graf yang disajikan oleh Gambar 2.5 merupakan contoh *cycle* dengan  $n = 3$  dan  $n = 6$ .

### 2.1.5 Graf Circulant



Gambar 2.6 Graf *circulant* (a)  $C(5, \{1,2\})$  (b)  $C(6, \{1,2\})$ , (c)  $C(7, \{1,3\})$ , (d)  $C(8, \{1,2,3\})$ , (e)  $C(9, \{1,2,3,4\})$

Definisi graf *circulant* yang dikemukakan oleh Balbuena *et al.* [1] adalah sebagai berikut. Diberikan  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n/2$ , dengan  $n$  dan  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) merupakan bilangan bulat positif. Suatu graf *circulant*  $C(n; a_1, a_2, \dots, a_k)$  adalah graf *regular* yang memiliki himpunan *vertex*  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  dan himpunan *edge*  $\{(i, i+a_j) \pmod n \mid i = 0, 1, \dots, n-1 \text{ dan } j = 1, 2, \dots, k\}$ .

Graf *circulant*  $C(n; a_1, a_2, \dots, a_k)$  merupakan graf *2h-regular*. Jika  $a_1 = n/2$  maka graf  $C(n; a_1, a_2, \dots, a_k)$  merupakan graf *komplit*. Graf *circulant* dapat dikatakan sebagai *cycle* dengan *chords* yang menghubungkan *vertex-vertex* dengan jarak  $a_i$  pada *cycle*. Contoh graf *circulant* disajikan dalam Gambar 2.6.

### 2.1.6 Graf Terhubung

Menurut Chartrand dan Oellermann [2], graf  $G$  disebut terhubung (*connected*) jika setiap dua *vertex*  $i$  dan  $j$  dengan  $i \neq j$  dalam graf  $G$  terdapat *path* yang menghubungkan kedua *vertex* tersebut. Sebaliknya, jika ada dua *vertex* yang tidak dihubungkan *path* maka graf  $G$  tak terhubung (*disconnected*). Contoh graf terhubung disajikan oleh Gambar 2.7 (a). Suatu graf tak terhubung dapat dibagi menjadi komponen-komponen terhubung. Gambar 2.7 (b) menunjukkan bahwa graf tak terhubung terbentuk dari tiga komponen.



Gambar 2.7 (a) Graf terhubung, (b) Graf tak terhubung

### 2.1.7 Graf Tak berarah

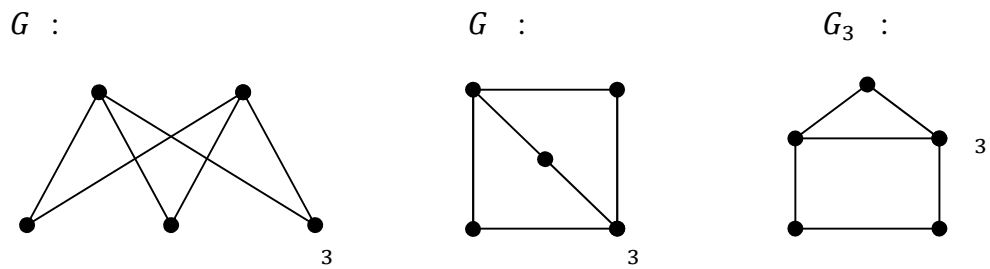
Graf tak berarah adalah graf yang *edge*-nya tidak mempunyai arah sedangkan graf berarah adalah graf yang *edge*-nya mempunyai arah (Hartsfield dan Ringel [6]). Contoh graf berarah dan tak berarah ditunjukkan oleh Gambar 2.8.



Gambar 2.8 (a) Graf berarah, (b) Graf tak berarah

**2.1.8 Graf Isomorfik dan Gabungan Graf**

Harary [5] mengemukakan bahwa dua graf  $G$  dan  $G'$  disebut isomorfik jika terdapat fungsi satu-satu  $\Phi$  dari  $V(G)$  onto  $V(G')$  sedemikian hingga  $\Phi(uv) = \Phi(u)\Phi(v)$  jika dan hanya jika  $uv \in E(G)$ . Fungsi  $\Phi$  disebut *isomorfisme*. Jika  $G$  dan  $G'$  isomorfik maka dapat dinotasikan  $G \cong G'$ .



Gambar 2.9 Graf  $G \cong G'$  dan graf  $G_3$  non-isomorfik dengan  $G, G'$

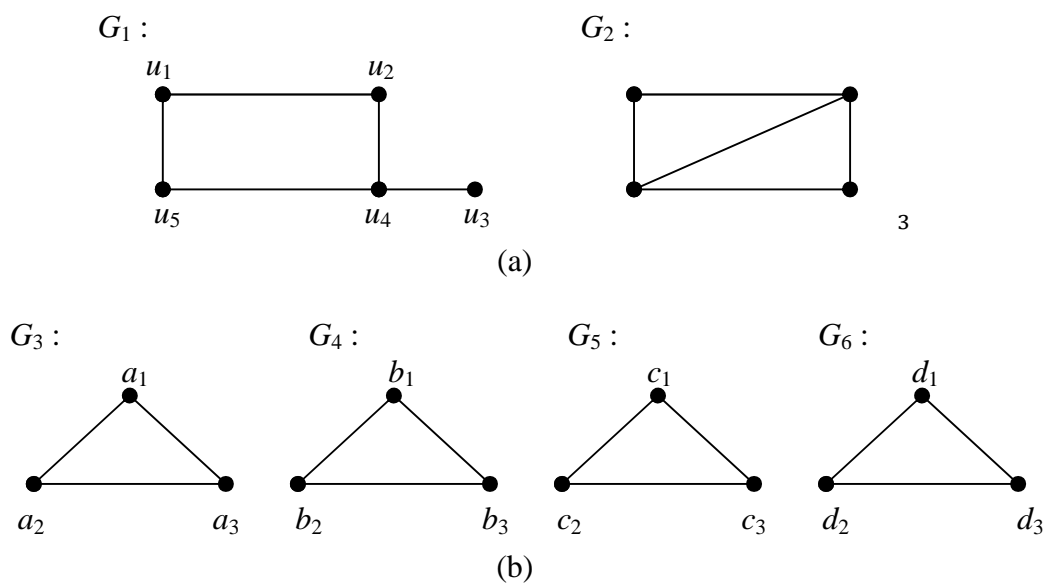
Graf-graf yang ditunjukkan oleh Gambar 2.9 memiliki *order* 5, *size* 6, jumlah derajat 12. Graf  $G$ , terdiri atas himpunan *vertex*  $\{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$  dan himpunan *edge*  $\{u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3, u_3v_1, u_3v_2, u_3v_3\}$ . Graf  $G'$ , memuat himpunan *vertex*  $\{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$  dan himpunan *edge*  $\{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_1, u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3, u_3v_1, u_3v_2, u_3v_3\}$ . *Vertex*  $u_1$  adjacent dengan *vertex*  $u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$  dalam graf  $G'$ . Graf  $G_3$ , mempunyai *vertex*  $\{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$  adjacent dengan *vertex*  $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ . Oleh karena terdapat suatu pemetaan satu-satu  $\Phi: G \rightarrow G'$  dengan  $\Phi(u_i) = u_i, \Phi(v_i) = v_i$ ,  $\Phi(u_1v_1) = u_1v_1, \Phi(u_1v_2) = u_1v_2, \Phi(u_1v_3) = u_1v_3, \Phi(u_2v_1) = u_2v_1, \Phi(u_2v_2) = u_2v_2, \Phi(u_2v_3) = u_2v_3$  sehingga graf  $G$  isomorfik dengan graf  $G'$ , atau  $G \cong G'$ . Oleh karena itu fungsi  $\Phi$  adalah *isomorfisme*.



Graf  $G_3$  memuat *vertex-vertex*  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  dan *edge-edge*  $(u_1, u_2), (u_1, u_5), (u_2, u_4), (u_4, u_3)$ . Graf  $G$  memiliki dua *vertex* yang *adjacent* dengan tiga *vertex* lainnya yaitu  $u_1$  dan  $u_2$  yang *adjacent* dengan *vertex*  $u_3, u_4, u_5$ , sedangkan graf  $G_3$  tidak memilikinya. Oleh karena tidak terdapat fungsi satu-satu dari  $G$  ke  $G_3$  maka dapat dikatakan graf  $G$  tidak isomorfik atau non-isomorfik dengan graf  $G_3$  dan berakibat graf  $G_3$  juga non-isomorfik dengan graf  $G$ .

Graf *disjoint* diartikan sebagai suatu graf yang memuat komponen terpisah di dalamnya. Graf pada Gambar 2.10 (a) merupakan graf *disjoint* yang terbentuk dari graf  $G$  dan  $G$ . Graf pada Gambar 2.10 (b) merupakan graf *disjoint* yang terbentuk dari graf  $G_3, G, G$ , dan  $G$ . Graf *disjoint* merupakan graf tak terhubung.

Gabungan dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  dinotasikan dengan  $G \cup G$  yang memiliki himpunan *vertex*  $G \cup G$  dan himpunan *edge*  $G \cup G$ . Jika  $G \cup G$ , maka dapat dinotasikan  $2G$  untuk  $G \cup G$ . Secara umum, jika  $G, G, G$  adalah pasangan graf *disjoint* yang isomorfik ke  $G$  maka dapat dinotasikan  $nG$  untuk  $G \cup G \cup G$  (Chartrand dan Oellermann [2]).

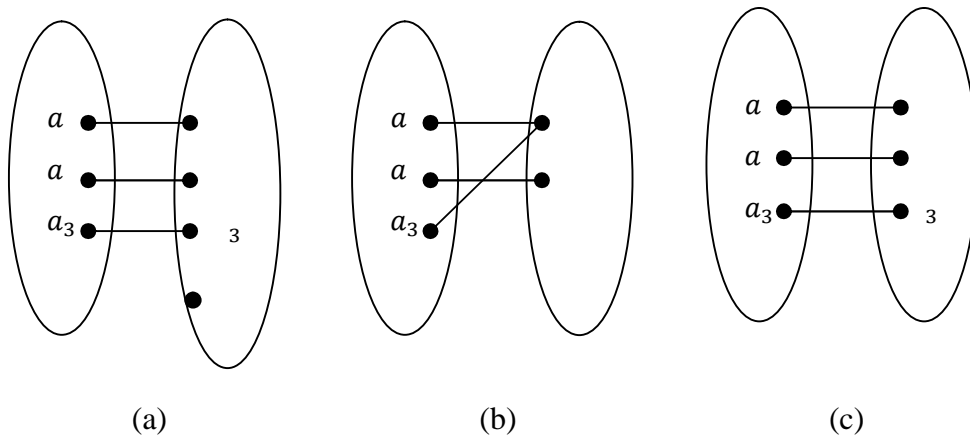


Gambar 2.10 Gabungan graf (a)  $G \cup G$ , (b)  $G_3 \cup G \cup G$

Contoh gabungan dua graf pada Gambar 2.10 (a) yaitu graf  $G$  dan  $G$  merupakan graf yang non-isomorfik sehingga dapat dituliskan  $G \cup G$  yang memiliki himpunan *vertex*  $G \cup G$ ,  $a, a, a_3$ , dan himpunan *edge*  $G \cup G$ ,  $(a, a), (a, a_3), (a_3, a), (a, a), (a, a_3), (a_3, a), (a, a), (a, a_3), (a_3, a)$ .  
 Gabungan empat graf pada Gambar 2.10 (b) yaitu graf  $G_3, G, G, G$  dapat dituliskan  $G_3 \cup G \cup G \cup G$ . Oleh karena graf  $G_3, G, G, G$  saling isomorfik atau  $G_3 \cup G \cup G \cup G$  maka disebut gabungan *disjoint* empat graf  $G$  yang dinotasikan  $4G$ . Lebih khusus lagi, graf  $G$  merupakan gabungan *disjoint* empat *cycle* yang memiliki panjang tiga sehingga dapat dinotasikan  $4C_3$ .

**2.1.9 Pemetaan**

Pemetaan didefinisikan jika diberikan himpunan  $A$  dan  $B$  maka sebuah pemetaan  $f$  dari  $A$  ke  $B$  adalah himpunan  $f$  dari pasangan berurutan sehingga untuk setiap  $a$  terdapat dengan tunggal dengan  $a$ .  
 Jika  $a$  dan  $a$ , maka (Johnsonbaugh [7]). Pemetaan  $f$  dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  dapat dinotasikan : . Himpunan  $A$  disebut daerah asal atau *domain* sedangkan himpunan  $B$  disebut daerah kawan atau *kodomain*. Himpunan  $B$  yang menjadi hasil relasi dari domain  $A$  disebut daerah hasil atau *range*. Pemetaan merupakan salah satu bentuk relasi yang setiap anggota *domain* mempunyai kawan tunggal di *kodomain*.

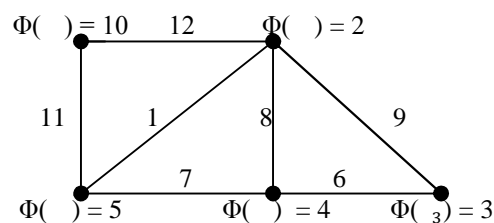


Gambar 2.11 (a) Fungsi satu-satu, (b) Fungsi *onto*, (c) Fungsi bijeksi

Pemetaan : dapat dibedakan menjadi tiga yaitu pemetaan injeksi, pemetaan surjeksi dan pemetaan bijeksi. Suatu pemetaan : disebut pemetaan satu-satu atau injeksi dengan syarat jika  $a$  dan  $a$  anggota  $A$  dan  $a$   $a$  , maka  $a$   $a$  . Suatu pemetaan disebut pemetaan  $A$  *onto*  $B$  atau surjeksi apabila memenuhi syarat *range* sama dengan  $B$  atau . Suatu pemetaan yang memuat injeksi dan surjeksi disebut bijeksi atau korespondensi satu-satu. Syarat utama bijeksi yaitu banyak anggota *domain* harus sama dengan banyak anggota *kodomain*. Contoh pemetaan satu-satu, pemetaan *onto* dan pemetaan bijeksi disajikan oleh Gambar 2.11.

### 2.1.10 Pelabelan Graf dan Bobot Graf

Wallis [10] mendefinisikan pelabelan graf adalah suatu pemetaan satu-satu  $\Phi$  yang membawa elemen graf  $G$ , yaitu himpunan *vertex* atau himpunan *edge*, ke bilangan-bilangan yang bernilai bulat positif atau non-negatif disebut label.



Gambar 2.12 Graf dengan pelabelan total

Pelabelan graf menurut domainnya dapat dibedakan menjadi tiga yaitu pelabelan *edge*, pelabelan *vertex* dan pelabelan total. Pelabelan *edge* adalah fungsi yang membawa himpunan *edge* ke suatu bilangan bulat positif atau non-negatif, sedangkan pelabelan *vertex* adalah fungsi yang membawa himpunan *vertex* ke suatu bilangan bulat positif atau non-negatif. Jika suatu fungsi memiliki domain berupa himpunan *edge* dan himpunan *vertex* serta membawa domain tersebut ke bilangan bulat positif atau non-negatif maka disebut pelabelan total. Graf dengan pelabelan total ditunjukkan oleh Gambar 2.12.

Definisi Wallis [10] mengenai bobot *vertex* dan bobot *edge* yaitu bobot *vertex*  $v_i$  dalam pelabelan  $\Phi$  adalah

$$\Phi(v_i) = \sum_{j \in N} \Phi_j$$

dan bobot *edge*  $e_{ij}$  adalah

$$e_{ij} = \Phi(v_i) + \Phi(v_j) - \Phi(e_{ij})$$

Graf yang ditunjukkan Gambar 2.12 memiliki bobot *vertex*  $v_i$ , dinotasikan  $\Phi(v_i)$ , bobot *edge*  $e_{ij}$  dinotasikan  $\Phi(e_{ij})$ , untuk  $i, j = 1, 2, \dots, 5$  dan  $i \neq j$  sebagai berikut.

	23		24		14
	32		24		8
$v_3$	18		26	$v_3$	13
	25	$v_3$	14		16

### **2.1.11 Pelabelan Total Super Vertex-Magic**

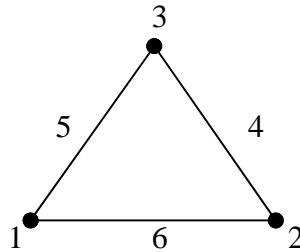
Menurut MacDougall *et al.* [8], jika  $G = (V, E)$  adalah graf sederhana yang memuat  $v$  *vertex* dan  $e$  *edge* maka pelabelan total *vertex-magic* adalah suatu bijeksi  $\lambda$  dari  $G = (V, E)$  ke bilangan bulat  $1, 2, \dots, (v + e)$  dengan syarat bahwa untuk setiap  $v \in V$  berlaku

$$\sum_{j \in N} \lambda(e_{ij}) = k$$

dengan  $k$  adalah suatu konstanta. Pelabelan total *vertex-magic* disebut *super* jika  $\lambda(v_i) \in \{1, 2, \dots, v\}$

Nilai konstan  $k$  pada bobot *vertex* dan bobot *edge* disebut konstanta *magic*. Jika bobot setiap *edge* dalam graf di bawah pelabelan total  $\lambda$  menghasilkan suatu konstanta *magic*  $k$  maka disebut pelabelan total *edge-magic*. Sedangkan suatu pelabelan total disebut pelabelan total *vertex-magic* jika bobot setiap *vertex*-nya konstan dan senilai dengan konstanta *magic*  $k$ . Pelabelan total *vertex-magic* yang himpunan *vertex*-nya diberi label  $1, 2, \dots, v$  disebut pelabelan total *super vertex-*

magic. Contoh graf yang diberi label dengan pelabelan total *super vertex-magic* disajikan dalam Gambar 2.13.



Gambar 2.13 Pelabelan total *super vertex-magic* dengan  $k = 12$

**2.1.12 Matriks Adjacency Label dan Tabel Adjacency**

Definisi matriks *adjacency* label dijelaskan oleh Balbuena *et al.* [1] dan MacDougall *et al.* [8]. Dinyatakan  $G$  adalah sebuah graf dan  $\ell$  adalah pelabelan *total super vertex-magic* dalam graf  $G$  sehingga setiap *vertex* mempunyai bobot konstan  $k$ . Jika  $G = (V, E)$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  maka  $\ell(v_1, v_2), \dots, \ell(v_{n-1}, v_n)$  Suatu matriks simetris  $a_{ij}$  untuk  $i, j = 1, 2, \dots, v$  disebut matriks *adjacency* label dalam graf  $G$  jika  $a_{ij} = \ell(v_i, v_j)$  dirumuskan

$$a_{ij} = \begin{cases} \ell(v_i, v_j) & \text{jika } i \neq j \\ k & \text{jika } i = j \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

dengan  $\ell(v_i, v_j)$  adalah label *edge* dan  $k$  adalah label *vertex*. Matriks  $A$  dapat disajikan sebagai berikut.

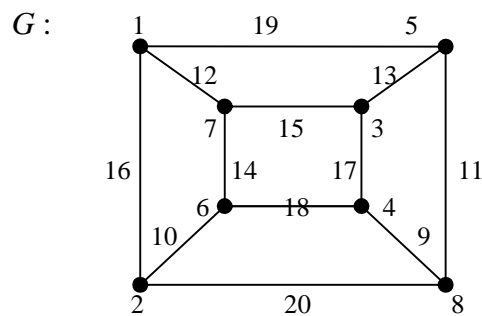
	$a_{12}$	$a_{13}$		$a_{1v}$
$a_{12}$		$a_{23}$		$a_{2v}$
$a_{23}$	$a_{32}$		$a_{3v}$	
$a_{1v}$	$a_{v1}$	$a_{v3}$	...	$a_{vv}$

Tabel 2.1 Tabel *adjacency*

$i \setminus j$	1	2	3		$v$
1		$a_{12}$	$a_{13}$		$a_{1v}$
2	$a_{21}$		$a_{23}$		$a_{2v}$

3	$a_3$	$a_3$	3		$a_{3v}$
$v$	$a_v$	$a_v$	$a_{v3}$		$v$

Syarat *magic* mengakibatkan jumlah semua entri dalam baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  harus sama dengan konstanta *magic*  $k$ . Tabel *adjacency* adalah tabel dengan entri-entri yang bersesuaian dengan matriks  $A$ . Tabel *adjacency* ditunjukkan oleh Tabel 2.1. Misalkan diberikan sebuah graf  $G$  dengan pelabelan total *super vertex-magic* pada Gambar 2.14.



Gambar 2.14 Graf  $G$  dengan pelabelan total *super vertex-magic*

Label-label dalam graf  $G$  dituliskan sebagai berikut.

	1	7	1	13	15
	5	3	12	3	20
3	8	4	16	3	17
	2	6	3	11	10
					18

Sajian label-label graf  $G$  dalam tabel *adjacency* ditunjukkan oleh Tabel 2.2. Diperoleh bobot *vertex* baris ke- $i$  dan bobot *vertex* pada kolom ke- $j$  adalah konstan yaitu 48, yang disebut konstanta *magic*.

Tabel 2.2 Tabel *Adjacency* Graf  $G$  pada Gambar 2.14

$i \ j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	19	0	16	12	0	0	0
2	19	5	11	0	0	13	0	0
3	0	11	8	20	0	0	9	0
4	16	0	20	2	0	0	0	10

5	12	0	0	0	7	15	0	14
6	0	13	0	0	15	3	17	0
7	0	0	9	0	0	17	4	18
8	0	0	0	10	14	0	18	6

## 2.2 Kerangka Pemikiran

Berdasarkan tinjauan pustaka yang telah diberikan, kerangka pemikiran disusun sebagai berikut. Pemetaan satu-satu  $\Phi$  yang membawa elemen-elemen dalam graf  $G$  ke bilangan bulat positif atau non-negatif disebut pelabelan. Suatu pelabelan disebut pelabelan total jika berdomain himpunan *vertex*  $G$  dan himpunan *edge*  $G$ . Jika suatu pelabelan total adalah fungsi bijektif yang memetakan himpunan  $G \cup E$  ke bilangan  $1, 2, \dots, v$  sehingga diperoleh bilangan konstan  $k$  yang dirumuskan

$$k = \sum_{j \in N} d_j$$

dengan  $\sum_{j \in N} d_j$  adalah jumlah label semua *edge*  $j$  yang *incident* dengan *vertex*  $v$  dan  $G = \{1, 2, \dots, v\}$  maka disebut pelabelan total *super vertex-magic*. Balbuena *et al.* [1] melakukan penelitian mengenai pelabelan total *super vertex-magic* pada *disjoint m cycle* dan beberapa keluarga graf *circulant*. Hasil penelitian Balbuena *et al.* [1] menunjukkan bahwa terdapat pelabelan total *super vertex-magic* pada gabungan *disjoint m cycle*  $mC_n$  dengan  $m$  dan  $n$  ganjil, graf *circulant*  $C_{1, s}$  dengan  $n$  ganjil  $\geq 5$  dan  $s \in \{2, 3, \dots, (n-1)/2\}$  dan graf *circulant*  $C_{1,2,3}$  dengan  $n$  ganjil  $\geq 7$  sedemikian hingga diperoleh konstanta *magic k* tertentu. Karya Balbuena *et al.* [1] merupakan pengembangan dari penelitian dari MacDougall *et al.* [8]. MacDougall *et al.* [8] menunjukkan bahwa *cycle*  $C_n$  dengan  $n$  ganjil  $\geq 3$  memiliki pelabelan total *super vertex-magic*. Berdasarkan hasil kaji ulang, penulis menerapkan pelabelan total *super vertex-magic* pada graf *circulant*  $C_{1,2,3,4}$  dan gabungan *disjoint m* graf *circulant*  $mC_{1, s}$ . Hasil terapan menunjukkan bahwa terdapat pelabelan total *super vertex-magic* pada graf *circulant*  $C_{1,2,3,4}$  dengan  $n$  ganjil  $\geq 7$  dan gabungan *disjoint m* graf *circulant*  $mC_{1, s}$  dengan  $m, n$  ganjil  $\geq 5$  dan  $s \in \{2, 3, \dots, (n-1)/2\}$ .

1)/2}. Sebagai pendukung pembahasan pelabelan total *super vertex-magic*, diberikan contoh-contoh untuk setiap graf yang menjadi objek penulisan skripsi.

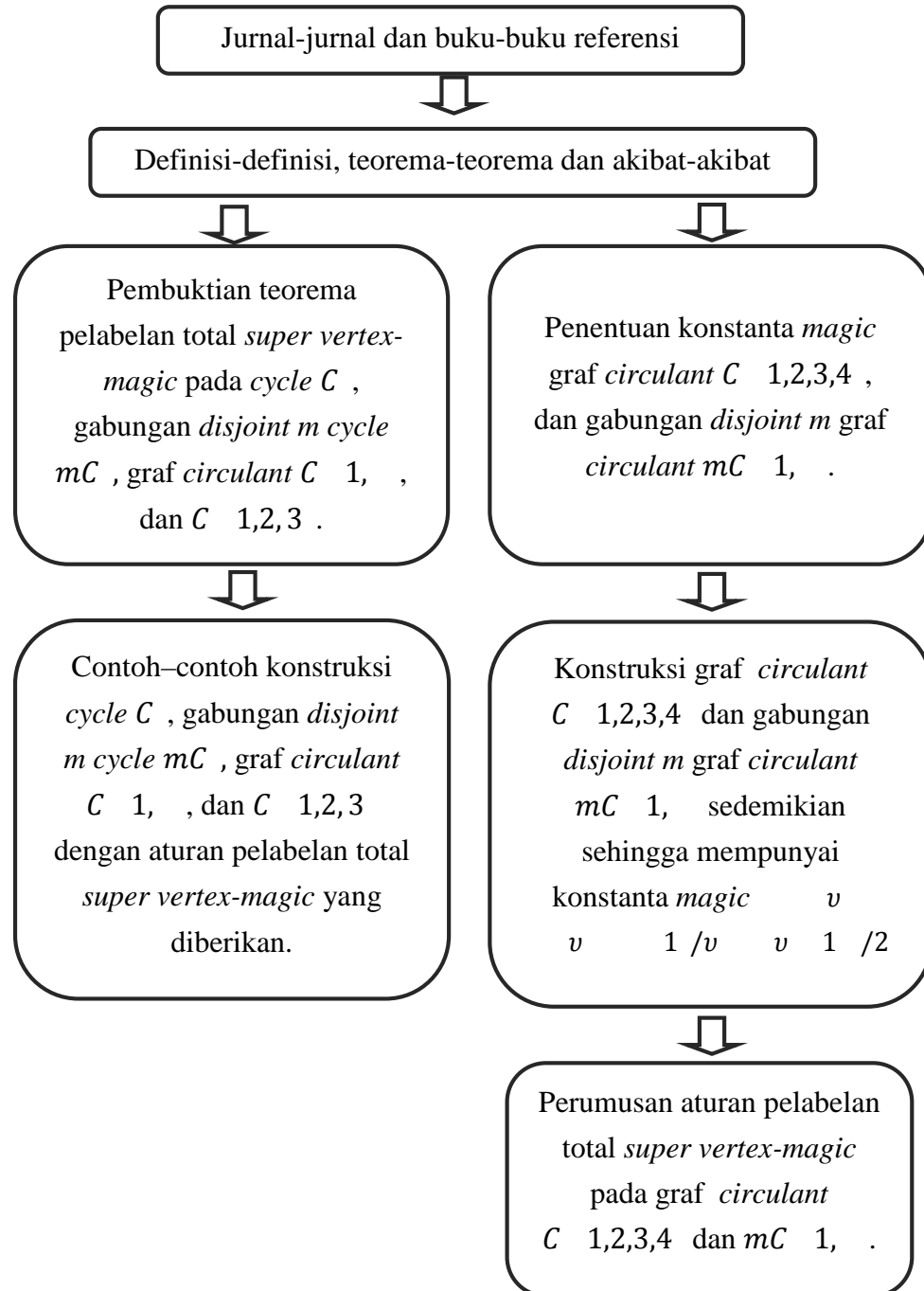


### BAB III METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi adalah studi literatur. Bahan penulisan diambil dari buku referensi dan jurnal. Pembahasan skripsi merupakan kaji ulang dari jurnal karya Balbuena *et al.* [1] dan MacDougall *et al.* [8]. Tujuan dasar penulisan skripsi adalah memperkenalkan pelabelan total *super vertex-magic*. Sesuai tujuan penulis, disusun langkah-langkah penulisan skripsi sebagai berikut.

1. Berdasarkan *order*, *size* dan derajat pada graf dapat ditunjukkan bahwa jika terdapat pelabelan total *super vertex-magic* pada *cycle*  $C_n$ , graf *circulant*  $C_n(1)$ ,  $C_n(1,2,3)$ , dan  $C_n(1,2,3,4)$  maka  $n$  ganjil. Gabungan *disjoint  $m$  cycle*  $mC_n$  dan gabungan *disjoint  $m$  graf circulant*  $mC_n(1)$  memuat pelabelan total *super vertex-magic* jika  $m$  dan  $n$  ganjil.
2. Menentukan konstanta *magic* dan pelabelan total pada *cycle*  $C_n$ , gabungan *disjoint  $m$  cycle*  $mC_n$ , graf *circulant*  $C_n(1)$ , dan  $C_n(1,2,3)$  menggunakan aturan pelabelan tertentu sedemikian sehingga diperoleh bobot *vertex* yang konstan dan senilai dengan konstanta *magic*.
3. Menerapkan hasil kaji ulang pada keluarga graf *circulant* yang lain, yaitu graf *circulant*  $C_n(1,2,3,4)$  dan gabungan *disjoint  $m$  graf circulant*  $mC_n(1)$ . Menentukan pelabelan pada  $C_n(1,2,3,4)$  dan  $mC_n(1)$  dengan urutan langkah sebagai berikut.
  - a. Menentukan konstanta *magic* pada graf  $C_n(1,2,3,4)$  dan  $mC_n(1)$ ,
  - b. Merumuskan aturan pelabelan total *super vertex-magic* pada graf  $C_n(1,2,3,4)$  dan  $mC_n(1)$  dengan cara menentukan pola pelabelan total graf  $C_n(1,2,3,4)$  dan  $mC_n(1)$  sedemikian sehingga graf memiliki bobot *vertex* yang konstan dan senilai dengan konstanta *magic*.

### Skema Penelitian



**BAB IV**  
**PEMBAHASAN**

**4.1 Pelabelan Total Super Vertex-Magic pada Graf**

Menurut MacDougall *et al.* [8], pelabelan total *super vertex-magic* adalah suatu bijeksi  $\lambda$  dari  $V(G) \sqcup E(G)$  ke bilangan bulat  $1, 2, \dots, v + 1$  dengan syarat bahwa untuk setiap  $v \in V(G)$  berlaku

$$\sum_{j \in N(v)} \lambda(j) + \lambda(v) = k$$

dengan  $k$  bernilai konstan disebut konstanta *magic* dan  $\lambda(V(G)) = \{1, 2, \dots, v\}$ .

**Teorema 4.1.1** *Jika  $G$  mempunyai suatu pelabelan total super vertex-magic, maka*

$$\frac{v + 1}{2} = \frac{v + 1}{2}$$

**Bukti**

Diberikan graf  $G$  dan  $\lambda$  adalah pelabelan total *super vertex-magic* pada graf  $G$  sedemikian sehingga setiap *vertex* berbobot  $k$ . Jika  $G = (V, E)$ , maka  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_v\}$  dengan  $i = 1, 2, \dots, v$ . Ditulis kembali rumusan matriks *adjacency* label, yaitu matriks simetris  $a_{ij}$  dengan  $i, j = 1, 2, \dots, v$  sehingga

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda(e_{ij}) & \text{jika } i \neq j \\ \lambda(v_i) & \text{jika } i = j \end{cases} \quad (4.1)$$

dengan  $e_{ij}$  adalah label *edge* dan  $v_i$  adalah label *vertex*. Syarat *magic* menyiratkan bahwa jumlah semua entri pada baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  harus konstan dan senilai dengan konstanta *magic*  $k$ , untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, v$ . Oleh karena itu diperoleh hubungan

$$\sum_{j=1}^v a_{ij} = \sum_{i=1}^v a_{ij} = k \quad i = 1, 2, \dots, v \quad (4.2)$$

Menurut persamaan (4.1),  $a_{ij}$  untuk  $i = j$  bernilai  $\lambda(v_i)$  sehingga persamaan (4.2) dapat disajikan

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_v \\ a_1 & a_2 & \dots & a_v \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_v \end{matrix}$$

hasil penjumlahan semua baris adalah

$$v \cdot \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_v \end{matrix} = \begin{matrix} v a_1 & v a_2 & \dots & v a_v \end{matrix} \quad (4.3)$$

Menurut persamaan (4.1), jika  $edge_j \in E$  maka  $a_{ij} = \lambda(i, j)$  yang berlabel mulai dari  $v - 1$  sampai dengan  $v$ , sehingga persamaan (4.3) dapat dituliskan

$$\begin{matrix} \frac{v-1}{2} & \frac{v-2}{2} & \dots & \frac{v-1}{2} \\ \frac{v-1}{2} & \frac{v-2}{2} & \dots & \frac{v-1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{v-1}{2} & \frac{v-2}{2} & \dots & \frac{v-1}{2} \end{matrix} \quad \begin{matrix} v-1 & v-2 & \dots & v-1 \\ v-1 & v-2 & \dots & v-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v-1 & v-2 & \dots & v-1 \end{matrix}$$

dan diperoleh konstanta *magic* pada graf, yaitu

$$\frac{v-1}{2} \cdot \begin{matrix} v-1 & v-2 & \dots & v-1 \\ v-1 & v-2 & \dots & v-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v-1 & v-2 & \dots & v-1 \end{matrix} = \frac{v-1}{2} \cdot \begin{matrix} v-1 & v-2 & \dots & v-1 \\ v-1 & v-2 & \dots & v-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v-1 & v-2 & \dots & v-1 \end{matrix} \quad (4.5)$$

□

Teorema 4.1.1 menghasilkan Akibat 4.1.2 dan Akibat 4.1.3.

**Akibat 4.1.2** Jika graf  $G$  mempunyai pelabelan total super vertex-magic, maka  $v \equiv 1 \pmod{2}$  jika  $v$  ganjil dan  $v \equiv 1 \pmod{2}$  jika  $v$  genap.

**Akibat 4.1.3** Jika  $G$  adalah graf berorder genap yang mempunyai pelabelan total super vertex-magic maka  $v \equiv 0 \pmod{8}$  dan  $v \equiv 0 \pmod{4}$  atau  $v \equiv 3 \pmod{4}$ ; atau  $v \equiv 4 \pmod{8}$  dan  $v \equiv 1 \pmod{4}$ .

**Teorema 4.1.4** Jika suatu graf  $r$ -regular  $G$  berorder  $v$  mempunyai pelabelan total super vertex-magic, maka  $v$  dan  $r$  mempunyai parity yang berlawanan dan

$$\begin{matrix} \text{jika } v \equiv 0 \pmod{8} \text{ maka } r \equiv 0 \pmod{4}, \\ \text{jika } v \equiv 4 \pmod{8} \text{ maka } r \equiv 2 \pmod{4} \end{matrix}$$

### Bukti

Diasumsikan suatu graf  $r$ -regular  $G$  mempunyai order  $v$ , dengan  $v$  bernilai ganjil, dan graf  $G$  memiliki pelabelan total *super vertex-magic*. Jumlah *edge* dalam graf  $G$  dinotasikan  $E$ . Menurut Fletcher *et al.* [3], jumlah derajat semua *vertex* dalam suatu graf sama dengan dua kali *size*. Oleh karena setiap *vertex* dalam graf  $r$ -regular  $G$  mempunyai derajat yang sama yaitu  $r$ , maka *size*  $\varepsilon$  dapat disajikan

$$\frac{v}{2} \tag{4.6}$$

Substitusi persamaan (4.6) ke konstanta *magic* (4.5) ditampilkan sebagai berikut.

$$\frac{v - \frac{v}{2} + \frac{v}{2} + 1}{v} = \frac{v + 1}{2}$$

$$\frac{v - 2 + \frac{v}{2} + 1}{2v} = \frac{v + 1}{2}$$

$$\frac{2 - v + \frac{v}{2} + 1}{2} = \frac{v + 1}{2}$$

Karena  $\frac{v + 1}{2}$  harus integer,  $2 - v + \frac{v}{2} + 1$  dan  $v + 1$  harus mempunyai *parity* yang sama sehingga jika  $v$  ganjil maka  $r$  genap, jika  $v$  genap maka  $r$  ganjil.

Merujuk pada Akibat 4.1.3 dan  $\frac{v}{2}$ , maka dapat dikatakan bahwa graf  $r$ -regular  $G$  berorder genap

- jika  $v \equiv 0 \pmod{8}$  maka  $\frac{v}{2} \equiv 0 \pmod{4}$ .
- jika  $v \equiv 4 \pmod{8}$  maka  $\frac{v}{2} \equiv 2 \pmod{4}$ .  $\square$

Teorema 4.1.4 menyatakan bahwa jika suatu graf *super vertex-magic* berderajat ganjil maka mempunyai order genap. Jika graf *super vertex-magic* berderajat genap maka ber-order ganjil. Teorema 4.1.4 mengakibatkan gabungan *disjoint m* graf  $r$ -regular dengan setiap komponen ber-order  $v$  memuat pelabelan total *super vertex-magic*

- jika  $r$  genap maka nilai  $m$  dan  $v$  ganjil,
- jika  $r$  ganjil maka nilai  $m$  atau  $v$  genap.

Oleh karena itu dapat dikatakan bahwa

- jika *cycle C* mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* jika  $n$  ganjil,
- jika gabungan *disjoint m cycle mC* mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* jika  $m$  dan  $n$  ganjil,
- jika graf *circulant C*  $\{1, 2, \dots, n-1\}/2$  mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* jika  $n$  ganjil,
- jika gabungan *disjoint m graf circulant mC*  $\{1, 2, \dots, n-1\}/2$  mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* jika  $m$  dan  $n$  ganjil.

#### 4.2 Pelabelan Total Super Vertex-Magic pada Cycle

*Cycle* termasuk graf *regular* dengan  $r = 2$  atau dapat disebut graf *2-regular*. *Cycle* mempunyai  $v = n$ , dengan  $v$  adalah *order*,  $n$  adalah *size* dan  $n$  adalah panjang. Dituliskan oleh MacDougall *et al.* [8], bahwa hanya *cycle C* dengan panjang ganjil atau  $n$  ganjil yang memuat pelabelan total *super vertex-magic*. Pernyataan MacDougall *et al.* [8] dikukuhkan dalam Teorema 4.2.1 berikut.

**Teorema 4.2.1** *Suatu cycle C mempunyai pelabelan total super vertex-magic jika dan hanya jika n ganjil.*

##### Bukti

“ $\Rightarrow$ ” Diasumsikan terdapat *cycle* dengan *order v* merupakan graf *super vertex-magic* dengan konstanta *magic k*. Oleh karena *cycle* mempunyai  $v$  maka konstanta *magic* (4.5) disajikan

$$\frac{v}{v} = \frac{v-1}{2} \quad (4.5)$$

*Cycle* mempunyai  $v = n$ , jika  $n$  genap maka  $n = 2k$ , untuk sebarang sehingga persamaan (4.7) dapat disajikan

$$\frac{2k}{2k} = \frac{2k-1}{2} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & 8 - 2 = \frac{1}{2} \\ & 7 = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

berarti diperoleh konstanta *magic k* yang tidak integer. Dapat dikatakan bahwa *cycle C* dengan *n* genap tidak memiliki pelabelan total *super vertex-magic*.

Jika *n* ganjil maka  $n = 2k + 1$ , untuk sebarang  $k$  sehingga persamaan (4.7) dapat disajikan

$$\begin{aligned} & 4k + 2 - 1 = 2k + \frac{2}{2} \\ & 8k + 2 \\ & 7k + 2, \end{aligned} \tag{4.8}$$

berarti diperoleh konstanta *magic k* yang integer sehingga disimpulkan *cycle C* dengan *n* ganjil memuat pelabelan total *super vertex-magic*.

“□” Misal *cycle C* mempunyai *n* ganjil dengan  $n = 2k + 1$ , diberi label dengan aturan pelabelan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & 2k + \frac{i - 1}{2}, \quad i \text{ ganjil} \\ & 2k + \frac{n - 1}{2} - \frac{i}{2}, \quad i \text{ genap} \\ & 2k + \frac{n - 1}{2} \end{aligned}$$

Pelabelan *edge*  $e_{ij}$  berarah searah jarum jam dari *i* ke *j* mod *n*. Oleh karena *vertex* *i* adjacent dengan *vertex*  $i + 1$  dan  $i - 1$ , bobot *vertex* *i* dalam *cycle C* dirumuskan

Aturan pelabelan total mengakibatkan bobot setiap *vertex* bernilai konstan. Misalnya *vertex*  $i$  dan  $i + 1$ , ditunjukkan bahwa bobot *vertex*  $i$  sama dengan Bobot *vertex*  $i + 1$  :

$$\begin{aligned} & 1 + 2k + 2k + \frac{n - 1}{2} \\ & 7k + 3/2 \end{aligned}$$

Bobot *vertex* :

$$\frac{n-2n+\frac{n-1}{2}+2n+\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}}{\frac{10n-n-1+n-1+n-1}{2}+\frac{7n-3}{2}}$$

Bobot *vertex* pada *cycle* di bawah aturan pelabelan total secara lengkap disajikan dalam Lampiran 1. Oleh karena bobot *vertex* sama pada setiap *vertex* maka dihasilkan konstanta *magic*. Pelabelan graf mengakibatkan himpunan *vertex* dilabeli dengan  $1, 2, 3, \dots, n$  dan himpunan *edge* dilabeli dengan  $n-1, n-2, \dots, 2n$ . Pelabelan total pada *cycle* memenuhi definisi pelabelan total *super vertex-magic*. Terbukti bahwa suatu *cycle* mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* jika dan hanya jika  $n$  ganjil.  $\square$

Pembuktian Teorema 4.2.1 memberikan rumus umum konstanta *magic cycle*  $C_n$  dengan  $n$  ganjil  $\geq 3$  yaitu

$$\frac{7n-3}{2} \quad 4$$

Bukti Teorema 4.2.1 dikonstruksikan dalam contoh-contoh berikut.

### Contoh 1

Tiga buah graf *cycle* dengan panjang masing-masing 3, 5, dan 7 adalah graf *super vertex-magic*. Berapakah konstanta *magic* masing-masing *cycle* dan konstruksikan pelabelannya!

### Penyelesaian

Menurut rumus umum konstanta *magic* pada *cycle* (4.9), konstanta *magic cycle*  $C_3$  adalah

$$\frac{7-3}{2} + \frac{3}{2} = 12$$

Konstanta *magic cycle*  $C_5$  adalah

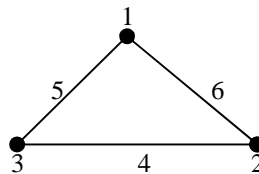
$$\frac{7-5}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

Konstanta *magic cycle*  $C_7$  adalah

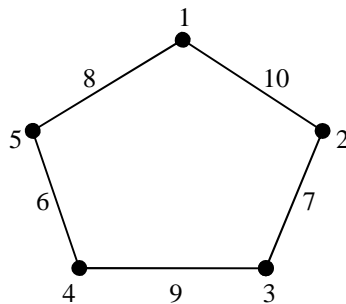


$$\frac{7 \cdot 7 + 3}{2} = \frac{52}{2} = 26$$

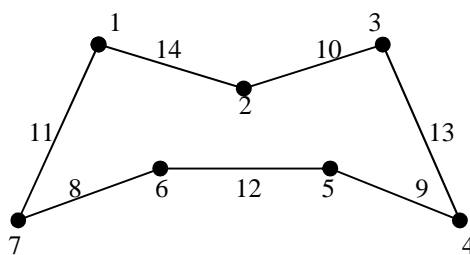
Konstruksi pelabelan total *super vertex-magic* pada *cycle*  $C_3, C_4, C_5$  masing-masing disajikan dalam Gambar 4.1, Gambar 4.2 dan Gambar 4.3.



Gambar 4.1 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $C_3$  dengan  $k = 12$



Gambar 4.2 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $C_5$  dengan  $k = 11$



Gambar 4.3 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $C_7$  dengan  $k = 26$

### Contoh 2

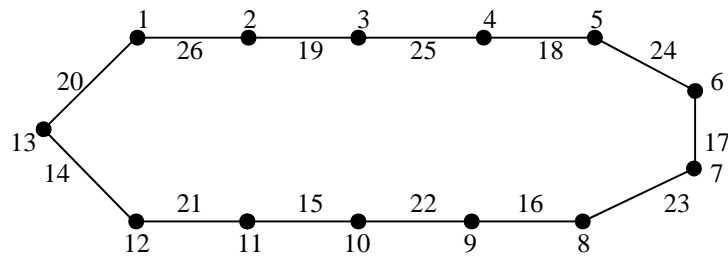
Jika terdapat suatu graf *super vertex-magic* berupa *cycle* dengan  $n = 13$  maka berapakah konstanta *magic k* dan bagaimana konstruksi pelabelannya ?

### Penyelesaian

Berdasarkan rumus umum konstanta *magic* pada *cycle* (4.9), konstanta *magic* *cycle*  $C_3$  adalah

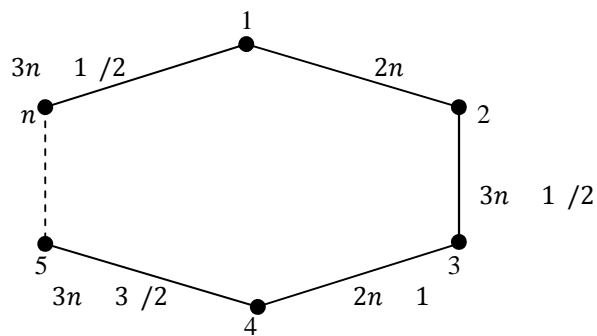
$$\frac{7 \cdot 13}{2} - \frac{3}{2} = 47$$

Konstruksi pelabelan total *super vertex-magic* pada *cycle*  $C_3$  disajikan oleh Gambar 4.4.



Gambar 4.4 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $C_3$  dengan 47

Konstruksi *cycle super vertex-magic* tersaji di Gambar 4.5. Jika diperiksa bobot setiap *vertex* pada *cycle*  $C$  dengan  $n$  ganjil  $\geq 3$  maka diperoleh konstanta *magic*  $\frac{3n+1}{2}$ .



Gambar 4.5 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $C$

### 4.3 Pelabelan Total *Super Vertex-Magic* pada Gabungan *Disjoint m Cycle*

Gabungan *disjoint m cycle*, dinotasikan  $mC$ , merupakan graf tak terhubung yang terbentuk dari  $m$  cycle. Gabungan *disjoint m cycle* mempunyai  $v$  dan derajat setiap *vertex* adalah dua. Menurut Balbuena *et al.* [1], selain cycle dengan  $n$  ganjil, graf *2-regular* yang mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* adalah gabungan *disjoint m cycle* dengan  $m, n$  ganjil. Rumus konstanta *magic*  $mC$  diberikan oleh Balbuena *et al.* [1] dalam Teorema 4.3.1.

**Teorema 4.3.1** Jika  $m$  dan  $n$  ganjil, maka graf  $mC$  mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* dengan

$$\frac{7mn - 3}{2}$$

#### Bukti

Diberikan pelabelan total pada graf  $mC$  untuk  $m, n$  ganjil dengan aturan pelabelan berikut. Untuk setiap  $1, 2, \dots, m$ , dinyatakan *vertex-vertex* dari pergandaan ke- $p$  dalam  $mC$  dengan  $p$ , dan *edge-edge* dengan  $p$ , untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ . Pelabelan total terbagi menjadi dua komponen. Komponen pertama, graf  $mC$  dengan  $1, 2, \dots, m - 1/2$  didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{array}{ll} \frac{im - 2}{2} & \text{untuk } i = 1, 2, \dots, n - 2, \\ \frac{mn - 1}{2} & \text{untuk } i = n - 1, \\ \frac{m - 1}{2} & \text{untuk } i = n; \\ \frac{1}{2} (3n - i - 1) & \text{untuk } i = 1, 3, \dots, n - 2, \\ \frac{1}{2} (4n - i - m - 1) & \text{untuk } i = 2, 4, \dots, n - 3, \\ \frac{1}{2} (3n - 1 - m) & \text{untuk } i = n - 1, \\ 2mn - 1 & \text{untuk } i = n \end{array}$$

Komponen kedua adalah graf  $mC$  dengan  $m - 1/2, \dots, m$  didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 & \frac{i-1}{m-2} \frac{m-2}{mn-1} && \text{untuk } i=1,2,\dots,n-2, \\
 & \frac{3m-1}{2} && \text{untuk } i=n-1, \\
 & && \text{untuk } i=n; \\
 & \frac{1}{2} (3n-i-1) \frac{m-1}{2} && \text{untuk } i=1,3,\dots,n-2, \\
 & \frac{1}{2} (4n-i-m-1) && \text{untuk } i=2,4,\dots,n-3, \\
 & \frac{3}{2} (n-1) \frac{m-2}{2mn-1} && \text{untuk } i=n-1, \\
 & && \text{untuk } i=n
 \end{aligned}$$

Pelabelan  $edge_j$  berarah searah jarum jam dari  $i$  ke  $j \pmod n$ . Oleh karena  $vertex_{i+1}$  adjacent dengan  $vertex_i$  dan  $vertex_{i-1}$ , maka bobot  $vertex_i$  dalam gabungan *disjoint m cycle* dirumuskan

Pelabelan total mengakibatkan bobot  $vertex_i$  konstan. Bobot  $vertex_i$  untuk  $i=3,5,\dots,n-2$  dan  $i=1,2,\dots,m-1/2$  disajikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 & \frac{i-m-2}{2} (3n-i-1) \frac{m-1}{2} + \frac{1}{2} (4n-i-1) \frac{m-1}{2} \\
 & \frac{3}{2} mn - 2mn - 3 + \frac{7mn-3}{2}
 \end{aligned}$$

Bobot  $vertex_i$  untuk  $i=3,5,\dots,n-2$  dan  $i=m-1/2,\dots,m$ , yaitu

$$\begin{aligned}
 & \frac{i-1}{m-2} (3n-i-1) \frac{m-1}{2} + \frac{1}{2} (4n-i-1) \frac{m-1}{2} \\
 & \frac{3}{2} mn - 2mn - \frac{3}{2} + \frac{7mn-3}{2}
 \end{aligned}$$

Bobot  $vertex$  gabungan *disjoint m cycle* di bawah aturan pelabelan total secara lengkap disajikan dalam Lampiran 2. Nilai konstan yang dihasilkan dari bobot  $vertex$  disebut konstanta *magic*. Pelabelan total mengakibatkan himpunan  $vertex$  dilabeli dengan  $1,2,3,\dots,mn$  dan himpunan  $edge$  dilabeli dengan  $mn-1, mn-2, \dots, 2mn$ . Oleh karena itu, terbukti bahwa jika  $m$  dan  $n$  ganjil,

maka graf  $mC$  mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* dengan konstanta *magic*  $\frac{7m+3}{2}$

□

Teorema 4.3.1 memberikan rumus umum konstanta *magic* gabungan *disjoint m cycle*  $mC$  dengan  $m$  dan  $n$  ganjil yaitu

$$\frac{7mn + 3}{2} \tag{4.10}$$

Bukti Teorema 4.3.1 dikonstruksikan dalam Contoh 3 dan Contoh 4.

**Contoh 3**

Dua buah graf  $G$  dan  $G$  adalah gabungan *disjoint m cycle*  $mC_3$  dengan masing-masing mempunyai  $m = 3$  dan  $m = 5$ . Tentukan konstanta *magic* graf  $G$  dan  $G$  beserta konstruksi pelabelannya !

**Penyelesaian**

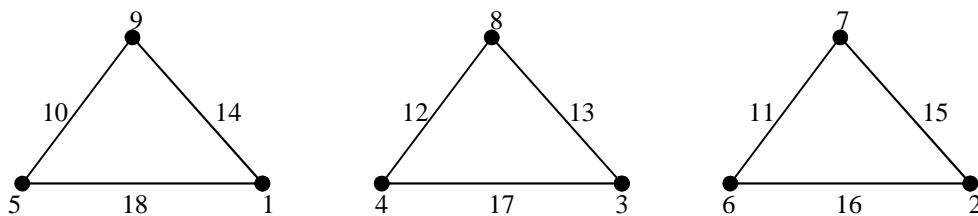
Berdasarkan persamaan (4.10), konstanta *magic* graf  $G$  yang merupakan gabungan *disjoint m cycle* dengan  $n = 3$  dan  $m = 3$  atau dinotasikan  $3C_3$  adalah

$$\frac{7 \cdot 3 \cdot 3 + 3}{2} = \frac{66}{2} = 33$$

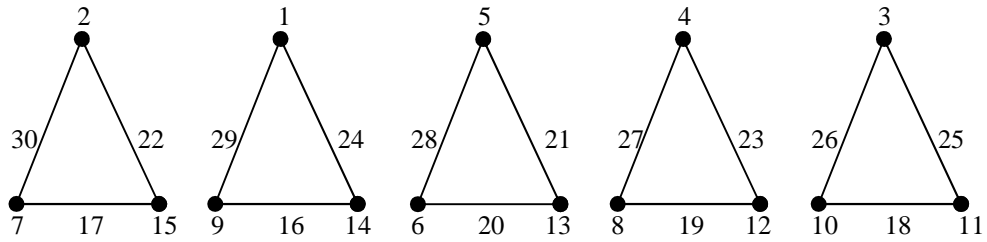
Konstanta *magic* graf  $G$  yang berupa gabungan *disjoint 5 cycle* dengan panjang 3 atau dinotasikan  $5C_3$  adalah

$$\frac{7 \cdot 5 \cdot 3 + 3}{2} = \frac{108}{2} = 54$$

Konstruksi  $3C_3$  disajikan dalam Gambar 4.6 dan  $5C_3$  disajikan dalam Gambar 4.7.



Gambar 4.6 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $3C_3$  dengan konstanta *magic* 33



Gambar 4.7 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $5C_3$  dengan  $54$

**Contoh 4**

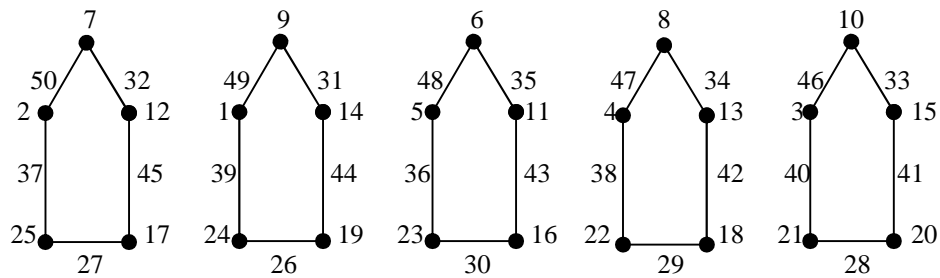
Jika sebuah graf berbentuk gabungan *disjoint 5 cycle* dengan  $n = 5$  merupakan graf *super vertex-magic* maka tentukanlah konstanta *magic* dan konstruksi pelabelannya!

**Penyelesaian**

Konstanta *magic* gabungan *disjoint 5 cycle* dengan  $n = 5$  adalah

$$\frac{7 \cdot 5 + 5 \cdot 3}{2} = \frac{178}{2} = 89$$

Konstruksi  $5C$  disajikan dalam Gambar 4.8.



Gambar 4.8 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $5C$  dengan  $89$

**4.4 Pelabelan Total Super Vertex-Magic pada Graf Circulant**

Graf *circulant* termasuk keluarga graf *regular* karena setiap *vertex*-nya berderajat sama. Graf *circulant*  $C(n, S)$  dengan  $1 \leq |S| \leq n/2$  memiliki

bagian luar berbentuk *cycle* dengan panjang  $n$  dan memiliki *chord* yang menghubungkan himpunan *vertex* dengan jarak  $s$  pada *cycle*. Graf *circulant*  $C(1, S)$  dibentuk dari  $n$  ganjil  $\geq 5$  *vertex*. Hubungan *order*, *size* dan panjang dalam graf *circulant*  $C(1, S)$  adalah  $v = n$ ,  $e = 2n|S|$ . Balbuena *et al.* [1] mengemukakan pelabelan total *super vertex-magic* pada graf *circulant*  $C(1, S)$  dalam Teorema 4.4.1.

**Teorema 4.4.1** Untuk  $n$  ganjil  $\geq 5$  dan  $S = \{2, 3, \dots, n-1/2\}$ , graf *circulant*  $C(1, S)$  mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* dengan konstanta magic

$$\frac{17n - 5}{2}$$

**Bukti**

Diasumsikan bahwa graf *circulant*  $C(1, S)$  mempunyai  $n$  ganjil  $\geq 5$  dan  $S = \{2, 3, \dots, n-1/2\}$ . Diberikan pelabelan total  $\phi_3$  pada graf *regular*  $C(1, S)$  berderajat 4 dengan aturan pelabelan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \phi_3(i) &= i && \text{untuk } i = 0, 1, \dots, n-1 \\ \phi_3(n+i) &= n+i && \text{untuk } i = 0, 1, \dots, n-1 \\ \phi_3(2i) &= \frac{4n-i}{2} && \text{untuk } i = 0, 2, 4, \dots, n-1 \\ \phi_3(2i+1) &= \frac{3n-i}{2} && \text{untuk } i = 1, 3, 5, \dots, n-2 \\ \phi_3(2n+i-1) &= 2n+i-1 && \text{untuk } i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Pelabelan total  $\phi_3$  pada *edge*  $e_j$  berarah searah jarum jam dari  $i$  ke  $j \pmod n$ .

Oleh karena *vertex*  $v_i$  adjacent dengan *vertex*  $v_{i+1}$ ,  $v_{i-1}$ , dan  $v_{i+2}$  maka bobot *vertex*  $v_i$  dalam graf *circulant*  $C(1, S)$  dapat dirumuskan

$$\begin{aligned} \text{Bobot } v_i &= \phi_3(i) + \phi_3(i+1) + \phi_3(i-1) + \phi_3(i+2) \\ &= i + (n+i) + (n+i-1) + \frac{4n-(i+2)}{2} \\ &= 2n + \frac{3n-1}{2} \end{aligned}$$

Selanjutnya diselidiki bobot *vertex*  $v_i$  untuk  $i = 0$  menggunakan aturan pelabelan total  $\phi_3$

$$7n - 2 \frac{3n - 1}{2}$$

$$17n - 5 / 2$$

Bobot *vertex* untuk  $i = 1, 3, 5, \dots, 1 \pmod n$  adalah

$$i \frac{3n - i}{2} \frac{4n - i - 1}{2} 2n - i - 1 \quad 2n - n \quad i - 1$$

$$5n - i - 2 \frac{7n - 2i - 1}{2}$$

$$17n - 5 / 2$$

Bobot *vertex* pada graf *circulant*  $C(1, \dots)$  di bawah aturan pelabelan total  $\mathbb{Z}_3$  disajikan secara lengkap dalam Lampiran 3. Oleh karena pelabelan total  $\mathbb{Z}_3$  menghasilkan bobot *vertex* yang konstan maka dapat dikatakan bahwa pelabelan total  $\mathbb{Z}_3$  pada graf *circulant*  $C(1, \dots)$  mengakibatkan suatu nilai tetap yang disebut konstanta *magic* dengan rumus  $\frac{17n - 5}{2}$ . Pelabelan total  $\mathbb{Z}_3$  memberi label *vertex*

$1, 2, \dots, n$  dan label *edge*  $(n - 1, n - 2, \dots, 3n)$ , sehingga pelabelan total  $\mathbb{Z}_3$  merupakan pelabelan total *super vertex-magic*. Terbukti bahwa untuk  $n$  ganjil 5 dan  $2, 3, \dots, n - 1 / 2$ , graf *circulant*  $C(1, \dots)$  mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* dengan konstanta *magic*

$$\frac{17n - 5}{2} \tag{4.11}$$

□

Bukti Teorema 4.4.1 dikonstruksikan dalam Contoh 5 dan 6 berikut.

**Contoh 5**

Tentukan konstanta *magic* graf *circulant*  $C(1, \dots)$  dengan  $n = 7$ , kemudian konstruksikan menggunakan pelabelan total *super vertex-magic* !

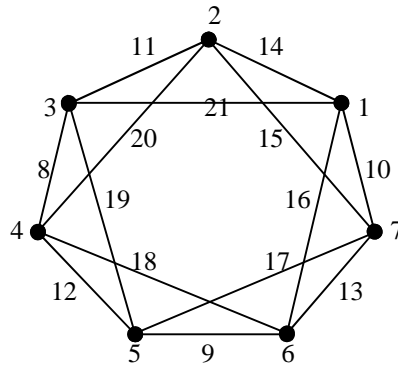
**Penyelesaian**

Berdasarkan rumus (4.11), konstanta *magic* graf *circulant*  $C(1, \dots)$  dengan  $n = 7$  adalah

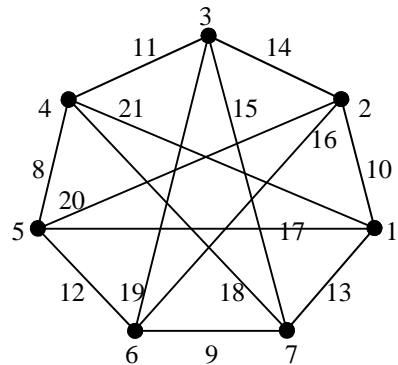
$$\frac{17 \cdot 7 - 5}{2} = \frac{124}{2} = 62$$



Graf *circulant*  $C(7, \{1, 2\})$  dengan  $n = 7$  dapat dikonstruksikan sebagai  $C(7, \{1, 2\})$  dan  $C(7, \{1, 3\})$ . Konstruksi pelabelan total *super vertex-magic* pada graf *circulant*  $C(7, \{1, 2\})$  dengan  $n = 7$  disajikan oleh Gambar 4.9 dan Gambar 4.10.



Gambar 4.9 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $C(7, \{1, 2\})$  dengan  $n = 7$



Gambar 4.10 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $C(7, \{1, 3\})$  dengan  $n = 7$

### Contoh 6

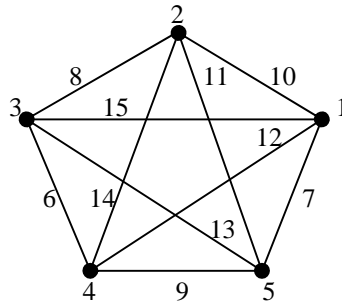
Tentukan konstanta *magic* graf *circulant*  $C(5, \{1, 2\})$  dengan  $n = 5$ , kemudian konstruksikan sedemikian sehingga disebut graf *super vertex-magic* !

### Penyelesaian

Berdasarkan rumus (4.11), konstanta *magic* graf *circulant*  $C(5, \{1, 2\})$  adalah

$$\frac{17 \cdot 5}{2} + \frac{5}{2} = 45$$

Graf *circulant*  $C(5, \{1, 2\})$  dengan  $n = 5$  hanya dapat dikonstruksikan sebagai  $C(5, \{1, 2\})$ . Konstruksi pelabelan total *super vertex-magic* pada graf *circulant*  $C(5, \{1, 2\})$  disajikan oleh Gambar 4.11.



Gambar 4.11 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $C(5, \{1, 2\})$  dengan  $k = 45$

#### 4.5 Pelabelan Total *Super Vertex-Magic* pada Graf *Circulant* $C(n, \{1, 2\})$

Graf *circulant*  $C(n, \{1, 2\})$  merupakan graf *regular* berderajat 6. Graf *6-regular*  $C(n, \{1, 2\})$  mempunyai  $v = n$  dan  $e = 3n$ . Oleh karena graf *circulant*  $C(n, \{1, 2\})$  dapat dikonstruksikan jika  $n \geq 7$  maka pelabelan total *super vertex-magic* termuat dalam graf *circulant*  $C(n, \{1, 2\})$  dengan  $n$  ganjil  $\geq 7$ . Konstanta *magic* pada graf *circulant*  $C(n, \{1, 2\})$  dengan  $n$  ganjil  $\geq 7$  dikemukakan oleh Balbuena *et al.* [1] dalam Teorema 4.5.1.

**Teorema 4.5.1.** Untuk  $n$  ganjil  $\geq 7$  graf *circulant*  $C(n, \{1, 2\})$  mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* dengan konstanta *magic*

$$\frac{31n - 7}{2}$$

#### Bukti

Diasumsikan bahwa graf *circulant*  $C(n, \{1, 2\})$  mempunyai  $n$  ganjil  $\geq 7$ . Diberikan pelabelan total pada graf *regular*  $C(n, \{1, 2\})$  berderajat 6 dengan aturan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 & 3 - i && \text{untuk } i = 0, 1, 2 \\
 & n - 3 - i && \text{untuk } i = 4, 5, \dots, n - 1 \\
 & \frac{2n}{2} && \text{untuk } i = 0 \\
 & \frac{3n - i}{2} && \text{untuk } i = 1, 3, 5, \dots, n - 2 \\
 & \frac{2n - i}{2} && \text{untuk } i = 2, 4, 6, \dots, n - 1 \\
 & 3n - i, && \text{untuk } i = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \\
 & \sum_{i=0}^{n-1} (3n - i - 1), && \text{untuk } i = 0, 1, 2, \dots, n - 1
 \end{aligned}$$

Pelabelan total pada edge  $e_j$  berarah searah jarum jam dari  $i$  ke  $j \pmod n$ . Pelabelan total mengakibatkan himpunan vertex diberi label  $1, 2, 3, \dots, n$  dan himpunan edge diberi label  $n - 1, n - 2, \dots, 4n$ .

Vertex pada graf circulant  $C_{n, \{1, 2, 3\}}$  adjacent dengan 6 vertex, yaitu  $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ . Bobot vertex pada graf circulant  $C_{n, \{1, 2, 3\}}$  dirumuskan

Bobot vertex untuk  $i = 0$  adalah

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^{n-1} (3n - i - 1) \\
 & = 3n - 1 + 3n - 2 + 3n - 3 + \dots + 3n - (n - 1) \\
 & = 3n - 1 + 3n - 2 + 3n - 3 + \dots + 3n - n + 1 \\
 & = 4 - 14n + \frac{3n - 1}{2} \\
 & = \frac{31n - 7}{2}
 \end{aligned}$$

Bobot vertex untuk  $i = 1$  adalah

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^{n-1} (3n - i - 1) \\
 & = 3n - 1 + 3n - 2 + 3n - 3 + \dots + 3n - (n - 1) \\
 & = 3n - 1 + 3n - 2 + 3n - 3 + \dots + 3n - n + 1 \\
 & = \frac{3n - 1}{2} + 2n - 3n + 1 + 3n - n + 1 + 3n - 1 + 1 + 3n - n
 \end{aligned}$$

$$3 - 14n + \frac{3n - 1}{2}$$

$$\frac{31n - 7}{2}$$

Bobot *vertex* pada graf *circulant*  $C_{1,2,3}$  di bawah aturan pelabelan total disajikan secara lengkap dalam Lampiran 4. Pelabelan total mengakibatkan setiap *vertex* memiliki bobot *vertex* yang konstan, sehingga dapat dikatakan bahwa pelabelan total membentuk konstanta *magic*. Pelabelan total memberi label *vertex*  $1, 2, \dots, n$  dan label *edge*  $(n-1, n-2), \dots, (1, 2)$ . Syarat pelabelan total *super vertex-magic* dipenuhi oleh pelabelan total ini, sehingga pelabelan total ini disebut pelabelan total *super vertex-magic*. Terbukti bahwa untuk  $n$  ganjil  $\geq 7$ , graf *circulant*  $C_{1,2,3}$  mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* dengan konstanta *magic*

$$\frac{31n - 7}{2} \quad 4.12$$

□

Bukti dari Teorema 4.5.1 didukung oleh Contoh 7 dan Contoh 8 berikut.

### Contoh 7

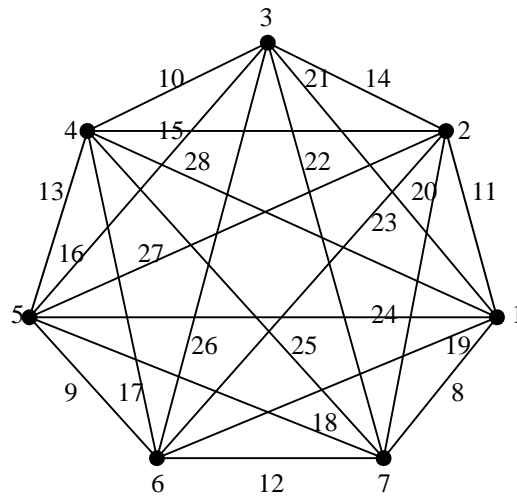
Tentukan konstanta *magic* graf *circulant*  $C_{1,2,3}$  kemudian konstruksikan menggunakan pelabelan total *super vertex-magic* !

### Penyelesaian

Berdasarkan persamaan (4.12), konstanta *magic* graf *circulant*  $C_{1,2,3}$  adalah

$$\frac{31n - 7}{2} = \frac{224}{2} = 112$$

Konstruksi pelabelan total *super vertex-magic* pada graf *circulant*  $C_{1,2,3}$  disajikan oleh Gambar 4.12.



Gambar 4.12 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $C_3(1,2,3)$  dengan  $\mu = 112$

### Contoh 8

Tentukan konstanta *magic* graf *circulant*  $C_3(1,2,3)$  kemudian konstruksikan menggunakan pelabelan total *super vertex-magic* !

### Penyelesaian

Berdasarkan persamaan (4.12), konstanta *magic* graf *circulant*  $C_3(1,2,3)$  adalah

$$\frac{31 + 13 + 7}{2} = \frac{410}{2} = 205$$

Konstruksi pelabelan total *super vertex-magic* pada graf *circulant*  $C_3(1,2,3)$  dengan  $n = 13$  secara geometris kurang efisien. Oleh karena itu digunakan tabel *adjacency* label yang bersesuaian dengan (4.1) untuk menunjukkan bahwa graf *circulant*  $C_3(1,2,3)$  merupakan graf *super vertex-magic* dengan  $\mu = 205$ . Tabel pelabelan total *super vertex-magic* pada graf *circulant*  $C_3(1,2,3)$  disajikan oleh Tabel 4.1. Penjumlahan entri-entri setiap baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  adalah konstan, yaitu 205, disebut konstanta *magic*  $C_3(1,2,3)$ .

Tabel 4.1 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $C_{12}$  dengan  $m = 205$

$v_j/$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	3	26	39	40	0	0	0	0	0	0	50	28	19
1	26	2	20	38	41	0	0	0	0	0	0	51	27
2	39	20	1	14	37	42	0	0	0	0	0	0	52
3	40	38	14	13	21	36	43	0	0	0	0	0	0
4	0	41	37	21	12	15	35	44	0	0	0	0	0
5	0	0	42	36	15	11	22	34	45	0	0	0	0
6	0	0	0	43	35	22	10	16	33	46	0	0	0
7	0	0	0	0	44	34	16	9	23	32	47	0	0
8	0	0	0	0	0	45	33	23	8	17	31	48	0
9	0	0	0	0	0	0	46	32	17	7	24	30	49
10	50	0	0	0	0	0	0	47	31	24	6	18	29
11	28	51	0	0	0	0	0	0	48	30	18	5	25
12	19	27	52	0	0	0	0	0	0	49	29	25	4

#### 4.6 Pelabelan Total Super Vertex-Magic pada Graf Circulant $C_{12}(1,2,3,4)$

Graf *circulant*  $C_{12}(1,2,3,4)$  merupakan graf 8-regular. Bagian luar graf *circulant*  $C_{12}(1,2,3,4)$  berupa *cycle* dan *chord* berjarak 2, 3 dan 4 pada *cycle*. Oleh karena graf *circulant*  $C_{12}(1,2,3,4)$  dapat dikonstruksi untuk  $n$  maka pelabelan total *super vertex-magic* terdapat pada graf *circulant*  $C_{12}(1,2,3,4)$  dengan  $n$  ganjil. Konstanta *magic* pada graf *circulant*  $C_{12}(1,2,3,4)$  dengan  $n$  ganjil ditentukan sebagai berikut.

Hubungan  $v, n$  dalam graf *circulant*  $C_{12}(1,2,3,4)$  adalah  $v = n$  dan  $4n$ . Dilakukan substitusi  $v = n$  dan  $4n$  ke persamaan (4.5) sehingga diperoleh

$$5n - 1 = \frac{n + 4n + 1}{2} = \frac{5n + 1}{2}$$

Konstanta *magic* pada graf *circulant*  $C(1,2,3,4)$  diperoleh dari persamaan (4.13), yaitu

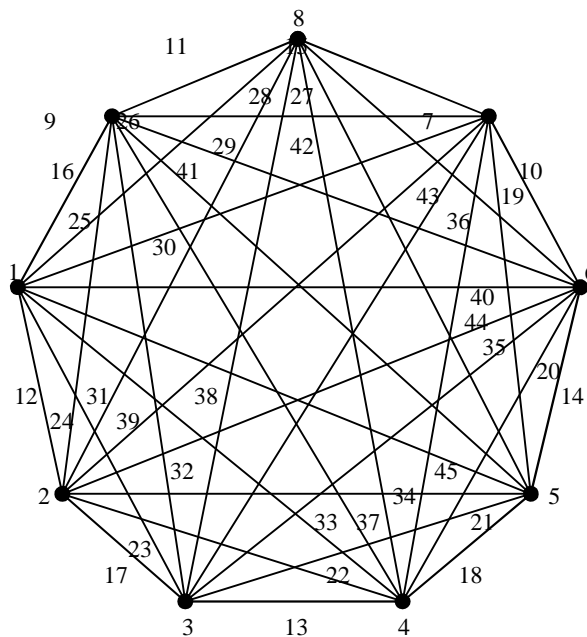
$$\frac{4n}{2} \quad 414$$

Selanjutnya dilakukan suatu pelabelan total, sebut pelabelan total  $\mu$ , pada beberapa graf *circulant*  $C(1,2,3,4)$  sedemikian sehingga mempunyai konstanta *magic*  $\mu$ .

Graf *circulant*  $C(1,2,3,4)$  dipilih sebagai contoh. Berdasarkan persamaan (4.14), graf *circulant*  $C(1,2,3,4)$  mempunyai konstanta *magic*

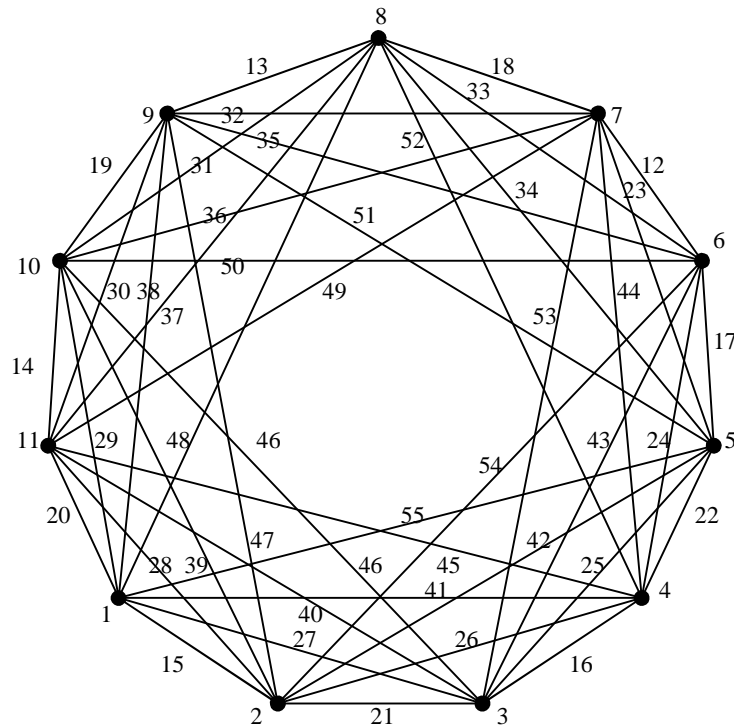
$$\frac{4}{2} = \frac{450}{2} = 225$$

Pelabelan  $\mu$  pada graf *circulant*  $C(1,2,3,4)$  ditunjukkan oleh Gambar 4.13.



Gambar 4.13 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $C(1,2,3,4)$  dengan  $\mu = 225$

Graf *circulant*  $C(1,2,3,4)$  dipilih sebagai objek penelitian berikutnya. Konstanta *magic* graf *circulant*  $C(1,2,3,4)$  adalah 225. Pelabelan total  $\mu$  pada graf *circulant*  $C(1,2,3,4)$  sedemikian sehingga bobot setiap *vertex* konstan disajikan oleh Gambar 4.14.



Gambar 4.14 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $C_{12}$  dengan 274

Tabel 4.2 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $C_3$  dengan 323

$j/i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	8	21	39	40	62	0	0	0	0	58	43	37	15
1	21	7	14	27	52	63	0	0	0	0	59	42	38
2	39	14	6	20	28	51	64	0	0	0	0	60	41
3	0	27	20	5	26	29	50	65	0	0	0	0	61
4	0	0	28	26	4	19	30	49	53	0	0	0	0
5	0	0	0	29	19	3	25	31	48	54	0	0	0
6	0	0	0	0	30	25	2	18	32	47	55	0	0
7	0	0	0	0	0	31	18	1	24	33	46	56	0
8	0	0	0	0	0	0	32	24	13	17	34	45	57
9	58	0	0	0	0	0	0	33	17	12	23	35	44
10	43	59	0	0	0	0	0	0	34	23	11	16	36
11	37	42	60	0	0	0	0	0	0	35	16	10	22
12	15	38	41	61	0	0	0	0	0	0	36	22	9



Tabel 4.3 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  
*Graf Circulant C<sub>3</sub> 1,2,3,4* dengan 51

$j/i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0	8	33	63	64	102	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	98	67	61	23	
1	33	7	22	43	84	103	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	99	66	62	
2	63	22	6	32	44	83	104	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100	65	
3	64	43	32	5	42	45	82	105	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	101
4	102	84	44	42	4	31	46	81	85	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	103	83	45	31	3	41	47	80	86	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	104	82	46	41	2	30	48	79	87	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	105	81	47	30	1	40	49	78	88	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	85	80	48	40	21	29	50	77	89	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	86	79	49	29	20	39	51	76	90	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	87	78	50	39	19	28	52	75	91	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	88	77	51	28	18	38	53	74	92	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	89	76	52	38	17	27	54	73	93	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	90	75	53	27	16	37	55	72	94	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	91	74	54	37	15	26	56	71	95	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	92	73	55	26	14	36	57	70	96	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	93	72	56	14	13	25	58	69	97	0
17	98	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	94	71	57	25	12	35	59	68	0
18	67	99	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	95	70	58	35	11	24	60	0
19	61	66	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	96	69	59	24	10	34	0
20	23	62	65	101	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	97	68	60	34	9	0

Graf *circulant C<sub>3</sub> 1,2,3,4* mempunyai konstanta *magic* 323. Tabel 4.2 menyajikan pelabelan total pada graf *circulant C<sub>3</sub> 1,2,3,4* sedemikian sehingga diperoleh bobot *vertex* yang konstan, yaitu 323.

Contoh graf berikutnya, dipilih graf *circulant C<sub>3</sub> 1,2,3,4* yang mempunyai konstanta *magic* 51. Pelabelan total pada graf *circulant C<sub>3</sub> 1,2,3,4* sedemikian sehingga diperoleh bobot *vertex* yang konstan, yaitu senilai dengan konstanta *magic* 51, disajikan oleh Tabel 4.3.



Bobot *vertex* untuk  $i = 1$  adalah

$$\begin{aligned}
 & 3 \\
 & 3 \\
 & 7n - 1 - 3n + 3 + 3n - n + 1 + 3n - n + n + 1 + 4n \\
 & 1 + 1 + 4n - n + 2 + 1 + 5n + 1 + 3 + 4n - n + 3 + 3 \\
 & 3 + 23n + \frac{1}{2} + 3n + 3 + \frac{4n}{2}
 \end{aligned}$$

Bobot *vertex* pada graf *circulant*  $C_{1,2,3,4}$  secara lengkap disajikan dalam Lampiran 5. Nilai konstan — yang diperoleh dari bobot *vertex* graf  $C_{1,2,3,4}$  disebut konstanta *magic*  $C_{1,2,3,4}$ . Pelabelan total mengakibatkan label *vertex*  $1, 2, \dots, n$  dan label *edge*  $n + 1, n + 2, \dots, 5n$  sehingga pelabelan total disebut pelabelan total *super vertex-magic*.

#### 4.7 Pelabelan Total Super Vertex-Magic pada Gabungan Disjoint $m$ Graf Circulant

Graf *circulant*  $mC_1$ , merupakan graf *4-regular* yang terbentuk dari gabungan  $m$  graf *circulant*  $C_1$ . Setiap komponen graf *circulant*  $mC_1$ , dapat dikonstruksi untuk  $v$  ganjil  $\geq 5$ . Pelabelan total *super vertex-magic* terbentuk pada graf *circulant*  $mC_1$ , dengan  $m, n$  ganjil  $\geq 5$ . Hubungan  $v, n$  dalam graf *circulant*  $mC_1$ , adalah  $v = mn$  dan  $n = 2mn$ . Konstanta *magic* pada graf *circulant*  $mC_1$ , dengan  $m, n$  ganjil  $\geq 5$  ditentukan sebagai berikut.

Substitusi  $v = mn$  dan  $n = 2mn$  ke persamaan (4.5), yaitu

$$\begin{aligned}
 & \frac{mn + 2mn + mn + 2mn + 1}{mn} + \frac{mn + 1}{2} \\
 & 3 + 3mn + 1 + \frac{mn + 1}{2} \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

Konstanta *magic* pada graf *circulant*  $C_{1,2,3,4}$  diperoleh dengan menyamakan penyebut persamaan (4.15), yaitu

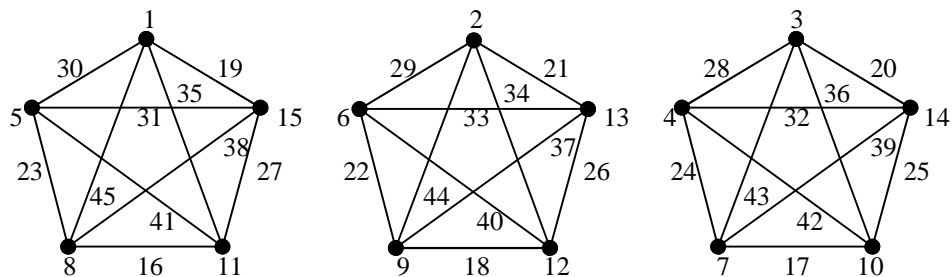
$$\frac{17mn + 5}{2} \tag{4.16}$$

Suatu pelabelan total diberikan pada graf *circulant*  $mC(1, \dots)$ , sebut pelabelan total  $\dots$ , sedemikian sehingga mempunyai konstanta *magic*  $\dots$ . Pelabelan total  $\dots$  menggunakan aturan pelabelan total *super vertex-magic* pada gabungan *disjoint m cycle* untuk melabeli bagian luar gabungan *disjoint m* graf *circulant* yang berbentuk *cycle*. Label *vertex* dan label *edge* yang membentuk *chord* ditentukan sedemikian sehingga diperoleh bobot *vertex* yang konstan.

Gabungan *disjoint m* graf *circulant*  $mC(1, \dots)$  dengan  $m = 3, n = 5$  dan  $\dots = 2$  dipilih sebagai contoh. Berdasarkan rumus konstanta *magic* (4.16), konstanta *magic* graf *circulant*  $3C(1,2)$  adalah

$$\frac{17 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{2} = \frac{260}{2} = 130$$

Pelabelan total  $\dots$  pada graf *circulant*  $3C(1,2)$  sedemikian sehingga dipenuhi nilai konstanta *magic*  $\dots = 130$ , disajikan oleh Gambar 4.15.



Gambar 4.15 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $3C(1,2)$  dengan  $\dots = 130$

Gabungan *disjoint m* graf *circulant*  $mC(1, \dots)$  dengan  $m = 5, n = 5, \dots = 2$  dipilih sebagai contoh berikutnya. Konstanta *magic* graf *circulant*  $5C(1,2)$  dengan rumus konstanta *magic* (4.16) adalah

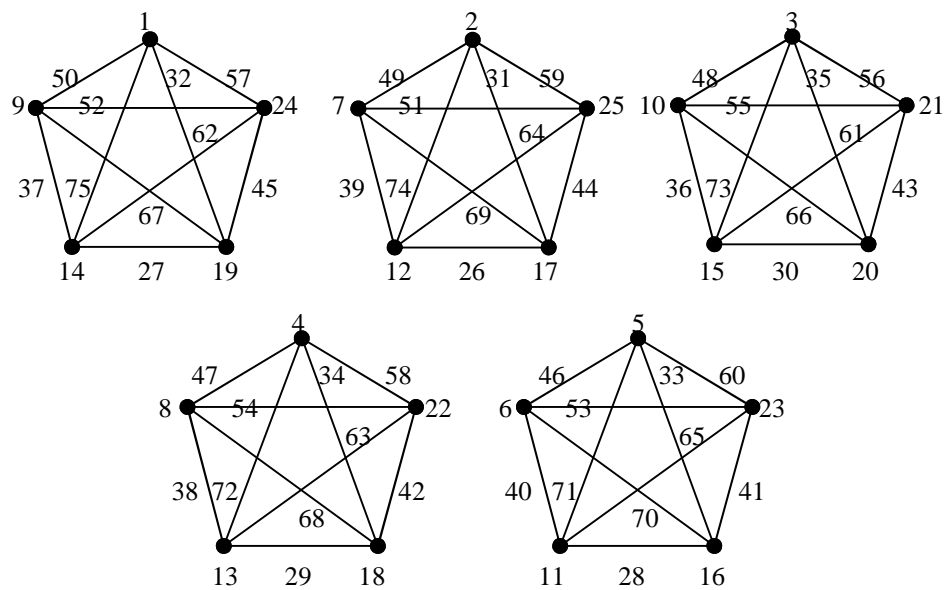
$$\frac{17 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{2} = \frac{430}{2} = 215$$

Pelabelan total  $\dots$  pada graf *circulant*  $5C(1,2)$  sedemikian sehingga dipenuhi nilai konstanta *magic*  $\dots = 215$ , disajikan oleh Gambar 4.16.

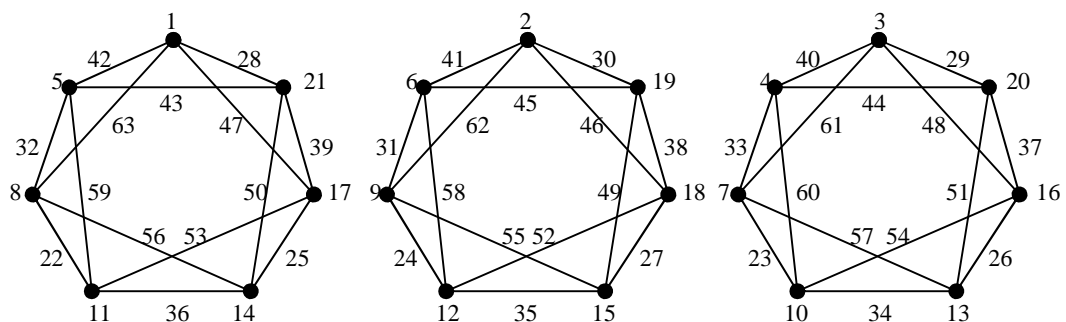
Objek penyelidikan selanjutnya adalah gabungan *disjoint m* graf *circulant*  $mC_1$ , dengan  $m = 3, n = 7$  dan  $2$ . Konstanta *magic* graf *circulant*  $3C_{1,2}$  adalah

$$\frac{17 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5}{2} = \frac{362}{2} = 181$$

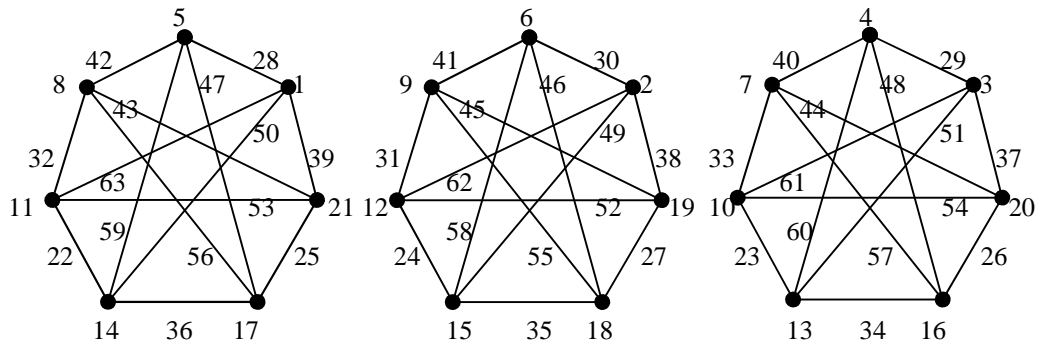
Pelabelan total pada graf *circulant*  $3C_{1,2}$  sedemikian sehingga dipenuhi nilai konstanta *magic* 181 disajikan oleh Gambar 4.17.



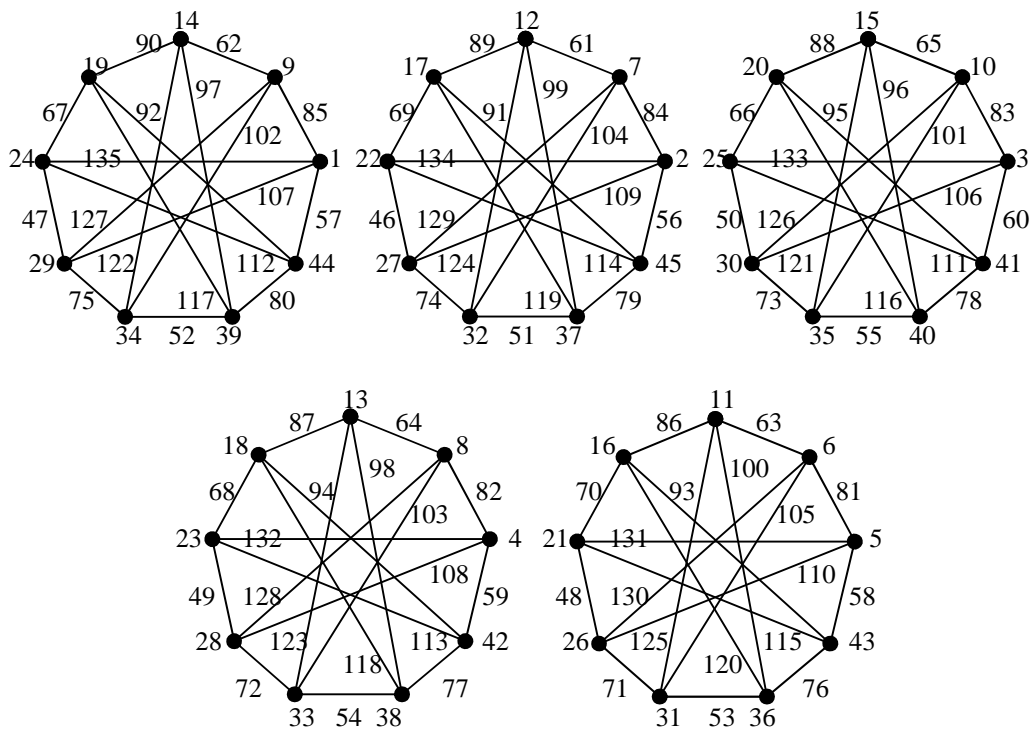
Gambar 4.16 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $5C_{1,2}$  dengan 215



Gambar 4.17 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $3C_{1,2}$  dengan 181



Gambar 4.18 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $3C_{1,3}$  dengan 181



Gambar 4.19 Pelabelan total *super vertex-magic* pada  $5C_{1,4}$  dengan 385

Gabungan *disjoint m* graf *circulant mC* 1, dengan  $m = 3, n = 7$  dan 3 memiliki konstanta *magic*

$$\frac{17 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5}{2} = \frac{362}{2} = 181$$

Pelabelan total pada graf *circulant*  $3C_{1,3}$  sedemikian sehingga dipenuhi nilai konstanta *magic* 181 disajikan oleh Gambar 4.18.

Gabungan *disjoint*  $m$  graf *circulant*  $mC_1$ , dengan  $m = 5, n = 4$  dan 4 memiliki konstanta *magic* 385. Pelabelan total pada graf *circulant*  $5C_{1,3}$  sedemikian sehingga dipenuhi nilai konstanta *magic* 385, disajikan oleh Gambar 4.19.

Pelabelan total pada graf *circulant*  $3C_{1,2}$ ,  $5C_{1,2}$ ,  $3C_{1,2}$ ,  $3C_{1,3}$  dan  $5C_{1,4}$  memberi label *vertex*  $1, 2, \dots, mn$  dan label *edge*  $mn - 1, mn - 2, \dots, 3mn$ . Hubungan label *vertex* dengan indeks *vertex*, label *edge* dengan indeks *edge* dalam pelabelan total disajikan dalam aturan pelabelan total. Setiap  $1, 2, \dots, m$ , dinyatakan *vertex-vertex* pergandaan ke- $p$  dalam  $mC_1$ , dengan  $\dots$ , dan *edge-edge* dengan  $\dots$  dan  $\dots$ ) untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ . Pelabelan total dirumuskan menjadi dua komponen. Komponen pertama digunakan untuk memberi label graf *circulant*  $mC_1$ , dengan  $1, 2, \dots, \dots$  yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{array}{ll}
 & \text{untuk } i = 2 \\
 mn & \frac{m-1}{2} \quad \text{untuk } i = 1 \\
 mn - i & 1, m-2, 1 \quad \text{untuk } i = 1, \dots, n-1 \\
 - 3n - i & 2, m-1 \quad \text{untuk } i = 0, 2, 4, \dots, n-3 \\
 - 4n - i & 1, m-1 \quad \text{untuk } i = 1, 3, 5, \dots, n-4 \\
 - 3n - 1 & m-2 \quad \text{untuk } i = n-2 \\
 2mn - 1 & \quad \text{untuk } i = n-1 \\
 2n - i & 1, m-2 \quad \text{untuk } i = 0, 1, 2, \dots, n-3 \\
 3mn & 1 \quad \text{untuk } i = n-2 \\
 2mn & \frac{m-1}{2} - 1 \quad \text{untuk } i = n-1
 \end{array}$$

Komponen kedua digunakan untuk memberi label graf *circulant*  $mC_1$ , dengan  $\dots, \dots, \dots, m$  yang didefinisikan sebagai berikut.

$mn \frac{3m-1}{2}$ $mn - 2 - 1 - m - i$ $- 3n - i - m -$ $- 4n - i - 1 - m - 1$ $\frac{3}{2} n - 1 - m - 2$ $2mn - 1$ $\frac{2n - i - m - 2}{3mn - 1}$ $2n - 1 - m - \frac{m-1}{2}$	untuk $i = 2$ untuk $i = 1$ untuk $i = 1, 2, \dots, n-1$ untuk $i = 0, 2, 4, \dots, n-3$ untuk $i = 1, 3, 5, \dots, n-4$ untuk $i = n-2$ untuk $i = n-1$  untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n-3$ untuk $i = n-2$ untuk $i = n-1$
---	---

Arah pelabelan pada edge  $e_j$  adalah searah jarum jam dari  $i$  ke  $j$ , untuk  $i, j \pmod n$ .

Rumusan pelabelan total mengakibatkan graf *circulant*  $mC_1$ , dengan order  $n$  mempunyai bobot vertex konstan. Oleh karena vertex  $v_i$  adjacent dengan vertex  $v_{i+1}$ ,  $v_{i-1}$ , dan  $v_{i+m}$  maka bobot vertex graf *circulant*  $mC_1$ , dinyatakan dengan

Bobot vertex dalam graf *circulant*  $mC_1$ , diperiksa di bawah aturan pelabelan total. Dua vertex dipilih, yaitu untuk  $i = 0, n-1$ , sebagai perwakilan vertex-vertex dalam graf *circulant*  $mC_1$ . Bobot vertex dalam graf *circulant*  $mC_1$ , di bawah aturan pelabelan total disajikan secara lengkap dalam Lampiran 6. Bobot vertex pada komponen pertama graf *circulant*  $mC_1$ , adalah

$$mn - 1 - m - 2 - 1 - 3n - 2 - m - 2mn - 1$$

$$2n - 1 - m - 2 - 2n - 0 - 1 - m - 2$$

$$7mn - \frac{3}{2} m$$

$$17mn - 5/2$$



Bobot *vertex* pada komponen kedua graf *circulant*  $mC_1$ , adalah

$$\frac{mn-2}{2} - \frac{1}{2n} - \frac{m}{2} = \frac{2mn-1}{2} - \frac{2mn}{7mn} - \frac{3}{2}$$

Bobot *vertex* pada komponen pertama graf *circulant*  $mC_1$ , adalah

$$\frac{mn}{2} - \frac{n}{2} - \frac{m}{2} = \frac{2mn-1}{2} - \frac{3n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2mn-3n-1}{2}$$

Bobot *vertex* pada komponen kedua graf *circulant*  $mC_1$ , adalah

$$\frac{mn-2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{m}{2} = \frac{2mn-1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{2mn-1}{2} - \frac{3}{2}$$

Pelabelan total mengakibatkan setiap *vertex* mempunyai bobot *vertex* yang sama yaitu  $\frac{2mn-1}{2}$ . Nilai konstan  $\frac{2mn-1}{2}$  yang diperoleh dari bobot *vertex* dalam gabungan *disjoint*  $m$  graf *circulant* disebut konstanta *magic*. Pelabelan juga mengakibatkan label *vertex*  $1, 2, \dots, mn$  dan label *edge*  $mn+1, mn+2, \dots, 2mn$

2,  $3mn$ . Oleh karena pelabelan total memenuhi definisi pelabelan total *super vertex-magic* maka pelabelan total disebut pelabelan total *super vertex-magic*.

## BAB V

### PENUTUP

#### 5.1. Kesimpulan

Sesuai dengan masalah yang telah dirumuskan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

3. Pelabelan total *super vertex-magic* termuat dalam *cycle C* dan graf *circulant C*  $1, 2, \dots, n-1/2$  yang memiliki  $n$  ganjil. Gabungan *disjoint m cycle mC* dan gabungan *disjoint m graf circulant mC*  $1, 2, \dots, n-1/2$  mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* jika  $m$  dan  $n$  ganjil.
4. Konstanta *magic* dalam pelabelan total *super vertex-magic* ditentukan dengan rumus

$$\frac{v-1}{v} \quad \frac{v-1}{2}$$

Label diberikan pada *vertex* dan *edge* sedemikian hingga memiliki bobot *vertex* yang konstan dan senilai dengan konstanta *magic*. Pelabelan dilakukan dengan aturan tertentu sehingga graf-graf objek penulisan disebut graf *super vertex-magic*.

#### 5.2. Saran

Skripsi ini membahas pelabelan total *super vertex-magic* pada *cycle* dan beberapa graf *circulant*. Pembaca yang tertarik dengan pokok bahasan skripsi, dapat mengembangkan pada kelas graf *circulant* yang lain atau graf-graf lain seperti graf *generalized Petersen* dan graf *Complete*.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Balbuena, C., Barker, E., Das, K. C., Lin, Yuqing, Miller, M., Ryan, J., Slamin, Sugeng, K., Tkac, M., *On the Degrees of a Strongly Vertex-Magic Graph*, Discrete Math, **306**, 2006, 539-551.
- [2] Chartrand, G. and Oellermann, O. R., *Applied and Algorithmic Graph Theory*, McGraw-Hill Inc, New York, 1993.
- [3] Fletcher, P., Hoyle, H., Patty, C. W., *Foundation of Discrete Mathematics*, PWS-KENT Publishing Company, Boston, 1991.
- [4] Gallian, J. A., *A Dynamic Survey of Graph Labelings*, The Electronic Journal of Combinatoric, 2009, #DS 16, pp 1-219.
- [5] Harary, F., *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishing Company Inc., Philippines, 1969.
- [6] Hartsfield, N. and Ringel, G., *Pearls in Graph Theory*, Academic Press, Boston-San Diego-NewYork-London, 1990.
- [7] Johnsonbaugh, R., *Discrete Mathematics*, Fifth edition, Prentice Hall, New Jersey, 2001.
- [8] MacDougall, J. A., Miller, M., Sugeng, K. A., *Super Vertex-magic Total Labelings of Graphs*, Proceeding Australasian Workshop Combin. Algorithm 2004, Balina, NSW, 2004, 222-229.
- [9] Slamin, *Graph Labelings*, Departement of Computer Science and Software Engineering, The University of Newcastle, Australia, 1997.
- [10] Wallis, W. D., *Magic Graphs*, Birkhauser, 2001.

