




## Camino de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas

Pedro Gómez, María José González e Isabel Romero  
[argefontes@gmail.com](mailto:argefontes@gmail.com)

<http://funes.uniandes.edu.co/2108/>

II Encuentro Internacional de Matemáticas, Estadística y Educación Matemática  
 Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia  
 Tunja  
 15 de agosto de 2013



1

## Ejemplo

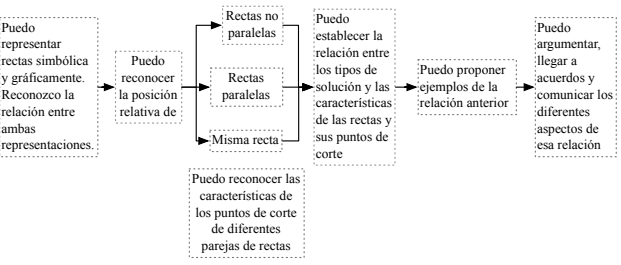
- Tema
  - Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales  $2 \times 2$
- Objetivo de aprendizaje
  - Comprender la noción de solución de un sistema lineal, relacionando la existencia de única solución, infinitas soluciones o ninguna solución con la posición relativa de las rectas en el plano
- ¿Cómo
  - caracterizar ese objetivo de aprendizaje,
  - analizar y formular tareas para contribuir a él y
  - formular criterios de logro y observar y analizar la actuación de los escolares cuando abordan las tareas?

Text

2

## Objetivo de aprendizaje

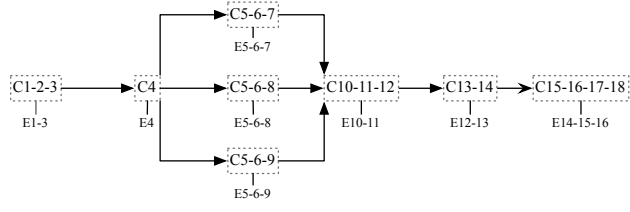
- Comprender la noción de solución de un sistema lineal, relacionando la existencia de única solución, infinitas soluciones o ninguna solución con la posición relativa de las rectas en el plano



Text

3

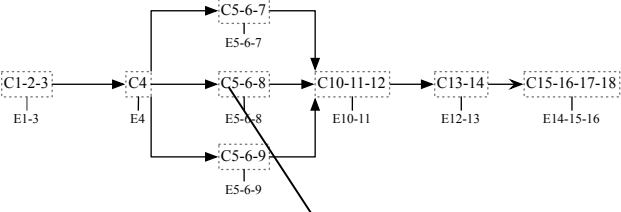
## Grafo del objetivo de aprendizaje



Text

4

## Grafo del objetivo de aprendizaje

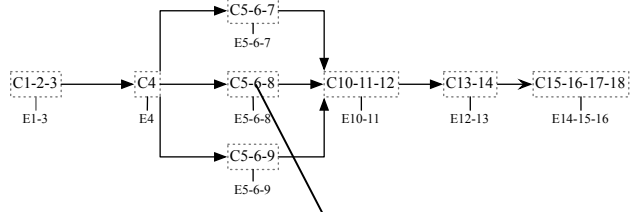


Reconocer en la representación gráfica de dos rectas, sus puntos de corte

Text

5

## Grafo del objetivo de aprendizaje

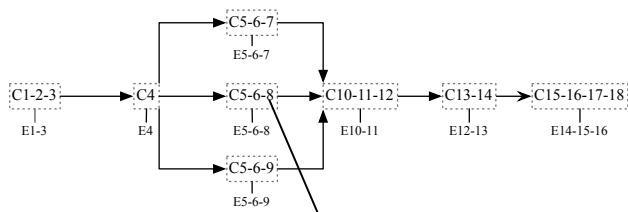


Reconocer que los puntos de corte de dos rectas representan las soluciones al sistema de ecuaciones que las dos rectas forman

Text

6

## Grafo del objetivo de aprendizaje



Reconocer que dos rectas diferentes paralelas no se cortan en ningún punto

7

Text

## Contenido

- ▶ Los caminos de aprendizaje como herramienta en la formación de profesores de matemáticas
  - ▶ MAD: Maestría Análisis Didáctico
  - ▶ Programa basado en el modelo del análisis didáctico
- ▶ Expectativas de aprendizaje
- ▶ Caracterización de un objetivo de aprendizaje
- ▶ Análisis y reformulación de tareas
- ▶ Evaluación

8

Text

## Herramienta en la formación de profesores

- ▶ Los caminos de aprendizaje como herramienta
- ▶ Se utiliza en
  - ▶ Análisis cognitivo
    - ▶ Expectativas, limitaciones e hipótesis de aprendizaje
  - ▶ Análisis de instrucción
    - ▶ Análisis y reformulación de tareas
  - ▶ Análisis de actuación
    - ▶ Formulación de criterios de logro y observación y análisis de la actuación de los escolares

9

Contenido

## Tres cuestiones de la práctica del profesor de matemáticas

- ▶ Formulación de objetivos de aprendizaje
  - ▶ Frases cortas
  - ▶ Supone que el significado es claro
  - ▶ Es más complejo de lo que parece
- ▶ Contribución de una tarea a un objetivo de aprendizaje
  - ▶ Aproximación intuitiva por contenidos
  - ▶ No tiene en cuenta la complejidad cognitiva del objetivo de aprendizaje
  - ▶ No atiende a las demandas cognitivas de las tareas
  - ▶ No se tienen criterios para mejorar la tarea
- ▶ Formulación de criterios de logro
  - ▶ Que se puedan compartir con los escolares
  - ▶ Observación y análisis de la actuación de los escolares

10

Text

## Caminos de aprendizaje

- ▶ Previsiones del profesor sobre la actuación del estudiante
  - ▶ al abordar una tarea
  - ▶ en términos de las capacidades que los escolares pueden activar y
  - ▶ los errores en los que ellos pueden incurrir al abordar esa tarea
- ▶ Se inspira en la idea seminal de Simon sobre trayectoria hipotética de aprendizaje

11

Text

## Trayectoria hipotética de aprendizaje

- ▶ Tres ideas básicas
  - ▶ Objetivo de aprendizaje
  - ▶ Tareas
  - ▶ Hipótesis de aprendizaje
- ▶ La trayectoria hipotética de aprendizaje
  - ▶ parte del objetivo de aprendizaje
  - ▶ sirve para guiar la instrucción
    - ▶ al atender a las actividades que se proponen a los escolares y
    - ▶ a sus procesos de pensamiento y aprendizaje

12

Text

## Múltiples interpretaciones

- ▶ Nuestro interés
  - ▶ Se centra en la formulación de hipótesis de aprendizaje
  - ▶ Buscamos que nuestra propuesta sea útil en la práctica docente del profesor de matemáticas
  - ▶ Se refiere al proceso de planificación de las sesiones de clase en las que se aborda un objetivo de aprendizaje

13

Text

13

## Expectativas de aprendizaje • Objetivo de aprendizaje

- ▶ Tres niveles
  - ▶ Competencias, objetivos de aprendizaje y capacidades
- ▶ Objetivo de aprendizaje
  - ▶ Expresa expectativas que involucran conexiones entre
    - ▶ los conceptos y procedimientos del tema matemático
    - ▶ los sistemas de representación en que se representa y
    - ▶ los fenómenos que organiza
  - ▶ Ejemplo
    - ▶ Establecer la cantidad de permutaciones sin repetición posibles en un conjunto dado

14

Text

14

## Expectativas de aprendizaje • Capacidad

- ▶ Expectativa del profesor
  - ▶ sobre el conjunto de conocimientos elementales y de procedimientos rutinarios que los estudiantes tienen que aprender
  - ▶ Corresponden al nivel cognitivo más bajo
- ▶ Una capacidad aislada se manifiesta
  - ▶ mediante la conducta observable de un estudiante
  - ▶ cuando ejecuta una tarea rutinaria asociada a un tema matemático
- ▶ Permutaciones sin repetición
  - ▶ Ejemplo, para estudiantes de 16 años
    - ▶ hacer uso de diagramas de árbol para realizar conteo de permutaciones posibles

15

Text

15

## Ejemplos de capacidades

- ▶ C2. Relacionar el orden con la representación de la información dada (1°Cartagena, 2°Barranquilla y 3°Santa Marta= {C, B, S}).
- ▶ C36. Contar los arreglos obtenidos utilizando diagramas para expresar la cantidad resultante.
- ▶ C38. Justificar una respuesta relacionando la cantidad de permutaciones encontrada con la pregunta planteada
- ▶ C39. Escoger el(los) sistema(s) de representación adecuado(s) para abordar situaciones que involucran permutaciones.
- ▶ C40. Reconocer las condiciones en las que es posible aplicar el concepto de permutación sin repetición. Es decir, interpreta en el contexto de un problema, una situación que implica permutaciones sin repetición
- ▶ C47. Interpretar el resultado obtenido de acuerdo con el contexto de la situación
- ▶ C54. Verificar la respuesta extrayendo información de el(los) sistema(s) de representación usados.
- ▶ C62. Ubicar los elementos a permutar en posiciones, atendiendo a la cantidad, en orden de la máxima a la mínima posible, en cada posición.
- ▶ C63. Identificar que en cada posición que puede ocupar cada uno de los elementos a permutar, se tiene un elemento menos que en la posición previa.
- ▶ C64. Calcular la cantidad de permutaciones utilizando el principio multiplicativo.

16

Text

16

## Ejemplos de errores

- ▶ E2. Expresa permutaciones con elementos repetidos
- ▶ E20. La solución numérica no es coherente con los datos del problema, aun cuando identificó los parámetros correctamente
- ▶ E44 Cuenta un número mayor o menor de permutaciones sin repetición posibles
- ▶ E54. Calcula la cantidad de permutaciones sumando en situaciones donde debería hacer uso del principio multiplicativo
- ▶ E55. Reitera el número de elementos que pueden ocupar una posición cuando hace uso del principio multiplicativo para calcular permutaciones

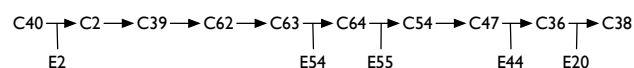
17

Text

17

## Camino de aprendizaje

- ▶ Sucesión de capacidades y de errores que se prevé los estudiantes manifiesten al resolverla
- ▶ Tema
  - ▶ Permutaciones sin repetición
- ▶ T1. Letras
  - ▶ ¿De cuántas maneras posibles puedo ubicar las letras A, B, C y D seguidas una de la otra y teniendo en cuenta que ninguna de ellas se puede repetir?
- ▶ Un camino de aprendizaje



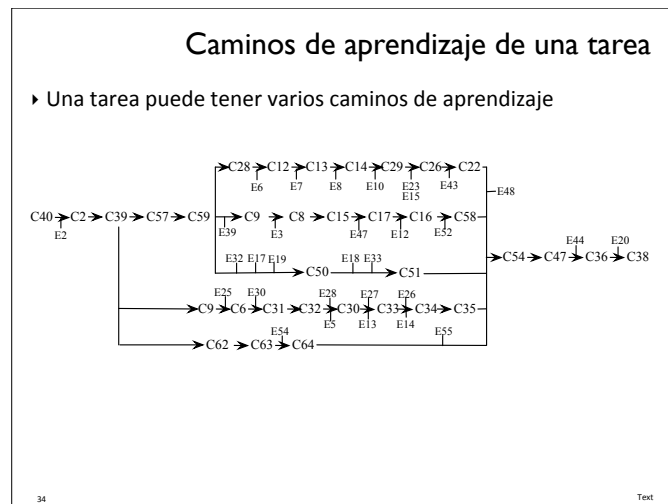
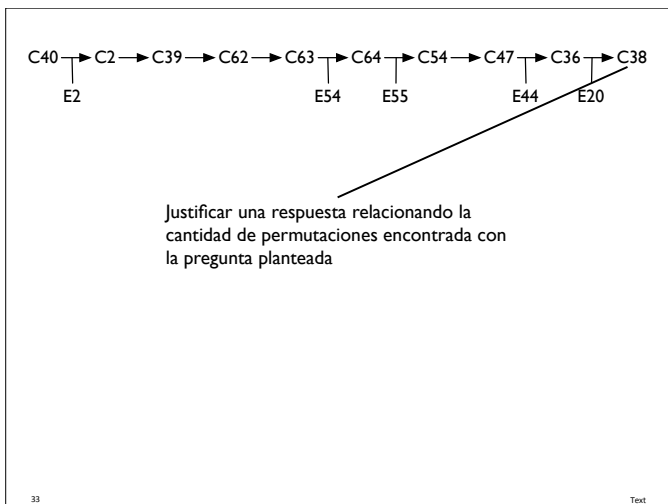
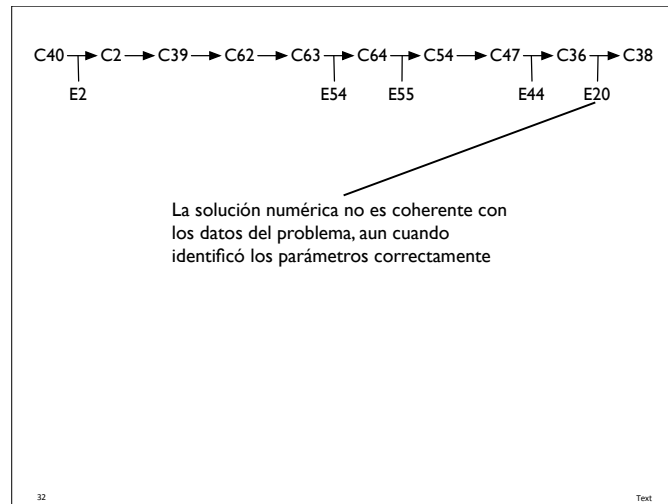
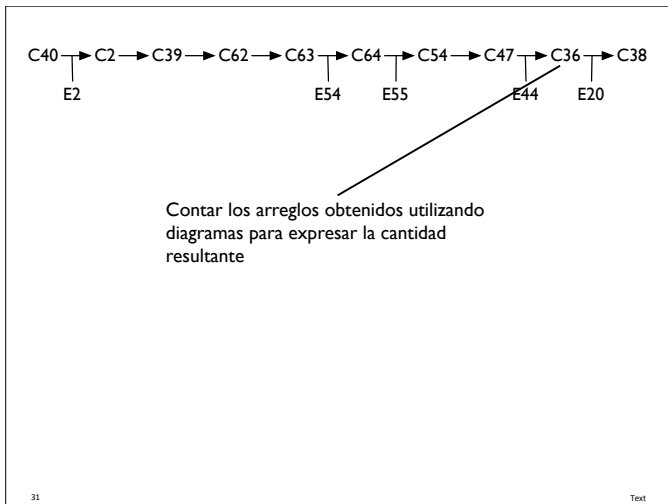
18

Text

18



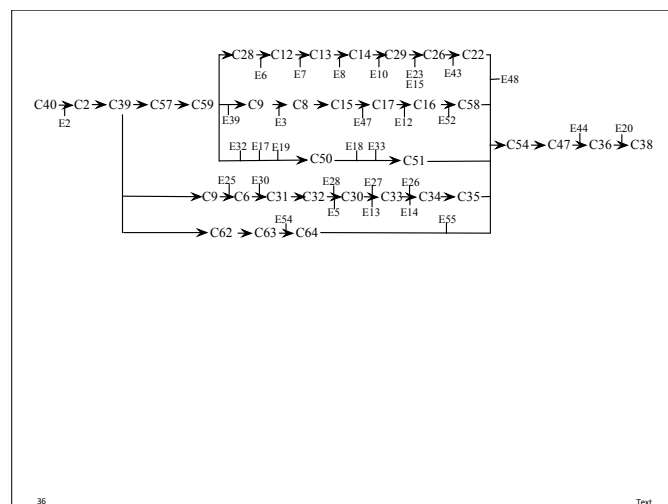


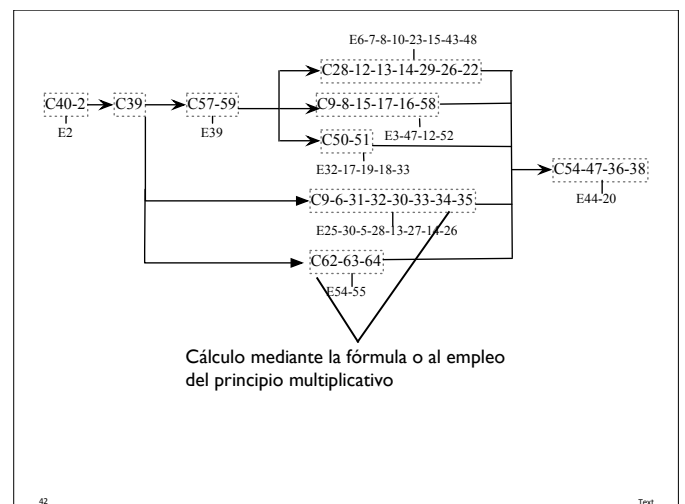
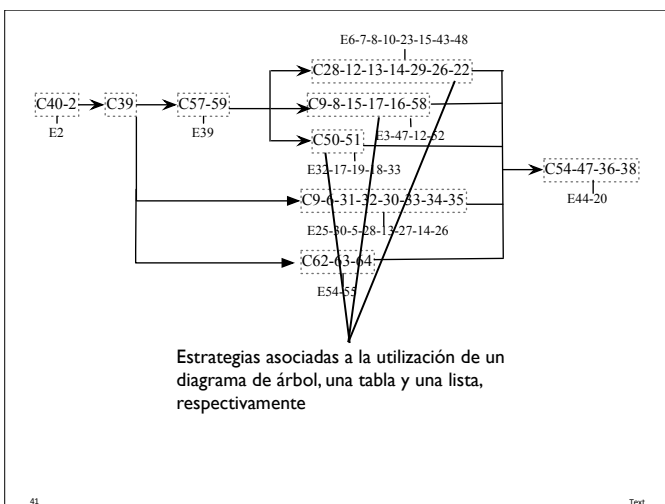
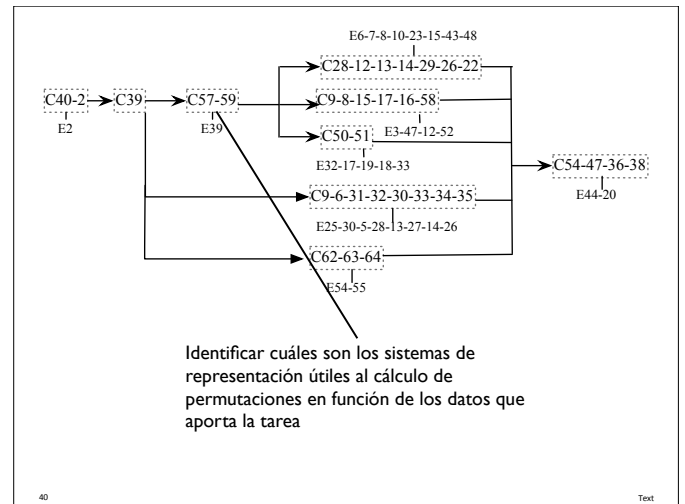
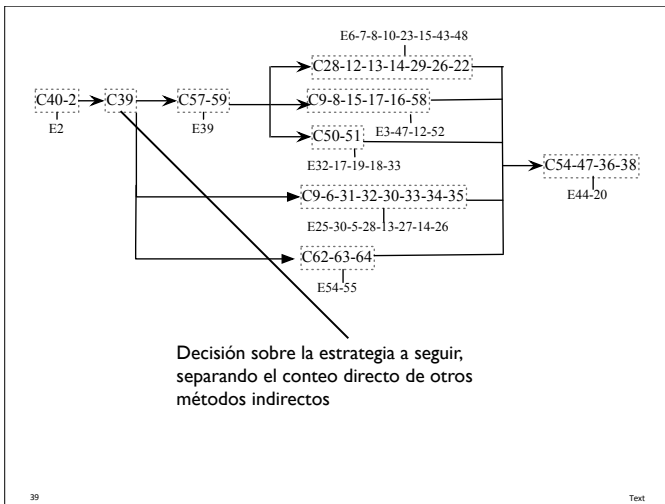
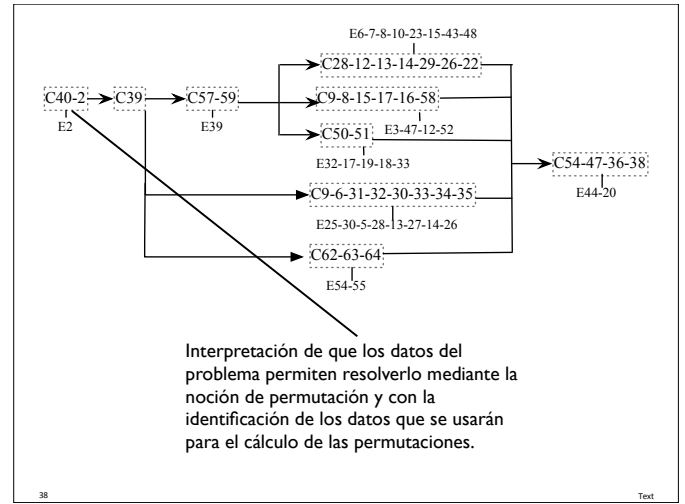
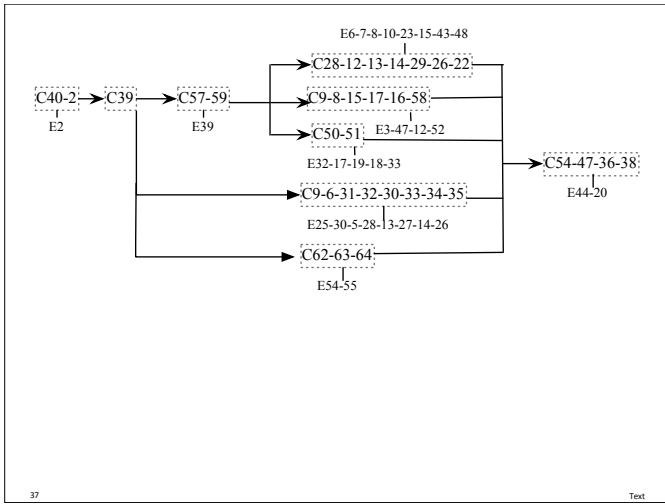


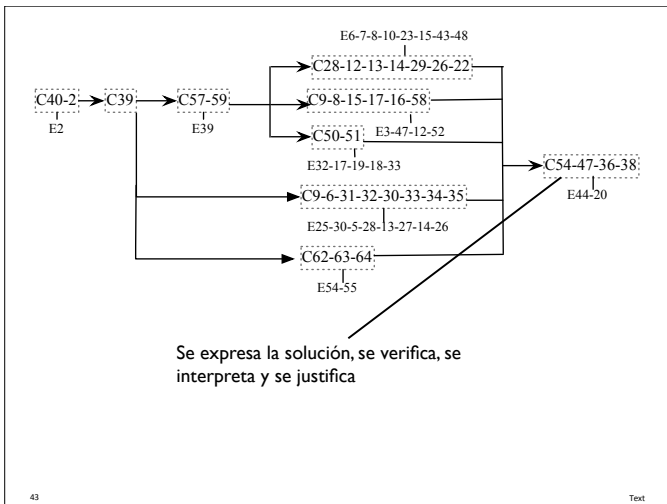
### Secuencias de capacidades

- Complejidad de los grafos de caminos de aprendizaje
- Secuencia de capacidades
  - Sucesión de capacidades y errores a la que es posible asignar un significado en el proceso de resolución de la tarea que representa el camino de aprendizaje
- Los criterios dependen del tema y el profesor
  - el profesor decide cuándo un grupo de capacidades tiene entidad propia para ser considerado como proceso aislado dentro de una estrategia de resolución de problemas compleja

35







## Objetivos de aprendizaje

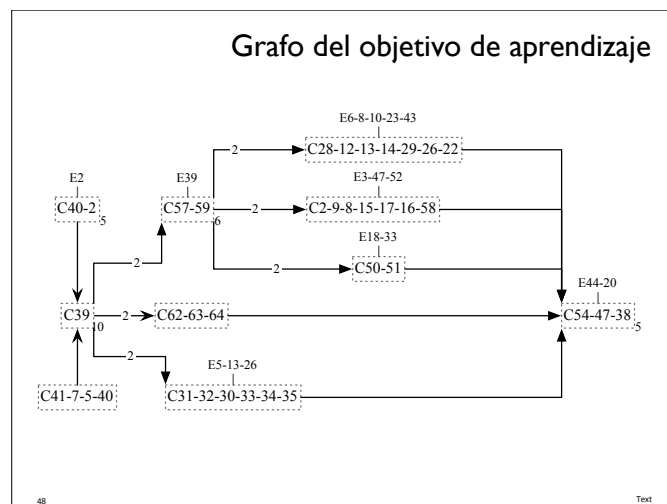
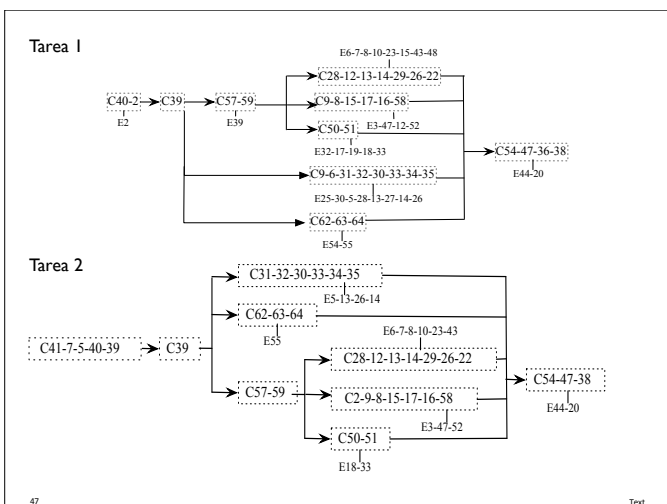
- ▶ Ejemplos
  - ▶ O1. Identificar en un conjunto de arreglos aquellos que corresponden a permutaciones sin repetición.
  - ▶ O2. Construir para un conjunto dado todas las posibles permutaciones sin repetición.
  - ▶ O3. Establecer la cantidad de permutaciones sin repetición posibles en un conjunto dado.
  - ▶ O4. Resolver problemas que implican permutaciones sin repetición.
- ▶ Frases sintéticas
  - ▶ Se requiere más información
  - ▶ Para que sean útiles como expectativas de aprendizaje

## Caracterización de un objetivo de aprendizaje

- ▶ Tareas prototípicas
  - ▶ Conjunto de tareas que
  - ▶ Si el escolar las resuelve, entonces el profesor puede considerar que ha logrado el objetivo de aprendizaje
- ▶ Grafo de un objetivo de aprendizaje
  - ▶ Caminos de aprendizaje de cada tarea en términos de secuencias de capacidades
  - ▶ Reunión de los caminos de aprendizaje en un grafo

## Ejemplos

- ▶ Objetivo 3
  - ▶ Establecer la cantidad de permutaciones sin repetición posibles en un conjunto dado
- ▶ Tarea prototípica
  - ▶ En una competencia atlética participan 5 personas. David dice que se pueden obtener 12 podios diferentes. Camilo afirma que podrían ser 15. Sin embargo, Carlos encontró 60.
  - ▶ ¿Quién tiene la razón? Justifique su respuesta.





## Grafo como caracterización del objetivo de aprendizaje

- ▶ Estrategias de resolución de tareas
  - ▶ Ser capaz de reconocer que una tarea se resuelve mediante permutaciones y de identificar los datos que se emplearán en el cálculo
  - ▶ Ser capaz de tomar una decisión sobre los métodos de cálculo adecuados
  - ▶ Reconocer situaciones en las que el problema se puede resolver por enumeración directa de los arreglos en algún sistema de representación
  - ▶ Saber aplicar la fórmula, el principio multiplicativo o enumerar los arreglos y contarlos dentro de un sistema de representación
  - ▶ Y expresar la solución y verificar el resultado de acuerdo con la pregunta inicial

49

Text  
49

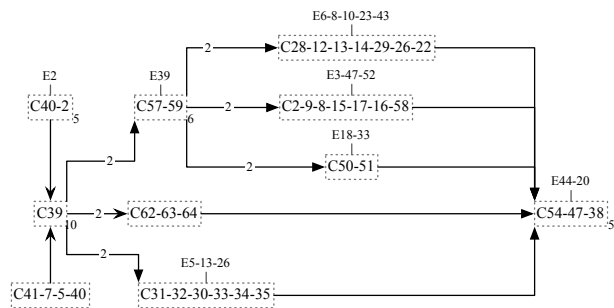
## Grafo como caracterización del objetivo de aprendizaje

- ▶ Errores previstos
  - ▶ Expresen permutaciones con elementos repetidos
  - ▶ Hagan un cálculo erróneo del factorial
  - ▶ Confundan parámetros en la fórmula
  - ▶ Utilicen una tabla de doble entrada cuando no es conveniente
  - ▶ Consideren que los árboles tienen igual número de ramificaciones en todas las ramas
  - ▶ Cuenten elementos repetidos
  - ▶ Obtengan una solución incoherente como consecuencia de un conteo equivocado

50

Text  
50

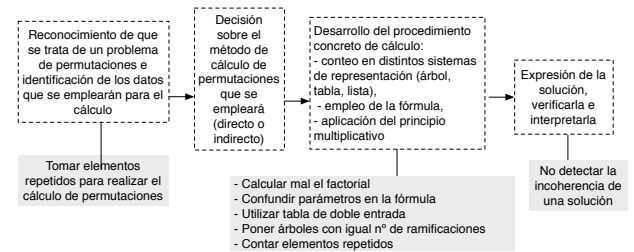
## Grafo como caracterización del objetivo de aprendizaje



51

Text  
51

## Grafo como caracterización del objetivo de aprendizaje



52

Text  
52

## Contribución de las tareas al objetivo de aprendizaje

- ▶ Una tarea activa ciertas secuencias de capacidades
- ▶ Una tarea no tiene que activar todas las secuencias de capacidades que caracterizan un objetivo de aprendizaje
- ▶ Los caminos de aprendizaje de la tarea ponen de manifiesto en qué medida y cómo contribuye al objetivo de aprendizaje
  - ▶ Muestran qué secuencias de capacidades del grafo del objetivo se pueden activar
- ▶ Analizar una tarea en su contribución al objetivo de aprendizaje
  - ▶ Permite modificarla para mejorarla

53

Text  
53

## Análisis y reformulación de tareas

- ▶ Objetivo
  - ▶ Establecer la cantidad de permutaciones sin repetición posibles en un conjunto dado
- ▶ Posible tarea (versión 1)
  - ▶ Utilice la fórmula para establecer el número de permutaciones de 10 elementos en un conjunto de 50 elementos
- ▶ Camino de aprendizaje

C30-32-33-35

54

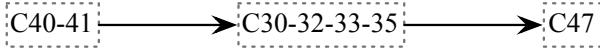
Text  
54

## Análisis y reformulación de tareas

### ► Tarea (versión 2)

- Utiliza la fórmula para establecer cuántas banderas de tres bandas con colores diferentes se pueden hacer con una paleta que tiene 24 colores

### ► Camino de aprendizaje



- El objetivo de aprendizaje involucra otras secuencias de capacidades
- Es posible mejorar la tarea

55

Text

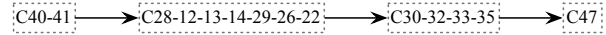
55

## Análisis y reformulación de tareas

### ► Tarea (versión 3)

- Haz un diagrama de árbol en el que se representen todas las banderas de tres bandas con colores diferentes que se pueden hacer con una paleta que tiene 6 colores. ¿Cuántas banderas diferentes se pueden hacer? Verifica el resultado usando la fórmula.

### ► Camino de aprendizaje



56

Text

56

## Análisis y reformulación de tareas

### ► Tarea (versión 4)

- Para abrir una cuenta de correo electrónico en el servicio conteo.com, un usuario debe escoger una contraseña de tres caracteres diferentes con las cuatro primeras letras del alfabeto en minúscula (a, b, c y d).

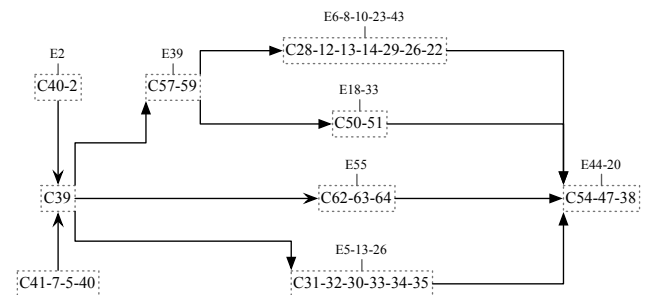
1. El dueño de conteo.com quiere saber cuántas contraseñas diferentes puede haber y entender por qué. Teniendo en cuenta que al dueño de conteo.com no le gustan las fórmulas, escribe un texto, que use un diagrama de árbol o un listado, en el que le muestres al dueño de conteo.com cuántas contraseñas puede haber y cómo se obtiene ese resultado.
2. Los técnicos de conteo.com están pensando en permitir que se usen las 27 letras de alfabeto en minúsculas para las contraseñas de tres caracteres diferentes. Ellos quieren saber cuántas contraseñas pueden haber y por qué. Escribe un texto en el que muestres cómo se puede hallar el número de contraseñas teniendo en cuenta el número de letras que se puede usar para cada uno de los tres caracteres.
3. El jefe del departamento técnico de conteo.com quiere prever el crecimiento de su servicio. Él quiere saber cuántas contraseñas de 10 caracteres diferentes pueden haber si se permiten las letras del alfabeto en minúsculas y mayúsculas. ¿Cuántas son?
4. ¿Cómo podría el jefe del departamento técnico hallar el número de contraseñas para un dado  $r$  de caracteres permitidos?

57

Text

57

## Caminos de aprendizaje



58

Text

58

## Caminos de aprendizaje y evaluación

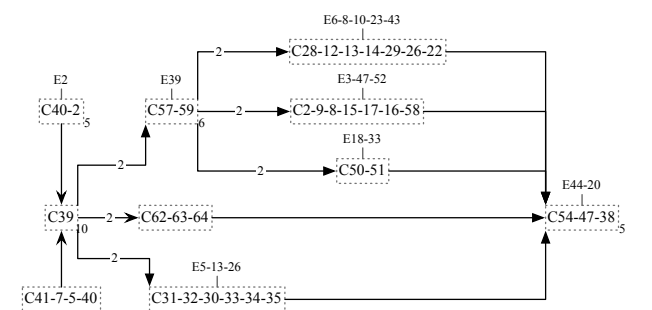
- ¿Cómo formular criterios de logro?
- ¿Cómo observar y analizar la actuación de los escolares?

59

Text

59

## Grafo como caracterización del objetivo de aprendizaje

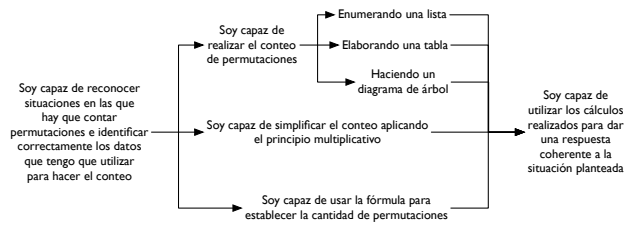


60

Text

60

## Grafo y criterios de logro



61

Text

61

## Grafo y criterios de logro

- ▶ Los criterios de logro
  - ▶ se pueden compartir con los escolares
- ▶ Forman parte de un grafo
  - ▶ El escolar puede ver en el mapa el camino hacia la consecución de un objetivo como una progresión
  - ▶ Se puede ubicar en qué punto del mapa se encuentra y qué puede hacer para avanzar
  - ▶ Compartir esta información con el alumnado, en una forma que ellos puedan comprender, contribuye a que los escolares desarrollen la responsabilidad sobre su propio aprendizaje

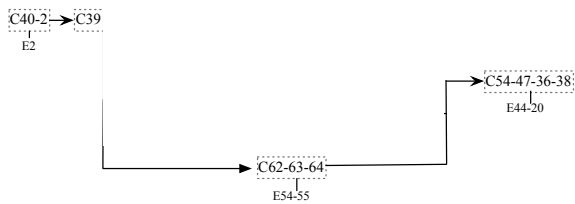
62

Text

62

## Análisis de actuación de los escolares

- ▶ La contribución de una tarea se puede ubicar en el grafo del objetivo de aprendizaje
- ▶ Para un conjunto con muchos elementos y arreglos con muchos elementos, es necesaria la fórmula



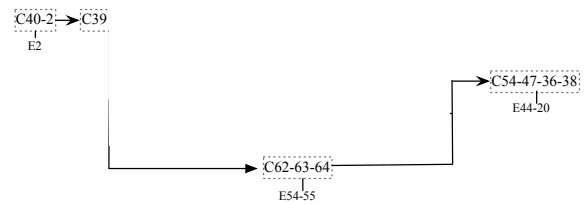
63

Text

63

## Análisis de actuación de los escolares

- ▶ El grafo permite interpretar la información que se recoge con los instrumentos de evaluación



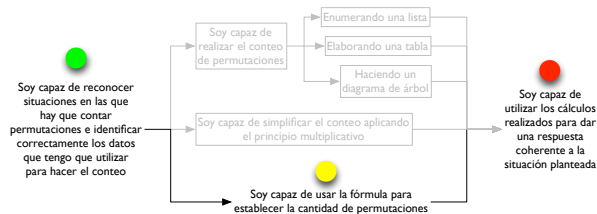
64

Text

64

## Semáforos

- ▶ El grafo de criterios de logro permite recoger información sobre la percepción que los escolares tienen de su progreso



65

Text

65

## En la práctica

- ▶ Notión útil en la formación de profesores
- ▶ En la práctica del profesor
  - ▶ Objetivos de aprendizaje
    - ▶ ¿Soy consciente de la complejidad de un objetivo de aprendizaje?
    - ▶ ¿Puedo caracterizar esa complejidad?
  - ▶ Diseño de tareas
    - ▶ ¿Puedo saber en qué medida una tarea contribuye a un objetivo de aprendizaje?
    - ▶ ¿Puedo saber cómo mejorar una tarea?
  - ▶ Evaluación
    - ▶ ¿Puedo formular criterios de logro para compartir con los escolares?
    - ▶ ¿Sé cómo observar y evaluar la actuación de los escolares?

66

Text

66

## Documentación

<http://tinyurl.com/cdvvh2l>

Transparencias

<http://funes.uniandes.edu.co/2108/>

## Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas

Pedro Gómez, María José González e Isabel Romero  
[argefuentes@gmail.com](mailto:argefuentes@gmail.com)

II Encuentro Internacional de Matemáticas, Estadística y Educación Matemática  
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia  
Tunja

15 de agosto de 2013

