

氏名	原口 忠之
授与した学位	博士
専攻分野の名称	理学
学位授与番号	博甲第4756号
学位授与の日付	平成25年 3月25日
学位授与の要件	自然科学研究科 先端基礎科学専攻 (学位規則第5条第1項該当)
学位論文の題目	A homotopy theory of diffeological and numerically generated spaces (微分空間と数値的生成空間のホモトピー論について)
論文審査委員	教授 島川 和久 教授 清原 一吉 准教授 鳥居 猛

学位論文内容の要旨

この論文では、微分空間と数値的生成空間のホモトピー論についてまとめたものである。位相空間の圏を \mathbf{Top} とし、数値的生成空間からなる圏 \mathbf{Top} の充満部分圏を \mathbf{NG} とする。さらに、微分空間の圏を \mathbf{Diff} であらわす。一般に、圏 \mathbf{Top} には *finitely generated model structure* を導入できることが知られている。この論文の主な結果の一つとして、圏 \mathbf{Top} と同じような手法で圏 \mathbf{Diff} にこの *finitely generated model structure* を導入することである。さらに、圏 \mathbf{Diff} から圏 \mathbf{Top} への関手は Quillen adjunction であることがわかった。二つ目の結果として、圏 \mathbf{NG} に、*finitely generated model structure* を導入することである。さらに、圏 \mathbf{NG} と圏 \mathbf{Top} は Quillen 同値であることがわかった。

圏 \mathbf{Top} にこの *finitely generated model structure* を導入するとき特に必要な理論として、ホモトピー群、CW 複体、Serre fibration の3つがありこれらはお互いに関係のある概念である。圏 \mathbf{Diff} に *finitely generated model structure* を導入するとき、やはり上と同様な概念が必要になる。しかし、圏 \mathbf{Diff} において微分空間の間の射は無制限回微分可能で定めているため、位相空間の間の射を連続写像で定める圏 \mathbf{Top} と同じように上記の3つの条件を定義すると不都合が生じる。この無限回微分可能写像と連続写像の間の差を少しでも埋める必要がある。それを可能にしたのが、ユークリッド空間 \mathbb{R} の部分集合 $I=[0,1]$ に特殊な微分構造を導入した空間 *smashing space* \mathbb{I} である。この *smashing space* \mathbb{I} を用いて、微分空間におけるホモトピー群、CW 複体と Serre fibration を定義する。とくに、CW 複体を定義するときに必要な概念が弱微分構造の概念である。この概念は弱位相と似た性質をもつが、弱位相よりも弱微分構造の性質が優れていることがわかった。さらに、位相空間における CW 複体の基本的な性質も、微分空間における CW 複体が満たすことを証明できた。これを可能にしたのも *smashing space* \mathbb{I} の性質によるものである。これら *smashing space* \mathbb{I} を含める4つの概念を用いることで、次のような主結果を証明できた。0以上の任意の整数 n に対して、 $\mathcal{I}_{\mathbf{Diff}}$ を $\mathcal{O}I^n$ から I^n への包含写像全体からなる集合とし、 $\mathcal{I}_{\mathbf{Diff}}$ を $\mathcal{O}I^n \times I \cup I^n \times \mathcal{O}$ から $I^n \times I$ への包含写像全体からなる集合とする。さらに、 $\mathcal{W}_{\mathbf{Diff}}$ を微分空間における弱ホモトピー同値全体からなる集合とする。このとき圏 \mathbf{Diff} は、 $\mathcal{I}_{\mathbf{Diff}}$ を *generating cofibrations*、 $\mathcal{I}_{\mathbf{Diff}}$ を *generating trivial cofibrations*、 $\mathcal{W}_{\mathbf{Diff}}$ を *weak equivalences* とする *finitely generated model structure* を導入することができる。さらに、圏 \mathbf{Diff} から圏 \mathbf{Top} への関手 T は Quillen adjunction であることが証明できた。

数値的生成空間について説明する。これは島川和久氏によって定義された。この空間からなる圏 \mathbf{NG} は、位相空間における CW 複体を含み、デカルト閉圏であることが示されている。このように優れた圏 \mathbf{NG} に *finitely generated model structure* を導入しようと試みるのも自然である。導入するにあたり、一般論で話を展開できることが分かった。*cofibrantly (finitely) generated model category* のある部分圏がいくつかの条件を満たすとき、自動的にその部分圏には *cofibrantly (finitely) generated model structure* を導入できることが分かった。さらに、このとき包含関手は Quillen adjunction であることが分かった。さらに、少々条件を加えると、その包含関手は Quillen equivalence であることも分かった。これらの結果を使うことにより、圏 \mathbf{NG} に *finitely generated model structure* を導入して、圏 \mathbf{NG} と圏 \mathbf{Top} が Quillen equivalence になることを示す。

論文審査結果の要旨

申請者は、微分空間の圏 Diff および数値的生成空間のなす位相空間の部分圏 NG を対象として、それらのホモトピー論の構造に関する詳細な研究を行った。本学位論文は、申請者の研究の成果を纏めたものであり、その概要は以下に記すとおりである。

Quillen が確立したホモトピー代数の理論によって、抽象的な圏のホモトピー論は、その圏のモデル構造を用いて記述される。本学位論文の第1部では、**cofibrantly generated** なモデル構造に関する基礎的な事項を概観した後、そのようなモデル圏の **coreflective** な部分圏が再びモデル圏となるための簡明な条件を与える基本命題を述べ、その証明を与えている。

第2部では、微分空間 (**diffeological space**) の圏が自然なモデル構造を持つことを示す申請者と島川和久による結果の概要が述べられる。微分空間 (**diffeological space**) は可微分多様体の概念の一般化と見なせるが、多様体の場合とは異なり、微分空間の圏は完備かつ余完備なデカルト閉圏であり、とくに、部分空間や商空間をとる等の大域的な操作を自由に行うことができる。申請者と島川は、微分空間の圏 Diff と位相空間の圏 Top を関連付ける随伴関手の対 $T: \text{Diff} \rightarrow \text{Top} \leftarrow \text{Diff}: D$ に着目し、 (T, D) が Quillen 随伴対となるような Diff のモデル構造が存在することを示した。これにより、微分空間のホモトピー論を確立し、位相空間のそれと比較することが可能となる。

最後に、第3部では、第1部で示したモデル圏の **coreflective** な部分圏に関する命題を援用して、数値的生成空間 (**numerically generated space**) のなす Top の部分圏 NG が Top のモデル構造と Quillen 同値なモデル構造を持つことが示される。実際、圏 NG は T による Diff の像と同一視することができ、左 Quillen 関手 $T: \text{Diff} \rightarrow \text{Top}$ は Quillen 同値 $\text{NG} \rightarrow \text{Top}$ を経由している。

以上のように、本学位論文は微分空間のホモトピー論に関する申請者のオリジナルな結果を含む最新の成果について論じた労作であり、学位論文として高い価値を持つものである。