

# OPERACIONES DE FLUJO DE FLUIDOS

---

## TEMA 6: FLUJO EXTERNO

### Índice

TEMA 6: FLUJO EXTERNO .....	1
1. Introducción .....	2
1.1 Partículas sólidas .....	2
1.2 Agregados de partículas y procesos de floculación .....	3
2. Desplazamiento de partículas solidas y agregados en el seno del fluido .....	6
2.1 Regímenes de desplazamiento. Presión efectiva de compresión .....	6
3. Circulación de fluidos a través de lechos porosos y tortas .....	9
3.1 Velocidad media superficial y velocidad media real de un fluido .....	9
3.2 Ley de Darcy. Conceptos de porosidad y permeabilidad .....	10
3.3 Relación entre permeabilidad y resistencia específica con la porosidad y diámetro medio de partícula.....	12
3.4 Circulación de gases y líquidos a través de lechos granulares .....	15
4. Lechos fluidizados .....	16
4.1 Tipos de lechos fluidizados.....	16
4.2 Cálculo de la velocidad mínima de fluidización.....	19
4.3 Velocidad terminal .....	24
5. Bibliografía.....	25

## 1. Introducción

En este tema, se va a analizar la circulación de fluidos en contacto con sólidos. Cuando el fluido es un gas, los sólidos son lógicamente insolubles con el gas. Sin embargo, si el fluido es un líquido, puede ocurrir que parte de ese líquido entre a formar parte de las partículas sólidas, formando una entidad denominada agregado o flóculo, que tiene el comportamiento de un sólido, es decir, puede sedimentar. Por tanto, en primer lugar se describirán las partículas sólidas y sus características, y posteriormente se introducirán los agregados.

### 1.1 Partículas sólidas

#### 1.1.1. Caracterización de las partículas sólidas

El tamaño de las partículas sólidas esféricas queda perfectamente determinado por el valor de su diámetro. Para partículas no esféricas, se definen varios conceptos, que se consideran a continuación:

- Diámetro esférico equivalente,  $d_{sph}$ , es el diámetro de aquella esfera que tiene el mismo volumen que la partícula

$$V_{part} = V_{sph} = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{d_{sph}}{2} \right)^3 \quad (1)$$

- Esfericidad,  $\Phi_s$ , es la relación entre la superficie externa de la esfera con el mismo volumen que la partícula y la superficie de la partícula. En la Tabla 1 se presentan algunos valores de esfericidad.

$$\Phi_s = \left( \frac{S_{sph}}{S_{part}} \right)_{\text{mismo volumen}} \quad (2)$$

- Diámetro efectivo,  $d_{eff}$ , es el diámetro de aquella esfera que tiene la misma relación superficie/volumen que la partícula considerada. La relación superficie/volumen "a" para una partícula, se puede calcular como

$$a = \frac{S_{part}}{V_{part}} = \frac{S_{eff}}{V_{eff}} = \frac{6}{d_{eff}}; a = \frac{S_{part}}{V_{part}} = \frac{S_{sph} / \Phi_s}{V_{sph}} = \frac{\pi d_{sph}^2 / \Phi_s}{\pi d_{sph}^3 / 6} = \frac{6}{d_{sph} \Phi_s} \quad (3)$$

La relación superficie/volumen para una partícula esférica es 6/diámetro efectivo. Por tanto, se deduce que

$$d_{eff} = \Phi_s d_{sph} \quad (4)$$

Tabla 1. Esfericidad de partículas

<i>Type of Particle</i>	<i>Sphericity <math>\phi_s</math></i>
Sphere	1.00
Cube	0.81
Cylinder	
$h = d$	0.87
$h = 5d$	0.70
$h = 10d$	0.58
Disks	
$h = d/3$	0.76
$h = d/6$	0.60
$h = d/10$	0.47
Activated carbon and silica gels	0.70–0.90
Broken solids	0.63
Coal	
anthracite	0.63
bituminous	0.63*
natural dust	0.65
pulverized	0.73
Cork	0.69
Glass, crushed, jagged	0.65
Magnetite, Fischer-Tropsch catalyst	0.58*
Mica flakes -	0.28
Sand	
round	0.86*
sharp	0.66*
old beach	as high as 0.86
young river	as low as 0.53
Tungsten powder	0.89
Wheat	0.85

Normalmente, los conjuntos de partículas no se presentan con tamaños uniformes, sino con una distribución de tamaños. Por tanto, se debe trabajar con un diámetro medio de partículas, que ha de determinarse experimentalmente.

## 1.2 Agregados de partículas y procesos de floculación

La distribución de tamaños y tamaños medios, caracterizan completamente un conjunto de partículas siempre y cuando el contacto sólido-fluido no altere las características de las mismas, es decir, que sean completamente insolubles en el fluido. Esto ocurrirá en casi todos los contactos sólido-gas (cuando las partículas sean redondeadas), y en los contactos de sólido-líquido donde el sólido sea insoluble y las partículas sean gruesas (mayores de 200  $\mu\text{m}$ ), dándoles comúnmente el nombre de partículas macizas. Sin embargo, en el caso de contacto líquido-sólido para partículas finas entran en juego interacciones químicas y electrostáticas que hacen que estos sólidos pierdan su identidad como tales, y formen agregados o flóculos, un ente de mayor tamaño formado por sólido y líquido, esponjoso, de densidad media superior a la del líquido. A continuación, se describe la formación de estos agregados.

### 1.2.1. Formación de agregados o flóculos de partículas

Considérese un agua bruta de pantano que es fuente de agua potable. Esta agua contiene sustancias sólidas en suspensión, finamente divididas, y sustancias en estado coloidal. En el estado coloidal, las partículas pueden contener una estructura similar a la que se indica en la Figura 1. La partícula sólida en estado coloidal es tan fina que está electrostáticamente descompensada. Por ello, se forma a su alrededor una capa fija de disolución con iones y alrededor de ella otra capa difusa. La partícula cuando se mueve arrastra consigo mismo únicamente la capa fija. Esta unión de la partícula sólida y su capa fija, en la cual pueden unirse otras partículas con sus correspondientes capas fijas, constituye un agregado. Estos agregados

pueden ser de un tamaño muy superior a la partícula sólida contenida en su interior, y de cara al movimiento sólido-líquido, el agregado constituye una nueva identidad.

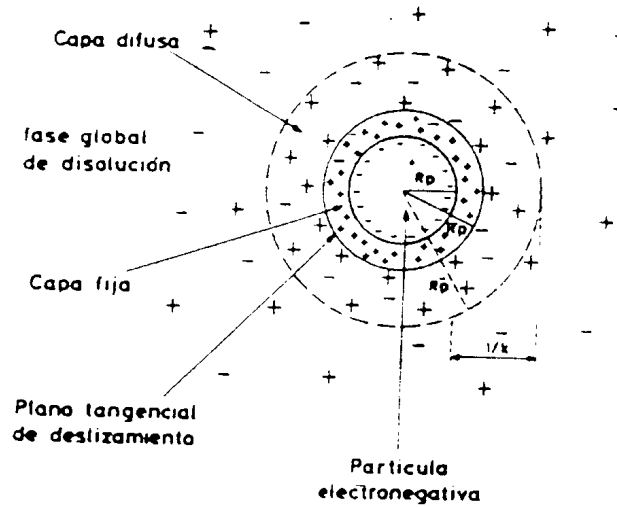


Figura 1. Distribución de cargas en una partícula coloidal

Estos agregados pueden formarse espontáneamente al entrar en contacto el sólido con el fluido, aunque en ocasiones, es necesario iniciar el proceso mediante la adición de otras sustancias, denominadas coagulantes, que inician un proceso de formación de agregados o floculación. A este proceso de iniciar la formación de flóculos se denomina coagulación, aunque a menudo su uso es indistinto con el de floculación. Además de los coagulantes, se pueden añadir ayudantes de coagulación (partículas de arcilla), cuya misión es ayudar a la formación de agregados o flóculos de un tamaño mucho mayor a partir de los inicialmente generados por coagulación. De esta forma, sedimentarían más fácilmente y por tanto, suponen un método de eliminar los sólidos disueltos.

Por tanto, como consecuencia del proceso de coagulación/floculación se forman unos agregados o flóculos con una elevada cantidad de agua en su interior, tal como se muestra en la Figura 2, donde los puntos negros significan el origen sólido de este ente, donde las zonas grises son las capas fijas y difusas que contienen una elevada cantidad de agua en su interior.

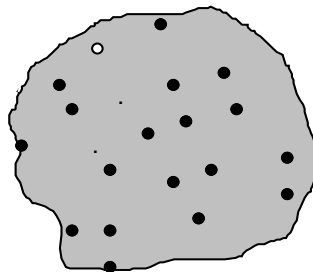


Figura 2. Flóculo o agregado de partículas

**1.2.2. Densidad del flóculo o agregado y porosidades**

Se denomina "j" o "AVI" (Average Volume Index) a la relación  $\frac{m^3 \text{ agregado}}{m^3 \text{ sólido en agregado}}$ . Por

tanto, la fracción volumétrica de fluido  $\left(\frac{m^3 \text{ fluido}}{m^3 \text{ agregado}}\right)$  dentro de un agregado será  $\frac{j-1}{j}$ .

Cuanto mayor sea el valor de j, mayor contenido de fluido hay en su interior. Por ejemplo, para flóculos de carbonato cálcico, el valor de j puede ser de 2 a 10, mientras que para flóculos de hidróxidos metálicos puede superar el valor de 1000. Para las partículas macizas, j vale la unidad, por lo que el valor de j debe ser siempre mayor que 1.

Se puede deducir que la densidad del flóculo  $\rho_a$  es

$$\rho_a = \frac{kg \text{ total}}{m^3 \text{ total}} = \frac{kg \text{ sólido} + kg \text{ fluido}}{\text{volumen total}} = \frac{\rho_s + (j-1)\rho}{j} \quad (5)$$

donde  $\rho_s$  es la densidad del sólido y  $\rho$  la densidad del fluido.

Considérese una suspensión con flóculos o agregados, tal como se muestra en la Figura 3. La concentración  $C_s$  viene perfectamente determinada como la cantidad de sólidos por unidad de volumen.

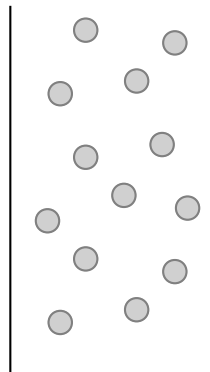


Figura 3. Agregados o flóculos en una suspensión

La fracción volumétrica que ocupan los sólidos  $\varepsilon_s \left(\frac{m^3 \text{ sólido}}{m^3 \text{ suspensión}}\right)$  viene dado por

$$\varepsilon_s = \frac{C_s (kg \text{ sól} / m^3 \text{ susp})}{\rho_s (kg \text{ sól} / m^3 \text{ sól})} \quad (6)$$

mientras que la fracción volumétrica de los huecos de las partículas, que es ocupada por fluido, viene dada por

$$\varepsilon = 1 - \varepsilon_s \quad (7)$$

Téngase en cuenta, que expresado de esta forma, el valor de la fracción de líquido,  $\varepsilon$ , considera tanto el fluido interagregado como la del fluido introagregados. Sin embargo, en la suspensión los entes que existen de forma macroscópica y se comportan distinto son los flóculos (con su correspondiente líquido introagregado) y el líquido libre (líquido interagregado). Considerando el concepto de "j" o AVI (Average Volumetric Index), se puede

deducir que la fracción volumétrica de agregados  $\varepsilon_a \left( \frac{m^3 \text{ agregados}}{m^3 \text{ suspensión}} \right)$  es

$$\varepsilon_a = j \left( \frac{m^3 \text{ agregado}}{m^3 \text{ sólidos}} \right) \varepsilon_s \left( \frac{m^3 \text{ sólidos}}{m^3 \text{ suspensión}} \right) \quad (8)$$

y por tanto, la fracción de líquido interagregados  $\varepsilon^*$  será

$$\varepsilon^* = 1 - \varepsilon_a = 1 - j\varepsilon_s \quad (9)$$

La densidad media de la suspensión  $\rho_m$  puede calcularse mediante las relaciones:

$$\rho_m = \varepsilon_a \rho_a + \varepsilon^* \rho = \varepsilon_s \rho_s + \varepsilon \rho \quad (10)$$

Cabe decir que a la fracción volumétrica de fluido  $\varepsilon$  o  $\varepsilon^*$  se le suele denominar porosidad o fracción de huecos, fundamentalmente en el caso de que las partículas estén en contacto continuo o formen un lecho fluidizado (que se comentará en secciones posteriores).

## 2. Desplazamiento de partículas solidas y agregados en el seno del fluido

### 2.1 Regímenes de desplazamiento. Presión efectiva de compresión

Cuando se dispone de un flóculo o agregado con una densidad  $\rho_a$  en un medio líquido de densidad  $\rho$ , donde  $\rho_a > \rho$ , el flóculo cae en el seno del líquido con una velocidad  $u_{so}$ . En estas condiciones en las que es el sólido el que se mueve en el seno de un líquido, se define el módulo de Reynolds respecto al sólido (o agregado) como

$$Re_s = \frac{\rho u_{so} d_a}{\mu} \quad (11)$$

donde  $\rho$  y  $\mu$  son la densidad ( $\text{kg/m}^3$ ) y viscosidad del líquido ( $\text{Pa}\cdot\text{s}$ ) y  $u_{so}$  y  $d_a$  la velocidad ( $\text{m/s}$ ) y diámetro del agregado ( $\text{m}$ ). Planteando un balance de cantidad de movimiento a la partícula que va cayendo en el seno de un líquido, se obtiene que el peso del agregado menos el volumen desplazado por él, es igual a las fuerzas viscosas por el rozamiento sólido-líquido, siendo nula la variación de entrada y salida de cantidad de movimiento y la variación de fuerzas de presión

$$V_a \rho_a g - V_a \rho g = \tau_{rx} S_{rx} \quad (12)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad ( $m/s^2$ ) y  $\rho_a$  la densidad del flóculo o agregado ( $kg/m^3$ ). Recordando la definición del factor de fricción, se define análogamente un coeficiente de descarga  $C_D$  de forma que

$$\tau_{rx} = \frac{C_D}{2} \rho u_{so}^2 \quad (13)$$

Teniendo en cuenta que en el segundo miembro de la ecuación (12) el resultado de la operación vectorial es otro vector, la magnitud  $S_{rx}$  resultante es la sección perpendicular al movimiento de la partícula, es decir, circular, obteniendo

$$\frac{1}{6} \pi d_a^3 (\rho_a - \rho) g = \frac{1}{8} C_D \rho u_{so}^2 \pi d_a^2 \quad (14)$$

Cuando el régimen de circulación del agregado está en régimen reptante ( $Re_s < 0.2$ ), la resolución del balance microscópico de cantidad de movimiento para un fluido newtoniano puede ser resuelto sobre las componentes de los esfuerzos cortantes locales, obteniéndose que la variación del coeficiente de descarga es inversamente proporcional al Reynolds, ( $C_D = 24/Re_s$ ), expresión que se conoce como ecuación de Stokes. Sustituyendo la ecuación de Stokes en la ecuación (14) y despejando la velocidad  $u_{so}$ , se obtiene

$$u_{so} = \frac{g d_a^2 (\rho_a - \rho)}{18 \mu} \quad (15)$$

La ecuación (15) es aplicable cuando sólo hay un flóculo o en suspensiones muy diluidas, donde no hay interacción entre los flóculos, y sólo para velocidades de sedimentación pequeñas, siempre que el número de Reynolds " $Re_s$ " sea menor de 0.2. A velocidades mayores de sedimentación y hasta valores de Reynolds entre 0.2 y 500, no existe una solución analítica del balance de cantidad de movimiento, y empíricamente, se puede emplear la relación

$$u_{so} = \frac{g(\rho_a - \rho)d_a^2}{\left[18\mu(1 + 0.15 Re_s^{0.687})\right]} \quad (16)$$

donde en el denominador hay una correlación que corrige el resultado respecto al flujo reptante.

A concentraciones mayores de sólidos, la fracción de huecos entre los flóculos es menor, y la velocidad de sedimentación disminuye porque los flóculos se estorban unos a otros. Entre las diferentes relaciones que se pueden considerar cabe la siguiente

$$u_s = u_{so} \varepsilon^n = u_{so} \left[1 - j \frac{C_s}{\rho_s}\right]^n \quad (17)$$

cuyo significado es que la medida en que disminuye la velocidad de sedimentación por la presencia de muchos flóculos es proporcional a la porosidad  $\varepsilon$  (fracción de fluido en la suspensión) elevado a un exponente  $n$ . El valor de  $n$  se determina por correlaciones experimentales, y no existe unanimidad sobre el valor de dicho parámetro. A valores bajos de

Reynolds, el valor de  $n$  es próximo a 5. Richardson y Zaki propusieron el valor constante de **4.65**. Según otras fuentes,  $n$  no es constante y depende del régimen de circulación, donde  $n$  se puede calcular como

$$\frac{5.09 - n}{n - 2.73} = 0.104 \text{Re}_s^{0.877} \quad (18)$$

La ecuación (18) es válida hasta valores de  $j \frac{C_s}{\rho_s} = 0.6 - 0.65$ . Esta expresión representa la fracción volumétrica de agregados en la suspensión y el lecho fijo (contacto continuo) de agregados se consigue para valores de 0.65 (valor crítico). Por encima de este valor, en el que los sólidos están en contacto directo unos con otros (lecho fijo), la sedimentación (si la hay) tiene lugar por compresión de los agregados, y no por caída de un sólido en un medio viscoso.

El rango de concentraciones, en el que los flóculos se molestan unos a otros, pero sedimentan individualmente, se le conoce como rango de sedimentación impedida, o de no compresión (en ocasiones de sedimentación libre).

Al ir aumentando la concentración de sólidos, llega un momento en que los flóculos se tocan unos con otros continuamente, formando un relleno de partículas sólidas. A partir de esa concentración, el régimen de sedimentación de la matriz de sólidos que se forma es por compresión, dando lugar a un lodo más concentrado, a medida que tiene mayor espesor, ya que son los sólidos de arriba son los que transmiten presión de compresión a los sólidos de las capas inferiores, debido al peso. Durante esta sedimentación por compresión, la matriz de sólidos o lodo va perdiendo la estructura de agregado, desplazándose el líquido y quedando el sólido del agregado. Se define la presión efectiva " $p_s$ " como la fuerza por unidad de superficie transversal total que es capaz de soportar una suspensión sin aumentar de concentración de sólidos. Por tanto, existe una relación  $p_s = f(\varepsilon_s)$ , característica para cada material sólido suspendido en un determinado fluido. La presión efectiva es transmitida por los sólidos y por el fluido que pudiera quedar ocluido entre las partículas sólidas, pero no es transmitida por el fluido que libremente puede circular a través de los poros.

Para un material denso, sin huecos abiertos en el interior (partículas de vidrio, etc), toda la deducción anterior es válida considerando que el valor de " $j$ " es la unidad, y que cuando las partículas entran en contacto, se obtiene un lecho fijo que no se puede comprimir. Únicamente pueden comprimirse lechos o lodos cuyos elementos hubieran formado previamente flóculos. Si nunca formaron flóculos, nunca pueden comprimirse (a no ser que se fracturen).

La ecuación (15) también se puede aplicar a partículas sólidas individuales dentro de una corriente gaseosa.



### 3. Circulación de fluidos a través de lechos porosos y tortas

#### 3.1 Velocidad media superficial y velocidad media real de un fluido

Un concepto que se va repetir en muchas ocasiones cuando se analiza la circulación de fluidos a través de sólidos, independientemente de si éstos están fijos o en movimiento, es la relación que existe entre la velocidad media a la que circula el fluido entre los sólidos y la velocidad media calculada como caudal de circulación dividido por la sección total del conducto donde tiene lugar el proceso.

Considérese en primer lugar un lecho fijo de partículas sólidas macizas, por el que circula un fluido, tal como se muestra en la Figura 4.

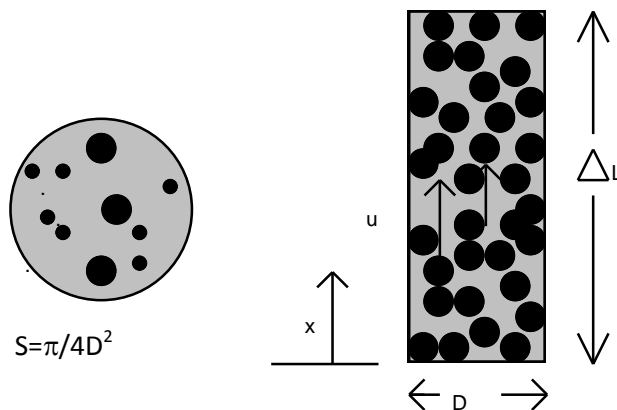


Figura 4. Lecho fijo de sólidos por el que circula un fluido

La velocidad superficial,  $u^+$ , con que circula el fluido, se calcula como caudal  $Q$  ( $m^3/s$ ) dividido por la sección  $S$  del cuerpo geométrico ( $\pi D^2/4$ ), siendo  $D$  el diámetro del tubo cilíndrico. Ahora bien, la velocidad media,  $u$ , con que circula el fluido a través de los huecos será mayor y se puede calcular de la siguiente forma: supóngase que durante un periodo de tiempo  $\Delta t$ , ha circulado un volumen  $Q\Delta t$ . Este volumen ocupará una distancia  $\Delta L$  en el lecho, por lo que

$$u = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{S \Delta L}{S \Delta t} = \frac{\text{volumen total cilindro}}{S \Delta t} = \frac{\text{volumen total del fluido}}{S \Delta t} = \frac{Q \Delta t}{S \Delta t} = \frac{u^+}{\epsilon} \quad (19)$$

Por otra parte, la sección libre de paso o de los huecos  $S_{\text{paso}}$ , se puede relacionar con la sección  $S$  mediante la siguiente expresión:

$$\text{volumen fluido} = S_{\text{paso}} \Delta L = (\text{volumen cilindro}) \epsilon = S \epsilon \Delta L \quad (20)$$

de donde

$$S^+ = S \epsilon = S (1 - \epsilon_s) \quad (21)$$

Es importante no olvidar que el concepto de velocidad de fluido a través de los huecos se refiere siempre al valor medio, ya que hay un gradiente de cantidad de movimiento (velocidad máxima en los centro de los huecos, y velocidad nula en las capas adheridas a los sólidos).

Este razonamiento se puede extender también al caso cuando los sólidos están en movimiento, con tal de tomar las velocidades relativas del fluido con respecto al sólido. En estas condiciones, cuando se ha definido el concepto de velocidad superficial del fluido, se puede definir un módulo de Reynolds de partícula,  $Re_p$ , de forma que:

$$Re_p = \frac{\rho u^+ d_p}{\mu} \quad (22)$$

donde  $\rho$  y  $\mu$  son la densidad y viscosidad del fluido,  $u^+$  la velocidad superficial definida anteriormente y  $d_p$  el tamaño medio de las partículas.

### 3.2 Ley de Darcy. Conceptos de porosidad y permeabilidad

Cuando circula un fluido con una baja velocidad  $u$  (régimen laminar) a través de un conjunto de partículas sólidas macizas (que están en contacto continuo unas con otras), que están estacionarias o se mueven con una velocidad  $u_s$ , se establece la ley de Darcy que relaciona la velocidad media superficial y la presión, que se expresa como

$$u^+ = (u - u_s)(1 - \varepsilon_s) = -\frac{k}{\mu} \left[ \frac{\partial p^+}{\partial x} \right] \quad (23)$$

donde

- $u^+$  = velocidad superficial media relativa, calculada como caudal de fluido con respecto al sólido, dividido por la sección total, (m/s)
- $k$  = permeabilidad del fluido a través de los sólidos ( $m^2$ )
- $\mu$  = viscosidad del fluido ( $Pa \cdot s \equiv [kg/m \cdot s]$ )
- $p^+$  = presión con contribución gravitatoria del fluido ( $Pa \equiv [kg/m \cdot s^2]$ )

La ley de Darcy hace referencia a la circulación relativa de un fluido con respecto a un conjunto de partículas, que como ya se ha mencionado, han de estar en contacto continuo unas con otras. En función del tamaño original de los sólidos, el conjunto de partículas se denomina:

- Tortas o lodos: cuando está formado por partículas finas. En este caso, la pérdida de presión que sufre un fluido al atravesar una torta es generalmente grande, al ser los poros muy finos.
- Lechos granulares: cuando está formado por partículas gruesas.

Los lechos granulares, al estar formados por partículas gruesas, no son susceptibles de formar flóculos o agregados en disolución, y por tanto no se comprimen. Por el contrario, las tortas y lodos aparecen en los procesos de sedimentación por compresión, filtración y centrifugación. Tanto en los lechos como en las tortas, existen huecos entre los sólidos los cuales contienen en su interior fluido. Normalmente, dentro del lodo o de la torta, ha desaparecido la estructura de

agregados formados en el proceso de floculación, aunque pueden reconocerse ciertas unidades o agrupaciones de conjunto de partículas sólidas. Los lodos y tortas de materiales sólidos pueden ser clasificadas como incompresibles o compresibles.

En los lodos y tortas incompresibles, todo el lodo o la torta tiene la misma porosidad, que equivale a decir que la concentración de sólidos (o su fracción volumétrica) es constante en todo su seno. En los lodos y tortas compresibles, la fracción volumétrica  $\varepsilon_s$  de los sólidos depende de una presión efectiva  $p_s$  transmitida por los sólidos colindantes.

Considérese un lodo o torta incompresible y estacionaria (inmóvil), y por tanto de composición uniforme, por cuyos huecos circula un fluido (Figura 5). Esta situación es la que ocurre durante un proceso de **filtración**. Aplicando la Ley de Darcy, teniendo en cuenta que  $u_s$  es igual a cero (la torta está estacionaria), se puede escribir como

$$u^+ = (u)(1 - \varepsilon_s) = -\frac{k}{\mu} \left[ \frac{dp^+}{dx} \right] \quad (24)$$

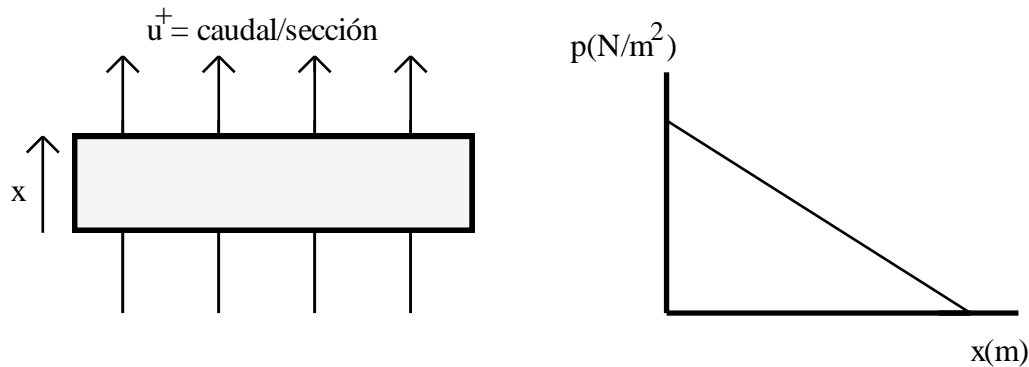


Figura 5. Flujo a través de una torta incompresible

Otra forma de expresar la ley de Darcy, es mediante el uso de la resistencia al flujo  $\alpha$  ( $m^2$ ), a través de la torta húmeda, que es justamente el inverso de  $k$ ,

$$\alpha = \frac{1}{k} \quad (25)$$

Por tanto, la ley de Darcy se puede escribir también como

$$u^+ = -\frac{1}{\alpha \mu} \frac{\partial p^+}{\partial x} \quad (26)$$

Nótese que  $\alpha$  representa la resistencia al flujo debido a la fuerza impulsora  $\left[ -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial p^+}{\partial x} \right) \right]$ , y

será mayor cuantos menos huecos tenga la torta. En la bibliografía, un parámetro que suele utilizarse frecuentemente es la resistencia específica al flujo  $\alpha_s$  ( $m/kg$ ), que se define como

$$\alpha_s = \frac{\alpha}{\rho_s \varepsilon_s} = \frac{1}{\rho_s \varepsilon_s k} \quad (27)$$

donde  $\rho_s$  es la densidad del sólido y  $\varepsilon_s$  es la fracción volumétrica de sólido en la torta húmeda. Nótese que  $\rho_s \varepsilon_s$  representa los kg de sólido seco por  $m^3$  de torta húmeda y por ello se denomina de esta forma el concepto de  $\alpha_s$ .

Otro parámetro que aparece frecuentemente en procesos de filtración y en circulación de fluidos a través de lechos porosos es la resistencia media de la torta  $R_t$  ( $m^{-1}$ ), definido como

$$u^+ = \frac{Q(m^3/s)}{S(m^2)} = -\frac{1}{\alpha \mu} \frac{dp^+}{dx} = -\frac{1}{\alpha_s \rho_s \varepsilon_s \mu} \frac{dp^+}{dx} \approx -\frac{\Delta p^+}{\mu \alpha_s \rho_s \varepsilon_s \Delta x} = -\frac{\Delta p^+}{\mu R_t} \quad (28)$$

donde  $R_t$  representa la resistencia al flujo a través de la torta, siendo una propiedad extensiva, ya que depende de la cantidad de lecho considerada. En la ecuación (28) se ha igualado  $\frac{dp^+}{dx}$  a

un valor medio de  $\frac{\Delta p^+}{\Delta x}$ . De la ecuación (28), se deduce que

$$R_t = \alpha_s \rho_s \varepsilon_s \Delta x = \alpha_s \frac{\rho_s \varepsilon_s A \Delta x}{S} = \alpha_s \frac{W_s}{S} \quad (29)$$

siendo  $S$  el área transversal y  $W_s$  la masa de sólidos que hay contenidos en el volumen  $S \Delta x$ . Puede comprobarse que la resistencia  $R_t$  depende de la cantidad de sólidos por unidad de área transversal y de la permeabilidad media de la torta.

Un parámetro que aparece en algunas tortas es la relación

$$M = \frac{\text{masa torta húmeda}}{\text{masa torta seca}} \quad (30)$$

Este parámetro se puede relacionar con la fracción volumétrica de sólidos y con la porosidad, como a continuación se indica. Por cada kg de torta seca habrá un total de  $M$  kg de torta húmeda, y por tanto,  $M-1$  kg de agua. Teniendo esto en cuenta se puede encontrar una ecuación que relacione  $\varepsilon_s$  con el parámetro  $M$  y las densidades, de la siguiente manera:

$$M = \frac{\text{masa sólido seco} + \text{masa líquido en torta}}{\text{masa sólido seco}} = \frac{\rho_s V_s + \rho V}{\rho_s V_s} = 1 + \frac{\rho \varepsilon}{\rho_s (1 - \varepsilon)} \quad (31)$$

### 3.3 Relación entre permeabilidad y resistencia específica con la porosidad y diámetro medio de partícula

Considérese una torta de sólidos estacionarios de espesor  $L$  cuya fracción de sólidos sea  $\varepsilon_s$ . Tal como se ha visto en la sección anterior, dicha torta tiene una serie de poros y capilaridades por donde circula el fluido con una velocidad media  $u$ . Considérese como aproximación, que estos poros que atraviesan la torta sean prácticamente rectos, teniendo una sección no

necesariamente circular. En estas condiciones, la pérdida de presión que sufre el líquido al atravesar dicho poro vendrá dado por la ecuación de Bernoulli

$$-\frac{\Delta p^+}{\rho} = 2fu^2 \frac{L_{poro}}{D_{eq.poro}} \quad (32)$$

donde  $f$  es el factor de fricción de Fanning,  $L$  la longitud del poro y  $D_{eq}$  el diámetro equivalente del poro. En las condiciones en las que la ley de Darcy se puede aplicar (régimen laminar, transporte molecular de cantidad de movimiento), el siguiente tratamiento de Kozeny indica que la variación del factor de fricción viene dado por la ecuación de Hagen-Poiseuille ( $f = 16/Re$ ), y por lo tanto se puede escribir que

$$-\frac{\Delta p^+}{L_{poro}} = \frac{32\mu u}{D_{eq.poro}^2} \quad (33)$$

introduciendo la expresión de diámetro equivalente, definido como

$$D_{eq} = 4 \frac{\text{secc. transv. de poros}}{\text{perím. mojado de poros}} = 4 \frac{\text{secc. transv. de poros} \cdot \frac{\text{altura torta}}{\text{volumen torta}}}{\text{perím. mojado de poros} \cdot \frac{\text{altura torta}}{\text{volumen torta}}} = \frac{4\varepsilon}{S_B} \quad (34)$$

donde  $\varepsilon$  es la porosidad (o fracción de huecos que es igual a la relación volumen de poros/volumen total) y

$$S_B = \frac{\text{m}^2 \text{ de superficie mojada}}{\text{m}^3 \text{ de lecho}} \quad (35)$$

Este valor de  $S_B$  se puede expresar como

$$S_B = a_v \varepsilon_s = a_v (1 - \varepsilon) \quad (36)$$

donde  $a_v$  es la superficie específica del material sólido,

$$a_v = \frac{\text{superficie interna de los poros} (m^2)}{\text{volumen torta seca} (m^3)}$$

y  $\varepsilon_s$  o  $(1-\varepsilon)$  la fracción de torta seca o sólidos, respectivamente. Por lo tanto:

$$D_{eq} = \frac{4\varepsilon}{a_v (1 - \varepsilon)} \quad (37)$$

Teniendo en cuenta que la velocidad media con que circula el fluido a través de los poros  $u$  es igual a

$$u = \frac{u^+ (\text{velocidad media calculada como caudal/sección total})}{\varepsilon (\text{relación poros/torta húmeda en volumen o sección})} \quad (38)$$

sustituyendo (37) y (38) en (33), se deduce que

$$-\frac{\Delta p^+}{L} = \frac{32\mu u^+}{\varepsilon \left( \frac{4\varepsilon}{a_v(1-\varepsilon)} \right)^2} = \frac{2a_v^2(1-\varepsilon)^2 \mu u^+}{\varepsilon^3} \quad (39)$$

donde la constante del segundo miembro 2, viene de dicho factor existente en la ecuación de Fanning (32). Dado que la ecuación de Fanning es únicamente válida en tramos rectos de circulación de fluidos, esta expresión (39) será únicamente válida cuando los poros que atraviesen la torta sean rectos, tal y como se supuso inicialmente. Sin embargo, se entiende fácilmente que estos poros no serán necesariamente rectos, o bien no cruzarán la torta perpendicularmente. Con objeto de compensar este hecho, Kozeny sustituyó este factor 2 por una constante  $\kappa$  (denominada de Kozeny) obtenida empíricamente, cuyo valor obtenido experimentalmente es de 25/6.

$$-\frac{\Delta p^+}{L} = \frac{\kappa a_v^2(1-\varepsilon)^2 \mu u^+}{\varepsilon^3} \quad (40)$$

Así, para tortas incompresibles formadas por partículas redondeadas de tamaño medio  $d_p$ , el valor de  $a_v$  será igual a

$$a_v = \frac{m^2 \text{ superficie}}{m^3 \text{ sólido}} = \frac{4\pi(d_p/2)^2}{\Phi_s \frac{4}{3}\pi(d_p/2)^3} = \frac{6}{\Phi_s d_p} \quad (41)$$

donde  $\Phi_s$  es el factor de esfericidad (ec. (2), relación entre la superficie exterior de la partícula y la superficie de la esfera con el mismo volumen que la partícula), y considerando un valor de  $\kappa = 25/6$ , se deduce que

$$-\frac{\Delta p^+}{L} = \frac{150(1-\varepsilon)^2 \mu u^+}{\varepsilon^3 (d_p \Phi_s)^2} \quad (42)$$

ecuación conocida como **Blake-Kozeny**.

Comparando esta ecuación con la ley de Darcy, suponiendo  $\frac{\Delta p^+}{L} \approx -\frac{dp^+}{dx}$  se deduce que

$$k(\text{permeabilidad}) = \frac{\varepsilon^3 (d_p \Phi_s)^2}{150(1-\varepsilon)^2} \quad (43)$$

y por tanto

$$\alpha_s = \frac{1}{\rho_s \varepsilon_s k} = \frac{1}{\rho_s (1-\varepsilon) k} = \frac{1}{\rho_s (1-\varepsilon) \frac{\varepsilon^3 (d_p \Phi_s)^2}{150(1-\varepsilon)^2}} = \frac{150(1-\varepsilon)}{\rho_s \varepsilon^3 (d_p \Phi_s)^2} \quad (44)$$

La anterior expresión permite relacionar la resistencia específica con la porosidad y el diámetro de la partícula, cuando la circulación del fluido transcurre en régimen laminar, teniendo en cuenta que en tortas incompresibles,  $\varepsilon$  permanece constante y no varía con la presión de trabajo y  $\alpha_s$  también será constante.

Cuando se dispone de una torta compresible con capas con diferente porosidad, se aplicarán las ecuaciones anteriores pero en forma diferencial.

### 3.4 Circulación de gases y líquidos a través de lechos granulares

La expresión de Blake-Kozeny, deducida en la sección anterior, es válida únicamente cuando el fluido atraviesa la torta o lecho de partículas en régimen exclusivamente laminar, ya que para su deducción, se empleó la ecuación de Hagen-Poiseuille. Este planteamiento es correcto para las tortas, ya que al estar constituidas por partículas finas, los poros también son finos, y la circulación del fluido en los poros en régimen turbulento produciría unas pérdidas de carga imposibles de superar. Sin embargo, cuando una corriente líquida o gaseosa atraviesa un lecho de partículas granulares (es decir, partículas más gruesas), perfectamente definidas, como puede circular en régimen turbulento al ser los poros también mucho más grandes, el valor de la pérdida de presión no podrá obtenerse por la ecuación de Blake Kozeny.

Cuando un fluido circula en régimen turbulento, el factor de fricción es prácticamente constante, tanto más, cuanto mayor es la rugosidad (ver parte superior derecha de la gráfica de Moody). Por tanto, a partir de la expresión (32), realizando una deducción similar a la anterior pero en función de  $f$  para régimen turbulento ( $Re_p > 1000$ ) se obtiene:

$$-\frac{\Delta p^+}{L} = 3f \frac{\rho(1-\varepsilon)u^{+2}}{\varphi_s d_p \varepsilon^3} \cong 1.75 \frac{\rho(1-\varepsilon)u^{+2}}{\varphi_s d_p \varepsilon^3} \quad (45)$$

en la cual se ha sustituido el valor de dicho factor encontrado experimentalmente, obteniéndose la denominada ecuación de **Burke-Plummer**.

En estas condiciones, se han obtenido expresiones para la obtención de la pérdida de presión que sufre un fluido al atravesar un lecho de partículas cuando éste circula en régimen laminar ( $Re_p < 10$ , ec. Blake Kozeny) y turbulento ( $Re_p > 1000$ , ec. Burke-Plummer). Ergun realizó una deducción para la obtención de una expresión que fuera válida para el régimen de transición ( $10 < Re_p < 1000$ ) suponiendo que el factor de fricción es una combinación lineal de

$$f = \frac{16}{Re} \frac{25}{6} \frac{1}{2} + \frac{1.75}{3} \quad (46)$$

donde  $16/Re$  es la ec. Hagen Poiseuille,  $25/6$  la constante de Kozeny y  $1/2$  el inverso de la constante de Fanning. La ecuación que se obtiene para este factor de fricción es

$$\frac{-\Delta p^+}{L} = 150 \frac{(1-\varepsilon_m)^2}{\varepsilon_m^3} \frac{\mu u^+}{(\Phi_s d_p)^2} + 1.75 \frac{1-\varepsilon_m}{\varepsilon_m^3} \frac{\rho (u^+)^2}{\Phi_s d_p} \quad (47)$$

conocida como ecuación de **Ergun**, válida para cualquier valor de  $Re_p$ , donde:

- $\Delta p^+$  = pérdida de presión manométrica, debida al rozamiento, (N/m<sup>2</sup>)
- L = altura del lecho (m)
- $\varepsilon_m$  = porosidad media del lecho o frac. volumétrica de huecos (equivalente a  $\varepsilon$ )
- $\mu$  = viscosidad del fluido (kg/(m.s))
- $u^+$  = velocidad superficial del líquido, calculada a sección total libre (m/s)
- $\Phi_s$  = factor de esfericidad
- $d_p$  = tamaño de partícula (m)
- $\rho$  = densidad del fluido (kg/m<sup>3</sup>)

A caudales de circulación bajos, el segundo término de la ecuación de Ergun es despreciable, y la pérdida de presión es directamente proporcional a la velocidad superficial, indicando que el régimen de circulación es laminar y coincidiendo con la expresión anterior (42). Por el contrario a caudales elevados, el segundo término es mayor, indicando que el régimen de circulación es turbulento.

Un método de estimación experimental del factor de esfericidad de un conjunto de partículas consiste en representar los valores experimentales de  $\Delta p^+$  frente a  $u^+$ , en un rango de caudales bajos cuando solo el primer término de la ecuación (47) es importante y de la pendiente de la recta que debe pasar por el origen se deduce el valor de  $\Phi_s$ , al conocerse todas las demás constantes.

## 4. Lechos fluidizados

### 4.1 Tipos de lechos fluidizados

Si se hace circular un fluido a través de un lecho de sólidos, con dirección descendente, no tiene lugar ningún movimiento relativo entre las partículas a menos que la orientación inicial de las mismas sea inestable. Si el flujo es laminar, la caída de presión a través del lecho será directamente proporcional a la velocidad de flujo, aumentando más rápidamente a grandes velocidades. En este caso siempre tenemos un **lecho fijo**.

Si el fluido circula a través del lecho en dirección ascendente, y el caudal es muy pequeño, se seguirá obteniendo un **lecho fijo** de partículas, y la caída de presión será la misma que en el caso anterior (Figura 6-a). Si se incrementa poco a poco el caudal de fluido, la pérdida de presión que sufre el fluido será cada vez mayor, de acuerdo con la ecuación de Ergun (47). Al aumentar el caudal, llegará un momento en que la fuerza que pierde el fluido por rozamiento sobre las partículas sea igual a su peso aparente (peso real menos empuje) de las mismas, y éstas sufren una reordenación para ofrecer una resistencia menor al desplazamiento del gas y el lecho se expansiona, quedando en suspensión en la corriente



de fluido, y se producen pequeñas vibraciones (sobre todo en la superficie). Justo en el punto en que el lecho se expande se denomina **estado de mínima de fluidización** (Figura 6-b), y a la velocidad superficial a la que se produce, **velocidad mínima de fluidización**. Si entonces se aumenta aún más la velocidad por encima de este punto, las partículas del sólido se mantienen en suspensión en la corriente gaseosa, diciéndose que el lecho es **fluidizado** (Figura 6-c-g). Mientras es fácil de distinguir entre los lechos fijos (están quietos) y fluidizados (están suspendidos), el estado de mínima fluidización es el punto de transición entre los anteriores y muy difícil de observar.

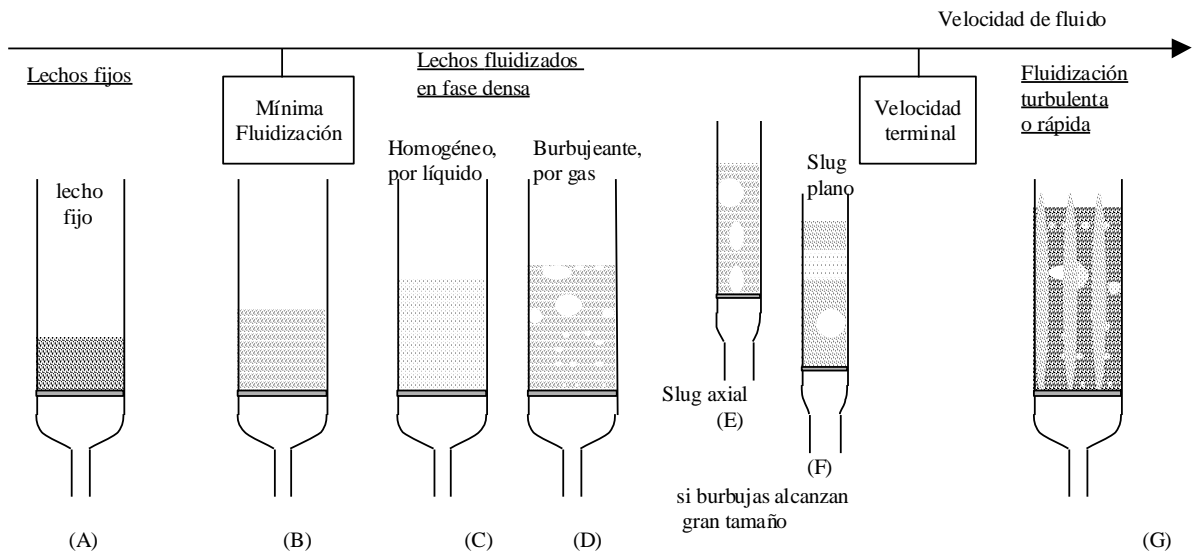


Figura 6. Tipos de lechos

En función del tipo de fluido (líquido y gas) y del tamaño de las partículas, los lechos fluidizados se comportan de forma diferente. En sistemas sólido-líquido, un aumento de la velocidad de flujo sobre la mínima de fluidización produce una expansión progresiva y homogénea del lecho. Es un lecho **homogéneamente fluidizado** (Figura 6-c). Generalmente el comportamiento de los sistemas sólido-gas es bastante diferente:

- Si las partículas son pequeñas, primero tienen fluidización homogénea (como con líquidos). Sin embargo, si se sigue aumentando la velocidad, llega un momento en que se supera la del punto de **mínimo burbujeo**. A partir de aquí, se produce una gran agitación con formación de burbujas y canales preferenciales de paso de gas. Además, el lecho no se expande mucho sobre su volumen de mínima fluidización. Este tipo de lecho se conoce como **lecho fluidizado burbujeante** (Figura 6-d). El lecho toma el aspecto de un líquido en ebullición, moviéndose los sólidos vigorosamente y ascendiendo rápidamente grandes burbujas a través del lecho.
- Si las partículas son de tamaño intermedio, tras el estado de mínima fluidización, aparece directamente la fluidización burbujeante.

A medida que aumenta la velocidad, en los sistemas gas-sólido, las burbujas son más rápidas y pueden coalescer y crecen a medida que ascienden. Si el lecho es profundo y la velocidad de paso de gas es alta, la coalescencia de las burbujas puede llegar a alcanzar el diámetro del tubo, formándose tapones de gas que ocupan la sección transversal. Estos tapones de gas

quedan alternados con zonas de sólidos fluidizados, que son transportados hacia arriba, deshaciéndose a continuación y cayendo los sólidos de nuevo. Este tipo de lecho se llama **lecho fragmentado** y al fenómeno se le llama **slug** (Figura 6-e y f).

Si se sigue elevando la velocidad del gas, se puede superar la velocidad terminal del sólido, con lo que se produce un arrastre apreciable de sólidos al exterior (aunque no necesariamente masivo). Se tiene pues un **lecho fluidizado disperso** con transporte neumático de sólidos, en contraposición al lecho de fase densa. En este caso el sólido que sale por la parte superior del reactor suele ser recuperado mediante ciclones y devuelto al lecho, se tiene pues un **lecho fluidizado circulante**, que puede ser interno o externo (Figura 7-a, b).

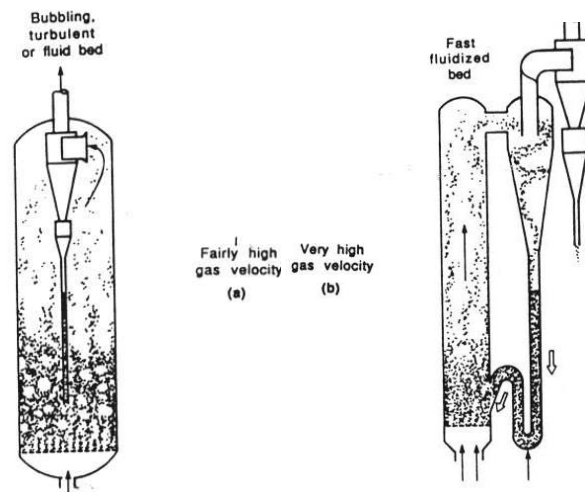


Figura 7. Lechos fluidizados circulantes

Según Kunii y Levenspiel, en la primera página de su obra "Fluidization Engineering", la Fluidización es "aquella operación en la cual partículas sólidas se transforman en un estado fluido, mediante la suspensión producida por la acción de una corriente vertical de un líquido o un gas." Así, mediante la fluidización, las partículas sólidas se comportan como si fueran un fluido, circunstancia que hace que la Ingeniería aproveche esta situación. El comportamiento de los lechos fluidizados es similar al de un fluido, ya que al estar en estado de suspensión en la corriente de fluido, adquiere muchas de sus propiedades. Y si el lecho es burbujeante, es similar al de un líquido en ebullición. Estas propiedades, así como su contacto íntimo con el gas, es a menudo la propiedad más importante que hace a la fluidización un sistema adecuado para la aplicación como reactor químico. Al estar los sólidos en movimiento, hace posible su aplicación para procesos en continuo. En la industria se emplean reactores de lecho fluidizado para procesos de refinamiento catalítico de fracciones de petróleo, síntesis Fischer-Trops, combustión de carbón en centrales térmicas, etc. En los reactores de lecho fluidizado, el lecho de partículas puede ser bien el catalizador de una reacción heterogénea entre gases, el sólido producto de una reacción fluido-sólido, el soporte inerte para un intercambio de calor, secador, regenerador de catalizadores, etc.

Las ventajas y desventajas de un sistema de lecho fluidizado gas-sólido respecto a otro tipo de sistemas son:

### Ventajas:

1. El comportamiento como un líquido de las partículas, permite un control automático continuo con facilidad de manejo.
2. La rapidez de mezcla de los sólidos permite un control muy bueno y eficaz de las condiciones isoterma del sistema.
3. Además, dada la buena mezcla de sólidos, el sistema reacciona lentamente a cambios bruscos en las condiciones de trabajo, lo que permite mantener el sistema estable ante perturbaciones exteriores.
4. La circulación de sólidos entre dos lechos fluidizados hace posible eliminar o añadir grandes cantidades de calor en grandes sistemas.
5. Es adecuado para operaciones en gran escala.
6. Las velocidades de transporte de calor y materia entre el fluido y la partícula son mayores que con otros tipos de métodos de contacto.
7. La velocidad de transporte de calor entre el lecho fluidizado y un objeto inmerso en él es alta. Por lo tanto, el intercambio de calor con el lecho requiere relativamente pequeñas áreas superficiales.

### Desventajas:

1. Para lechos de burbujas de partículas muy finas existe una gran dificultad para describir el flujo de gas, con una gran desviación del flujo de pistón. La gran cantidad de flujo en forma de burbujas supone un contacto ineficiente entre partículas y gas. Esto es especialmente problemático cuando se requiere una elevada conversión de reactante gaseoso o una elevada selectividad de una reacción intermedia.
2. La rápida mezcla de sólidos en el lecho lleva a que haya partículas de distintos tiempos de residencia. Para sistemas en continuo, esto da un producto no uniforme, especialmente para niveles de elevada conversión.
3. Los sólidos se van erosionando por rozamiento a lo largo del tiempo.
4. La erosión de zonas del reactor por abrasión puede ser importante.
5. Hay un coste económico como consecuencia de la energía mecánica necesaria y el equipo para impulsar el fluido.

La mayoría de estos comentarios son aplicables a los sistemas lecho fluidizado líquido-sólido.

### **4.2 Cálculo de la velocidad mínima de fluidización**

Considérese un lecho de partículas situado sobre un distribuidor, por ejemplo un plato poroso, a través del cual pasa un flujo uniforme de fluido en dirección vertical ascendente, tal como se indica en la Figura 8. Si el lecho es fijo, está formado por partículas aproximadamente redondeadas de tamaño medio  $d_p$ , tendrá porosidad  $\varepsilon_{fj}$  y altura  $L_{fj}$ . La caída de presión a su través puede determinarse por la ecuación de Ergun (ecuación (47)).

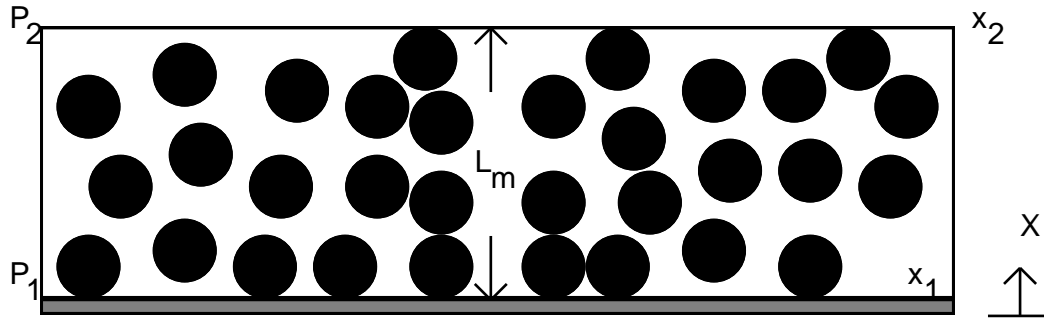


Figura 8. Esquema de un lecho fluidizado

Cuando el lecho está fluidizado, el lecho tendrá una porosidad  $\varepsilon_{flu}$  y una altura  $L_{flu}$ , diferente a las anteriores del lecho fijo. Así, un balance de cantidad de movimiento entre la sección  $x = x_1$  (capa por encima de la placa porosa) y  $x = x_2$ , en régimen estacionario:

$$\begin{aligned} \text{Suma de fuerzas que hacen aumentar la cantidad de movimiento en el volumen} &= \\ = P_1 A - P_2 A - (M_s + M_f)g &= 0 = P_1 A - P_2 A - (V_s \rho_s + (V - V_s) \rho) \end{aligned} \quad (48)$$

siendo A el área transversal (igual a la de la placa porosa),  $M_s$  la masa de los sólidos,  $M_f$  la masa del fluido,  $V_s$  el volumen del sólido y V el volumen total. La ecuación (48) se puede escribir como

$$\begin{aligned} P_1 A - P_2 A &= \left( \frac{V_s}{V} \rho_s + \left( 1 - \frac{V_s}{V} \right) \rho \right) g V = \left[ (1 - \varepsilon_{flu}) \rho_s + \varepsilon_{flu} \rho \right] g A L_{flu} \\ P_1 - P_2 &= L_m (1 - \varepsilon_{flu}) (\rho_s - \rho) g + L_{flu} g \rho \\ P_1 - P_2 - L_{flu} g \rho &= P_1 - P_2 - (x_2 - x_1) g \rho = L_{flu} (1 - \varepsilon_{flu}) (\rho_s - \rho) g \\ (P_1 + x_1 g \rho) - (P_2 + x_2 g \rho) &= (P_1^+ - P_2^+) = -\Delta P^+ = L_{flu} (1 - \varepsilon_{flu}) (\rho_s - \rho_f) g \end{aligned} \quad (49)$$

Reordenando términos se tiene

$$\frac{-\Delta P^+}{L_{flu}} = (1 - \varepsilon_{flu}) (\rho_s - \rho) g \quad (50)$$

Cabe decir, que dependiendo de cuánto esté de fluidizado el lecho (es decir, de cuál sea la velocidad  $u^+$  por encima de la mínima de fluidización), la porosidad,  $\varepsilon_{flu}$ , y por tanto la altura,  $L_{flu}$ , serán diferentes. Así, a la velocidad  $u_1^+$ , el lecho tiene un  $L_{flu1}$  y  $\varepsilon_{flu1}$ , a una velocidad  $u_2^+$ , tendrá  $L_{flu2}$  y  $\varepsilon_{flu2}$ , y así sucesivamente. Sin embargo, dado que la característica de los lechos fluidizados es que, para la misma masa, la pérdida de presión es constante para todo  $u^+$ , e igual al peso aparente de las partículas dividido por la sección sobre las que se apoya, se obtiene que

$$-\Delta p^+ = \frac{M_s \left( \frac{\rho_s - \rho}{\rho_s} \right) g}{S} \quad (51)$$

$$(1 - \varepsilon_{flu1})L_{flu1} = (1 - \varepsilon_{flu2})L_{flu2} = (1 - \varepsilon_{flu3})L_{flu3} = \dots = cte \quad (52)$$

recalcando que la ecuación (52) se cumple para cualquier velocidad  $u^+$ , siempre y cuando el lecho esté fluidizado y tenga la misma masa.

Como se mencionó anteriormente, el estado de mínima fluidización, que tiene una porosidad  $\varepsilon_{mf}$  y una altura característica  $L_{mf}$ , supone la transición del lecho fijo al lecho fluidizado, por lo que se cumplirán simultáneamente las ecuaciones (47) (de lecho fijo) y (50) (de lecho fluidizado), sustituyendo porosidad y altura por las del lecho fluidizado en ambas ecuaciones. Primero, dado que el estado de mínima fluidización cumple la ecuación (50), también cumpliría las (51) y (52). Además, en el punto considerado, las ecuaciones (47) y (50) pueden igualarse, obteniendo así una ecuación para obtener la velocidad mínima de fluidización  $u_{mf}^+$ .

$$\frac{1.75}{\varepsilon_{mf}^3 \Phi_s} \left( \frac{d_p u_{mf}^+ \rho}{\mu} \right)^2 + \frac{150(1 - \varepsilon_{mf})}{\varepsilon_{mf}^3 \Phi_s^2} \left( \frac{d_p u_{mf}^+ \rho}{\mu} \right) = \frac{d_p^3 \rho (\rho_s - \rho) g}{\mu^2} \quad (53)$$

o también

$$\frac{1.75}{\varepsilon_{mf}^3 \Phi_s} \text{Re}_{mf}^2 + \frac{150(1 - \varepsilon_{mf})}{\varepsilon_{mf}^3 \Phi_s^2} \text{Re}_{mf} = \text{Ar} \quad (54)$$

donde el número de Arquímedes y el Reynolds se definen como

$$\text{Ar} = \frac{d_p^3 \rho (\rho_s - \rho) g}{\mu^2} \quad (55)$$

$$\text{Re}_{mf} = \frac{\rho u_{mf}^+ d_p}{\mu} \quad (56)$$

Por la forma de la ecuación (54), se observa que la velocidad mínima de fluidización es independiente de la cantidad de masa del lecho y de la sección del lecho, y únicamente depende de las características físicas de las propias partículas (tamaño, densidad) y del fluido.

Debido a que los valores de  $\Phi_s$  y  $\varepsilon_{mf}$  son muy difíciles de determinar (es casi imposible precisar cuál es el estado de mínima fluidización), la velocidad mínima de fluidización se determina, bien experimentalmente (como se describe a continuación), o bien mediante correlaciones obtenidas por resultados experimentales. Distintos autores han resuelto esta ecuación con datos experimentales amplios. La ecuación más aceptada es la de Wen y Yu, aunque puede tener desviaciones grandes

$$K_1 \text{Re}_{mf}^2 + K_2 \text{Re}_{mf} = \text{Ar} \quad (57)$$

En la Tabla 2 se dan los valores de las constantes encontradas por varios autores, para fluidización gas-sólido.

Tabla 2. Valores de  $K_1$  y  $K_2$

Investigador(es)	$K_2/(2*K_1)$	$1/K_1$
Wen y Yu (1966)	33.7	0.0408
Richardson (1971)	25.7	0.0355
Swena y Vogel (1977)	25.3	0.0571
Babin et al. (1962)	27.2	0.0408
Chitester et al. (1984)	28.7	0.0434

De cualquier forma, la velocidad mínima de fluidización determinada por estas correlaciones está sujeta a desviaciones importantes (35%), por lo que no es infrecuente la determinación experimental.

Para la determinación experimental, hace falta un dispositivo consistente en un tubo cilíndrico provisto de una rejilla o placa porosa en el fondo, que sirva de soporte a un lecho de partículas sólidas, con posibilidad de medir la pérdida de presión. Se hace circular un fluido, incrementando paulatinamente su caudal de circulación, la variación de la altura del lecho y la pérdida de presión con la velocidad de circulación del gas tienen normalmente las formas de las figuras representadas en la Figura 9.

Si se parte de un lecho de sólidos que no ha sido fluidizado previamente, al aumentar la velocidad del gas su altura no varía, ya que el lecho está fijo, y la caída de presión irá aumentando a medida que lo hace la velocidad del gas (ecuación de Ergun). Correspondería en la Figura 9 al tramo AB. En el punto B, la caída de presión es ligeramente mayor que la necesaria para soportar el peso de las partículas, debido a la forma como están empaquetadas, ya que esto provoca que se necesite una velocidad un poco más alta para romper esas pequeñas fuerzas de cohesión entre las partículas del lecho. Un pequeño incremento del flujo sobre el punto B, consigue liberar las partículas y la caída de presión es justamente la necesaria para soportar su peso. El punto C corresponde al punto de fluidización incipiente, y la velocidad a la que se alcanza será la velocidad mínima de fluidización. Si el caudal se aumenta, se consigue fluidizar el lecho y las partículas de sólido se mueven libremente. La altura del lecho tiene pequeñas oscilaciones debido a que las burbujas formadas aumentan con la velocidad del gas. La pérdida de presión del lecho permanece constante con el caudal de circulación, y su valor es el peso aparente de sus partículas por unidad de superficie. Corresponde esta fase al tramo CE.

Si a partir de la situación representada en el punto E (velocidad alta y lecho completamente fluidizado), se comienza a disminuir el caudal, se obtiene primero el tramo equivalente CE, y tras el punto de mínima fluidización, el tramo CD, donde la altura del lecho es mayor y la pérdida de presión menor que las correspondientes al tramo AB. El motivo es que la porosidad del lecho fijo tras haberlo fluidizado es mayor a la de un lecho fijo compactado.

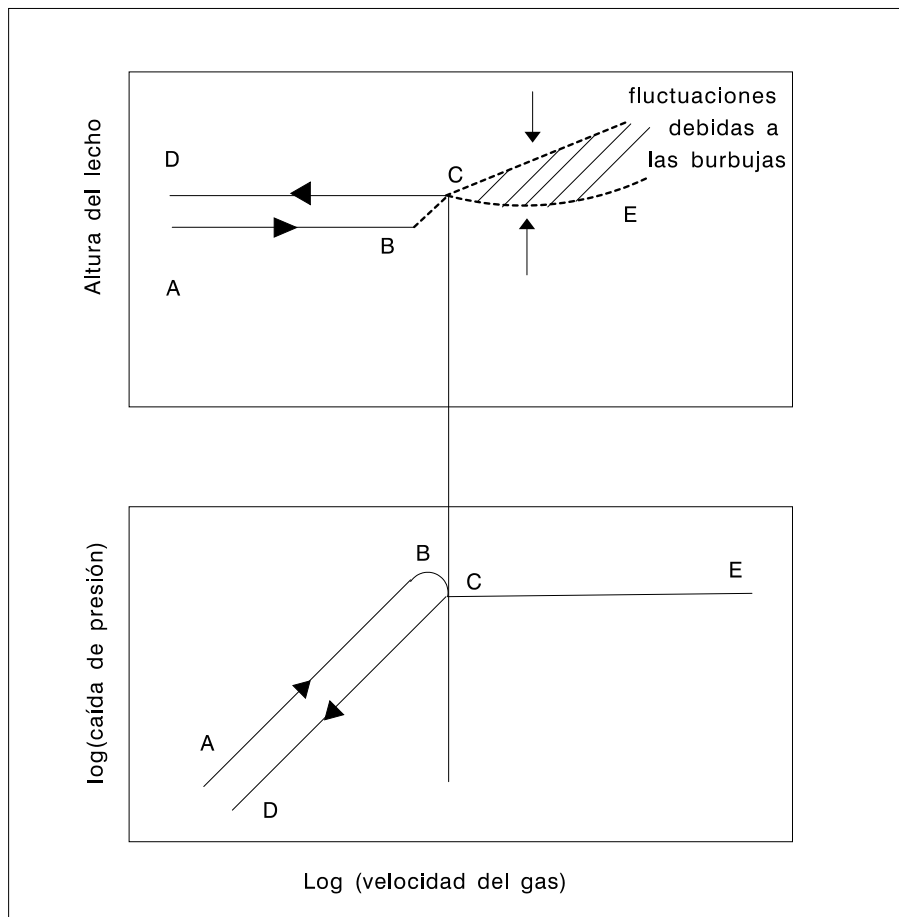


Figura 9. Pérdida de presión vs velocidad de gas

Mediante la representación de los puntos  $\Delta p^+$  frente a  $u^+$  tomados en un laboratorio, se determina experimentalmente la velocidad mínima de fluidización. El punto de corte de la prolongación de la recta horizontal correspondiente al lecho fluidizado, y la correspondiente al lecho fijo cuando baja el caudal, es la velocidad mínima de fluidización, tal y como se ve en la Figura 10.

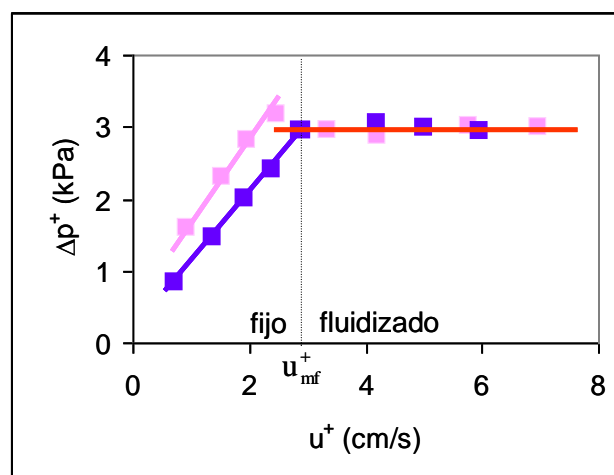


Figura 10. Determinación experimental de la velocidad mínima de fluidización

### 4.3 Velocidad terminal

Una vez que se ha alcanzado la velocidad mínima de fluidización, si se sigue incrementando el caudal de fluido el sistema estará cada vez más vigorosamente fluidizado. Si se sigue aumentando este llegará un momento en que las partículas sean arrastradas por el fluido, alcanzándose lo que se denomina *velocidad terminal*. Si se aumenta el flujo por encima de la velocidad terminal, tiene lugar el denominado arrastre o transporte neumático de partículas, dejando de existir el lecho fluidizado.

Para una partícula aislada, la velocidad terminal viene dada por la aplicación de un balance de cantidad de movimiento, cuya expresión final es

$$u_t = \sqrt{\frac{4d_p(\rho_s - \rho)g}{3\rho C_D}} \quad (58)$$

donde  $C_D$  es un coeficiente de descarga que depende de las características de las partículas y del régimen de circulación del gas. Esta ecuación es la misma que la ecuación (14), de caída de un sólido en un medio viscoso. La situación es idéntica, ya que en un caso, el fluido está estacionario y la partícula cae por gravedad, mientras que en el caso de la velocidad terminal, la partícula no cae por su gravedad porque la mantiene una corriente vertical. El valor de  $C_D$ , en el caso de sedimentación reptante, venía dado por la ecuación de Stokes. Sin embargo, para el caso de la velocidad terminal (generalmente un gas que sostiene una partícula), el Reynolds es muy superior,  $C_D$  no puede obtenerse de forma teórica y su estimación está basada en correlaciones experimentales. Haider y Levenspiel (1989) obtuvieron una correlación experimental para el valor de  $C_D$  en función de  $\Phi_s$  y  $Re_p$ , cuyo resultado se muestra, a modo de ejemplo, en la ecuación (59)

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \left[ 1 + (8.171 \exp(-4.0566\Phi_s)) Re_p^{0.0964+0.5565\Phi_s} \right] + \frac{73.69 \exp(-5.0748\Phi_s) Re_p}{Re_p + 5.378 \exp(6.2122\Phi_s)} \quad (59)$$

Los resultados de esta ecuación (59), introducidos en la (58), dan directamente la velocidad terminal, y se pueden representar de forma simple en la Figura 11.



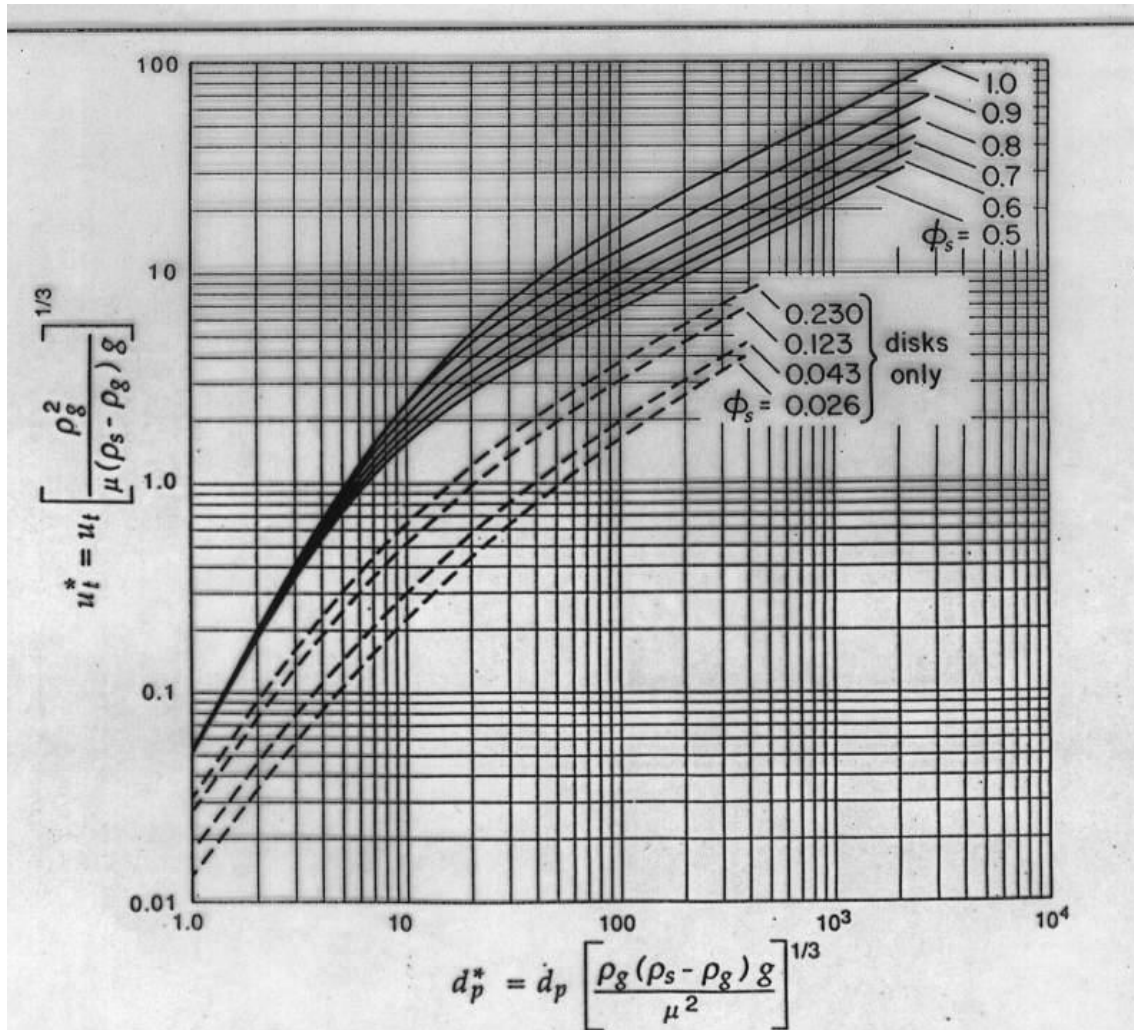


Figura 11. Gráfica para la determinación de la velocidad terminal

En la gráfica se representan los valores del tamaño de partícula adimensional  $d_p^*$  y una velocidad terminal adimensional  $u_t^*$ , calculados como

$$d_p^* = d_p \left[ \frac{\rho(\rho_s - \rho)g}{\mu^2} \right]^{1/3} \quad (60)$$

$$u_t^* = u_t \left[ \frac{\rho^2}{\mu(\rho_s - \rho)g} \right]^{1/3} \quad (61)$$

y de esta forma existe una curva diferente en función del valor del factor de esfericidad  $\Phi_s$ .

Como ejemplo de valores, la relación  $u_t/u_{mf}$ , para partículas finas puede llegar a ser de 80, mientras que para partículas gruesas tan sólo de alrededor de 10 veces.

## 5. Bibliografía

- Kunii, D y Levenspiel, O. "Fluidization Engineering" Ed. Butterworth-Heinemann, 2 ed., Boston (1991).

## OPERACIONES DE FLUJO DE FLUIDOS

---

- Ullmann's Encyclopedia of Industrial Chemistry. Vol. B2. VCH..1988.
- J. M. Coulson y J.F. Richardson. Chemical Engineering. Vol. II. Pergamon Press. Oxford. 1978.
- Wilkes, J.O. Fluid Mechanics for Chemical Engineers, Prentice Hall, 1999.
- Darby, R. Chemical Engineering Fluid Mechanics, Dekker, 1997.