DERIVACIÓN DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

1. Sea $w = w(\alpha,\varphi)$ una función de clase uno en un abierto no vacío de R^2.
Se considera el sistema $\{3+2\}$:

$$S \begin{cases} w = x\, sen\alpha \cos\varphi + y\, sen\alpha\, sen\varphi + z\cos\alpha \\ \dfrac{\partial w}{\partial \alpha} = x\cos\alpha\cos\varphi + y\cos\alpha\, sen\,\varphi - z\, sen\,\alpha\ , \\ \dfrac{\partial w}{\partial \varphi} = -x\, sen\,\alpha\, sen\varphi + y\, sen\,\alpha\cos\varphi \end{cases}$$

que define como funciones implícitas $z = z(x,y)$, $\alpha = \alpha(x,y)$ y $\varphi = \varphi(x,y)$. Se pide calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en función de α y φ.

2. Sea $f \in C^2(I)$, siendo I un abierto no vacío de R y $z = z(x,y)$ una función implícita definida por la ecuación $z = x + y\, f(z)$. Demostrar, que cualquiera que sea $\varphi \in C^1(I)$, se cumple: $\dfrac{\partial}{\partial y}[\varphi(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}] = \dfrac{\partial}{\partial x}[\varphi(z)\, f(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}]$.

3. Sea $u = g(z)$, con $g \in C^n(R)$ $(n \geq 1\,\text{entero})$. Se considera la función implícita $z = z(x,y)$ definida por la ecuación $z = x + y\,\varphi(z)$, con $\varphi \in C^n(R)$. demostrar que se verifica la fórmula de Lagrange: $\dfrac{\partial^n u}{\partial y^n} = \dfrac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\varphi(z)^n \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$.

4. Sean $u = u(x,y,z,t)$ y $v = v(x,y,z,t)$ dos funciones implícitas de las cuatro variables independientes x,y,z,t, definidas por el sistema $\{2+4\}$: $\begin{cases} u = z + x\,\varphi(u,v) \\ v = t + y\,\psi(u,v) \end{cases}$
siendo $\varphi,\psi \in C^1(A)$ dos funciones dadas y $A \subset R^2$ abierto no vacío,
Si $f \in C^1(A)$ es una función arbitraria, demostrar que: $f_x = \varphi\, f_z$ y $f_y = \psi\, f_t$.

5. Demostrar que $z = z(x,y)$ definida por el sistema $\{2+2\}$:

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\,sen\,\alpha + \ln z = f(\alpha) \\ -x\,sen\,\alpha + y\cos\alpha = f'(\alpha) \end{cases} \quad \text{satisface la ecuación:} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2.$$

$\alpha = \alpha(x,y)$ y f son funciones de clase uno.

6. Demostrar que $z = z(x,y)$ definida por el sistema $\{2+2\}$:

$$\begin{cases} (z - f(\alpha))^2 = x^2(y^2 - \alpha^2) \\ (z - f(\alpha))\,f'(\alpha) = \alpha x^2 \end{cases}, \text{ satisface la ecuación: } \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

$\alpha = \alpha(x,y)$ y f son funciones de clase uno.

7. La ecuación $f(x^2 - y^2, y^2 - z^2) = 0$, donde f es una función real de clase uno, define una función implícita $z = z(x,y)$. Demostrar que: $xz\dfrac{\partial z}{\partial y} + yz\dfrac{\partial z}{\partial x} - xy = 0.$

8. Comprobar que la función $z = z(x,y)$ definida implícitamente por la ecuación $y = x\varphi(z) + \psi(z)$, siendo φ, ψ funciones reales de clase dos, satisface la condición:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$$

9. Sea f una función real de clase dos y $z = z(x,y)$ una función implícita definida por la ecuación $f(x+z, y+z) = 0$. Hallar $d^2 z$.