

**FÓRMULAS DE LAS FUNCIONES EULERIANAS GAMMA Y BETA.**

1. Función gamma  $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt \quad p > 0. \quad \Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} (\ln x)^k e^{-x} dx \quad k \in \mathbb{N}.$

2. Función beta  $B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad p > 0, q > 0.$

3. Relación entre gamma y beta  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad p > 0, q > 0.$

4. Relación de recurrencia de gamma  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad x > 0.$

Para  $n \geq 1$  entero  $\Gamma(n+1) = n!$ ,

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!} \sqrt{\pi}.$$

5. Extensión de gamma a los reales no positivos que no son enteros

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \quad -(n+1) < x < -n.$$

6.  $B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx \quad p > 0, q > 0.$

7. Fórmula de los complementos

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi x} \quad 0 < x < 1. \quad \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \quad 0 < p < 1.$$

8.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^p x \cos^q x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right) \quad p > -1, q > -1,$  equivalente a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2r-1} x \cos^{2s-1} x dx = \frac{1}{2} B(r, s) \quad r > 0, s > 0.$$

9. Producto infinito de Gauss  $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad x > 0.$

10. Fórmula de Weierstrass  $\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \quad x > 0.$

$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n - \log n \approx 0,577215664901532860606\dots$  (constante de Euler – Mascheroni).

11. Fórmula de Euler  $\Gamma(x)\zeta(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} \frac{du}{e^u - 1} \quad x \notin \{1, 0, -1, -2, \dots\}.$   $\zeta$  es la función zeta.

12. Fórmulas de duplicación y del valor triple  $\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) \quad x > 0.$

$$\Gamma(3x) = \frac{3^{3x-\frac{1}{2}}}{2\pi} \Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{3}\right)\Gamma\left(x + \frac{2}{3}\right) \quad x > 0.$$

13. Teorema del producto  $\Gamma(nx) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{nx-\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(x + \frac{k}{n}\right) \quad x > 0, n \geq 2.$

14. Fórmula de Stirling (representación asintótica de gamma para valores grandes de  $x$ )

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4} + \dots\right).$$

Para  $n$  entero positivo suficientemente grande  $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$