

# EVOLUCIÓN DE LOS PERFILES DE LOS ESTUDIANTES DE PRIMARIA Y SECUNDARIA CUANDO RESUELVEN PROBLEMAS LINEALES

**Fernández, C., Llinares, S.**

*Universidad de Alicante*

## **Resumen**

Presentamos los resultados de un estudio sobre la evolución de los perfiles de los estudiantes cuando resuelven problemas lineales y no lineales desde los 9 a los 16 años. Los resultados indican que hay una evolución en muchos de los estudiantes desde la utilización de las relaciones aditivas “en cualquier problema” durante la educación primaria hasta la utilización de relaciones multiplicativas “en cualquier problema” durante la educación secundaria. Además, hay un aumento paulatino del número de estudiantes que razonan de manera sistemática en ambos tipos de problemas. Estos resultados indican que el éxito en los problemas aditivos o en los problemas lineales no implica necesariamente que los estudiantes sean capaces de identificar y diferenciar la idea de razón y proporción.

## **Abstract**

We present the results of a study about the development of students' profiles (9 to 16 years-old students) when solving proportional and non-proportional problems. Results show a students' development for applying additive relationships “anywhere” during primary school to applying multiplicative relationships “anywhere” during secondary school. Furthermore, there is a gradual increase of the number of students who use systematically the same strategy in both types of problems. Therefore, the increase of students' success on additive or proportional problems does not imply necessarily the students' ability to identify and differentiate the idea of ratio and proportion.

**Palabras Clave:** Razón, razonamiento proporcional, evolución de perfiles de comportamiento de los estudiantes.

**Key Words:** Ratio, proportional reasoning, development of students' profiles.

## Introducción

Las investigaciones sobre el desarrollo del razonamiento proporcional han estado aportando información sobre los niveles de dificultad de los diferentes tipos de problemas, las estrategias que los estudiantes utilizan, y los factores que influyen en el nivel de éxito de los estudiantes (Fernández, 2009; Hart, 1984; Kaput y Maxwell, 1994; Karplus, Pulos y Stage, 1983; Tourniaire y Pulos, 1985). Además, un aspecto relevante que las investigaciones han empezado a mostrar es el papel del desarrollo del razonamiento proporcional en nuestra comprensión de la relación entre los esquemas aditivos y multiplicativos (Kieren, 1994). En este contexto, es clave la construcción de los significados de la idea de razón por parte de los estudiantes a través de los procesos de “norming” (reinterpretación de una razón en términos de otra) o “unitizing” (construcción de una unidad de referencia a partir de las relaciones entre las cantidades dadas) que permiten la identificación de las razones favoreciendo su comparación (Lamon, 1994). Sin embargo, la construcción de estos significados no resulta fácil. En particular, algunas investigaciones han empezado a indicar que los estudiantes usan estrategias aditivas erróneas para resolver problemas lineales de valor perdido (tres datos de una proporción son dados y un cuarto es desconocido) al mismo tiempo que usan estrategias proporcionales erróneas para resolver problemas no lineales (Fernández, Llinares y Valls, 2008; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens y Verschaffel, 2005).

En las estrategias aditivas incorrectas, los estudiantes usan una relación aditiva entre las cantidades y la aplican para encontrar la cantidad desconocida. Por ejemplo, en el problema lineal “*Raquel y Juan están plantando flores. Empezaron al mismo tiempo pero Juan es más rápido. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas flores ha plantado Juan?*” la diferencia entre las flores que ha plantado Raquel y Juan es  $12 - 4 = 8$ . Si Raquel ha plantado 20 flores, entonces Juan ha plantado  $20 + 8 = 28$  flores.

Por otro lado, en las estrategias proporcionales erróneas los estudiantes construyen una razón en situaciones no lineales para encontrar la cantidad desconocida. En el problema siguiente “*Raquel y Juan están plantando flores al mismo ritmo pero Juan ha empezado antes. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas flores ha plantado Juan?*”. La frase *Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores* se identifica con la razón  $12/4$ , que se usa para calcular las flores plantadas por Juan cuando Raquel tiene planteadas 20.

Recientemente algunas investigaciones han empezado a mostrar en estudiantes de educación primaria la simultaneidad de estos dos comportamientos, y la influencia ejercida por el tipo de razón (entera o no entera) en los problemas lineales y del tipo de relación multiplicativa (entera o no entera) entre los números en los problemas no lineales (Van Dooren, De Bock, Gillard y Verschaffel, 2009). Estos estudios indican que la tendencia a aplicar estrategias aditivas en los problemas de

valor perdido (tanto lineales como no lineales) decrece con la edad, mientras que la tendencia a aplicar estrategias proporcionales en los problemas de valor perdido (lineales y no lineales) crece con la edad; y que el uso de las estrategias aditivas y proporcionales dependen fuertemente de las relaciones entre los números dados en los problemas.

En esta línea de investigación, presentamos los resultados de un estudio sobre la evolución de las estrategias usadas por los estudiantes cuando resuelven problemas lineales y problemas no lineales desde los últimos cursos de Primaria hasta Secundaria. El objetivo es aportar información sobre la manera en la que los estudiantes llegan a identificar las razones y las usan de manera correcta en la resolución de problemas lineales, y la manera en la que identifican las situaciones no lineales.

## Método

### Participantes

Los participantes fueron 755 estudiantes de Educación Primaria y Educación Secundaria: 65 estudiantes de 4º curso de Primaria, 68 estudiantes de 5º curso de Primaria, 64 estudiantes de 6º curso de Primaria, 124 estudiantes de 1º ESO, 151 estudiantes de 2º ESO, 154 estudiantes de 3º ESO y 129 estudiantes de 4º ESO. Estos estudiantes fueron elegidos desde una muestra aleatoria de centros educativos que habían manifestado su interés por participar en esta investigación facilitando el acceso a las aulas de la investigadora.

### Instrumentos y procedimiento

Diseñamos un cuestionario usando 8 situaciones con cantidades discretas (D) (por ejemplo, cargar cajas) y 8 situaciones con cantidades continuas (C) (por ejemplo patinar una cierta distancia). A continuación para cada una de estas situaciones creamos una versión lineal (P,  $f(x)=ax$ ; “Empezaron al mismo tiempo pero Tomás es más rápido”) y otra “aditiva” (A,  $f(x)=x+b$ , “Cargan a la misma velocidad pero Pedro empezó más tarde”). A los problemas de razón y proporción los llamamos lineales y a los otros aditivos considerando la relación multiplicativa o aditiva que define cada situación. En los problemas lineales consideramos razones enteras (I) y no enteras (N) y en los problemas aditivos consideramos relaciones multiplicativas entre los datos enteras (I) o no enteras (N). Con esta batería de problemas creamos 8 cuestionarios formados por 12 problemas: 4 problemas lineales [P], 4 problemas aditivos [A]), y añadimos 4 problemas “distractores”.

	I	N
<b>P-D</b>	Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Empezaron al mismo tiempo pero Tomás es más rápido. Cuando Pedro ha cargado 40 cajas, Tomás ha cargado 160 cajas. Si Pedro ha cargado 80 cajas, ¿cuántas cajas ha cargado Tomás?	Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Empezaron al mismo tiempo pero Tomás es más rápido. Cuando Pedro ha cargado 40 cajas, Tomás ha cargado 100 cajas. Si Pedro ha cargado 60 cajas, ¿cuántas cajas ha cargado Tomás?
<b>A-D</b>	Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Cargan a la misma velocidad pero Pedro empezó más tarde. Cuando Pedro ha cargado 40 cajas, Tomás ha cargado 160 cajas. Si Pedro ha cargado 80 cajas, ¿cuántas cajas ha cargado Tomás?	Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Cargan a la misma velocidad pero Pedro empezó más tarde. Cuando Pedro ha cargado 40 cajas, Tomás ha cargado 100 cajas. Si Pedro ha cargado 60 cajas, ¿cuántas cajas ha cargado Tomás?
<b>P-C</b>	Ana y Raquel están patinando. Empezaron al mismo tiempo pero Raquel es más rápida. Cuando Ana ha patinado 150 metros, Raquel ha patinado 300 metros. Si Ana ha patinado 600 metros, ¿cuántos metros ha patinado Raquel?	Ana y Raquel están patinando. Empezaron al mismo tiempo pero Raquel es más rápida. Cuando Ana ha patinado 80 metros, Raquel ha patinado 120 metros. Si Ana ha patinado 200 metros, ¿cuántos metros ha patinado Raquel?
<b>A-C</b>	Ana y Raquel están patinando. Patinan a la misma velocidad pero Raquel empezó antes. Cuando Ana ha patinado 150 metros, Raquel ha patinado 300 metros. Si Ana ha patinado 600 metros, ¿cuántos metros ha patinado Raquel?	Ana y Raquel están patinando. Patinan a la misma velocidad pero Raquel empezó antes. Cuando Ana ha patinado 80 metros, Raquel ha patinado 120 metros. Si Ana ha patinado 200 metros, ¿cuántos metros ha patinado Raquel?

TABLA 1. EJEMPLOS DE PROBLEMAS USADOS EN EL CUESTIONARIO Y SU ESTRUCTURA

Los estudiantes resolvieron el cuestionario durante el transcurso de su clase habitual de matemáticas (aproximadamente 55 minutos), pudiendo usar calculadoras.

## Análisis

Las respuestas fueron clasificadas como:

- “*respuestas proporcionales*” (**Prop**) cuando el estudiante utilizaba una relación multiplicativa entre las cantidades independientemente del tipo de problema,
- “*respuestas aditivas*” (**Addit**), cuando empleaban relaciones aditivas entre las cantidades independientemente del tipo de problema, y
- “*otras respuestas*” (**Ot**) cuando las relaciones entre las cantidades eran consideradas de forma diferente o cuando la respuesta no estaba clara. Los errores de cálculo no fueron considerados como “otras respuestas” siempre y cuando se pudiesen clasificar como respuestas proporcionales o aditivas.

El análisis estadístico de regresión logística de medidas repetidas mostró que el tipo de razón (no entera [N] y entera [I]) en los problemas lineales y el tipo de relación multiplicativa entre los números (no entera [N] y entera [I]) en los problemas aditivos influía en la aproximación a la resolución del problema adoptada por los estudiantes. Así, las relaciones multiplicativas no enteras (N) en los problemas aditivos (A) inducen al uso de respuestas aditivas correctas ( $\chi^2(1, N=755)=75.936$ ,  $p<0.001$ ), mientras que las relaciones multiplicativas enteras (I) inducen al uso de respuestas proporcionales incorrectas ( $\chi^2(1, N=755)=57.046$ ,  $p<0.001$ ).

Por otra parte, las razones enteras (I) en los problemas lineales (P) inducen a los estudiantes a usar más las respuestas proporcionales que cuando las razones son no enteras (N) ( $\chi^2(1, N=755)=75.936$ ,  $p<0.001$ ); y la presencia de razones no enteras (N) en los problemas lineales (P) induce a los estudiantes al uso de respuestas aditivas incorrectas ( $\chi^2(1, N=755)=69.866$ ,  $p<0.001$ ).

Como consecuencia de estos datos, definimos diferentes perfiles de comportamiento de los estudiantes:

- *Tipo 1.* Razona correctamente. Resuelven los 4 problemas lineales proporcionalmente y los 4 problemas aditivos, aditivamente.
- *Tipo 2.* Razona proporcionalmente. Resuelven los problemas aditivos y lineales proporcionalmente.
- *Tipo 3.* Razona aditivamente. Resuelven los problemas aditivos y lineales aditivamente.
- *Tipo 4.* Razona dependiendo del tipo de relación entre los números (I o N). Resuelven los problemas con razones y relaciones enteras (I) de manera proporcional y las problemas con razones y relaciones no enteras (N) entre los datos de manera aditiva, y esto lo hacen independientemente del tipo de problema (P o A).

- *Tipo 5*. Otros. Usan otras respuestas incorrectas.

Finalmente, clasificamos a los estudiantes en cada perfil considerando el tipo de respuesta de la siguiente manera:

- 6 respuestas proporcionales y 2 empleando otras respuestas fueron clasificados como Tipo 2- razonan proporcionalmente,
- 6 respuestas aditivas y 2 empleando otras respuestas fueron clasificados como Tipo 3- razonan aditivamente,
- 6 respuestas dependiendo del tipo de relación entre los números y 2 empleando otras respuestas fueron clasificados como Tipo 4 -razonan dependiendo del tipo de relación entre los números.
- 6 respuestas adecuadas (respuesta aditiva al problema aditivo y respuesta proporcional al problema lineal) y 2 empleando otras respuestas fueron clasificados como que razonaban correctamente.

Con este procedimiento clasificamos el 69% de los estudiantes y el 31.0% no pudimos clasificarlos en ninguna de estas categorías. El análisis Cluster realizado confirmó la aparición de los perfiles expuestos: razona correctamente (Tipo 1), razona proporcionalmente (Tipo 2), razona aditivamente (Tipo 3), razona dependiendo del tipo de razón (Tipo 4) y otros (Tipo 5).

Con esta clasificación podemos encontrar estudiantes con diferente nivel de éxito en el mismo perfil. Por ejemplo, un estudiante que da en 6 problemas respuestas proporcionales, puede tener 4 respuestas correctas y 2+2 incorrectas (es decir, aplicando 2 estrategias proporcionales en problemas aditivos y los otros 2 problemas aditivos resueltos con otro tipo de respuestas incorrecta o en blanco/no entendible), pero también 2 correctas y 4+2 incorrectas, y 3 correctas y 3+2 incorrectas. De esta manera esta clasificación permite centrar la mirada sobre las estrategias usadas y su evolución a lo largo de los años y no sobre el nivel de éxito. Teniendo en cuenta cómo hemos clasificado a los estudiantes en cada perfil, el perfil “razona proporcionalmente” venía definido con estudiantes dando respuestas proporcionales en al menos 2 problemas aditivos, y el perfil “razona aditivamente” venía definido con estudiantes dando las respuestas aditivas en al menos 2 problemas lineales.

## Resultados

La Figura 1 muestra la evolución de los perfiles de los estudiantes a lo largo de Primaria y Secundaria.

Los porcentajes de los estudiantes que no se pudieron clasificar en alguno de los perfiles mantiene unas variaciones pequeñas (del 35.3% en 4º de primaria al 24.0% en 4º ESO).

En relación al porcentaje de estudiantes que pudimos clasificar, globalmente, estos datos indican que los estudiantes de 4° de Primaria razonan aditivamente (40.0%), es decir, los estudiantes resuelven los problemas lineales y aditivos usando mayoritariamente respuestas aditivas. Por otra parte, los estudiantes de 4° de Educación Secundaria razonan proporcionalmente de manera mayoritaria (55.0%), es decir, resuelven los problemas lineales y aditivos dando respuestas proporcionales. Por tanto, en relación a las tendencias desde Primaria a Secundaria podemos observar que los estudiantes que razonan proporcionalmente independientemente del tipo de problema (A o P) (Tipo 2) aumenta de manera clara (de 0.0% a 55.0%), mientras que los estudiantes que razonan aditivamente (Tipo 3) independientemente del tipo de problema decrece de manera clara (del 40.0 % al 13.2%). Estas dos tendencias se “cruzan” entre 2° y 3° de la ESO, es decir, hasta 2° de la ESO el porcentaje de estudiantes que razonan aditivamente es mayor que el porcentaje que razona proporcionalmente (independientemente del tipo de problema), y a partir de 3° ESO esta tendencia cambia. El porcentaje de estudiantes que razonan proporcionalmente es mayor que el que razona aditivamente.

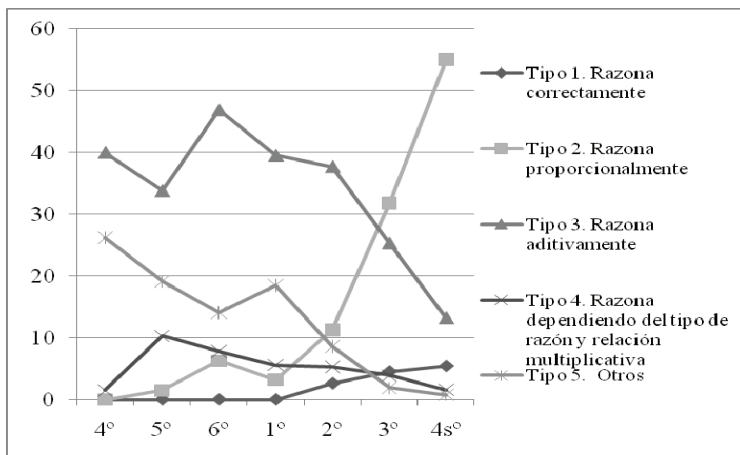


FIGURA 1. EVOLUCIÓN DE LOS DIFERENTES PERFILES DE LOS ESTUDIANTES A LO LARGO DE PRIMARIA Y SECUNDARIA

Por otra parte, no hubo estudiantes que razonaran correctamente (Tipo 1) en primaria ni en 1° ESO, pero aumentó ligeramente hasta un 5.4% en 4° ESO siendo este porcentaje relativamente pequeño.

Los estudiantes que han sido clasificados en el tipo 4, dan un tipo de respuesta u otro dependiendo del tipo de relación numérica entre los datos, se ha mantenido relativamente bajo pero la tendencia ha seguido una forma curvilínea. En Primaria

va creciendo (entre 4° y 5° de primaria, pasa del 1.5% al 10.3%), tomando el valor más alto y posteriormente a lo largo de la Educación Secundaria decrece.

Otro rasgo característico de estos datos es que los porcentajes de estudiantes que dan otras respuestas (Tipo 5) va decreciendo gradualmente entre los 9 y 16 años de edad (de 26.2% en 4° de primaria a 0.8% en 4° de secundaria). Esta tendencia indica que en cierta medida los estudiantes van definiendo más claramente sus aproximaciones a la resolución de los problemas (de manera correcta o incorrecta). Por otra parte, podemos identificar dos tendencias que van en paralelo, el descenso del número de estudiantes que razonan incorrectamente (Tipo 5) y del número de estudiantes que razonan aditivamente (Tipo 3).

Finalmente, hay que indicar que los estudiantes situados en los perfiles “razona proporcionalmente” y “razona aditivamente” son aquellos que dan una respuesta (aditiva o proporcional) de manera incorrecta en al menos 2 de los problemas, al mismo tiempo que dan este tipo de respuestas de manera correcta en los problemas adecuados. Nuestros datos (Tabla 2) indican que los porcentajes conjuntos de estos dos perfiles van aumentando de manera paulatina durante secundaria poniendo de manifiesto que los estudiantes de educación secundaria cada vez más dan respuestas aditivas independientemente del tipo de problema o dan respuestas proporcionales independientemente del tipo de problema, de manera creciente desde 1° a 4°.

Primaria			Secundaria			
4°	5°	6°	1°	2°	3°	4°
40.0	35.3	53.2	43.7	49.0	57.1	68.2

TABLA 2. PORCENTAJES CONJUNTOS DE LOS PERFILES “RAZONA ADITIVAMENTE” Y “RAZONA PROPORCIONALMENTE”

## Discusión

La presente investigación aporta información sobre la evolución de las respuestas aditivas en problemas lineales y de respuestas proporcionales en problemas aditivos en estudiantes de 9 a 16 años (desde 4° de educación primaria hasta 4° de educación secundaria). Para ello hemos identificado cinco perfiles de comportamiento en la resolución de problemas lineales y aditivos y estudiado su evolución en este rango de edad. Los perfiles “razona aditivamente” y “razona proporcionalmente” han sido definidos considerando que dan una respuesta (aditiva o proporcional) en al menos dos de los cuatro problemas (P o A).



Un primer resultado es la aparición tardía y su lento crecimiento posterior del perfil “razona correctamente”. En segundo lugar, la evolución de los perfiles “razona aditivamente” y “razona proporcionalmente” ha mostrado una evolución complementaria. Mientras el perfil “razonan aditivamente” va disminuyendo, el perfil “razona proporcionalmente” aumenta, dándose el cambio de mayoría entre 2º y 3º curso de ESO.

Por lo tanto, estos resultados indican que hay una evolución en muchos de los estudiantes desde la utilización de las relaciones aditivas “en cualquier problema” durante la educación primaria hasta la utilización de relaciones multiplicativas “en cualquier problema” durante la educación secundaria. Van Dooren et al. (2009) obtuvieron estas mismas tendencias con alumnos de Educación primaria. Esta concordancia entre los datos de estas dos investigaciones indica que esta conducta puede ser una característica del desarrollo del razonamiento proporcional y de cómo podemos llegar a caracterizarlo (Modestou y Gagatsis, 2007), y que el hecho de que se dé antes o después podría venir explicado por el desarrollo del currículo en cada contexto. El hecho de que el cambio de tendencia entre el Tipo 2 y el Tipo 3 se dé en el paso de 2º a 3º de la ESO puede indicar la influencia del currículo ya que en 2º de la ESO es cuando se introduce de manera más sistemática las magnitudes proporcionales (razón y proporción). La introducción en el currículo de las magnitudes proporcionales hace que los estudiantes empiecen a emplear de manera mayoritaria respuestas proporcionales incluso en problemas en los que no son adecuadas.

Finalmente, el aumento paulatino del número de estudiantes que usan una determinada respuesta (aditiva o proporcional) (Tabla 2) indica que el éxito en los problemas aditivos o en los problemas lineales no implica necesariamente que los estudiantes sean capaces de diferenciar ambos tipos de situaciones. Los resultados obtenidos plantean la necesidad de obtener más información sobre los fenómenos identificados (el comportamiento simultáneo del razonamiento aditivo y proporcional y su evolución a lo largo de estos años) en relación al papel que puedan desempeñar otros tipos de problemas (por ejemplo de comparación numérica o problemas cualitativos). Además, el uso de entrevistas clínicas, puede dar información sobre el papel de las relaciones numéricas entre los números en la fase intermedia en la que los estudiantes parecen usar de manera sistemática o una respuesta aditiva o una proporcional.

## Referencias

- Fernández, A. (2009). *Razón y proporción. Un estudio en la escuela primaria*. Universitat de València. Departament de Didàctica de la Matemàtica.
- Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2008). Implicative analysis of strategies in solving proportional and non-proportional problems. En O. Figueras y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 1-8). Morelia, México: PME.
- Hart, K. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors*. Windsor, UK: NFER Nelson.
- Kaput, J. y Maxwell, M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. En G. Harel y J. Confrey (eds.) *The development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 237-292). New York: SUNNY Press
- Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. K. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. En R. Lesh y M. Landau (Eds.) *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). Orlando: Academic Press Inc.
- Kieren, T. (1994). Multiple views of multiplicative structure. En G. Harel y J. Confrey (eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 387-397). New York: State University of New York Press.
- Lamon, S. (1994). Ratio and Proportion: Cognitive Foundations in Unitizing and Norming. En G. Harel y J. Confrey (eds.) *The development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 89-121). New York: SUNNY Press.
- Modestou, M. y Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, 27(1), 75-92.
- Tourniaire, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 181-204.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities of overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23(1), 57-86.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Gillard, E. y Verschaffel, L. (2009). Add? Or multiply? A study on the development of primary school students' proportional reasoning skills. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, y C. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 281-288). Thessaloniki, Greece: PME.