

CARACTERIZACIÓN MODAL EFICIENTE DE ESTRUCTURAS GUIADAS ARBITRARIAS USANDO LOS MÉTODOS BI-RME Y NYSTRÖM

Máriam Taroncher Caldach, Ana Vidal Pantaleoni, Vicente Boria Esbert,
Stephan Marini, Pablo Soto Pacheco
Departamento de Comunicaciones, ETSI Telecomunicación de Valencia
Universidad Politécnica de Valencia
e-mail: a Vidal@ocom.upv.es, vboria@ocom.upv.es

Abstract This paper describes a novel technique for the very efficient and accurate full-wave modal analysis of cylindrical waveguides with arbitrary cross-sections. This new technique relies on solving the integral equations that provide the well-known Boundary Integral - Resonant Mode Expansion (BI-RME) method by the Nyström approach, instead of using the traditional Galerkin version of the Method of Moments (MoM), thus providing large savings on computational costs. Accuracy aspects of this simple and fast procedure, which are directly connected to the rigorous treatment of the singular behaviour of the integral equation kernels, are carefully considered for waveguides defined by straight, circular and/or elliptical arcs. Comparative benchmarks between the new technique and the original BI-RME method are successfully presented for single- and multi-ridged waveguides, elliptical waveguides and rectangular waveguides with rounded corners.

I. INTRODUCCIÓN

La caracterización modal completa de guías metálicas con sección arbitraria es de enorme interés en el campo de las microondas, pues estos elementos suelen formar parte de un gran número de dispositivos como filtros doblemente corrugados y de modo dual, acopladores direccionales y diplores.

Las herramientas de diseño asistido por ordenador (CAD, *Computer Aided Design*) requieren una caracterización modal completa y precisa de los dispositivos anteriormente mencionados. El método BI-RME [1] es un método de análisis muy preciso y eficiente, que no sólo proporciona la descripción modal completa de la guía de sección arbitraria sino que, además, permite la obtención de los coeficientes de acoplo eficientemente [2]. La ecuación integral (EI) obtenida en el método BI-RME se había solucionado hasta ahora mediante el Método de los Momentos en su versión Galerkin.

Sin embargo, con el objetivo de poder diseñar y desarrollar los citados dispositivos mediante herramientas CAD, las cuales requieren el uso repetido de herramientas de simulación, sería deseable mejorar la eficiencia que presentan las actuales implementaciones del método

BI-RME. Una posible estrategia a seguir consiste en realizar la optimización en dos fases: una primera basada en algún algoritmo muy eficiente y menos preciso, para, a continuación, utilizar en una segunda fase algún método mucho más preciso aunque menos eficiente, con el objetivo de garantizar el correcto diseño final.

La nueva versión del método BI-RME que se presenta, basada en la solución de la EI mediante la técnica de Nyström, pretende ser ese primer método eficiente de las nuevas herramientas CAD. A lo largo del artículo se presentan la eficiencia y precisión ofrecidas por este nuevo método en comparación con la forma de resolución clásica mediante Galerkin.

II. TEORÍA

El método BI-RME proporciona el análisis modal completo de guías con sección transversal rectangular o circular fuertemente perturbadas por conductores cilíndricos axiales (guía de contorno arbitrario).

En este apartado se describe la combinación del método BI-RME con la discretización Nyström, aplicándose a la solución de los modos TE y TM de guías de sección arbitraria, obtenidas de la perturbación de la guía rectangular mediante segmentos rectos, circulares o elípticos.

El campo eléctrico en un punto genérico \mathbf{r} dentro de la guía perturbada viene expresado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\eta k \int_{\sigma} \mathbf{G}_e(\mathbf{r}, \mathbf{s}', k) \cdot \mathbf{J}_{\sigma}(l') dl' \quad (1)$$

donde σ es la línea de perturbación definida por la ecuación paramétrica $\mathbf{s}' = \mathbf{s}(l')$, \mathbf{G}_e es la función de Green diádica 2D y \mathbf{J}_{σ} es la densidad de corriente en σ (ver detalles en [1]).

Descomponiendo \mathbf{G}_e y \mathbf{J}_{σ} en sus componentes transversal y longitudinal según se describe en [1], se obtienen las siguientes ecuaciones integrales para el campo eléctrico transversal \mathbf{E}_t (TE) y el campo E_z (TM) en la guía arbitraria:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = & j \frac{\eta}{k} \int_{\sigma} \nabla \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{s}', k)}{\partial l'} J_t(l') dl' - \\ & - j\eta k \int_{\sigma} \mathbf{G}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}', k) \cdot \mathbf{t}(l') J_t(l') dl' - \\ & - j\eta k^3 \sum_m \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{r})}{k_m^2 (k_m^2 - k^2)} \int_{\sigma} \mathbf{e}_m(\mathbf{s}') \cdot \mathbf{t}(l') J_t(l') dl' \end{aligned} \quad (2)$$

$$E_z(\mathbf{r}) = -j\eta k \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') J_z(l') dl' - j\eta k^3 \sum_m \frac{\Psi_m(\mathbf{r})}{k_m'^2 (k_m'^2 - k^2)} \int_{\sigma} \Psi_m(\mathbf{s}') J_z(l') dl' \quad (3)$$

donde g es la función de Green escalar bidimensional y \mathbf{G}_{st} es la función solenoidal diádica (ver definición en [1]), J_z y J_t son las componentes longitudinal y transversal de la densidad de corriente y \mathbf{t} es el vector unitario tangencial, Ψ_m y k'_m son el potencial escalar normalizado y el número de onda de corte del m -ésimo modo TM en la guía rectangular, y por último \mathbf{e}_m y k_m son el campo eléctrico transversal normalizado y el número de onda de corte del m -ésimo modo TE en la guía rectangular

Ahora se imponen las condiciones de contorno en σ para los modos TM y para los modos TE.

A. Modos TM

Imponiendo la condición de contorno $E_z(\mathbf{r}) = 0$ sobre la componente axial de campo eléctrico (3) se obtiene la ecuación integral para los modos TM. Para su resolución, se emplea la cuadratura de Nyström, llegando así a las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \omega_{ij} g(\mathbf{r}_i, \mathbf{s}_j) b'_j + \omega_{ii} b'_i + \sum_{m=1}^{M'} \frac{\Psi_m(\mathbf{r}_i)}{k_m'^2} a'_m = 0 \quad (i=1, \dots, N) \quad (4)$$

$$\left(1 - \frac{k^2}{k_m'^2}\right) a'_m = k'^2 \sum_{j=1}^N \gamma_j \frac{\Psi_m(\mathbf{s}_j)}{k_m'^2} b'_j \quad (m=1, \dots, M') \quad (5)$$

donde N es el número de puntos de la segmentación efectuada sobre la línea de perturbación σ y M' el número de modos TM en la guía rectangular. Por su parte, \mathbf{s}_i y \mathbf{s}_j son los puntos de observación y de fuente.

Estas dos ecuaciones, (4) y (5), definen un problema de autovalores, cuya solución proporciona como valores propios los números de onda de corte de los modos TM de la guía perturbada (k'), y como vectores propios los coeficientes de la expansión modal (a'_m) y las amplitudes de la densidad de corriente longitudinal (b'_j) en los puntos \mathbf{s}_j .

Los constantes ω_{ij} y γ_{ij} son los pesos de la cuadratura de Nyström. La función de Green que aparece en (4) presenta una singularidad cuando el punto de fuente y de observación coinciden. Para evitarla, se extrae la contribución singular aproximando el kernel por su desarrollo de Taylor y separando el término singular del término regular. Para el cálculo de ω_{ii} , la parte regular se integra numéricamente, mientras que la parte singular se resuelve analíticamente en función del tipo de segmento considerado.

B. Modos TE

En el caso de los modos TE, la condición de contorno a imponer sobre la componente transversal de campo eléctrico (2) es $\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(l) = 0$. La ecuación integral así obtenida se resuelve también con el método de Nyström. Finalmente, se llega al siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas:

$$\frac{1}{k^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\partial^2 g(\mathbf{r}_i, \mathbf{s}_j)}{\partial l \partial l'} \omega'_{ij} b_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{t}(l_i) \cdot \mathbf{G}_{st}(\mathbf{r}_i, \mathbf{s}_j) \cdot \mathbf{t}(l_j) \nu_{ij} b_j + \frac{1}{k^2} \omega'_{ii} b_i - \nu_{ii} b_i - \sum_{m=1}^M \frac{\mathbf{t}(l_i) \cdot \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_i)}{k_m^2} a_m = 0 \quad (i=1, \dots, N) \quad (6)$$

$$\left(1 - \frac{k^2}{k_m^2}\right) \cdot a_m = k^2 \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{s}_j) \cdot \mathbf{t}(l_j)}{k_m^2} \gamma'_{ij} b_j \quad (m=1, \dots, M) \quad (7)$$

donde M es el número de modos TE en la guía rectangular.

En este caso también se llega a un problema de autovalores cuyas incógnitas son los números de onda de corte de los modos TE de la guía perturbada (k), los coeficientes de la expansión modal (a_m) y las amplitudes de la densidad de corriente transversal (b_j) en los puntos \mathbf{s}_j .

Los pesos ω'_{ij} , ν_{ij} y γ'_{ij} son los pesos de la cuadratura de Nyström. Para el caso de los pesos ν_{ij} , se procede de igual forma a como se hizo en el caso TM, pues el tipo de singularidad que presenta \mathbf{G}_{st} es logarítmica, del mismo tipo que la singularidad de g . Sin embargo, la segunda derivada de la función de Green g presenta una hipersingularidad no integrable y, por tanto, su tratamiento será diferente al de las dos anteriores.

Tras resolver los problemas (4)-(5) y (6)-(7), y una vez obtenidos los números de onda de corte y los coeficientes de campo y de corriente de los modos TE y TM de la guía modificada, se pueden reconstruir fácilmente los campos transversales y las componentes axiales de los citados modos TE y TM, lo que supone la caracterización modal completa de las guías con sección transversal arbitraria.

C. Coeficientes de acoplo

El estudio del acoplo entre la guía rectangular y la guía arbitraria se puede realizar según describe el algoritmo descrito en [2]. Este algoritmo aprovecha las matrices ya construidas en el problema de resolución modal y realiza pocos cálculos adicionales. El método resulta, por tanto, muy eficiente y fácil de realizar una vez implementado el método BI-RME con Nyström. Mediante esta técnica es posible obtener una gran cantidad de coeficientes de acoplo en muy poco tiempo y con poca pérdida de precisión. Estas integrales de acoplamiento resultan de enorme utilidad cuando se pretende analizar dispositivos de microondas que incluyen algunas secciones uniformes de guía con contorno arbitrario.

III. RESULTADOS

Una vez desarrollada la teoría referente al nuevo método se procede a la obtención de resultados sobre ejemplos de aplicación real para comprobar su eficiencia y demostrar su validez. Todas las comparaciones se realizan respecto a la versión Galerkin del método BI-RME. Como punto de partida se toma el mismo número de puntos que la discretización de Galerkin y se calcula el error cometido. Establecemos una cota de error relativo máximo de 0.5%. Si este límite es superado, se irá refinando la discretización

hasta conseguir la precisión deseada. Todas las simulaciones se han realizado en un PC Pentium II @ 400MHz.

A. Guía con reentrante

Un ejemplo empleado en numerosas aplicaciones de microondas es la guía con reentrante o guía ridge.

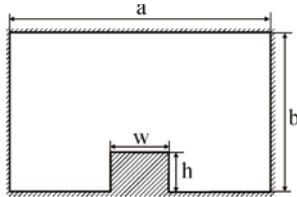


Figura 1. Guía Ridge

WR-75:
 $a = 19.05 \text{ mm}$
 $b = 9.525 \text{ mm}$
Reentrante centrado:
 $w = 3 \text{ mm}$
 $h = 3 \text{ mm}$

En total (TE y TM), se han obtenido 120 frecuencias de corte válidas de la guía ridge, de las 500 utilizadas en la guía rectangular. En la Tabla 1 se muestra el error máximo y medio de todas las frecuencias calculadas y el ahorro temporal conseguido. Como se puede comprobar, mediante este nuevo método se logra un ahorro en tiempo considerable sin apenas pérdida de precisión

Tabla 1. Resultados Guía con reentrante

	Puntos extra	Ahorro temporal	Tiempo total	Error máximo	Error medio
TM	0%	50.7%	1.01 s	0.06%	0.02%
TE	0%	45.7%	3.28 s	0.2%	0.06%

La representación gráfica del campo eléctrico axial para el cuarto modo TM y el módulo de la componente transversal del cuarto modo TE se puede ver en la Figura 2.

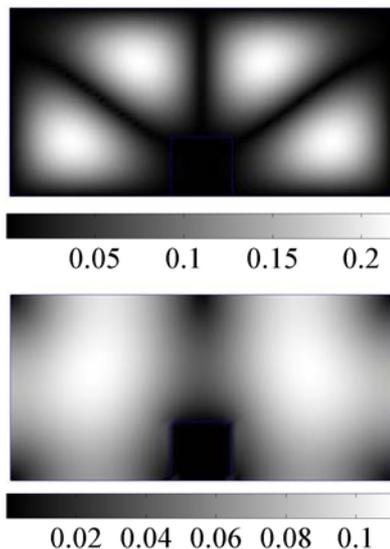
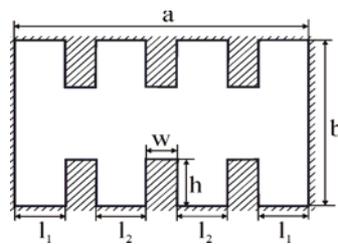


Figura 2. Representación gráfica del campo eléctrico

Para este ejemplo también se han obtenido los coeficientes de acoplo de los 20 primeros modos de la guía rectangular con los 10 primeros de la guía ridge. El error absoluto máximo observado es de $4 \cdot 10^{-3}$, lo que confirma la precisión de la técnica.

B. Guía con múltiples reentrantes

La siguiente geometría a analizar consiste en la perturbación de la guía rectangular por seis reentrantes simétricamente distribuidos tal y como se aprecia en la Figura 3.



WR-340:
 $a = 86.36 \text{ mm}$
 $b = 48.39 \text{ mm}$
Reentrantes:
 $w = 12.79 \text{ mm}$
 $h = 14.195 \text{ mm}$
 $l_1 = 8 \text{ mm}$
 $l_2 = 15.995 \text{ mm}$

Figura 3. Guía con seis reentrantes

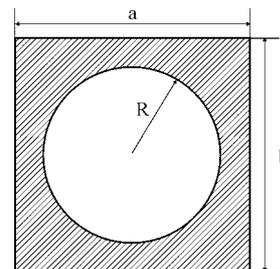
Se han generado 600 modos en la guía rectangular y se han obtenido 110 modos de la guía multiridge, entre TE y TM. En este ejemplo ha sido necesario aumentar la discretización respecto al caso Garlerkin para no sobrepasar la cota de error máxima en el caso de los modos TE. A pesar de ello, se aprecia que todavía se ha conseguido reducir el coste computacional.

Tabla 2. Resultados Guía con seis reentrantes

	Puntos extra	Ahorro temporal	Tiempo	Error máximo	Error medio
TM	0%	91.9%	4.04 s	0.3%	0.07%
TE	50%	65.9%	52.24 s	0.5%	0.25%

C. Guía circular

Con esta estructura se intenta reconstruir los modos de una guía circular a partir de una guía cuadrada tal y como se aprecia en la Figura 4.



Guía cuadrada:
 $a = 9.525 \text{ mm}$
Guía circular:
 $R = 4 \text{ mm}$

Figura 4. Guía Circular

Los cálculos se han realizado con 800 modos de la guía rectangular, obteniéndose 112 modos válidos de la guía circular.

Tabla 3. Resultados Guía Circular

	Puntos extra	Ahorro temporal	Tiempo	Error máximo	Error medio
TM	0%	78.6%	6.63 s	0.2%	0.12%
TE	100%	54.7%	58.05 s	0.5%	0.13%

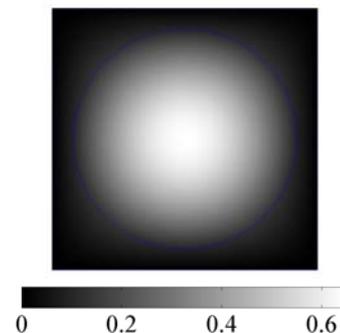
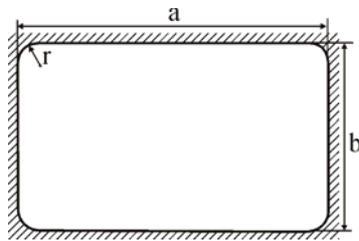


Figura 5. Campo eléctrico axial primer modo TM

D. Guía con esquinas redondeadas

En los métodos de fabricación de bajo coste no se consiguen ángulos rectos en la guía rectangular. La guía rectangular con esquinas redondeadas (Figura 6) simula estos efectos de mecanizado en la construcción.



WR-90:
 $a = 19.05 \text{ mm}$
 $b = 9.525 \text{ mm}$
Radio esquina:
 $r = 2 \text{ mm}$

Figura 6. Guía con esquinas redondeadas

El número de modos en la guía rectangular es 600, obteniéndose un total de 147 modos válidos en la guía perturbada.

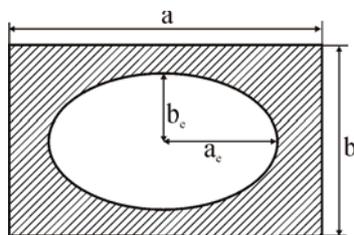
Tabla 4. Resultados Guía esquinas redondeadas

	Puntos extra	Ahorro temporal	Tiempo	Error máximo	Error medio
TM	0%	41.2%	1.8 s	0.05%	0.02%
TE	0%	19.5%	12.43 s	0.32%	0.09%

En el caso de los modos TM tanto la reducción temporal como el error obtenido son excelentes. Sin embargo, en el caso TE el error es un poco mayor, si bien no ha sido necesario aumentar la discretización.

E. Guía elíptica

Los iris de acoplo inductivo para la alimentación de guías o cavidades en filtros de modo dual suelen ser de forma elíptica. Con la siguiente estructura se estudia uno de ellos (Figura 7).



WR-90:
 $a = 22.86 \text{ mm}$
 $b = 10.16 \text{ mm}$
Elipse centrada:
 $a_e = 5 \text{ mm}$
 $b_e = 2.1794 \text{ mm}$

Figura 7. Guía Elíptica

Los resultados obtenidos en este ejemplo son similares a los obtenidos en el caso de la guía multiridge. En el problema TE es necesario aumentar el número de puntos de la discretización para conseguir un error aceptable, disminuyendo así la reducción temporal. El número de modos obtenidos finalmente para la guía elíptica es de 30, siendo 800 los modos de la guía rectangular.

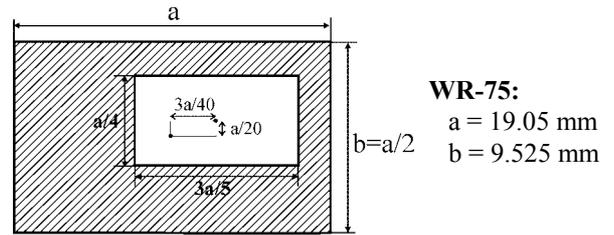
Tabla 5. Resultados Guía Elíptica

	Puntos extra	Ahorro temporal	Tiempo	Error máximo	Error medio
TM	0%	62.4%	6.02 s	0.3%	0.22%
TE	50%	28.1%	33.41 s	0.5%	0.27%

F. Guía rectangular

El último ejemplo a analizar será la unión de dos guías rectangulares de distinto tamaño (Figura 8). En este caso, las integrales de acoplo pueden resolverse analíticamente. En la Tabla 8 se muestran los coeficientes calculados con este

método y el error cometido respecto a los valores analíticos. Los valores mostrados son los coeficientes de acoplo entre los 10 primeros modos de la guía grande con los 5 primeros modos de la guía pequeña.



WR-75:
 $a = 19.05 \text{ mm}$
 $b = 9.525 \text{ mm}$

Figura 8. Guía Rectangular

Tabla 6. Resultados Guía Rectangular Pequeña

	Puntos extra	Ahorro temporal	Tiempo	Error máximo	Error medio
TM	0%	71.4%	6 s	0.29%	0.20%
TE	50%	36.8%	39.29 s	0.49%	0.27%

Tabla 7. Coeficientes de acoplo

	TE ₁₀	TE ₂₀	TE ₀₁	TE ₁₁	TM ₁₁
TE ₁₀	-0.635 2·10 ⁻³	0.0491 6·10 ⁻⁴	0	0	--
TE ₀₁	0	0	0.587 1·10 ⁻³	0	--
TE ₂₀	0.147 4·10 ⁻³	0.494 1·10 ⁻³	0	0	--
TE ₁₁	0.162 1·10 ⁻³	0.0133 7·10 ⁻⁴	-0.1 4·10 ⁻⁴	-0.386 7·10 ⁻³	--
TM ₁₁	0.328 9·10 ⁻⁴	-0.0252 1·10 ⁻⁴	0.0496 1·10 ⁻⁴	0.0542 2·10 ⁻³	-0.349 1·10 ⁻⁴
TE ₂₁	-0.0614 4·10 ⁻⁴	-0.202 5·10 ⁻⁴	-0.278 3·10 ⁻³	0.159 1·10 ⁻²	--
TM ₂₁	-0.0627 8·10 ⁻⁴	-0.203 2·10 ⁻³	0.28 1·10 ⁻³	-0.102 3·10 ⁻³	0.101 4·10 ⁻³
TE ₃₀	0.263 8·10 ⁻⁴	-0.258 5·10 ⁻⁴	0	0	--
TE ₃₁	-0.127 8·10 ⁻⁴	0.121 3·10 ⁻³	0.0188 4·10 ⁻³	0.315 9·10 ⁻³	--
TM ₃₁	-0.0844 2·10 ⁻⁴	0.0821 5·10 ⁻⁴	-0.0343 9·10 ⁻⁵	-0.353 7·10 ⁻³	0.229 6·10 ⁻⁴

IV. CONCLUSIONES

A lo largo del artículo se ha desarrollado y verificado una nueva versión del método BI-RME basado en el algoritmo Nyström. Este nuevo método ofrece ventajas frente al original basado en Galerkin, entre ellas, su gran eficiencia y su sencilla implementación, siendo su principal dificultad el tratamiento de las singularidades que aparecen en la ecuación integral. Como queda patente a lo largo del artículo, el método se ha revelado como un buen simulador para ser incluido en una herramienta de diseño.

REFERENCIAS

- [1] G. Conciauro, M. Bressan and C. Zuffada, "Waveguide modes via an integral equation leading to a linear matrix eigenvalue problem". IEEE Trans. Microwave Theory Tech, vol. 32, no. 11, pp. 1495-1504, Nov. 1984
- [2] P. Arcioni, "Fast evaluation of modal coupling coefficients of waveguide step discontinuities". IEEE Microwave and Guided Wave Lett., vol. 6, no. 6, pp. 232-234, June 1996.