Introducción a la Inferencia Estadística

Prof. Jose Jacobo Zubcoff
Universidad de Alicante

2008

1 Contraste de bondad de ajuste

1.1 Prueba de chi^2

La prueba chi-cuadrado para una muestra permite averiguar si la distribución empírica de una variable categórica se ajusta o no a una determinada distribución teórica (uniforme, binomial, multinomial, normal, etc.). Este contraste de bondad de ajuste, se pone a prueba utilizando un estadístico originalmente propuesto por Pearson para comparar las frecuencias observadas o empíricas con las esperadas o teóricas de cada categoría, es decir, un estadístico diseñado para comparar las frecuencias de hecho obtenidas en una muestra concreta (frecuencias observadas: O_i) con las frecuencias que deberíamos encontrar si la variable realmente siguiera la distribución teórica propuesta en la hipótesis nula (frecuencias esperadas: E_i).

Planteamiento del contraste:

$$\left.\begin{array}{lcl} H_0 & : & \textit{la variable } X \textit{ se ajusta a la variable teórica} \\ H_1 & : & \textit{la } H_0 \textit{ no es cierta} \end{array}\right\} \alpha = 0,05$$

El estadístico para resolver el contraste es χ^2

$$\chi^2 = \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i^2}$$

La frecuencias esperadas E_i se obtienen multiplicando la probabilidad teórica de cada categoría π_i (la que corresponde a cada categoría de acuerdo con la hipótesis nula) por el número de casos válidos:

$$E_i = n.\pi_i$$

Condición: todos los valores esperados deben ser mayores o iguales a 5 ($E_i > 5$).

Si no existen casillas vacías y el número de frecuencias esperadas menores de 5 no superan el 20 % del total de frecuencias esperadas (Cochran, 1952), el estadístico χ^2 se distribuye según el modelo de probabilidad chi-cuadrado con $k-1$ grados de libertad (donde k se refiere al número de categorías de la variable cuyo ajuste se está intentando evaluar).

1.2 Prueba de Kolgomorov-Smirnov

El método de Kolgomorov-Smirnov es el adecuado cuando tenemos pocos datos (menos de 20 datos). En esos casos, si elegimos el método de χ^2 no podríamos tener 5 intervalos, dado que no cumpliría la condición de $E_i > 5$.

Al igual que las pruebas χ^2 para una muestra y binomial, la prueba de Kolmogorov- Smirnov $(K - S)$ para una muestra es una prueba de bondad de ajuste: sirve para contrastar la hipótesis nula de que la distribución de una variable se ajusta a una determinada distribución teórica de probabilidad. Pero a diferencia de las primeras, que han sido diseñadas más bien para evaluar el ajuste de variables categóricas, la prueba de K-S para una muestra se adapta mejor a situaciones en las interesa evaluar el ajuste de variables cuantitativas.

Para contrastar la hipótesis nula de bondad de ajuste, la prueba de $K - S$ se basa en la comparación de dos funciones de distribución (o funciones de probabilidad acumuladas): una función de distribución empírica $F(X_i)$ y una función de distribución teórica $F_0(X_i)$.

Para obtener la función de distribución empírica $F(X_i)$ se comienza ordenando los valores de X_i de forma ascendente, es decir, desde el valor más pequeño $X_{[1]}$ hasta el más grande $X_{[n]}$.

Tras esto, la función de distribución empírica para cada valor de X_i se obtiene de la siguiente manera:

$$F(X_i) = \frac{i}{n}$$

Donde i es el rango correspondiente a cada observación. La forma de obtener la función de distribución teórica depende de la distribución concreta propuesta en la hipótesis. Si la distribución propuesta es, por ejemplo, la uniforme, la función de distribución teórica para cada valor de X_i se obtiene así:

$$F_0(X_i) = \frac{(X_i – X_{[1]})}{(X_{[n]} – X_{[1]})}$$

Si la distribución teórica propuesta es, por ejemplo, la de Poisson, entonces la función de distribución teórica se obtiene de la siguiente manera:

$$F_0(X_i) = \sum \left[e^{-\lambda} \frac{\lambda}{l!} \right]$$

Para $l = 0- > i$

Una vez obtenidas las distribuciones empírica y teórica, el estadístico de $K - S$ se calcula a partir de la diferencia D más grande existente entre $F(X_i)$ y $F_0(X_i)$:

$$Z = máx\, |D_i| \sqrt{n}$$