Tidskrift FÖR SKOLMATEMATIK

ÅRGÅNG 2 · Maj 1957
Nr 4

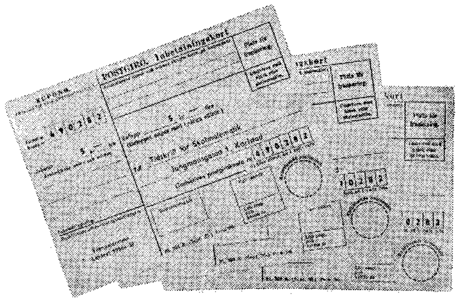
Andra årgången, *läsåret 1956—1957 avslutas i och med detta nummer.*

Tredje årgången *av TfS utkommer under* ***kalenderåret 1958***

Det har av flera skäl visat sig lämpligt att låta tidskriften löpa utefter kalenderår. TfS utkommer därför ej under hösten 1957 och nästa nummer, årg. 3 nr 1, utsändes den 1 mars 1958. Prenumeration bör ske redan nu för att underlätta uppsättandet av namnplåtsregister.

TfS tackar läsekretsen för i år för allt uppskattande intresse och för all aktiv hjälp att sprida tidskriften. TfS går stadigt framåt, allt fler enskilda lärare och skolbibliotek sluter upp i kretsen av TfS:s vänner.

Ett speciellt varmt tack riktas till TfS:s medarbetare, som generöst ställt sina artiklar gratis till tidskriftens förfogande. Då härtill kommer att redaktören under dessa första år med egna medel subventionerat tidskriften för att kunna förverkliga dess idé, innebär utgivandet av Tidskrift för Skolmatematik en gåva till lärarkårerna.



Förvalta gåvan genom att sprida TfS!! Det bör inte vara svårt för var och en att placera de få prenumerationsblanketter, som bifogats detta nummer. Det är oundgängligen nödvändigt att så sker, om TfS skall få möjlighet att fortsätta och utvecklas vidare till ett omväxlande och innehållsrikt forum för den viktiga räkneundervisningen.

Prenumerationspriset 5: — kr har med avsikt hållits lågt för att varje enskild lärare skall kunna bli prenumerant utan några större ekonomiska betänkligheter som hindrande faktor. Å andra sidan är det nödvändiga villkoret för att detta låga prenumerationspris skall kunna hållas att TfS når allt fler av lärarna.

Tidskriftens många medarbetare och dess redaktör har gjort en uppoffrande insats för att förverkliga TfS:s idé. Ansvaret faller nu på den enskilde läsaren. Svik inte! TfS behöver Dig och Din insats! Det gäller något så enkelt och så viktigt som att övertala Din kollega att prenumerera på TfS. Den viktigaste vägen att sprida tidskriften är just denna: från lärare till lärare.

På så sätt förverkligas TfS:s idé och mål genom samarbete mellan oss alla: läsare, medarbetare och red.

Tack för i år! Solig sommar! Väl mött igen!

GEOMETRIN I SKOLAN

Av Lektor Leo Ullemar

Matematiken är ett ord med dubbel innebörd. Å ena sidan är matematiken en abstrakt vetenskap, en till stora delar färdig tankebyggnad, vars olika gångar leder till nya allt mera avlägsna våningar av logiska konstruktioner. Å andra sidan är matematiken en metod, som kan tillämpas på problem inom alla områden i den mänskliga verksamheten och som går ut på att förutsättningslöst analysera problemet i fråga, utveckla metoder som tar sikte på det väsentliga just i detta problem och tilllämpar generella formella metoder med avsikt att ekonomisera tänkandet genom användning av symboler och mekaniska operationer med dessa.

Då man vänder blicken på geometrin och ser på denna vetenskap ur nyss beskriven synpunkt, framstår uppbyggnaden av den euklidiska geometrin med sina definitioner, axiom och satser såsom en förebild för en matematisk teori: en logisk konstruktion, som på grundval av några få fakta med hjälp av ett fåtal klart angivna logiska regler bygger upp ett pärlband av satser, allt mera överraskande, medan varje steg strängt grundas på tidigare bevisade satser. Den ursprungliga euklidiska geometrin har ej stått sig vid en närgången granskning enligt den formella logikens principer. Genom omarbetning av axiomsystemet och avlägsnande av allt som vädjar till åskådning från bevisen har dock geometrin kunnat byggas om på ett tillfredsställande sätt.

När man vill överflytta detta mäktiga arv på en ny generation står man inför flera svårlösta problem. Den klassiska euklidiska geometrin skrevs för vuxna och målet vid utformandet var att uttrycka hela teorin så koncist det ur logisk synpunkt var möjligt. Resultatet blev en matematiskt elegant men för nybörjare onekligen svårläst bok. Avsikten med konstruktionerna och bevisstegen förklarades aldrig. Eftersom upptäcktens väg sällan är densamma som bevisets blir det lätt något sterilt över en matematisk bok, där endast resultaten av lång forskarmöda i kortaste möjliga form anges utan antydan om hur upptäckterna gjorts och bevisen undan för undan utarbetats. Då Euklides' Elementa sedan omarbetades i översättningar på olika språk var respekten för den uppfattade matematiska perfektionen förklarligt nog så stor, att verket i tämligen oförändrat skick har kvarstått som lärobok till våra dagar. Den har haft ett enormt inflytande på vår kultur. Matematikens sanning särskilt i dess geometriska form har uppfattats såsom den säkraste kunskap människan överhuvudtaget äger och denna uppbyggnad har fått tjänstgöra som förebild för andra vetenskaper.

Att Euklides' Elementa varken var matematiskt korrekt eller pedagogiskt tillfredsställande förringar inte dess betydelse som första steg i matematikens egentliga utveckling. Då det gäller skolans geometri bör vi dock komma ihåg, att Euklides' Elementa för dagens matematik endast har ett historiskt intresse. Geometrin av i dag byggs upp som en fullständigt abstrakt vetenskap utan några figurer och den är inte bunden vid någon vardaglig tolkning av grundbegreppen och axiomen på den oss omgivande verkligheten, utan är en lära om relationer mellan vissa godtyckligt definierade begrepp, för vilka vissa godtyckligt valda axiom gäller. Vid valet av dessa axiom behöver ingen hänsyn tagas till den fysiska världen eller några andra tillämpningar, endast kraven på motsägelsefrihet, fullständighet och inbördes oberoende är nödvändiga. Endast på detta sätt kan geometrin göras korrekt. De euklidiska bevisen är en ohållbar sammanblandning av åskådning och deduktion. Så länge geometrin uppfattas som en lära om figurer och deras egenskaper kan vi ej befria oss från intuitiva slutsatser och ohållbara resonemang.

Naturligtvis kan vi inte i skolan dra ut konsekvenserna av denna senaste utveckling inom geometrin. Där får vi fortfarande uppfatta geometrin såsom en lära om figurer och deras egenskaper. Men vi får inte heller komma med några uppstyltade anspråk på att arbeta på strängt axiomatiskt grund utan hjälp av åskådning. Så länge vi t. ex. använder förflyttning av figurer som bevismetod bedriver vi inte strängt vetenskaplig geometri utan ett slags åskådligt och praktiskt nyttigt hantverk, där man i möjligaste mån resonerar logiskt utan en exakt angiven uppsättning av axiom. Geometrins existensberättigande i skolorna kan således inte ligga i skolgeometrins matematiska korrekthet utan i geometrins stora användbarhet i praktiken och framför allt den matematiska metoden, som i geometrin klart kommer till uttryck och i vilken geometrin erbjuder rikliga tillfällen till övning.

Därför är det olyckligt att geometristudiet ofta har urartat till en livlös drill av satser och bevis. Respekt för geometrin har det förvisso aldrig saknats, dock förefaller det som om denna respekt hos skolungdomen i flera fall mera har sin rot i geometribokens svårbegriplighet än geometrins odödliga logiska skönhet. Kan det under dessa omständigheter vara ett värdigt mål för en modern geometriundervisning att lära ut geometrins satser och deras bevis och eventuellt en och annan tillämpning med motivering att detta kunskapsstoff hör till allmänbildningen? Vore det inte riktigare att åter få geometrin att leva upp som en ung vetenskap under utveckling lever för sina utövare, då olika metoder för framsteg prövas och inget auktoritativt system är allenarådande, då det fortfarande finns framsteg att göra och då forskarens och upptäcktsresandes ande dominerar över den benhårda formalismen? Hur skall undervisningen i geometri utformas, för att geometrin skall bli levande, fängslande och eggande för den moderna skolungdomen?

Det finns pedagoger som anser, att den euklidiska geometrin med logisk bevisföring saknar livskraft och vill ersätta den med ritningsövningar enligt lärarens anvisningar utan krav på bevis och försök till logisk uppbyggnad av geometrin. Härmed ger man upp försöket att undervisa ungdomen i den matematiska metoden och rycker undan den grund geometriundervisningens existens i skolan vilar på. Det väsentliga i den vetenskapliga geometrin är ju den logiska metoden och inte figurerna. Utan den logiska aspekten återstår det endast linearritning och utantill lästa formler och regler. I denna artikel ämnar jag diskutera några utvägar som kunde leda till att även våra växande skaror av ungdom kan få inblick i den för en matematiker tjusande värld som organiskt växer fram ur premisserna vid det systematiska studiet av geometrin.

Det som i många fall gör studiet av geometrin så svårt för en nybörjare är att han konfronteras med flera olika slags svårigheter på en gång: nya figurer och frågeställningar, en ny metodik, symboliska beteckningar, krav på logisk stringens och koncist uttryckssätt. Botemedlet torde vara att lägga upp undervisningen så, att eleven får övervinna en svårighet i taget och känna sig säker innan han går vidare. Detta är ju meningen med den förberedande geometriundervisningen. Eleverna måste få i lugn och ro bekanta sig med de geometriska figurerna och deras benämningar och vänja sig vid att mäta längder och vinklar, att hantera passare, linjal och gradskiva. På detta sätt lär han sig att hitta i figurer, en förmåga som är absolut nödvändig för förståelsen av all geometri. Här är det frågan om en helt ny värld för eleverna och det tar lång tid för många av dem att vänja sig vid den.

Då den förberedande undervisningen bedrivits en termin, ännu hellre ett helt läsår, kan man försiktigt påbörja den egentliga geometriundervisningen. Det gäller även här att inte gå alltför brådstörtat tillväga. Fortfarande bör varje nytt avsnitt förberedas med empiriska övningar, ritningar och mätningar, gärna tillverkning av modeller av olika slag. Symboliska beteckningar och förkortningar är från början umbärliga, man kan tala om geometriska figurer på helt vanlig svenska med användandet av ett fåtal fackuttryck, symboliska beteckningar hinner man införa då elevernas begreppsbildning är fullbordad.

Nu vill jag återkomma till min utgångspunkt: vi skall undervisa eleverna i levande geometri. Meningen är inte att de lär sig ett visst kvantum av satser och deras bevis, avsikten är att de skall lära sig tänka geometriskt, upptäcka egenskaper hos figurer, kombinera dessa med de tidigare observerade och på detta sätt finna samband mellan olika egenskaper hos samma figur. Därför bör enligt min mening satserna på ett naturligt sätt grupperas kring enkla figurer och centrala frågeställningar och inte behandlas isolerade i en logisk euklidisk kedja.

En geometrilektion skulle enligt denna uppläggning utgöra ett studium av en figur och dess egenskaper. Figuren uppritas och dess egenskaper studeras från början med mätningar och andra empiriska metoder. De första geometriska upptäckterna gjordes av egyptierna och grekerna på detta sätt, de logiska bevisen är ett mera avancerat stadium. Då en ny egenskap hos figuren upptäckts, formuleras den så klart som möjligt av eleverna. Härefter bör eleverna själva få komma med bevisförsök.

Låt oss illustrera metoden på en välkänd sats, triangelns vinkelsumma. Vid början av lektionen får eleverna i sina ritböcker upprita en godtycklig triangel o. med gradskiva mäta dess vinklar. Kan nu vinklarna i en triangel vara hur stora som helst? Finns det något samband mellan vinklarnas storlek? Om en vinkel i en triangel göres större, hur ändras då de övriga? Hur går det med summan av vinklarna? På tavlan samlas resultaten. Räknas nu medelvärdet blir det i allmänhet mycket nära 180°. Det framstår emellertid efter denna förberedelse helt klart för eleverna att man med mätningar aldrig kan nå fullständig säkerhet på storleken av triangelns vinkelsumma. Säkerhet kan endast uppnås med ett logiskt resonemang. Redan detta är en framgång. Många elever betraktar geometrin som en samling av onödiga bevis för »självklara» saker.

Nu bör eleverna få någon vägledning. Skall man nu bevisa att en triangels vinkelsumma är 180°, kan en vinkel på 180° uppritas. Detta bör ha förberetts tidigare, alla bör ha klart för sig att en dylik vinkel erhålles, då vinkelspetsen markeras på en rät linje. Om en triangels vinkelsumma är 180°, måste denna 180°-vinkel kunna uppdelas i tre delar, i tur och ordning lika stora som vinklarna i triangeln. För att underlätta uppdelningen kan vinkeln 180° placeras så, att en vinkel i triangeln redan är en del av vinkeln. Då återstår endast att uppdela återstoden av vinkeln så att delarna blir lika stora som triangelns återstående vinklar.

Då detta resonemang i lugn och ro har genomgåtts under aktiv medverkan av eleverna bör alla få en stund på sig att i sin egen ritbok få pröva olika sätt att placera vinkeln 180° i anslutning till triangeln. De vanligaste alternativen man då får se framgår ur fig. 1.

Den elev, som råkar dra DE parallellt med sidan AB (fig. 1 a), har funnit det kortaste beviset för satsen:

Med figurens beteckningar är enligt konstruktionen $u+t+v=180°$. Eftersom alternatvinklar vid parallella linjer är lika är $u=r$ och $v=s$, således $r+t+s=180°$.

Har figuren ritats i enlighet med fig. 1 b är det visserligen möjligt att genomföra beviset, men detta förutsätter t. ex. en med DE parallell linje genom B. Detta kan läraren visa och bevisa på detta sätt, att $r+s = x+y$ och fullfölja beviset. Eleven bör därefter få i uppdrag att vrida linjen DE kring C tills ett bekvämare läge och bevis kan erhållas.

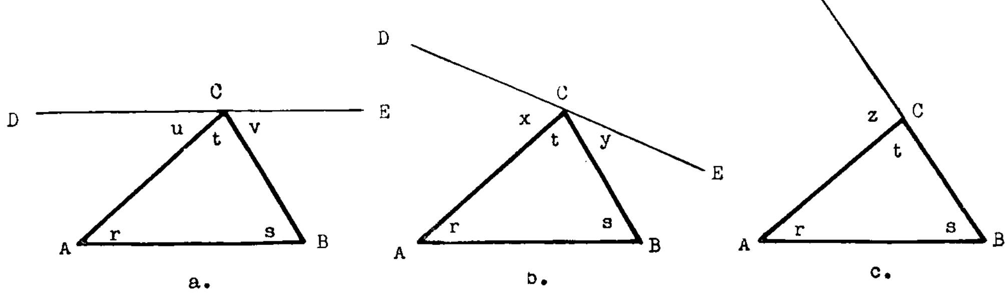


Fig. 1.

I fallet fig. 1 c bör således visas att z = r+s. Vinkeln z bör således uppdelas i två delar, vilka i storlek överensstämmer med vinklarna r och s. Denna uppdelning får eleven söka. Har man en känsla av att detta blir för svårt för eleven, kan man ställa frågan: Om du inom vinkeln z vid CD avsätter en vinkel DCF, som är lika stor som vinkeln r, hurudan riktning får då vinkelbenet CF? Man fullföljer ritningen, eventuellt med hjälp av en gradskiva, och betraktar resultatet. Hur ser det ut att vara? Hur kan detta bevisas? Och äntligen kommer väl upptäckten att CF och BA måste vara parallella. Den sökta uppdelningen av en vinkel på 180° är därmed funnen, triangelns vinkelsumma är 180°.

Skall man nu gå till lärobokens bevis, plugga in det med lärobokens ord och den stelbenta uppläggningen: förutsättning, påstående, bevis, vilket skulle bevisas? Kan det vara ägnat att väcka elevernas intresse för geometrin att när de nu duktigt kämpat sig in i tankegången och förstått sitt eget sätt att steg för steg röja figurens egenskaper pressa sina upptäckter till geometriherbariets torkade mönster.

Hellre då tillämpa satsen på något närliggande problem, t. ex. »Hur stor är vinkelsumman i en fyrhörning?» Upprita, uppmät! Kunde föregående sats utnyttjas vid beviset? Hur? Och åter är tankeverksamheten i rörelse, inlärandet av levande geometri pågår, geometrilektionen är lyckad, stimulerande, lärorik.

Ovanstående illustration gällde en bevisuppgift. Ännu lättare är det att tillämpa metoden på konstruktionsproblem. Den elementära geometrin sysslar med ett fåtal figurer. Det är ofta möjligt att på ovanstående sätt på en gång få fram flera egenskaper hos en figur. Egenskaper, som är väsentliga för figuren och kommer till användning vid fortsatt studium av geometrin kallas satser, formuleras så pregnant som möjligt av eleverna. Härvid har läraren tillfälle att lära eleverna använda korrekt språk och sakliga formuleringar. Korthet bör inte gynnas på klarhetens bekostnad.

På detta sätt växer hela geometrin organiskt fram ur figurerna och ansluter sig på ett naturligt sätt till centrala frågeställningar. Då en viss figur uppträder i samband med ett geometriskt problem, associeras satserna gruppvis kring denna figur, om undervisningen är upplagd enligt ovanstående riktlinjer. Eleverna känner igen figurerna, kommer ihåg sina ansträngningar att bevisa satserna. Dessa äro inte för dem med fet stil tryckta utantilläxor i läroboken, utan välkända egenskaper som kan användas vid fortsatt studium av figurer, i vilka de kända figurerna ingår som delar.

(Forts. å sid. 24)

MULTIPLIKATION OCH DIVISION MED BRÅK

Av Rektor Baltzar Wahlström

Nedanstående artikel, som i huvuddrag nedskrevs långt innan lektor T. Ljunggrens utomordentligt givande föredrag publicerades i decemberhäftet 1956 av TfS, inleddes ursprungligen med en del reflexioner om talbegreppet, begreppen produkt och kvot av två tal, sambandet mellan multiplikation och division (än en gång) samt sättet att introducera *bråktal*. Att de flesta läroboksförfattare (jag själv inte undantagen) i viss utsträckning syndat mot detta, att det är *talen* man räknar med, dvs. på detta stadium utför sifferräkningar med, är ett faktum. Ett par exempel må belysa detta.

I. Hur mycket kostar 3 kg av en vara, om 1 kg kostar 4 kr?

Här finner man olika skrivsätt:

1) Kostnaden $= 3 \cdot 4$ kr $= 12$ kr.
2) » $= 4$ kr $\cdot\ 3$ (utläses 4 kr taget 3 ggr) $= 12$ kr.
3) » $= (4 \cdot 3)$ kr $= 12$ kr (förekommer sporadiskt).
4) » $= 3$ kg $\cdot\ 4$ kr/kg $= 3 \cdot 4$ kr $= 12$ kr.

II. Ytan av en rektangel med sidorna 3 cm och 4 cm skrivs

1) Ytan $= 3 \cdot 4$ cm^2.
2) Ytan $= 3$ cm $\cdot\ 4$ cm $= 3 \cdot 4$ cm$^2 = 12$ cm^2

I ex. I skulle jag föredra skrivsätt nr 3. Nr 2 är direkt förvirrande. Nr 4 används bl. a. i fysiken för att få »dimensioner», »sorten» i resultatet. På folk- och realskolestadiet kan det användas som *kontroll* på att uppställningen är riktig. Här förutsättes dock, att bråk och förkortning är genomgångna. Men *när* skall det införas, när är eleverna mogna för dylikt? Nr 1 är korrekt, om man läser $3 \cdot 4$ (»stycken kronor») inte $3 \cdot$ (4 stycken kronor), även om parentesen (som i 3.) inte är utsatt.

I ex. II. är skrivsättet 3 cm $\cdot$ 4 cm ett gott *kontrollsätt.* Man förbiser lätt, att det man egentligen utför är en beräkning av *antalet ytenheter*, strängt taget godtyckligt valda, således även här en multiplikation av *talen* 3 och 4.

I båda exemplen och liknande är ju huvudsaken, att eleverna kommit fram till att ett *multiplikationsförfarande* är tankemässigt motiverat. Och observera, att multiplikation tillsvidare är ett *mångfaldigande, en upprepad addition av enheter* dvs. de i produkten ingående talen är *hela tal.* Vi *skriver* detta $3 \cdot 4$ eller $4 \cdot 3$. Skrivningen $3 \cdot 4$ är en *produkt.* Talen 3 och 4 är *faktorer.* Att vi sedan *räknar ut* denna produkt, dvs. skriver den med *andra symboler* (siffror) är en sekundär sak.

På liknande sätt kan man resonera om följande uppgift:

»Hur mycket kostar 1 kg, om 6 kg kostar 30 kr?»

Som L. framhåller, och min erfarenhet har sagt mig, att hans åsikt är riktig, frågar sig eleverna: »Hur många gånger skall jag »ta» talet 6 för att få talet 30?» Eller mera »lärt» uttryckt: »Jag skall ta reda på ett tal, som är sådant att *produkten* av det talet och talet 6 blir talet 30». De vet av erfarenhet genom inträning av *multiplikations-*

tabellen, att talet måste vara 5. En annan sak är att man sedan lär dem att *skriva* på följande sätt: Kostnaden är (30 : 6) kr eller $\frac{30}{6}$ kr. Detta är nödvändigt bl. a. därför att man behöver ett skrivsätt för att markera, att man skall använda ett *tekniskt divisionsförfarande*, då det gäller att ta reda på den ena faktorn i produkten (dividenden), då man känner den andra, detta då det gäller större hela tal och senare bråktal.

Svårigheten ligger i dylika problem i *tankegången*, som för fram till uppställningen. Att denna tankegång är svår för många och behöver tränas in ordentligt är säkert. Uppgiften behöver bara ändras till frågan: »Hur mycket kostar 1 kg om 30 kg kostar 6 kr?» för att uppställningssättet blir svårare att finna, försåvitt man inte vill förvandla 6 kr till 600 öre. Eljest förutsätter ju egentligen uppställningen att bråktal är behandlade.

Det skulle onekligen vara frestande att diskutera införandet av begreppet bråktal, närmast då *stambråken* ($\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ osv.). Så mycket kan väl här antydas, att man, då man använder skrivsättet $\frac{1}{5}$ (en femtedel) väl egentligen för in en ny *enhet* vid talskrivningen, med vilken man kan utföra de vanliga *heltals* räkneoperationerna addition (och subtraktion) samt multiplikation (och division). Att man samtidigt klarar ut, att detta skrivsätt inte motsäges av det tidigare använda, 1 : 5 eller $\frac{1}{5}$ (båda »betyder» ju »talet 1 dividerat med talet 5»), torde också vara klart. Men detta skulle föra för långt i detta sammanhang. Det skulle vara tacknämligt, om t. ex. lektor Ljunggren här ville ge oss den exposé över talsystemets utvidgning till bråk, som han av tidsnöd inte kunde redovisa i sitt föredrag.

Det som jag här närmast vill komma fram till är den metodiska gången, då man arbetar sig fram till en *produkt*, i vilken de »nya» talen, bråktalen ingår. Jag förutsätter att bråkbegreppet är avklarat och likaså att t. ex.

I. $3 \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$; att $3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$; att $3 \cdot 1\frac{2}{7} = 3\frac{6}{7}$ osv.

II. $\frac{1}{7}$ *av* 3 är detsamma som 3 : 7, dvs. $= \frac{3}{7}$; att $\frac{2}{7}$ *av* $3 = 2 \cdot (\frac{1}{7}$ *av* $3) = \frac{6}{7}$ osv.

III. $\frac{1}{7}$ *av* $\frac{1}{3} = \frac{1}{21}$; $\frac{1}{7}$ av $\frac{2}{3} = \frac{2}{21}$; $\frac{2}{7}$ av $\frac{2}{3} = \frac{4}{21}$; $\frac{2}{3}$ av $\frac{2}{7} = \frac{4}{21}$

Att man bör demonstrera dessa räkneoperationers »riktighet» med t. ex. »ark» eller kanske bättre »tal-linjer» är klart. Barn behöver *till att börja med* konkreta ting att räkna med. Men man bör inte rygga tillbaka för att här syssla med *talen* som sådana. En abstraktion blir förr eller senare nödvändig. Barnen bör få klart för sig, att de räknar med *tal*.

Innan jag går vidare, måste jag än en gång poängtera, att för barnen en *multiplikation* är en operation med *hela tal* — detta tillsvidare.

Genom operationer med hela tal (och nya enheter) har vi som sagt kommit fram till (se ovan)

dels att $3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$ *dels* att $\frac{2}{7}$ av $3 = \frac{6}{7}$ *dels* att $\frac{2}{7}$ av $\frac{2}{3} = \frac{4}{21}$ *dels* att $\frac{2}{3}$ av $\frac{2}{7} = \frac{4}{21}$

Sedan är väl tiden mogen att gå ett steg vidare.

Hur behandlas fortsättningen i olika räkneläror, då man vill komma fram till hur man multiplicerar ett tal *med* ett bråktal, dvs. beräknar produkten av två faktorer, av vilka den ena eller båda är ett bråktal?

I en framställning gör man kort och gott så, att man *dekreterar* att, sedan man funnit att, $\frac{2}{3}$ av $7 = \frac{6}{7}$ och att $\frac{2}{7}$ av $\frac{2}{3} = \frac{4}{21}$, »av» *ersättes med »gånger».* *Alltså* är $\frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{6}{7}$ o. $\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{21}$

I en annan framställning låter det så här (något modifierat):

1) $4 \cdot 6 = 24.$ — att $4 \cdot 6 = 24$ vet vi förut

2) $8 \cdot 3 = 24.$ — Om vi *multiplicerar* den ena faktorn (4 i ex. 1) med t. ex. 2, och *dividerar* den andra faktorn (6 i ex. 1) med samma tal 2, så får vi samma resultat. Vi får faktorerna 8 och 3 (ex. 2) i st. f. faktorerna 4 och 6.

När faktorerna är bråk, kan man göra på samma sätt.

Hur mycket är $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$?

1) Gör $\frac{2}{3}$ till heltal genom att *multiplicera* med 3. Alltså: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 3 \cdot \frac{2}{3}$

2) Dividera $\frac{4}{5}$ med 3. Alltså: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3 \cdot 5}$

3) Första faktorn $3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$ Alltså: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 2 \cdot \frac{4}{3 . 5}$

4) Flytta 2:an över bråkstrecket. Alltså: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 . 4}{3 . 5} = \frac{8}{15}$

(Och så är vi framme vid den kända regeln)

I en tredje framställning förklaras det hela med användning av en bråktavla, en invecklad procedur, som f. ö. »haltar» betänkligt.

Hur många gånger jag, då jag (i klass 2^5 och 1^4) sysslat med dessa operationer, fått följande frågor, vet jag inte. »De äro legio ity de äro många». Frågorna har varit:

I. Vad *menas* med att *multiplicera* ett tal *med* ett bråk?

II. Om man *multiplicerar* skall väl den uträknade produkten bli *större* än det multiplicerade talet?

III. Vad tjänar det till att vi lär oss det här?

Observera först hur olyckligt fast begreppet *multiplikator* (ibland kallad »gångerfaktor» till skillnad från »sort-faktor») är inpräntat. Det framgår av frågorna I och II[1]).

Jag går så till frågan I. Den kan enligt min mening besvaras på bara ett sätt.

Vi har funnit, att $3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7}$ samt att $\frac{2}{7}$ *av* $3 = \frac{2 . 3}{7} = \frac{6}{7}$

---

1) Att ordet *multiplikator* understundom används i *rubrikerna* i räkneläror, är en metodisk anvisning (för läraren) om vad momentet innehåller, inte något annat.

Vi har därmed funnit *räknetekniken* i de båda tecknade räkneoperationerna. Och vi har funnit, att $3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$ *av* 3.

Om vi nu *låter* »av» betyda »gånger» och *använder samma räkneteknik så kan vi skriva,* att $\frac{2}{7}$ av $3 = \frac{2}{7}\ 3$. Detta, att vi ersätter »av» med »gånger», är en *överenskommelse.* Man *säger* och *skriver* att $\frac{2}{7}$ av $3 = \frac{2}{7} \cdot 3$.

Varför har vi gjort den överenskommelsen?

1) Vi vet »sedan gammalt» att produkten $8 \cdot 7$ = produkten $8 \cdot 7$ (= 56). I en produkt av hela tal kan vi »kasta om faktorernas ordning».

2) Multiplikation är genom det nya skrivsättet inte längre ett *mångfaldigande* (en upprepad addition). Vi kan tala om produkten av talet $\frac{2}{3}$ och talet 7, lika väl som vi kan tala om produkten av talet 7 och talet $\frac{2}{3}$.

3) Produkten $\frac{2}{7} \cdot 3$ = produkten $3 \cdot \frac{2}{7}$. Vi kan (som i 1) kasta om faktorernas ordning.

På liknande sätt *ersätter* vi i de tecknade operationerna $\frac{2}{7}$ av $\frac{2}{3}$ och $\frac{2}{3}$ av $\frac{2}{7}$ »av» med »gånger» och får då, om vi använder den funna *räknetekniken*, att $\frac{2}{7}$ av $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{7 \cdot 3}$, och att $\frac{2}{3}$ av $\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 7}$. Vi har genom *överenskommelse* vunnit, att vi kan tala om *produkten av två bråktal,* och att vi också här kan kasta om faktorernas ordning i den skrivna produkten.

Nu kan frågan II besvaras. Att $\frac{2}{3}$ *av* ett tal är *mindre* än talet, torde (bör) vara ordentligt utrett. Enligt vår överensskommelse, är då också $\frac{2}{3}$ »gånger» ett tal mindre än talet.

Här ges också ett gott tillfälle att resonera om produktens storlek (värde) i jämförelse med de ingående två faktorerna. Om den ena faktorn är ett egentligt bråk, således ett tal som är mindre än talet 1, så blir produkten *mindre* än den andra faktorn — och tvärtom.

Vi kommer så till frågan nr III. »Vilken *nytta* har vi av att kunna detta?» Jag tar ett par exempel:

1. Hur mycket kostar 3 liter av en vara, om 1 liter kostar 4 kr?
2. » » » $\frac{2}{3}$ » » » » » 1 » » $\frac{4}{5}$ kr?

(Jag har i fråga 2 skrivit krontalet som allm. bråk).

I ex 1 har barnens *tankegång* fört dem fram till en *multiplikation* av talen 3 och 4.

Således 3 liter kostar (3 . 4) kr = 12 kr. Kostnaden fås som *produkten* av liter-*talet* och pris-*talet* per liter.

I ex. 2 är väl det vanliga resonemanget — observera att det är en nog så invecklad — låt vara ibland nyttig, »reguladetri-tankegång».

$\frac{1}{3}$ liter kostar $\frac{1}{3}$ av $\frac{4}{5}$ kr

$\frac{2}{3}$ » » $2 \cdot (\frac{1}{3}$ av $\frac{4}{5}$ kr) $= \frac{2}{3}$ av $\frac{4}{5}$ kr $= \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$ kr $= \frac{8}{15}$ kr osv.

Men hur får vi på enklare sätt kostnaden? Jo, genom att precis som i ex. 1, skriva att $\frac{2}{3}$ liter kostar $(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5})$ kr $= \frac{8}{15}$ kr osv. Vi får också här kostnaden såsom *produkten av* liter-*talet* $(\frac{2}{3})$ och pris-*talet* $(\frac{4}{5})$.

Just detta är en viktig sak att kunna, både i skolan och i det »dagliga livet». Eleverna bör vänjas vid att »tänka i hela tal», då de skall bestämma sig för vilket *räknesätt* de skall använda. I ex. 2 bör de vänja sig vid att i st. f. de »krångliga» talen $(\frac{2}{3}$ och $\frac{4}{5})$ tänka sig ett par enkla hela tal. Det så ändrade problemet för dem till att de skall använda en *multiplikation*, teckna och beräkna *produkten av* de två *talen*. Sedan är saken klar. De *ställer upp till uträkning på samma sätt* med de »krångliga» talen.

Man kan invända, att detta är »mekaniserat». Javisst är det så, men det är praktiskt och det är nödvändigt.

Att det som rektor I. Larsson framhållit i sin artikel i december-numret, bör tränas in bl. a. vid procenträkning är t. ex. klart. »Hur mycket är 3 % av 0,4 kg?» bör skrivas att det är (0,03 . 0,4) kg = 0,012 kg osv.

Jag går så över till »division i bråk». I de metodiska anvisningarna för folkskolorna (U 55) sägs bl. a. att man i sjuårig kurs kan, då det gäller division i bråk, i huvudsak inskränka sig till uppgifter, där divisorn är ett helt tal. Jag har frågat mig *varför* denna anvisning kommit till. 1. Är det därför att man ansett att division, där divisorn är ett bråktal, är ett svårt moment, rent *tekniskt* sett? 2) Eller är det därför att *tankegången* som för fram till att ett divisionsförfarande skall användas i dessa fall är svår?

Således: »Hur mycket kostar 1 kg av en vara om $\frac{2}{3}$ kg kostar $\frac{3}{5}$ kr?» (Jag har också här valt de »onaturliga» talen $\frac{2}{3}$ och $\frac{3}{5}$).

Jag lämnar frågorna obesvarade och tar itu med *räknetekniken*. Om det är *den* som är svår, står jag frågande. Som väl är har jag numera inte funnit, att man exklusivt använder »innehållsräkning». Men den har funnits och finns kanske än, helt eller delvis. Och då *blir* det svårt.

Hur låter det här? Vi skall klara ut hur mycket $3 : \frac{2}{5}$ är. (Observera, att för barnen division är »likadelning» — tyvärr —, dvs. division med ett *helt* tal).

$\frac{1}{5}$ ark innehålles i 1 ark 5 gånger

$\frac{1}{5}$ » » i 3 ark $3 \cdot 5$ gånger

$\frac{2}{5}$ » » i 3 ark hälften så många gånger, dvs. $\frac{3 \cdot 5}{2}$ gånger $= 7\frac{1}{2}$ gånger.

(Här »gick» man f. ö. ofta över tal, som var delbara. Således t. ex. $6 : \frac{2}{5}$ osv.)

Vidare: Hur mycket är $\frac{3}{7} : \frac{2}{5}$. Nyss fann vi att $\frac{2}{5}$ ark innehölls i 3 ark $\frac{3 \cdot 5}{2}$ gånger.

Då innehålles $\frac{2}{5}$ ark i $\frac{3}{7}$ ark ett antal gånger, som är 7 gånger mindre än förut.

Det innehålles således $(\frac{1}{7}$ av $\frac{3 \cdot 5}{2})$ gånger dvs. $\frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 2}$ gånger $= \frac{15}{14}$ gånger $= 1\frac{1}{14}$ gånger.

Således är $\frac{3}{7} : \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 2} = \frac{15}{14}$.

Allt detta är ju för de flesta obegripligt och värdelöst. Om t. ex. kvoten blir $\frac{2}{3}$, är det ju språkligt sett också meningslöst att tala om att ett tal innehålles i ett annat $\frac{2}{3}$ gånger.

Ett par andra metoder må också refereras:

I. 1) $\frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$; $\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}$. Bråkets täljare är jämnt delbar med divisorn 2. Då går det lätt.

2) $\frac{1}{3} : 2$. Man förlänger bråket, så att täljaren blir jämnt delbar med 2. Således: $\frac{1}{3} : 2 = \frac{2}{6} : 2 = \frac{1}{6}$.

3) $\frac{6}{7} : \frac{2}{7} = \frac{6}{2} = 3$. (Observera här »innehållsdivisionen»: $\frac{2}{7}$ innehålles i $\frac{6}{7}$ precis 3 gånger.)

4) $\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$. Bråken görs liknämniga genom att det första bråket förlängs med det andras nämnare och tvärtom.

Man får $\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} : \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 5} =$ (genom analogislut; samma nämnare i dividend och divisor; innehållsdivision) $\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$.

Är detta verkligen en rationell och fattbar väg? Mitt svar är nej!

II. (Hittills tyvärr använd bl. a. i den räknebok, i vilken jag medverkat).

1) $\frac{1}{5} : 3 = \frac{1}{3}$ av $5 = \frac{1}{15}$.

2) $5 : \frac{2}{3}$. Vi har rätt att multiplicera dividend och divisor med samma hela tal utan att den uträknade kvotens värde förändras. (Visat tidigare genom analogislut i samband med division av ett tal med ett decimalbråk)

Alltså: $5 : \frac{2}{3} = (3 \cdot 5) : (3 \cdot \frac{2}{3}) = (3 \cdot 5) : 2 = \frac{3 \cdot 5}{2}$

3) $\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = (3 \cdot \frac{5}{7}) : (3 \cdot \frac{2}{3}) = \frac{3 \cdot 5}{7} : 2 = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 7}$

Vi har arbetat oss fram till den vanliga regeln. Är det rationellt och bra? Svar: Nej.

De sista åren jag undervisade om dessa ting (i 2[5] och 1[4]) använde jag (och antagligen många med mig) en helt annan »gång».

Om jag skriver $3 : \frac{2}{5}$ så innebär detta skrivsätt en fråga: »*Med vilket tal skall jag multiplicera* $\frac{2}{5}$ *för att produkten skall bli 3?*»

Man kan faktiskt här nöja sig med att *konstatera* att talet är $3 \cdot \frac{5}{2}$. Ty $3 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5} = 3 \cdot 1 = 3$.

Likaså kan *konstateras* att $\frac{3}{7} : \frac{2}{5} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2}$. Ty $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{7} \cdot 1 = \frac{3}{7}$.

Vi har genom detta konstaterande, byggt på vad division *är* (se ovan), kommit fram till den *tekniska metoden*, att man kan beräkna den tecknade kvoten $\frac{3}{7} : \frac{2}{5}$ genom att multiplicera $\frac{3}{7}$ med »de inverterade värdet» av $\frac{2}{5}$. Och därmed är egentligen »allan rättfärdighet uppfylld».

Emellertid har jag funnit det både nöjsamt och på sitt sätt nyttigt att sedan »ta» det litet grundligare, detta bl. a. med tanke på begreppet »inverterat värde». Ehuru det följande är ett typiskt »cirkelbevis» må det dock refereras.

Vi har grundligt gått igenom vad som menas med produkten av t. ex. två bråktal. Vi väljer bråken $\frac{2}{5}$ och $\frac{5}{2}$. Det senare är det inverterade värdet av det förra. Vi finner att $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} =$ (om förkortning inte tidigare klarats av) $\frac{10}{10} = 1$. Produkten av ett tal och dess inverterade värde befinnes (ev. genom flera undersökningar) vara $= 1$. Här ligger naturligtvis »cirkelbeviset». Ty inverterade värdet av ett tal *a*, är definitionsmässigt kvoten mellan talet 1 och talet *a*, således $1 : a$ eller $\frac{1}{a}$. Men det må vara hänt, bara man ärligt talar om det ologiska i resonemanget.

Om vi då begär: Räkna ut $1 : \frac{2}{5}$, så är saken klar. Kvoten $1 : \frac{2}{5} = \frac{5}{2}$, ty $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$. (Sic!)

Vi går till kvoten: $3 : \frac{2}{5}$. Den är $3 \cdot 1 : \frac{2}{5} =$ (litet vågat kanske) $3 \cdot (1 : \frac{2}{5}) = 3 \cdot \frac{5}{2}$ osv.

Att här ge sig in på en massa »krumbukter» som i de tre refererade metoderna är således helt onödigt, om man klarat ut vad som *menas* med en division. — Att en hel del lärjungar längre fram får nytta av (det definitionsmässigt klara) sambandet, att produkten av ett tal och dess inverterade värde$=1$, är visst. Och det brukar »sitta i».

Att man också här har ett osökt tillfälle att resonera om (det uträknade) värdet av en kvot, jämförd med dividendens värde är ju klart. Om divisorn är mindre än 1, så blir kvotens värde större än dividendens (produktens) — och tvärtom.

Här liksom vid multiplikation får man givetvis frågan: »Vad tjänar det till att vi lär oss detta?»

Jag återknyter till den tidigare uppgiften: »Hur mycket kostar 1 kg om 6 kg kostar 30 kr? Här har barnen genom långvarig övning funnit, att tankegången (»via multiplikation») för till uppställningen att priset är (30 : 6) kr eller $\frac{30}{6}$ kr, dvs. priset erhålles genom att man *dividerar* kostnads-*talet* med kilogram-*talet*. Om uppgiften ändras till att 30 kg kostar 6 kr, blir uppställningen med samma tankegång, att priset är $\frac{6}{30}$ kr = 0,20 kr. Redan detta är en försvåring.

Kontroll: (30 · 0,20) kr = 6 kr.

Om vi ändrar till $\frac{2}{3}$ kg och $\frac{3}{5}$ kr, blir uppställningen alltjämt densamma. Priset är $(\frac{3}{5} : \frac{2}{3})$ kr = (genom den mekaniska sifferräkningstekniken) $\frac{9}{10}$ kr = 0,90 kr.

Att barnen också här skall söka sig fram till räknesättet genom samma *tankegång* som de använder, om talen i exemplet är enkla hela tal, är som sagt något som är viktigt att de lär sig. Ingen torde väl i praktiken resonera via en invecklad reguladetri-tankegång.

Att man senare — då ekvationer eller »uppställningar med frågetecken» genomgåtts får en utomordentlig anknytning multiplikation—division är ju klart. Om 1 kg antas kosta x kr, så får $\frac{2}{3}$ kg kostnaden $(\frac{2}{3} \cdot x)$ kr eller $(x \cdot \frac{2}{3})$ kr, vilken också var $\frac{3}{5}$ kr.

Och ekvationen blir $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{3}{5}$. Här är frågan direkt formulerad. Med vilket tal skall talet $\frac{2}{3}$ multipliceras för att produkten ska bli talet $\frac{3}{5}$

Och den frågan besvaras med att talet måste vara (enligt definition) $x = \frac{3}{5} : \frac{2}{3}$ eller $x = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2}$ eller $x = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5}$ $x = 0{,}9$

Vid lösandet av ekvationen $\frac{2}{3}x = \frac{3}{5}$ kan man också, sedan de *allmänna* metoderna för ekvationslösning behandlats, lämpligen multiplicera båda leden med det inverterade värdet till $\frac{2}{3}$, inte »skaffa bort nämnarna» utan direkt skriva: $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} x = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5}$ $x = \frac{9}{10} = 0{,}9$.

In summa:

Det som oftast halkas över vid »multiplikation i bråk» är vad som *menas* med produkten av ett bråktal och ett annat tal (helt tal eller bråktal). *Tekniken* övas in ordentligt. Sedan faller *divisionstekniken* som en mogen frukt, om sambandet mellan multiplikation och division är utrett och intränat.

I *tillämpningsövningarna*, som väl är det viktigaste, skall barnen övas på att om de i uppgifterna förekommande storheterna har enkla, hela mätetal, avgöra om tankegången (»via multiplikation») för till ett multiplikationsförfarande eller ett divisionsförfarande.

1. Om de *söker produkten* (enligt tankegången), skall de använda multiplikationsförfarande.
2. Om de *känner* produkten (enligt tankegången), skall de använda divisionsförfarande. Det är *produkten* som *skall divideras* (bli dividend, täljare) vid uppställningen.
3. Om talen i uppgifterna är »krångliga» (stora hela tal, bråktal) tänkes de ersatta med enkla hela tal, varvid tankegången lättare för fram till uppställningen (räknesättet) sedan används samma uppställning med de »krångliga» talen.

Recensenterna uttalar sig om TfS:s första årgång

Folkskollärare Gunnar Wahlo i Svensk Skoltidning, nr 3, 19 jan. 1957:

PREMIÄRÅR SOM BÅDAR GOTT

— — — Tidskrift för skolmatematik är en specialtidning för räkneundervisningen. Tidigare har vi inte haft någon publikation som behandlar den grundläggande matematikundervisningen inom småskola — folkskola — realskola (enhetsskola). I första numrets anmälan och i intervju med redaktören motiverades tidningens tillkomst, planer och avsikt. Den vill stimulera läraren till att göra matematikundervisningen roande och trivsam för såväl lärare som elever genom praktiskt-metodiska artiklar och lektionsutkast. Den söker lärarnas medverkan i diskussioner och önskar utbyte av erfarenheter.

Tidningens första årgång ger vid handen att redaktören lyckats utomordentligt väl med att genomföra de intentioner han i sitt första nummer skisserade. Tidningen är vederhäftig och idégivande.

— — — Den moderna undervisningen och dess uppdelning av kursmoment i naturliga ämnesområden ger rika möjligheter att lätta upp matematikundervisningen. Tidskrift för skolmatematik har här en stor och viktig uppgift som idéspruta och metodisk förmedlare. — — —

Initiativet med denna tidskrift för skolmatematik är hedervärt, och den första årgången bådar gott. Lärarnas inställning blir naturligtvis avgörande för tidningens fortsatta utveckling. Den utkommer med fyra nummer per år och kostar 5 kr. En prenumeration rekommenderas varmt.

Folkskollärare Wivi Karlberg i Sveriges Folkskollärarinnors Tidning, nr 48, 1 dec. 1956:

Nu har Tidskrift för skolmatematik påbörjat sitt andra levnadsår. Det kan ju då vara lämpligt att skärskåda första årgångens nummer. Tidskriften utkommer med fyra nummer om året. Prenumerationspriset är mycket lågt: 5 kr. Detta kan man säga nu, när man sett, vad man får för sin femma.

— — —

Som synes är innehållet rikhaltigt. En del av detta väcker ens oppositionslusta men samtidigt ens eftertanke. Man tvingas ta ställning till problemen som diskuteras. Sådant är nyttigt!

— — —

Man kan inte undgå att känna den friska fläkt av entusiasm, som besjälar utgivaren av Tidskrift för skolmatematik. Man blir efter läsningen av vart nummer allt mer och mer positivt inställd till lektor Edvin Ferners företag.

Lektor Torbjörn Ljunggren i Tidning för Sveriges Läroverk, nr 31, 10 nov. 1956:

— — — Prenumerationspriset är, som synes ovan, lågt. Hittills har tidskriften till allra största delen sysslat med pedagogiska och metodiska problem på den allra elementäraste räkneundervisningens område. Terminologiutredningen har ägnats en artikel, tydligen skriven av redaktörens egen hand. Docent Vanäs har gett en kort och givande inblick i den svenska räkneundervisningens historia. Problemet innehållsdivision — delningsdivision har man kommit tillbaka till ett par gånger. I artiklar av professor Husén, docent Magne m. fl. har viktiga och intressanta psykologiska aspekter lagts på matematikmetodikens många problem.

Redaktionen förkunnar nu inför den nya årgången att den avser att vidga kretsen av de problem den vill ägna sig åt. Kanhända skönjer man ett tecken på att så skall bli fallet redan i det som nu presenterats. eftersom på några ställen ekvationer och deras behandling något berörts. Dessutom är det alls intet svalg befäst mellan problemsituationerna på de olika stadierna; efterhand som enhetsskolan tränger fram kommer de nya elevkategorierna att accentuera likheterna. Allt samverkar till det omdömet att det för realskollärare verkligen är välbetänkt att lyssna till de inlägg i den pedagogiska debatten, som kommer från den nu recenserade tidningen. Den fyller ett behov!

Folkskollärare Sven Olsson i Lärartidningen, nr 9, 2 mars 1957:

När Tidskrift för skolmatematik hade utkommit med sitt första nummer, anmäldes detta i denna tidning. Anmälaren uttalade då en förmodan att en prenumerationsfemma inte skulle vara bortkastad. Sedan första årgången nu är fullbordad, kan det konstateras att tidskriften är ytterst värdefull. Den har tillfullo infriat första numrets löften. Där diskuteras metodiska problem av vikt. Vem är inte intresserad av frågeställningen: »Fyra eller fem räknesätt?» Frågan om division penetreras ingående av bl. a. utgivaren. Vi läser om terminologiutredningen, om räknekonstens historia och om Waldorfskolorna. Framstående författare bidrar med artiklar i pedagogik och psykologi.

Första årgångens metodiska och pedagogiska artiklar rör folkskolstadiet, men redan i första numret av andra årgången kommer realskolestadiet med i bilden. Det synes vara av största vikt att lärare i olika skolor och för olika stadier konfronteras med varandras problem. Det torde bli till båtnad för alla parter. Vi måste försöka få räknemetodiken in på sunda och av alla parter godkända vägar. Det kan inte gärna vara en tillfällighet att våra elevers räknefärdighet visat en stadigt nedåtgående kurva samtidigt med att räknemetodiken kraftigt utvecklats. Det är i varje fall ett faktum som ger oss lärare en tankeställare.

Utgivaren är att gratulera till sitt friska initiativ. Det kommer an på lärarna om det ska kunna fullföljas..

De som skänkt

Sem. lärare
G. MALMER
Flanellografen som hjälpmedel vid den första räkneundervisningen.

Lektor
E. FERNER
Multiplikation — uppdelning — division Förslag till lärogång.

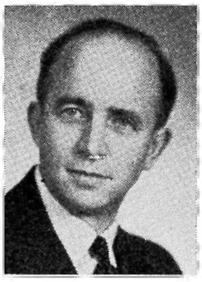
Fil. lic.
I. WERDELIN
Den matematiska begåvningens struktur.

Docent
E. VANÄS
Ur den svenska räkneundervisningens historia.

Fil. lic.
T. KÜNNAPAS
Hur fort adderar en 3:djeklass. i folkskolan två ensiffriga tal?

Professor
T. HUSÉN
Något om barnens kvantitetsvärld vid skolgångens början.

Fil. Dr.
H. HAAGE
Den grundl. räkningens psykologiska o. pedagogiska problem.



Överlärare
S. ÅBERG
Synpunkter på matematikundervisningen.

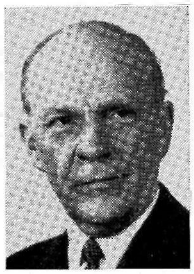
Sem. lärare
S. TIBELL
Vi har roligt, när vi räknar.

Docent
O. MAGNE
Räknefärdigheten.

Sem. lärare
E. ÅHLIN
Att lära eller drilla?

Lektor
A. LARSSON
Vilket är svårast 14—8 eller 13—7?

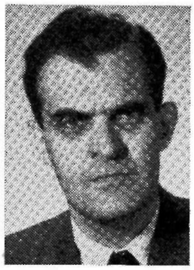
TfS innehåll



Rektor
B. WAHLSTRÖM
Några terminologiska och räknemetodiska reflektioner.

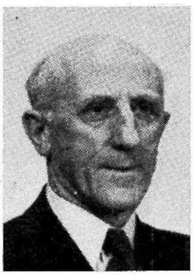
Rektor
B. SVENSSON
Undervisningsmateriel i matematik.

Civilek.
E. LARBERG
Handelsräkning en räknekonstens tillämpning.



Lektor
T. LJUNGGREN
En matematiker ser på låg- och mellanstadiets matematikundervisning.

Rektor
I. LARSSON
Handeln och folkskolans matematikundervisning.



Fil. mag.
O. CARLI
Matematikundervisningen på enhetsskolans högstadium.

Lektor
T. HALL
Matematiken som skön konst.

Folksk. lärare
S. OLSSON
Granskarens syn på matematikläroböckerna.

Lektor
C. HULTMAN
Något om mellanstadiets matemaitk.

Överlärare
S. LINDSTRÖM
Om läroböcker i matematik.

Fil. stud.
A. KYLÉN
Räkna med bråk.

Lektor
L. ULLEMAR
Geometrin i skolan

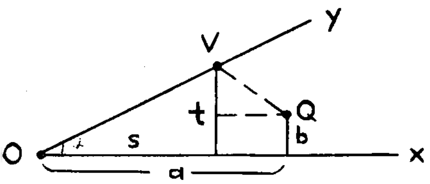
PROBLEM-SPALTEN

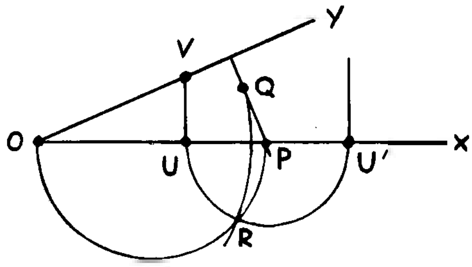
Lösning IV

Kl. Ilsede 105, Krs Peine, Västtyskland
15.3. 1957

Till redaktionen av
Tidskrift för skolmatematik.

Jag sänder Er en lösning till på problemet av den villa som skulle ligga lika långt från källan som från landsvägen. Tanken kom för mig efter att ha sett Sjölanders lösning. Det snillrika i den är ju egentligen inte idén att utnyttja parabelns egenskap utan hans metod att först beräkna och sedan konstruera rotuttrycken. Parabeln själv är helt överflödig. Så jag har bortsett från den.





$\text{tg}\,\alpha = m \quad t = ms \quad (a-s)^2 + (t-b)^2 = t^2 \quad s = a + mb \pm \sqrt{(a+mb)^2 - (a^2+b^2)}$

Konstruktion: Dra en linje genom Q vinkelrätt mot y. Den skär x i P. $OP = a + mb$

Slå upp en halvcirkel med OP som diameter.

$OQ = \sqrt{a^2 + b^2}$ Cirkeln med O till centrum och radien OQ skär halvcirkeln i R.

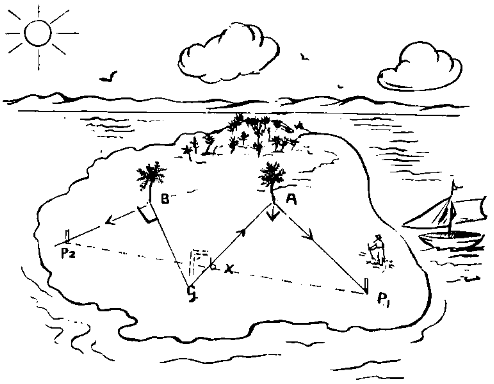
$PR = \sqrt{(a + mb)^2 - (a^2 + b^2)}$

Cirkeln kring P med radien PR skär x i U och U'.

$OU = a + mb - \sqrt{D} \qquad OU' = a + mb + \sqrt{D}$

Linjen genom respektive U och U' vinkelrätt mot x skär y i de sökta punkterna V och V'.

Ludwig Nickel



Att fundera över någon regnig sommarkväll

Strax innan kapten Enskinka lämnade detta jordiska, berättade han för sin vän kapten Blod om en skatt, som han grävt ned på en ö. Kumpanen fick noggrannt besked om var ön låg, — nordlig latitud och — västlig longitud. (Siffrorna för longitud och latitud är här utelämnade för att inte röja hemligheten.) På ön fanns en galge och i närheten av denna två höga träd. Man borde gå från galgen (G) till det högra av träden (A) och sedan ytterligare ett lika långt stycke (AP_1) genom att vid A vika av i rät vinkel åt höger. I P_1 borde man slå ned en påle.

Sedan skulle man även gå från galgen till det andra trädet (B) och från B en sträcka $BP_2 = GB$ genom att vika av i rät vinkel åt vänster. I P_2 skulle man också slå ned en påle. Skatten skulle vara nedgrävd mitt emellan pålarna. Glad i hågen och utan att sörja Enskinka alltför mycket avseglade nu Blod till ön men vid framkomsten fann han till sin ledsnad att galgen totalt försvunnit. Träden fanns däremot kvar. Men nu hör det till historien att kapten Blod i sin ungdom icke utan framgång läst geometri i skolan, och med hjälp av resterna av det kunnandet kunde han om ock med möda klara ut, att om han bara grävde på två ställen var skatten hans. Var skulle han gräva?

Detta problem finns behandlat bl. a. i Gamow's »Ett, två, tre ... oändligheten.» (Bonniers) Gamow löser det med användning av imaginära tal. En orginell lösning! Men är det den enda? Kan vi inte klara upp problemet på annat sätt? Frågan går vidare till läsekretsen.

— — —

»Jag har tränat alla mina trafikpoliser», sa polisintendenten på klubben, »att försöka lägga märke till intressanta detaljer, när det gäller nummer på bilar. Om de gör det, är det ofta till stor hjälp för oss, när det gäller att spåra bilar.»

»Det tror jag nog», sa jag.

»Jag ska berätta ett fall för dig», återtog intendenten. Häromdagen behövde vi få tag i två bilar, som hade varit inblandade i en stöt. Båda hade tresiffriga nummer. Nu hade faktiskt fem av mina poliser sett båda bilarna; ingen kom ihåg bilnumren, men alla hade någonting att berätta.

Polis nr 1: Båda talen är primtal.

Polis nr 2: Ena bilnumret är under 300.

Polis nr 3: Summan av båda numren var 1000.

Polis nr 4: Skillnaden mellan numren var ett tresiffrigt tal, vars tre siffror var olika.

Polis nr 5: De sex siffrorna i de två numren var alla olika.

»Var alla dessa fakta sanna?» frågade jag.

»Nej,» sa intendenten, »en av mina poliser hade huggit i sten. Men du kan själv räkna ut vilka bilnumren var, om jag talar om för dig att om man utesluter den falska uppgiften, så får man kvar ett problem med en enda lösning.»

Och nu frågas: vilka var bilnumren?

HISTORISKA AVD.


TAL,
Om
Mathematiska Vetenskapernas
nytta i allmänna lefvernet;
Hållit för
KONGL. VETENSKAPS ACADEMIEN
Den 19 Octob. 1754.
af
Frih. FREDRIC PALMQVIST,
STOCKHOLM.
Tryckt hos LARS SALVIUS, 1754.

Tal om Mathematiska Vetenskapernas nytta i allmänna lefvernet

Hållet för Kongl. Vetenskaps Academien

Den 19 Octob. 1754

Af

Frih. Fredric Palmqvist, Då Han avlade Præsidium

Mine Herrar! — — — Jag har utvalt mig et ämne, som är vigtigt och så vidsträckt, at det går utom oändeligheter. — —

Hvar och en lärer frivilligt medgifva, at de enfaldigare räkningsmethoderne äro uti det allmänna lefvernet oumbärlige. Ty, om vi icke ägde en säker kunskap uti den delen, som kallas *Vulgar-Aritmetik*, huru skulle en Regering eller dess ombud veta, när en undersåtare ärlagt den skatt, som honom vederbör? Huru skulle Köpare och Säljare kunna med godt samvete skiljas ifrån hvarandra? Huru skulle en Handlande veta tilståndet och nyttan av sin handel, så väl i anseende til honom sjelf, som i anseende til dess fädernesland? Huru skulle en, som styrer och uppehåller många arbetare, kunna döma, hvad fördel hans myror draga til honom och til hans fädernesland? Och ho kan uppräkna alla de förmoner, hvilka denna delen tilskyndar oss? En finge då nästan uppställa en förtekning på våra flästa och angelägnaste förrättningar.

Af denna vetenskapen få vi först lära, at känna figurer til deras art, skaplynnen och förändringar, hvilket förnämligast sker uti *Elementar-* Geometrien. Den kunskapen, vi således inhämtat, tjenar oss sedan, då vi söke längden emellan orter, til hvilka vi ofta ej kunne komma, och då vi hafve nödigt, att veta vidden af en plats eller rymden af en kropp, den vi åfta ej få råkas. Och emedan desse omständigheter icke sällan förekomma, måste de vetenskaper, hvilka därvid fordras, både ofta och ostridigt lägga sin egen nytta å daga. En Regering vil taga Oeconomiska författningar, vil låta Krigshären röras, vil låta en eller flera tracter skattläggas m. m. Men huru kunna de Oeconomiske författningarne til Landets allmänna fördel tagas, utfärdas och verkställas, utom tillräckelig kunskap om orternas belägenhet, hvilka författningarne komma at angå? Huru osäkert är en Krigshärs öde, då han vandrar på obekanta vägar? Han fastnar ofta uti morass, när han tänkte ifrån en högd få sätta de omkringliggande trakter uti lydnad. När han ärnat smyga sig fram emellan högder, möta honom i mörka skogar, djupa kärr och branta bärg, ofta såsom oöfvervinnerliga, men altid såsom uppehållande hinder. Och då han tänkte förekomma sin fiende, blir han ofta sjelf förekommen. När en trakt skal beläggas med skatt, är det icke allenast nödigt, at veta dess godhet och bördighet, utan ock dess vidd. Ty utom denna senare kunskapen, kunde en fast mild och rättrådig Öfverhet ovetandes låta betungade undersåtare qvida och ändteligen kråssas af för mycken last. Til förekommande af sådana olägenheter och olyckor tjenar den delen af Geometrien, som kallas *Landtmäteri*, hvilken del altså lärer pröfvas vara lika nödvändig med sjelfva de omtalta och vigtiga göromålen.

Ehuru ofvan jorden finnas rikedomar til sådant förråd, som vi aldrig kunne uttöma, har likväl människans vidlyftiga behof och kan hända hennes nyfikenhet bragt henne, at sänka sig neder uti jordens djupa gömor, uti mörka och hiskeliga Grufvor. Ifrån dem hämtar hon med möda och ofta med lifsfara dels nödiga ämnen, dels äfven sådana, hvilka kitsla nästan hela det människeliga slägtets håg, och hvilka derigenom blifvit lika nödvändige med sjelfva födan. Och som det vid detta arbetet ständigt är angelägit, at veta den ena ortens belägenhet emot den andra, på det en ej må stiga up i dagen, då en borde sänka sig åt djupet, på det en ej må bryta sig åt Öster, då en borde bryta sig åt Väster, och på det en således ej må nedlägga en odrägelig möda och fåfäng kåstnad på gråsten i stället för gull; så kommer den delen af Geometrien till måtta, som kallas *Marckscheideri.*

De, hvilka uti dessa tider roa eller plåga sig med det svåra Grufve-arbetets drifvande, torde vara ojäfaktiga vittnen, at forna tiders okunnighet eller efterlåtenhet uti denna vetenskapen är orsaken, hvarföre jorden fått behålla mången skatt, och hvarföre mången i denna dag arbetar med föga båtnad.

— — —

Ibland de grenar, som höra til Mathematikens andra stam eller til den *Blandade*, sätter man billigt *Mechaniken* uti det främsta rumet; — — — När vi föranlåtas at uptända, bibehålla eller utsläcka de förödande krigslågor, ligger det gemenligen mycken magt däruppå, at kunna skada fienden fjerran ifrån. Igenom uppmärksamhet kan en väl finna, at en kula går längre, då hon skjutes något up ifrån horizonten, än då hon skjutes med honom parallelt. Men göre vi oss bekante med den deln af Mechaniken, som angår kastade kroppars rörelse, så få vi icke allenast reda på orsaken til det, som igenom förfarenheten var utrönt, utan vi får ock veta huru kastmachinen skal ställas och huru mycken kraft skal användas, så at kulan eller bomben må gå längst, eller, at han må råka på et visst ställe, och där verka antingen med bestrykande och skingrande eller med krossande.

— — —

Änteligen, om jorden är för trång för hennes vetgirughet, så skaffar henne Dioptriken kunskap, at inrätta Tuber, med hvilka hon likasom klifver up til himla-hvalvet, och där betraktar de kroppar, hvilka igenom sin myckenhet, sit ljus, sin vidd och sin rörelse gifva henne et anständigt begrep om deras Mästare, och et säkert begrep om deras sammanhang. Innan vi visste at väl inrätta och betjena oss af dessa redskap, famlade vi uti et tjockt mörker och okunnighet om de flästa himla-ljusen. Vi voro insöfde uti en fåfäng och ensidig tanka om vårt egit höga väsende, för hvars skull vi trodde all ting vara skapade: och den Guden vi dyrkade, fick igenom vår falska inbillning et ganska litet, inskränkt och således för honom mindre anständigt rike. Men sedan en lycklig händelse hade gifvit anledning til Tubers inrättande, och sedan denna vetenskapen fick gjöra oss skickelige, at grundeligen förbättra lyckans gåfva; då tändes vårt förnufts ljus, då växte vår kunskap, då upran och stadgades en mera anständig och vördsam tanka om Uphofsmannen til den stora verlds-systemen och då behöfde vi hålla tankan tilbaka, til dess ögat fått leta väg; på det hon ej måtte förloras eller förvillas uti den oändeliga vidd, som vi sedan trodt omgifva vårt lilla bo.

— — —

Och som jag tror mig kunna vinna mångas bifall, när jag sätter en ibland de största lycksaligheterne däruti, at bo uti beqväma och prydeliga byggnader; så måste den Borgerliga Byggnadskånsten, hvars göromål är, at uppfylla dessa ändamål, vara loflig, ja mer än loflig, när man anser, huru igenom stora och prägtiga byggnader många arbetare födas, och mången främling låckas, at oförmärkt öka Landets penningeståck. Men förenämnde ändamål kunna ej vinnas, om ick Byggmästaren stödjer sina tankesätt och sina anstalter på Mathematiske grunder, såsom utom hvilka sjelfva byggnaden blir utan ordentelighet, utan fasthet, utan varaktighet m. m. Altså finner Mathematiken här et nytt försvar emot alla dem, som oförvägit skulle företaga sig at bestrida henne sitt välförtjenta rum ibland de nyttiga vetenskaper.

— — —

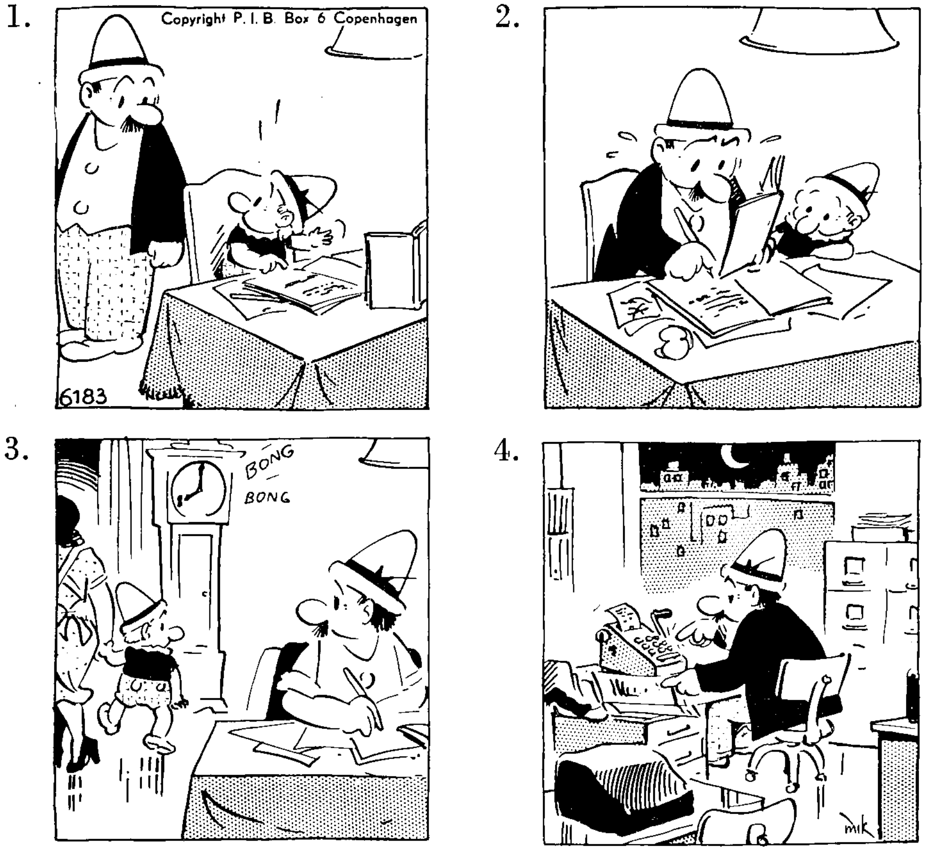
Mine Herrar, jag har således likasom budit til at öfvertyga Eder om sanningar, på hvilka I förut ej tvifladen. Jag har af en händelse råkat föreställa Mathematiken, såsom et träd, uprunnit i stammar och grenar. Jag må därföre til slut nyttja detta tilfällige tanke-spelet, och önska, at vårt gagneliga träd må under Eder öma vård grönskas, stadgas och icke allenast bära mångfaldig, utan ock smakelig frukt, til vårt kära Fäderneslands fromma, och således til Edart och hvar redlig Borgares högsta nöje.

———✶———

GEOMETRIN I SKOLAN . . . *(Forts. fr. sid. 6)*

Arbetet under geometrilektionerna blir på detta sätt en analys av figurerna, en syntes av deras kända och bevisade och empiriskt upptäckta egenskaper, som genom egen tankeverksamhet skall inlemmas i den logiskt bevisade och därför pålitliga kunskapen om figurerna. Men här som i all vetenskap gäller det: det viktigaste är inte att nå målet utan att ärligt och av alla krafter sträva fram mot det ouppnåeliga, en klar, säker och fullständig kunskap. Denna väg i all matematik kräver att eleverna förstår anledningen till varje åtgärd under lektionerna och medverkar aktivt för att föra arbetet vidare. De bör få uppleva, att en geometrilektion är en upptäcktsfärd, full av spänning, en blandning av ansträngning och behaglig känsla efter ett lyckat resultat. Det finns inget dött i geometrin, varje sats kan få liv, bara inte geometrins ande dödas med lärobokens bokstav.

FERDINAND: Hemräkningen klaras



ETT RÄKNEPROBLEM.

Intervju med fru Wilhelmina Unill.

En känd herr folkpensionär i Grönköping har vänt sig till Veckobladet och frågat varför han bara får 174 kr i månaden i pension, ehuru han enligt k. riksdagsbeslut skall lagenligt hava 175 kr.

Grönköpings Veckoblad har låtit frågan gå vidare till fru socialkonsulentskan Vilhelmina Unill, härstädes.

— Kan det måhända för den oinvigde synas nog så egendomligt, säger fru Unill, att pensionärerna inte varje månad får en tolftedel av de 2.100 kronor de äro berättigade till. Är det emellertid icke alls så enkelt, enligt k. pensionsstyrelsens beräkningsgrunder av pensionen är nämligen 1.700 kr s. k. grundpension och återstoden standardhöjning. Att utan vidare slå ihop dessa belopp och sedan dela kan givetvis inte komma ifråga i ett statligt verk som håller å gamla goda byråkratiska traditioner. Nej, måste varje sak delas. Äro emellertid 1.700 och 400 icke i motsats till 2.100, jämnt delbara med 12. Det uppstår därför örestal. Men kan man ju inte gärna i k. pensionsstyrelsen, där miljoner rinner genom fingrarna, syssla med ören. Avkortar man då följaktligen och får då fram 141 + 33 eller just 174, påpekade fru Unill vänligt.

— Men om man gör det tankeexperimentet, att det sammanlagda beloppet delades eller att å andra sidan att öretalen ej kortades av, skulle pensionärerna i båda fallen få 175, framhöll vi.

— Det låter sig icke göra, fastslog fru Unill med bestämdhet.

— Då är det förvisso knepigt uträknat av staten — pensionärerna går ju därigenom förlustiga en krona i månaden. Det kan bli många kronor för statskassan.

— Alldeles icke, protesterade fru Unill. Kommer man visserligen till 174 kr vid uträkning av det pensionärerna skola hava — men äro vi fullt införstådda i att deras pension för år motsvarar 175 kr i månaden. I december kommer därför att jämte ordinarie månadsbelopp tillställas pensionärerna de felande kronorna. Har sedan allt ordnats till det bästa på det sätt k. pensionsstyrelsen vill hava det, slöt fru socialkonsulentskan Unill och började putsa glasögonen till tecken på att intervjun var slut. *(Ur Grönköpings Veckoblad)*

OM LÄROBÖCKER I MATEMATIK FÖR LÅG- OCH MELLANSTADIET

Av Överlärare Sven Lindström

Redaktören för TfS har erbjudit mig att skriva om mina egna läroböcker och deras »historia». Jag vill begagna mig av tillfället för att diskutera några synpunkter på läroboksfrågan.

Under de decennier, som jag ägnat åt författarskap på det här området, har en hel del förändringar vidtagits ifråga om läroböckernas utseende och innehåll.

Trycket göres nu mera spaciöst än förr, och de skräcksidor, som man kan slå upp i en del äldre böcker, förekommer inte längre. Någon enhetlighet ifråga om disposition, gruppering och uppgifternas numrering kan man inte tala om, utan här tillämpar författarna olika system och följer olika smakriktningar.

Illustrationer

I min lärobok »Räkna rätt» lanserade jag metoden att med illustrationer belysa en del matematiska förhållanden. Sedermera har det blivit vanligt att illustrera matematikböckerna. På allra senaste tiden har man emellertid från ett och annat håll ifrågasatt det berättigade i att använda bilder i räkneböcker. De synpunkter, som man då lagt på frågan, har dels varit pedagogiska, dels — och inte minst — ekonomiska.

Liksom i andra fall kan de pedagogiska synpunkterna ordnas utefter en linje, i vars båda ändpunkter två ytterligheter befinner sig. En del bedömare torde vara benägna att anse de mycket rikt illustrerade och kolorerade amerikanska räkneböckerna som idealiska i det här berörda avseendet. Den motsatta ståndpunkten representeras av en och annan lärare, som förklarar: »Jag vill inte se en bild i en räknebok. Matematik är att arbeta med siffror».

Man kan lämpligen skilja på tre slags illustrationer i räkneböckerna

1. bilder som åskådliggör själva talen och olika räkneoperationers karaktär;
2. bilder som vill stimulera arbetet med räkneuppgifter, samlade i en enhetlig grupp eller inom ett »sakområde»;
3. bilder som skall vara ett »glädjemoment» men saknar anknytning till något matematiskt förhållande eller till innehållet över huvud taget.

Naturligtvis kan de bilder, som avses i mom. 3 här ovan, utan saknad avvaras. »Stimuleringsbilderna» (mom. 2) är väl inte heller omistliga. Men de är inte betydelselösa. Hur man ser på den saken, beror emellertid på, vilken grunduppfattning ifråga om den elementära matematikundervisningen, som man ansluter sig till: om man lägger huvudvikten vid användningen av typuppgifter och schabloner, tillämpningen av regler och formler, eller om man utgår ifrån, att matematik på de två lägsta stadierna i första hand är ett *verklighetsstudium*, och att undervisningens syfte är att först *så småningom* lära eleverna att översätta sina verklighetsupplevelser till matematiskt språk och matematisk skrift. I det senare fallet uppskattar man en bra bild, som sätter eleverna in i den situation, varom en grupp räkneuppgifter handlar, t. ex. olika trafikmedel.

Att bilder med ett specifikt matematiskt innehåll inte endast är motiverade utan också nödvändiga, syns mig uppenbart. Men också här göres det invändningar. Det säges ibland, att användningen av bilder skulle kunna medföra, att barnen »inte lär sig att tänka». Tydligen begagnas då ordet »tänka» i den begränsade betydelsen av abstrakt tänkande. För det ojämförligt största antalet elever på låg- och mellanstadiet är emellertid *föremåls- och bildtänkande* den naturliga formen av tänkande i matematiska sammanhang, och det är ur detta konkreta uppfattande, som det abstrakta tänkandet utvecklas.

När man — som understundom sker — vill ge den »åskådliga» undervisningen skulden till den nedgång i mekanisk räknefärdighet, som man i vissa fall ansett sig kunna konstatera, gör man sig skyldig till en feltolkning.

Först och främst kan man inte helt allmänt tala om »åskådlig undervisning». Under den beteckningen döljer sig högst olika tillvägagångssätt. En del av det som kallas »åskådlig undervisning» är rena hugskott och missuppfattningar. Även i gynnsammare fall avser man en undervisning, som endast innebär en åskådlig *demonstration* av ett visst förhållande. Men för flertalet barn blir en sådan form av åskådlighet otillräcklig. Någon åskådning hinner aldrig uppstå. Därför är det helt naturligt, att en mera direkt mekanisk undervisning kan ge bättre »resultat» än en ofullständig åskådlig undervisning. Detta i all synnerhet, när man med »resultat» avser mekanisk räknefärdighet.

Men också när den åskådliga undervisningen är av den art, att den gör skäl för sitt namn, kan det hända att resultatet blir mindre tillfredsställande. Det måste givetvis bli fallet, om man försummar att fullfölja den åskådliga undervisningen genom en planmässig inlärning. Det borde inte vara så svårt att rent teoretiskt komma tillrätta med problemet åskådlighet — mekanisering. Förhållandet kan väl enkelt uttryckas så, att det är nödvändigt att mekaniskt lära in sådant som eleverna fullt begriper. Men det är olyckligt att låta dem mekaniskt lära in sådant, som de *inte* begriper. Att det senare på grund av olika praktiska omständigheter ibland kan te sig som en nödfallsutväg, är en annan sak.

En konsekvent matematisk åskådningsundervisning, som gradvis går över i direkt inlärande, kan inte försämra undervisningens resultat. Att förutsätta det vore lika orimligt som att påstå, att användningen av reliefer, kartor, filmer, planscher osv. skulle försämra den geografiska kunskapen.

Språket

Ifråga om språkbehandlingen tillät jag mig att alltifrån början bryta mot det som på den tiden kunde betecknas som tradition. I äldre läroböcker hade språket oftast fått sin prägel av det allra tyngsta skriftspråket. Sålunda använde författarna med förkärlek de fast sammansatta verbformerna, t. ex: En moder inköpte och utdelade till sina fyra barn — — —. Ibland hittar man rent kuriösa formuleringar som t. ex. följande: Avståndet mellan två städer är 14 mil och skall av Bolin tillryggaläggas, åkande på cykel — — —.

Personligen är jag inte glad varken åt de alltför koncentrerade eller de alltför ordrika räkneproblemen. Det är inte roligt med uppgifter av typen: H.m. kostar kaffet pr kg, om 3 kg kostar 44,40 kr? Lite mera konkretion bör man ha rätt att kosta på sig.

Någon kanske anser, att moderna räkneböcker ibland har en något för sagig framställning. Vad som är det rätta lagom, kan naturligtvis bli en fråga om tycke och smak.

Det stora debattämnet i det här sammanhanget är frågan om matematikens speciella språk, dess betydelse i den elementära undervisningen och tidpunkten för dess införande.

För mig ter det sig uppenbart, att de matematiska termerna inte underlättar inlärandet av olika räkneoperationers innebörd. Ingen elev förstår bättre divisionsförfarandet genom att lära in ordet division. Då är beskrivande svenska uttryck att föredra, t. ex. »att ta bort samma tal gång på gång» (=»innehållsdivision») och »att dela ett tal i lika stora delar» (=»delningsdivision»). Att man senare bör övergå till de matematiska termerna, beror på att de är bekvämare att använda, och att åtminstone en del av dem hör till det vanliga språkbruket.

Nu ivrar man på en del håll för en enhetlig terminologi, därför att elever, som flyttar från en lärare till en annan, beredes extra svårigheter, om terminologien inte är densamma. Betydelsen härav bör inte överdrivas, och den måste under alla förhållanden vägas mot likriktningens faror. Men även om man vill sträva efter större enhetlighet ifråga om de matematiska uttryckssätten, så är ju därmed inte sagt, att man så tidigt som möjligt bör ta till de speciella termerna. Det borde gå att komma överens om vettiga åskådliga uttryck för lågstadiet och sedan gradvis införa den speciella terminologien.

Räkneproblemens sakinnehåll

Räkneundervisningen blir verkligt praktisk, om eleverna får lösa problem, som de har något behov av att lösa, t. ex. kostnaderna för skolresan eller klassfesten, eller någon kostnadsberäkning om en slöjdmodell.

Man kan försöka att ge en bättre verklighetsprägel åt lärobokens räkneuppgifter genom att samla dem i olika »sakområden». Det är naturligtvis lättare att göra det, sedan eleverna behärskar tekniken för samtliga räkneoperationer, än om man är hänvisad till att låta alla problem bli additionsuppgifter. Men det måste också beaktas, att ett räkneproblem inte blir verklighetsbetonat, bara därför att det handlar om verkliga ting. De verkliga förhållanden man rör sig med, bör komma in i naturliga sammanhang. Uppgifter som har karaktären av »räknenötter» kan väl godtas, även om de inte skulle ha verklighetsprägel.

Arbetsanvisningar

Det fanns en tid, då man ansåg att en räknebok endast skulle vara en exempelsamling. Sedan har det blivit vanligt att läroböckerna innehåller arbetsanvisningar, som formellt riktar sig till eleverna, men som också kan betraktas som metodiska anvisningar för läraren. Man brukar motivera dem på olika sätt. Ett och annat tips torde kunna vara av värde för läraren, i all synnerhet för yngre lärare. Anvisningarna bör underlätta grupparbete och individuell undervisning. Även då läraren bedriver klassundervisning, kan anvisningarna ha värde, t. ex. vid repetitioner och för elever som varit frånvarande och har möjlighet att på egen hand eller med relativt liten hjälp från lärarens sida inhämta det som förlorats under frånvaron.

Om den metodik, som tillämpas i läroböckerna, vore naturligtvis åtskilligt att säga. Men det skulle föra för långt att ta upp den saken i det här sammanhanget.

ÖVERLÄGGNINGSMETODEN . . . *(Forts fr. sid. 29)*

I alla de klasser, där jag har använt denna »överläggningsmetod», har den tydligt mottagits positivt. Det beror väl på att vid varje uträkningstillfälle ser klassen en ekvation (se *2a—2d*!) som tillhör den lätta gruppen *(1)* — den komplicerade bild som den ohöljda ekvationen skulle bjuda, och som kanske skulle skrämma, (avbländа) har försvunnit.

Det är klart att denna metod har en mycket begränsad räckvidd. Man kan med den bara attackera ekvationer »med x på ett ställe». Dess eventuella betydelse så som jag ser det, är att sätta eleverna i den rätta sinnesstämningen: »Det här är ju någonting som jag verkligen kan». Efter någon enda lektion bör den ersättas med mera mäktiga metoder. Man måste nämligen minnas de hårda orden: »De pedagogiska trick, som på ett konstlat sätt stimulerar intresset, har sällan långvariga verkningar».

Lektor Torbjörn Ljunggren:

»ÖVERLÄGGNINGSMETODEN»

Vid den kurs i matematikmetodik, som förra sommaren hölls i Jönköping, råkade jag under en av debatterna nämna något om det sätt, jag själv använder vid den första presentationen av ekvationer och lösningen av dessa. Tillvägagångssättet är på intet sätt orginellt, men på deltagarna i debatten verkade det, som om det inte vore allom bekant, och av denna tidnings redaktör har jag därför uppmanats att skriva några rader därom.

Det är en allmän föreställning att ekvationsmetoden för att lösa problem är något alldeles särskilt svårt. I en intervju för några månader sedan sade sålunda en matematiklärare om undervisningen i klass 1^3: »Vi måste börja direkt med ekvationsläran, som är oerhört besvärlig.» Nu är det ju ett faktum, att en alldeles bergsäker väg att göra en sak svår för eleverna är att säga, att den är det. Enligt min uppfattning kan man snarare få det därhän att just hanterandet av ekvationer uppfattas som en lättnad av eleverna. I synnerhet de allra enklaste ekvationerna:

$x + 3 = 8$; $7x = 42$; $\frac{x}{12} = 8$; *(1)* betraktas av barnen som omedelbart lösbara, likaså de problem, de motsvarar. Tag nu ett mera komplicerat exempel:

$$\frac{\frac{x+3}{4} - 3}{8} - 2 = 4$$

Problemet som föranlett ekvationen må vi lämna åsido! Denna ekvation ser ju onekligen mera otillgänglig ut för ett ungt öga. Men tag då och lägg över det som ser så ruskigt ut, d. v. s. dubbelbråket, med vad som kan finnas till hands, klassboken t. ex. Då ser klassen följande bild: $\text{||||||||||||} - 2 = 4$; *(2a)* och frågan lyder: Vad är det som står bakom klassboken? Svaret: 6 ges omedelbart och beredvilligt av eleverna.

Ja, men då så! Då vet vi att: $$\frac{\frac{x+3}{4} - 3}{8} = 6$$

o. med klassboken kan man för barnen presentera följande bild: $\frac{\text{||||||||||||||}}{8} = 6$ *(2b)*

Fråga: Vad är det för ett tal som jag nu har gömt? Svar: 48. Alltså vet klassen att: $\frac{x+3}{4} - 3 = 48.$

Gömspelets nästa etapp leder till: $\text{||||||||||||} - 3 = 48.$ *(2c)* och klassen meddelar beredvilligt, att nu är det gömda talet 51: $\frac{x+3}{4} = 51.$

Nu räcker säkert handen till för att gömma täljaren: $\frac{\text{||||||||||||}}{4} = 51$ *(2d)* och alla inser att täljaren har värdet 204. Den ekvation som nu återstår tillhör de enklaste:

$$x + 3 = 204 \quad \text{och ger} \quad x = 201.$$

(Forts. å sid. 28)

ATT RÄKNA MED BRÅK

En undersökning över feltyper och lösningsmetoder vid räkning med allmänna bråk

Av Fil. stud. Jan-Axel Kylén

I denna undersökning har jag velat få svar på tre frågor.

1. Hur stor är förmågan att räkna med bråk på olika gymnasielinjer och olika klassnivåer?
2. Vilka är de vanligaste feltyperna, och hur fördelar de sig mellan bättre och sämre räknare?
3. Vilka lösningsmetoder ger för olika problem de bästa resultaten?

Det prov som användes bestod av följande tio uppgifter:

1. $3\frac{3}{4} : 2\frac{5}{8}$ *2.* $4\frac{3}{8} - 2\frac{5}{6}$ *3.* $2\frac{1}{4} + 1\frac{5}{14}$

4. $\frac{1}{9} \cdot 5\frac{1}{4}$ *5.* $1 - \dfrac{1 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}}$ *6.* $3\frac{1}{4} - \frac{1}{3} : 1\frac{1}{2}$

7. $\frac{2}{3} + \dfrac{\frac{1}{2}\left(1\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{2}{3}}$ *8.* $\dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{9}{10}} + 2\frac{1}{3}$ *9.* $\dfrac{\frac{5}{7}}{1\frac{4}{21}} \cdot 1\frac{3}{4}$

10. $1\frac{5}{6} - \frac{3}{8}\left(1\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right)$

De har utvalts bland 18 preliminära uppgifter så att eleverna under en lektionstimme skulle hinna räkna de tal de kunna klara.

Provet har körts i Östra Real i Stockholm på 292 elever fördelade på 10 klasser enligt tabell 1.

1. Medeltalet för samtliga elever var 4,9 (SD = 2,8). De olika klassernas resultat står i tabell 1. Vid en signifikansanalys av skillnaderna mellan medeltalen visade det sig att förmågan att lösa dessa problem hade ökat i reallinjens och allmänna linjens ringar jämfört med 3^5. Däremot var det ingen skillnad mellan latinlinjen och 3^5.

Tab. 1.

klass:	n	M	SD
3^5	129	4,0	2,6
1^4	79	5,8	2,4
2^4	84	5,6	2,9
L I—II	57	3,8	2,1
A I—II	47	6,3	2,3
R I—II	59	7,1	2,3

Av gymnasielinjerna visade sig reallinjen bäst och latinlinjen sämst. Allmänna linjen var något sämre än reallinjen. Det kan erinras om att reallinjen och allmänna linjen på detta stadium har i stort sett samma kurs, medan latinlinjen har en betydligt kortare.

2. För att kunna undersöka feltyperna definierades först de 18 feltypsgrupperna i tabell 2. Procenttalen till höger anger hur stor del av de 960 talen som hänförts till respektive feltyp (Q—S är ju egentligen inga feltyper).

Tab. **2.** Definitioner för 18 feltyper, samt deras procentuella fördelning.

A.	*Överföringsfel.* Man har av skilda orsaker uppfattat siffrorna felaktigt eller uppfattat dem rätt, men därefter skrivit ned dem felaktigt.	8,2 %
B.	Fel, som berott på, att efter utförda delberäkningar, *någon fas glömts*	1,9 %
C.	Siffror eller tecken har blivit så *slarvigt skrivna* eller tal *oredigt uppställda*, så att detta har ansetts vara orsak till felet	1,4 %
D.	Termen »*rena räknefel*» har använts för att beteckna sådana fel, som förekommer vid heltalsberäkningar med de fyra räknesätten, även om dessa äro delar av bråk	12,6 %
E.	*Felaktig minsta gemensamma nämnare.* Hit räknades ej som fel, om nämnaren var onödigt stor, endast om den var oanvändbar	0,2 %
F.	*Adderat eller subtraherat nämnarna vid addition eller subtraktion.*	1,7 %
G.	*Försvunnen nämnare.* På liknande sätt som vid ekvationslösning har nämnarna strukits eller försvunnit.	10,9 %
H.	*Fel vid förlängning.* Hit räknades också, om två termer satts på gemensamt bråkstreck, utan att de gjorts liknämniga	3,4 %
J.	Fel *vid förkortning*	1,9 %
K.	Felaktig förvandling mellan blandat och oegentligt bråk, *förvandlingsfel.*	4,9 %
L.	*Felaktig multiplikation med allmänt bråk*	8,1 %
M.	*Felaktig invertering vid division*	7,5 %
N.	*Behandlat termer före faktorer.*	15,5 %
O.	*Fel vid* borttagande av *parantes* eller vid inmultiplikation i parentes	1,5 %
P.	*Ej förkortat svaret*, eller svarat i oegentligt bråk	20,3 %
Q.	*Ej löst talet*	—
R.	*Odefinierbara fel*	—
S.	*Övriga fel*	—
		100,0 %

Första fel, som gjorts i ett tal, har kodats, och övriga har lämnats utan avseende.

Feltyperna A—P sammanslogs till åtta större grupper, därmed vanns större överskådlighet av materialet. Tabell 3 visar dessa åtta grupper rangordnade och med procentuell fördelning.

Tab. 3. De åtta större feltypsgrupperna. Inom parentes förutvarande grupper. Procentuell fördelning mellan de 960 felaktiga talen.

Rang	Feltyp		
1.	VIII.	Ej förkortat svaret. (P)	20,3 %
2.	VII.	Manipulationsfel, oberoende av allmänna bråk. (N—O)	17,0 %
3.	VI.	Faktorbehandlingsfel. (L—M)	15,6 %
4.	II.	Rena räknefel. (D—E)	12,8 %
5.	III	Fel med nämnare. (F—G)	12,6 %
6.	I.	Överföringsfel. (A—C)	11,5 %
7.	IV.	Förlängnings- och förkortningsfel. (H—J)	5,3 %
8.	V.	Förvandlingsfel. (K)	4,9 %
		Summa	100,0 %

Det vanligaste felet var således att svaret ej givits i enklast möjliga form. Resultatet kommer knappast som en överraskning. Vid den jämförelse som gjorts mellan de 27 % bästa och 27 % sämsta eleverna, visade de bättre, som sig bör, att de klarade av den här saken bättre än de sämre. Felet är inte så allvarligt, eftersom väl knappast någon i praktiken skulle ge sig till att bjuda på en 3/12-tårtbit, eller betala på spårvagnen med 36/72 kronor. Däremot kan det bli ganska otympligt med sådana svar om de skall användas för nya beräkningar.

Betydligt mer värt att observera är att 17 % av felen var s. k. manipulationsfel. Redan innan eleverna kommer in i läroverk skall de känna till att faktorer skall behandlas före termer. Har det kanske inte repeterats tillräckligt mycket? De bättre och sämre räknarna står för ungefär 50 % var av dess fel.

Som nummer tre, med 15,6 %, kommer faktorbehandlingsfelen. De bättre räknarna är här signifikant bättre än de sämre. Felet måste bero på fullständig brist på förståelse för bråkens natur.

De rena räknefelen står för 12,8 % av felen. De bättre räknarna står här för något större del av felen än de sämre. Det kan tänkas att de ansett sig så skickliga, att de slarvat med räkningarna.

Praktiskt taget lika många fel har gjorts med nämnarna. På denna feltyp föreligger den mest markanta skillnaden till de bättre räknarnas förmån. Förväxling har antagligen skett med ekvationslösning där nämnarna »försvinner» efter förlängning.

Överföringsfelen står för 11,5 % av felen. Det ligger nära till hands att jämföra dem med fel som beror på läs- och skrivsvårigheter. De bättre räknarna är i detta fall inte bättre än de sämre. Skriv- och lässvårigheter behöver ju inte heller ha med den ursprungliga förmågan att göra.

Förlängnings-, förkortnings- och förvandlingsfelen måste alla bero på bristande förståelse för bråkets natur. Frekvenserna för de bättre räknarna är för dessa fel så låg att signifikansanalysen är osäker, det tycks således som om de klarat sig ifrån dem bra.

3. Under arbetet med lösningsmetoderna delades problemen upp i 1 och 4, 2 och 3 samt 5 t. o. m. 10.

Vid beräkning av talen 1 och 4 visade det sig ge bästa resultatet om förkortning skedde på ett tidigt stadium. De elever hade klart misslyckats, som gjort liknämnigt på något sätt, både vid multiplikation och division.

Analys av talen 2 och 3 gav vid handen, att det är olämpligt att vid behandling av termer förvandla dem till oegentligt bråk.

Det kan finnas en mycket enkel förklaring till dessa resultat. De större talen vid utebliven förkortning och vid förvandling till oegentligt bråk, lämnade fler tillfällen till rena räknefel. Likadant med det större antalet operationer som fordrades när faktorerna skulle göras liknämniga.

De sex sista talen i provet användes först för att undersöka vilken betydelse kontinuiteten i uppställningen hade. Tre grader av kontinuitet uppställdes:

1. Kontinuerlig uppställning utan några som helst delberäkningar på sidan om.
2. Kontinuerlig uppställning med delberäkningar.
3. Endast delberäkningar.

Kontinuerlig räkning visade sig ge ett något bättre resultat än delberäkningar.

Vidare undersöktes om man, när man har tre faktorer, lämpligen först bör beräkna produkten av två och sedan multiplicera med den tredje, eller om alla skall behandlas samtidigt. Det visade sig inte spela någon roll.

Om man utför inmultiplicering eller ej i talen 7 och 10 gör också detsamma.

Dessa resultat visar den aktuella prestationen med en viss lösningsmetod. Man får emellertid inte glömma den betydelse som en lösningsmetod kan ha för fortsatta studier. Å andra sidan ger behärskning av ett räknesätt eleven en sådan stinulans att han angriper nya problem på ett aktivare sätt.

FROMMA ÖNSKEMÅL BETRÄFFANDE MATEMATIKUNDERVISNINGEN

Varje matematiskt problem kan lösas efter nedanstående schema:

I. Den principiella tankegången utredes och formuleras.
II. De i problemet givna uppgifterna uppställas.
III. Uppgifterna enligt punkt II sammanställas enligt den princip, som framkommit enligt punkt I.
IV. Det enligt punkt III tecknade talet uträknas, varvid sorterna behandlas som algebraiska uttryck.

Så skrev jag i en artikel, som infördes i nr 3 av TfS förra året. I fortsättningen diskuterades huvudsakligen punkt IV. Där fanns ju något nästan chockerande, något som också diskuterats av andra i TfS. Diskussionen har dock rört sig inom ett litet område, och enligt min mening har själva huvudfrågan ej berörts. Tyngdpunkten i det förslag, jag framfört, ligger i punkterna I—III.

Många lärare, kanske de flesta, anser redan nu, att man i huvudsak följer de principer, som angetts i punkterna I—III. Gör man verkligen det? Är det inte så, att man går igenom ett avsnitt ungefär så här: Först lite huvudräkning, sedan en mängd exempel med mekanisk räkning och till slut några problem med tillämpad räkning, och då känner barnen — lite dunkelt visserligen, men i alla fall — att man skall använda det räknesätt, man nyss tränat. Och följden? — När man räknat addition, så kommer det här problemet: Kalle väger 30 kg. Pelle väger 5 kg. mer än Kalle. Hur mycket väger de tillsammans? Alla lärare har mött svaret — 35 kg. — Tankegången har helt enkelt varit: Det är addition. Eleverna har inte konsekvent tvingats till att söka förstå själva problemet, och resultatet är nedslående. Hur borde det ha varit? Jag hänvisar till punkterna ovan.

I. Man lägger ihop Kalles vikt och Pelles vikt.
II. Kalle väger 30 kg.
Pelle » 30 kg. + 5 kg.
III. 30 kg. + 30 kg. + 5 kg. =

Uträkningen, punkt IV, kan lyckligtvis endast utföras på ett sätt — och sorten, kg., behandlas faktiskt som en algebraisk funktion.

Nu kommer jag med *ett* fromt önskemål:

Det borde officiellt fastslås, att den elev, som lyckats formulera punkt I ungefär som enligt ovan, skulle premieras på något sätt, även om slutresultatet på grund av räkne- eller slarvfel blir felaktigt. Denna elev har dock löst själva problemet, och däri ligger det väsentliga. En elev, som kan lösa problem, är för samhället minst lika värdefull som en annan elev, som på provräkningar snyggt och ordentligt kan räkna alla obenämnda tal och på så sätt få ett godkänt betyg. Ta en funderare över hur t. ex. en skrivning i realexamen bedömes!

Att konsekvent följa 4-punktsschemat innebär både fördelar och nackdelar. Det tar tid att arbeta på det viset. Men fördelarna är många. Några skall beröras.

1. Man tvingar eleverna att — *bortseende från alla sifferuppgifter* — söka se själva problemet, fullfölja och formulera en tankegång. Och den vägen kan och skall man slå in på så snart undervisningen i matematik sätter in. Min kätterska åsikt är, att vi för närvarande har för mycket diffust fladdrande inom den elementära matematikundervisningen.

Att fordra, att små barn skall fullfölja och formulera en tankegång låter kanske hårt. Jag tror, att vi har för litet övning på det området. Och — underligt nog — för *små* krav. Det går helt säkert att lära barn att tänka, och när det gäller att formulera tankarna, så har vi modersmålsundervisningen. Det är inte alls förbjudet att i tal eller skrift formulera tankar från matematikens område under modersmålstimmarna!

2. När det gäller att i skrift formulera en tankegång, har vi en alldeles utomordentlig medhjälpare i lättjan. Det gäller här att vara så lat som möjligt, att skriva så litet som möjligt. Och mer och mer kommer punkt I att närma sig idealet — den matematiska formeln. Utan att ordet »ekvation» nämnes, kommer varje riktigt formulerad tankegång att innebära ett uppställande av en ekvation.

3. När tiden sedan är mogen för att verkligen göra bekantskap med ekvationen, då blir det för eleverna ungefär som när jultomten tappar masken och visar sig vara en kär bekant.

Den glädje man erfar, när man möter en kär bekant, var det. Jag tror, att den lätta maskering, som de matematiska problemen nu får, alltför sällan genomskådas, om eleverna inte lärt sig att själva formulera lösningen. Vi rör oss dock inte med så stort antal problemtyper, att vi inte oupphörligen stöter på samma figurer, lätt maskerade. Tyvärr måste jag erkänna, att jag själv i oklokt nit rusar i väg i räkneläran eller rättare sagt i den exempelsamling, vi använder i matematik, för att vara säker på att »hinna kursen». Men någon gång då och då låter jag eleverna själva leta reda på likartade problem, och det är roligt att se, hur det klarnar för de *svagaste* eleverna, när de känner igen exempeltypen.

Det finns ingenting nytt i vad som sagts här. *Ett* fromt önskemål har framlagts. Det finns fler att komma med.

Det borde genom statens försorg finnas tillräckliga ekonomiska resurser till att låta kompetenta personer verkligen fundera igenom hela undervisningsmetodiken i matematik. Då skulle även mina inlägg kunna noggrant genomtänkas. Och prövas. Kanske fann man då, att det vore en god hjälp, om man hade en verklig *lärobok* i matematik, där framför allt typexempel noggrant behandlades. En sådan lärobok med typexempel kunde följa en elev genom alla skolår. Den kunde vara upplagd efter lösbladssystem och kompletteras efter hand som nya problemställningar behandlas.

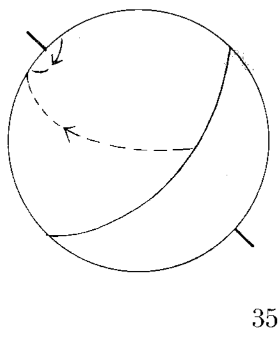
Och så en trossak. Om man anser, att man kan följa punkterna I—III, då är jag övertygad om att punkt IV åker med som nödvändigt och följdriktigt komplement för att göra matematikundervisningen riktig och levande.

Staffan Åberg

—★—

Problem:

Hur långt kan egentligen en person som bor på ekvatorn gå åt nordväst? Jordens omkrets är 4000 mil.



Tidskrift

FÖR SKOLMATEMATIK

ÅRGÅNG 3 · nr 1 mars 1958 nr 2 maj 1958
nr 3 okt. 1958 nr 4 dec. 1958

Tidskriften, som håller det låga priset för att kunna nå alla lärare!

Tidskriften, som måste nå alla lärare, för att kunna hålla det låga priset!

TfS — den billiga tidskriften med det rika innehållet!

Du behöver TfS — TfS behöver Dig!

TfS behöver — och är värd — Ditt stöd!

Övertala Din kollega att prenumerera!

TIDSKRIFT FÖR SKOLMATEMATIK
Jungmansgatan 1, Karlstad. Tel. 163 13
utkommer med 4 nr per år

Prenumeration Kr. 5: —
Postgironummer 49 02 82

Redaktör och ansvarig utgivare:
Lektor Edvin Ferner

KARLSTAD 1957
Nya Wermlands-Tidningens Boktryckeri