

分辨率优化的混合 WENO 格式

郭元¹, 田奇¹, 梁贤^{1,*}, 李新亮^{2,3}

(1. 北方民族大学数学与信息科学学院, 宁夏 银川 750021; 2. 中国科学院大学工程科学学院, 北京 100049)

3. 中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室, 北京 100190)

摘要: 为提高有限差分格式的分辨率, 利用傅里叶分析对 WENO 格式进行色散及耗散优化, 并给出优化的线性权重. 用优化后的 WENO 格式与保单调格式(MP)进行加权混合, 得到新的加权混合 WENO 格式(H-WENO). 通过一维激波管问题、Shu-Osher 问题及二维双 Mach 反射问题及 R-T 不稳定性问题对格式进行数值测试. 结果显示, 新格式具有强健的激波捕捉能力和对小尺度波结构的高分辨率, 与原 WENO 格式相比改进明显.

关键词: 混合格式; 数值耗散; 色散; 保单调; 优化

中图分类号: O354.5

文献标识码: A

DOI: 10.19596/j.cnki.1001-246x.7664

0 引言

随着直接数值模拟(DNS)及大涡模拟(LES)等复杂流场精细模拟^[1]的广泛开展, 高精度、高分辨率数值方法越来越受到重视^[2]. 对于可压缩湍流, 流场中既包含了多尺度脉动又包含间断. 由于可压缩湍流精细模拟的需求驱动, 高分辨率、低耗散的高精度激波捕捉格式研究成为了计算流体力学研究的热点方向之一.

近年来以加权基本无振荡格式(Weighted Essential Non-Oscillation Scheme, WENO)为代表的高精度激波捕捉格式得到了广泛地应用^[3]. 该格式采用子模板加权思想, 在光滑区逼近高精度高分辨率的线性格式, 而在间断区利用较低精度的子模板格式尽量抑制数值振荡. Jiang 和 Shu 分析并改进了 Liu 等人提出的 WENO 格式^[4], 并使用了一种新的光滑度量因子计算方法, 提升了计算效率及分辨率^[5]. 该格式具有非常好的鲁棒性, 在可压缩湍流的精细模拟中发挥了重要作用. WENO-JS 格式的不足是数值耗散仍有些偏大, 近年来学者对其进行了各种改进, Henrick 等人指出 WENO-JS 格式的光滑度量因子未能在极值点处提高 WENO 格式的精度^[6], 提出一映射函数对格式进行优化, 提升了格式极值点处的精度. Borges 等人^[7]设计出一种新的 WENO 光滑度量因子, 通过修改 WENO 格式的权重, 构造了 WENO-Z 格式. 与经典的 WENO 格式相比, WENO-Z 格式能够更快地得到 WENO 格式的理想权重. 通过对 WENO-JS 增加一组额外的迎风基架点并且选择模板的最优权重, Martin 等人发展了一种 WENO-SYMO 格式^[8], 使得 WENO 格式的分辨率和宽带耗散性质得到了改善. 除了优化之外, 混合格式(Hybrid Scheme)也是减少格式耗散的一种方法^[9-10], 该方法基于激波识别器, 利用切换或者加权方法, 将两种格式进行混合使用, 在光滑区使用无耗散的中心格式或低耗散的线性格式, 在非光滑区使用 WENO 格式等鲁棒性强的激波捕捉格式.

除了 WENO 格式之外, 保单调格式(monotonicity-preserving scheme, MP)也是近年来发展的高精度激波捕捉格式之一. Suresh 和 Huynh 发展了一类高精度保单调差分格式^[11]. He 等人^[12]将 MP 思想与 Fu 与 Ma 的迎风紧致格式^[13]相结合, 构造了保单调的迎风紧致格式(MP-UCD). Li 等人^[14]对 MP 格式的高阶线性格式部分进行优化, 构造出了分辨率更高的优化保单调格式(OMP). 数值算例表明, 与 WENO 格式相比, MP 格式数值耗散更低, 且计算效率更高^[12,14]; 但在处理强间断的鲁棒性上, MP 格式弱于 WENO 格式. 通过加权混合, 将 WENO 与 MP 格式二者优势结合, 也是一种好思路.

收稿日期: 2017-03-23; 修回日期: 2017-05-25

基金项目: 国家自然科学基金(11472010, 91441103, 11372330, 11472278)、国家重点研发计划(2016YFA0401200)、民用飞机专项科研(MJ-2015-F-028)及科学挑战专题项目(JCKY2016212A501)资助

作者简介: 郭元(1993-), 男, 硕士, 从事高精度数值方法研究, E-mail: szwdgy9806@163.com

* 通讯作者: 梁贤, E-mail: gavin.liang@featech.com.cn

1 数值格式的描述

1.1 基本方程

考虑如下的标量守恒律方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

离散点 $\{x_j\}$ 为均匀网格点, 网格间距为 h . 方程半离散的守恒型差分格式可写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{h}(\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}) = 0. \quad (2)$$

其中 $\hat{f}_{j+1/2}$ 为数值通量.

在本文中, 时间方向采用 3 阶 TVD Runge-Kutta 法^[3, 11].

1.2 WENO 格式的优化

下面基于傅里叶分析方法对 WENO 格式进行优化. 用 WENO7 格式为例, 考虑在均匀网格下在 x_j 处的一阶导数 $\partial f/\partial x$, 令 $f_{j+1/2}$ 是 f_j 的插值函数

$$f_{j+1/2} = \alpha_0 \left(-\frac{3}{12} f_{j-3} + \frac{13}{12} f_{j-2} - \frac{23}{12} f_{j-1} + \frac{25}{12} f_j \right) + \alpha_1 \left(\frac{1}{12} f_{j-2} - \frac{5}{12} f_{j-1} + \frac{13}{12} f_j + \frac{3}{12} f_{j+1} \right) + \alpha_2 \left(-\frac{1}{12} f_{j-1} + \frac{7}{12} f_j + \frac{7}{12} f_{j+1} - \frac{1}{12} f_{j+2} \right) + \alpha_3 \left(\frac{3}{12} f_j + \frac{13}{12} f_{j+1} - \frac{5}{12} f_{j+2} + \frac{1}{12} f_{j+3} \right). \quad (3)$$

函数 f 的傅里叶变换和逆变换为

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx; \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk. \quad (4)$$

其中 \tilde{f} 是 f 的傅里叶逆变换.

对 (3) 式的两边作傅里叶变换

$$ik \tilde{f} \cong \left(\frac{-i}{\Delta x} \sum_{l=-4}^3 a_l e^{ikx_j} \right) \tilde{f}. \quad (5)$$

通过比较方程 (5) 两边, 得到

$$\bar{k} = \frac{-i}{\Delta x} \sum_{l=-4}^3 a_l e^{ikx_j}. \quad (6)$$

其中 $\alpha = k\Delta x$ 是波数, $\bar{k} = k_r + ik_i$ 称为修正波数.

联合截断泰勒级数和傅里叶级数方法来决定系数 α_0 、 α_1 、 α_2 和 α_3 . 将方程展开, 得到系数需要满足以下等式

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \\ -12\alpha_0 + 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ 8\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_3 = 0, \end{cases} \quad (7)$$

选择 α_0 作为自由参数. 令 α_0 为积分误差 E 的优化值

$$E = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left| ik\Delta x - \bar{k} \right|^2 d(k) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left| ik\Delta x - \sum_{j=-4}^3 \alpha_j e^{ijk} \right|^2 dk. \quad (8)$$

满足条件 $\partial E/\partial \alpha_j = 0, j = -4, \dots, 3$.

从图 1 的 (a)、(b) 中通过色散耗散分析, 使得具有较小的耗散和可控的色散. 在本文取 $\alpha_0 = 1/1000$. 得到经过优化后的 WENO7 格式具有更小的耗散误差, 则新的权重为 $C_0 = 1/1000, C_1 = 205/1000, C_2 = 597/1000, C_3 = 197/1000$. 同理将优化后的 WENO5 格式的权重取为 $C_0 = 1/100, C_1 = 51/100, C_2 = 48/100$.

1.3 保单调格式

采用 Suresh 和 Huynh 的保单调技术^[11], 将 MP 限制器加入 5 阶及 7 阶精度的线性格式中, 以此提高格

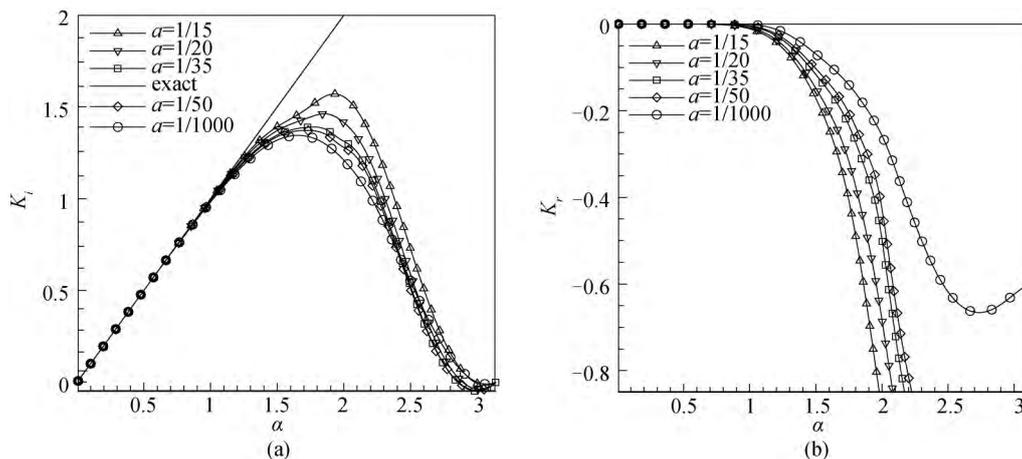


图 1 WENO7 差分格式的修正波数 (a) 色散误差; (b) 耗散误差
Fig. 1 Modified wavenumber of WENO7 scheme

式的激波捕捉能力. 保单调的限制过程为 在光滑区域时不改变数值格式的原始通量, 这样才能保持格式的精度. 在间断点附近时, 限制器发生作用对原始通量进行改变, 使得格式的单调性能保持. 格式的定义及细节见文献 [11].

2 加权混合格式

在这一节, 将优化的 WENO 格式和同阶精度 MP 格式进行加权混合. 使得混合格式在具有较小数值耗散的同时又有良好的激波捕捉能力. 混合格式的通量表达式为

$$f_{j+1/2}^{H-WENO} = \sigma_{j+1/2} f_{j+1/2}^{WENO} + (1 - \sigma_{j+1/2}) f_{j+1/2}^{MP} \quad (9)$$

其中 $\sigma_{j+1/2}$ 为模板的光滑度量函数, 其取值随流场的变化而变化, 取值范围为 0 到 1 之间的值. 使用如下开关函数 [15]

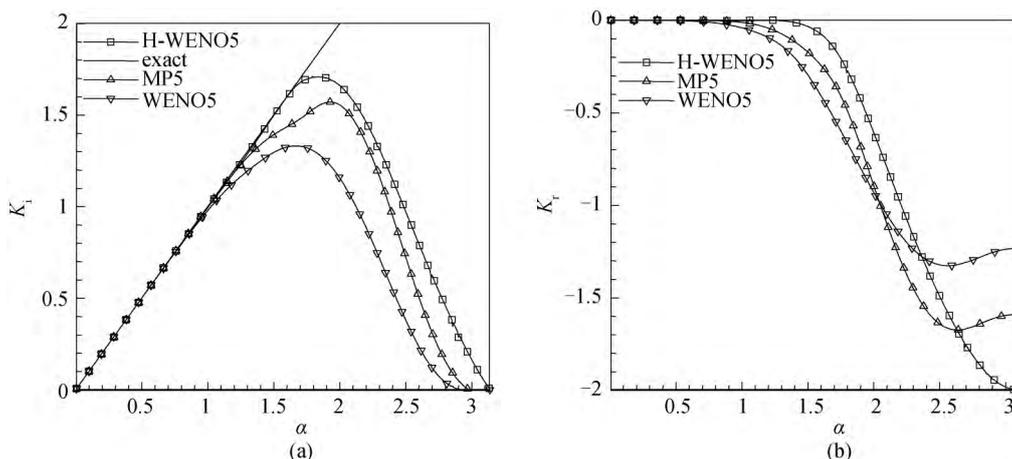
$$\sigma_{j+1/2} = s^q (q + 1 - qs) \quad (10)$$

其中

$$s = 1 - \frac{\bar{\omega}_m \bar{\omega}_s}{D_m D_s}, \quad \bar{\omega}_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_m + \gamma_s}, \quad \gamma_k = \frac{D_k}{(\beta_k + \varepsilon)^p}, \quad k = m, s \quad (11)$$

β_m, β_s 是 WENO 格式其中两个子模板的光滑度量因子, 具体参数详细定义及取值可参照文献 [15].

下面用非线性谱分析方法 [15] 对混合格式进行谱分析. 为了对比, 画出了 MP5 格式、WENO5 和 WENO7 格式的色散耗散曲线, 如图 2 所示.



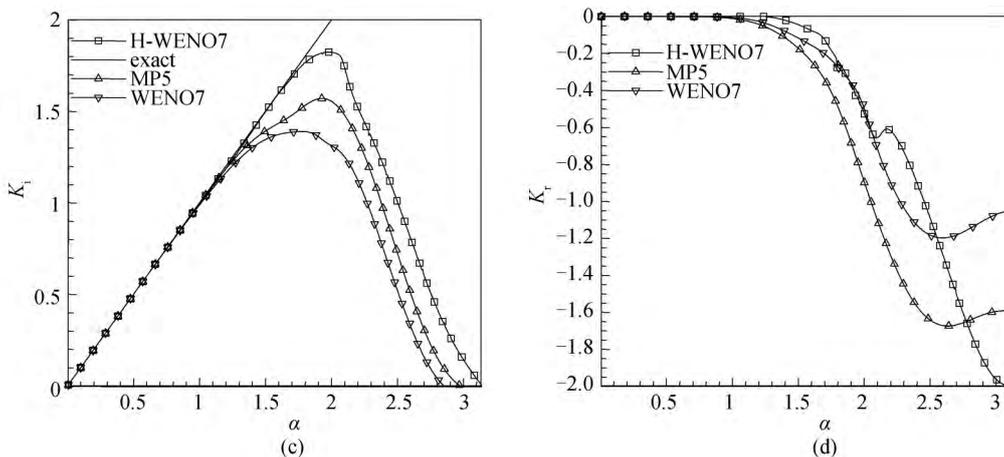


图 2 H-WENO ,MP5 ,WENO5 及 WENO7 格式的谱性质: (a) 色散误差; (b) 耗散误差; (c) 色散误差; (d) 耗散误差
 Fig. 2 Spectral property of (a) H-WENO , (b) MP5 , (c) WENO5 and (d) WENO7 schemes

从图 2 对比可以看出新构造的加权混合格式 H-WENO5、H-WENO7 的色散及耗散误差要明显优于原 WENO5、WENO7 格式,且拥有更宽广的波数分辨范围。从图 2 (b) 和 (d) 可以看出,新格式在计算关注的中-低波数区具有更低的耗散,有利于物理波的分辨;新格式在极高波数区具有更大耗散,有利于抑制高频非物理振荡。

为了更好地说明问题,对混合格式进行精度测试。假设 $u = \tanh(x)$, $x \in [-1, 1]$, 那么 $\partial u / \partial x = 1 - \tanh(x)^2$ 。新构造的混合格式及 WENO7 格式的精度测试结果见下表。

表 1 H-WENO7 格式与 WENO7 格式测试精度
 Table 1 Testing accuracy of H-WENO7 scheme and WENO7 scheme

Scheme	N	L_1 order	L_∞ order	Scheme	N	L_1 order	L_∞ order
WENO7	20	6.863 9	6.501 9	H-WENO7	20	6.669 2	6.501 1
	40	6.897 9	6.606 1		40	6.677 9	6.606 0
	80	6.926 9	6.716 0		80	6.819 6	6.675 7
	160	6.987 8	6.939 4		160	6.926 5	6.713 6

3 数值测试

3.1 一维问题

3.1.1 Sod 激波管问题

初始时给定一个物理间断面,考虑此间断面在计算中的时间发展。其控制方程为一维的 Euler 方程组,初始条件为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1), & \text{if } x < 0.5, \\ (0.125, 0, 0.1), & \text{if } x \geq 0.5. \end{cases} \quad (12)$$

最终的结果是在计算区间 $x \in [0, 1]$ 上,计算结束时间为 $t = 0.14$ 。

从图 3 中 Sod 问题的密度分布中可以看出新构造的混合格式都要稍微优于原来的 WENO 格式。

3.1.2 Shu-Osher 问题

一维 Shu-Osher 是一移动着的马赫数为 3 的激波和一密度波相互作用的问题^[16]。Shu-Osher 问题的控制方程为一维 Euler 方程,求解区域为 $x \in [0, 10]$,初始条件为

$$\begin{cases} \rho = 3.857\ 143, u = 2.629\ 369, p = 10.333\ 333, & \text{as } x < 1, \\ \rho = 1 + 0.2\sin(5x), u = 0, p = 1, & \text{as } x \geq 1. \end{cases} \quad (13)$$

所有计算结果的结束时间都为 $t = 1.8$,用了 200 个网格点。由于精确解未知,本文中用 WENO7 格式在

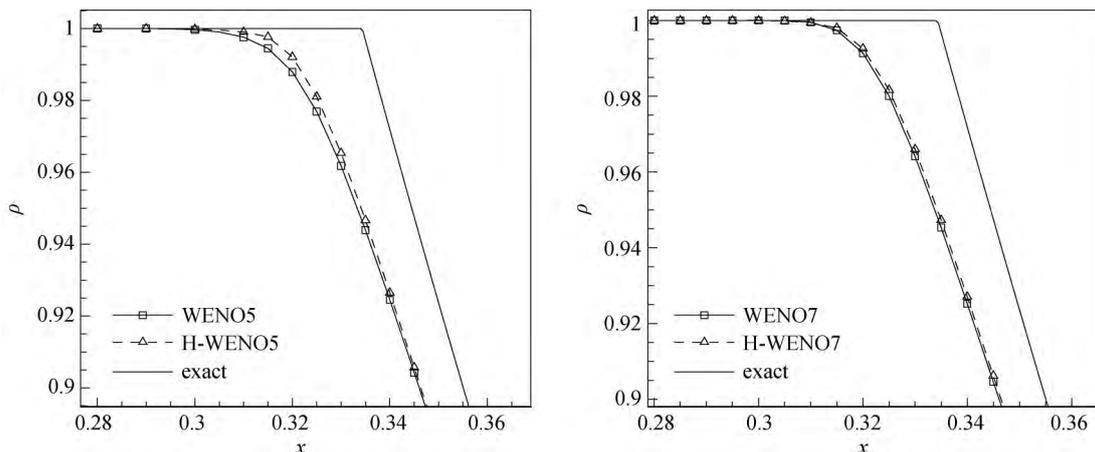


图 3 Sod 问题, $N=200$, $t=0.14$ 时刻密度分布
 Fig. 3 Sod problem, $N=200$ density distribution at $t=0.14$

4 000 个网格点下的解作为 Shu-Osher 问题的“精确解”。

图 4 呈现出了在 200 个网格点下 H-WENO 格式和 WENO 格式的对比. 从图 4 可以清楚地看出混合格式 H-WENO 具有更好的数值结果. 特别地在激波后的高波数时. 由于新格式较小的耗散误差, 使得 H-WENO 的分辨率比原 WENO 更好.

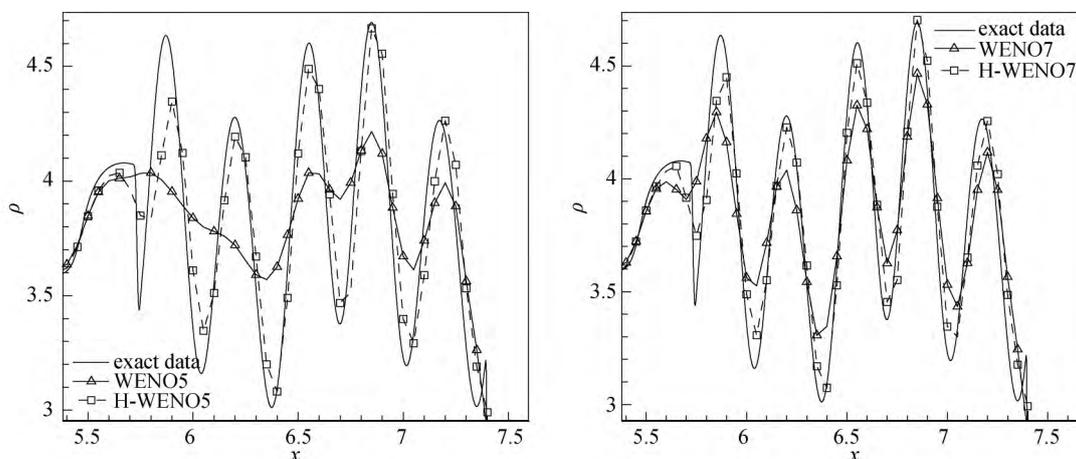


图 4 Shu-Osher 问题, $t=1.8$ 时刻密度分布, $N=200$
 Fig. 4 Shu-Osher problems density distribution at $t=1.8$, $N=200$

3.2 二维问题

3.2.1 双马赫反射问题

控制方程为二维 Euler 方程, 计算区域为 $[0, 4] \times [0, 1]$. 一块板位于计算区域的底部, 其初始位置在 $x=1/6$. 初始条件为: 一个位于平板左侧、与 x 轴夹角为 60° 、马赫数 $M=10$ 的激波打到平板上向右移动^[17]. 对底部边界, 从 $x=0$ 到 $x=1/6$ 的区域通常被认为是激波前初始值. x 轴上 $x>1/6$ 的区域取为反射边界, 计算区域的左侧和右侧为入流和出流边界条件, 上边界上的流动值用来描述马赫数 $M=10$ 激波的具体运动.

图 5 画出了新混合格式 H-WENO 和原 WENO 格式计算双马赫反射问题局部放大图的密度等值线. 通过对比我们可以发现在小尺度结构时 H-WENO 格式的分辨率更高, H-WENO 格式产生更多的旋涡结构. 从格式分辨率来看 H-WENO 格式的分辨率明显要优于 WENO 格式.

3.2.2 R-T 不稳定性问题

不同密度两种流体, 在交界面处, 上面的重流体加速向下流入轻流体就会产生 R-T 不稳定性^[18]. 随着轻流体的气泡上升到周围沉重流体和沉重液体落入轻流体的尖峰, 研究表明在这一过程中会产生许多小尺度

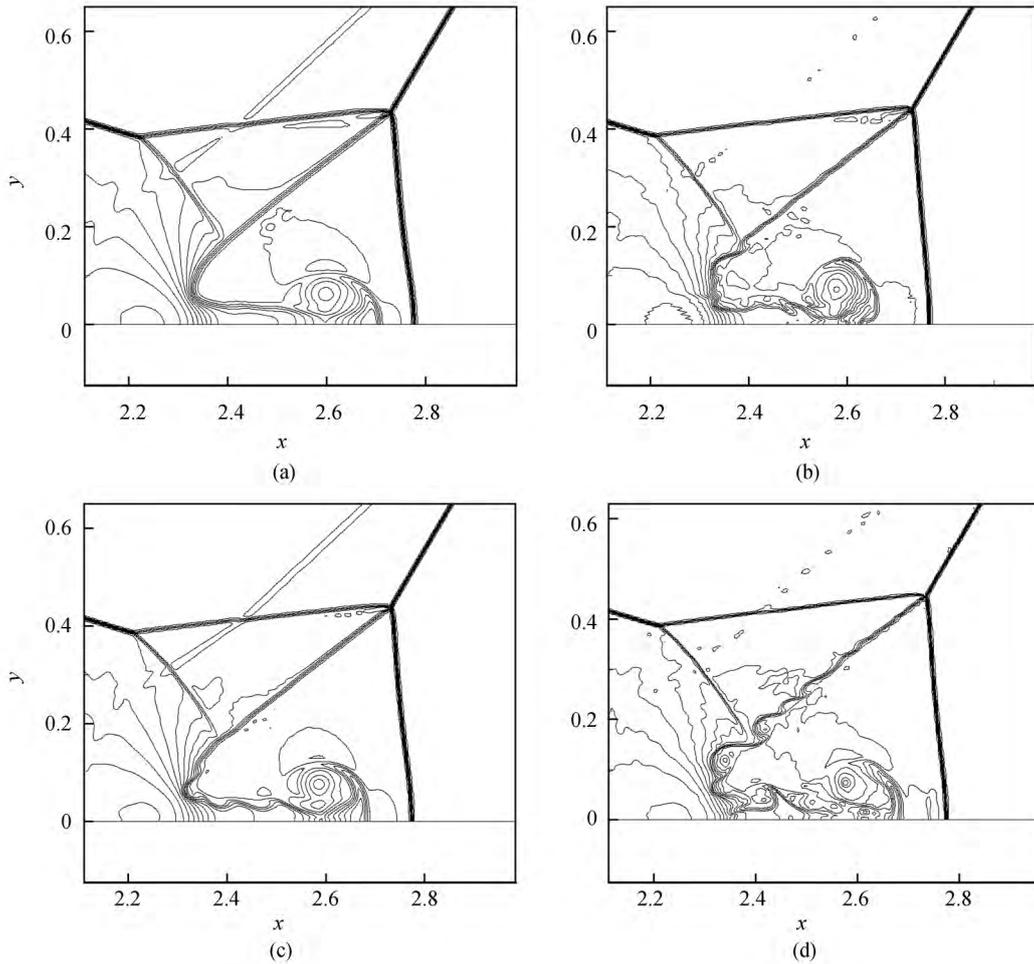


图 5 双马赫反射问题 $t=0.2$ 时刻密度分布 961×241 网格, 局部放大图(从 1.731 到 20.92 共 30 条等值线)

(a) WENO5; (b) H-WENO5; (c) WENO7; (d) H-WENO7

Fig. 5 Double-Mach reflection density profile at $t=0.2$ on a 961×241 grid

(a) WENO5; (b) H-WENO5; (c) WENO7; (d) H-WENO7

结构. 因此 R-T 不稳定性是检验数值结果高分辨率的一个很好的算例.

问题描述如下: 计算区域为 $[0, 1/4] \times [0, 1]$, 初始时刻两不同密度流体的交界面位于 $y = 1/2$ 处. 密度 $\rho = 2$ 的重流体在交界面的上面, 密度 $\rho = 1$ 的轻流体在交界面的下方, 交界面的加速度方向沿 y 轴的正方向. 压力 p 在交界面处连续. 并且给沿 y 方向的速度分量一个小扰动. 初始条件为

$$\begin{cases} \rho = 2, & u = 0, & p = 2y + 1, & v = -0.025c \cos(8\pi x), & 0 \leq y \leq 1/2, \\ \rho = 1, & u = 0, & p = y + 3/2, & v = -0.025c \cos(8\pi x), & 1/2 \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (14)$$

其中 c 是声速, $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$, 比热比 $\gamma = 5/3$. 源项 ρ 加入到右边的第三个等式, 并且 ρv 添加到 Euler 方程的第 4 个等式. 结果的计算时间都为 $t = 1.95$.

图 6 为在 121×481 网格尺度下, 新构造的混合格式 H-WENO5、H-WENO7 分别与 WENO5、WENO7 格式计算的密度等值线图. 从图中我们可以清晰地看出 H-WENO 格式密度等值线图上的剪切层产生了更多小涡流结构, 说明 H-WENO 格式在小尺度波时拥有更小的数值耗散, 也表明 H-WENO 格式的分辨率要比原 WENO 格式更优.

4 结论

我们首先通过优化 WENO 格式, 给出了经过优化的线性权重, 使得格式具有更小的数值耗散误差, 接着

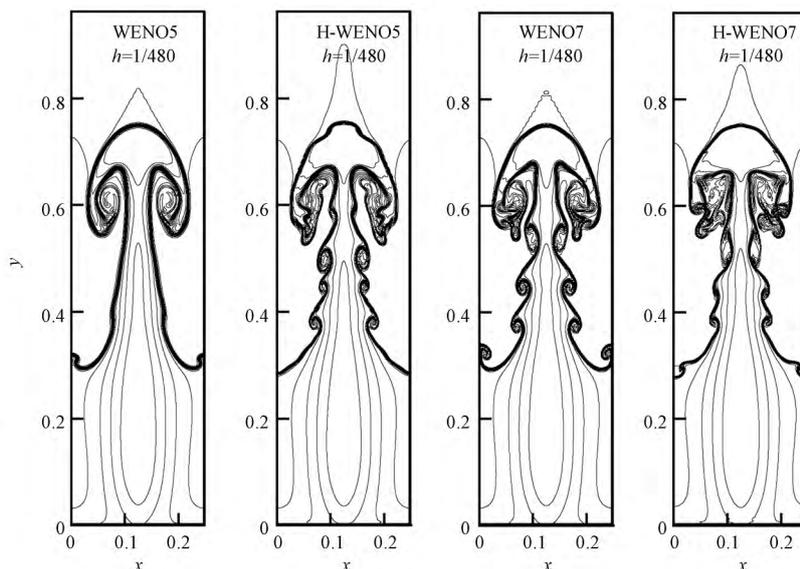


图 6 R-T 不稳定性问题 121×481 网格 $t = 1.95$ 时刻密度分布(从 0.952 269 到 2.145 89 共 15 条等值线)

(a) WENO5; (b) H-WENO5; (c) WENO7; (d) H-WENO7

Fig. 6 R-T instability problem 121×481 grid point density distribution at $t = 1.95$

(a) WENO5; (b) H-WENO5; (c) WENO7; (d) H-WENO7

将优化后的 WENO 格式与保单调格式进行加权混合,得到新的加权混合格式 H-WENO. 用非线性谱分析发现新格式在计算关注的中-低波数区的耗散误差、色散误差都要明显优于原来的格式. 接着用常用的一、二维经典数值算例: Sod 激波管问题、Shu-Osher 问题、双马赫反射问题及 R-T 不稳定性问题,对新构造的格式进行测试,同时分别与 WENO5 和 WENO7 格式进行对比. 通过这些算例测试,可以看出新格式明显均优于原来的 WENO5 和 WENO7 格式,新格式拥有更好的激波捕捉能力和对小尺度波的高分辨率,为可压缩湍流的高分辨率模拟提供一种新的备选方法.

参 考 文 献

- [1] MOIN P, MAHESH K. Direct numerical simulation: A tool in turbulence research [J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 1998, 30(1): 539 - 578.
- [2] PIROZZOLI S. Numerical methods for high-speed flows [J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2011, 43(1): 163 - 194.
- [3] XU X H, NI G X. A High-order moving mesh kinetic scheme based on WENO reconstruction for compressible Flows [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2013, 30(4): 501 - 508.
- [4] LIU X D, OSHER S, CHAN T. Weighted essentially non-oscillatory schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1994, 115(1): 200 - 212.
- [5] JIANG G S, SHU C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1995, 126(1): 202 - 228.
- [6] HENRICK A K, ASLAM T D, POWERS J M. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: Achieving optimal order near critical points [J]. Journal of Computational Physics, 2005, 207(2): 542 - 567.
- [7] BORGES R, CARMONA M, COSTA B, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 2008, 227(6): 3191 - 3211.
- [8] MARTÍN M P, TAYLOR E M, WU M, et al. A bandwidth-optimized WENO scheme for the effective direct numerical simulation of compressible turbulence [J]. Journal of Computational Physics, 2006, 220(1): 270 - 289.
- [9] PIROZZOLI S. Conservative hybrid compact-WENO schemes for shock-turbulence interaction [J]. Journal of Computational Physics, 2002, 178(1): 81 - 117.
- [10] REN Y X, LIU M, ZHANG H. A characteristic-wise hybrid compact-WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 2003, 192(2): 365 - 386.

- [11] SUTESH A , HUYNH H T. Accurate monotonicity-preserving schemes with Runge-Kutta time stepping [J]. *Journal of Computational Physics* ,1997 ,136(1) : 83 – 99.
- [12] HE Z , LI X , FU D , et al. A 5th order monotonicity-preserving upwind compact difference scheme [J]. *Science China Physics: Mechanics & Astronomy* ,2011 ,54(3) : 511 – 522.
- [13] FU D , MA Y. A high order accurate difference scheme for complex flow fields [J]. *Journal of Computational Physics*. 1997 , 134(1) : 1 – 15.
- [14] LI X , FU D , MA Y. Optimized group velocity control scheme and DNS of decaying compressible turbulence of relative high turbulent Mach number [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* ,2005 ,48(8) : 835 – 852.
- [15] HE Z W , LI X L , LIANG X. Nonlinear spectral-like schemes for hybrid schemes [J]. *Science China Physics: Mechanics & Astronomy* ,2014 ,57(4) : 753 – 763.
- [16] SHU C W , OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes [J]. *Journal of Computational Physics* ,1987 ,83(1) : 32 – 78.
- [17] WOODWARD P , COLELLA P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks [J]. *Journal of Computational Physics* ,1984 ,54(1) : 115 – 173.
- [18] SHI J , ZHANG Y T , SHU C W. Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures [J]. *Journal of Computational Physics* ,2003 ,186(2) : 690 – 696.

A Hybrid WENO Scheme for Resolution Optimization

GUO Yuan¹ , TIAN Qi¹ , LIANG Xian¹ , LI Xinliang^{2,3}

(1. *School of Mathematics and Information Science , Beifang University for Nationalities , Yinchuan 750021 , China;*

2. *School of Engineering Science , University of Chinese Academy of Sciences , Beijing 100049 , China;* 3. *State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics , Institute of Mechanics , Chinese Academy of Sciences , Beijing 100190 , China*)

Abstract: To improve finite difference scheme , Fourier analysis is used to optimize dispersion and dissipation of WENO scheme. And optimal linear weights are given. A class of hybrid schemes is designed by combing optimized WENO schemes with monotonicity-preserving scheme. A weighted hybrid WENO scheme(H-WENO) is obtained. The scheme is tested with one-dimensional shock tube problem , Shu-Osher problem , two-dimensional Mach reflection problem and R-T instability problem. It shows that the scheme has strong ability to capture shock wave and high resolution for small scale wave structure , which is improved obviously compared with original WENO scheme.

Key words: hybrid scheme; numerical dissipation; numerical dispersion; monotonicity-preserving; optimize

Received date: 2017-03-23; **Revised date:** 2017-05-25