Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Абрамчук В.С., Абрамчук І.В., Петрук Д.О., Пугач О.С., Руда О.Г., Шмулян Я.В. Базисні системи в задачах математичного моделювання // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2016. – Випуск 3(9). – С. 17-21.

Abramchuk V.S., Abramchuk I.V., Petruk D.O., Puhach O.S., Ruda O.H., Shmulian Y.V. Basic system in the problems of mathematical modeling // Physical and Mathematical Education : scientific journal. – 2016. – Issue 3(9). – P. 17-21.

УДК 519.6

В.С. Абрамчук, Д.О. Петрук, О.С. Пугач, О.Г. Руда, Я.В. Шмулян
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, Україна
І.В. Абрамчук
Вінницький національний технічний університет, Україна
helenpugach@gmail.com

БАЗИСНІ СИСТЕМИ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Вступ. До найважливіших проблем математичного моделювання відноситься проблема вибору оптимальних базисних систем, що дозволяють розв'язувати широкий клас задач [3, 7, 8]. Оскільки основними алгоритмами чисельних методів є алгоритми інтерполяції та чисельних квадратур, то зосередимо основну увагу на цих алгоритмах.

Постановка проблеми. Мінімізувати похибку обчислень в алгоритмах інтерполяції функцій та чисельних квадратур.

Основна частина. Постановка задачі: 1) довести, що степеневі послідовності $\alpha_n = r^n$, $\beta_n = r^{-n}$, $n \in N$, $n \geq 2$, є лінійними формами параметра r – коефіцієнта золотого перерізу $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; 2) обґрунтувати, що на основі послідовностей α_n, β_n існують щільні послідовності розбиття проміжків $[0;1]$ та $[1;M]$, $M \in N$, $M \geq 2$.

У роботі [1] запропоновані оптимізаційні методи на основі золотого перерізу. Розширимо і обґрунтуємо методи мінімізації похибок в алгоритмах інтерполяції функцій та чисельних квадратур.

Теорема 1. *Послідовність* $\alpha_n = r^n$, $\beta_n = r^{-n}$, $n \in N$, $n \geq 2$ *є лінійними формами параметра* r *з цілими коефіцієнтами.*

Доведення. Золотим перерізом назвемо розв'язки рівняння $r^2 = 1 - r$, один з яких $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ділить проміжок $[0;1]$ на частини точками $\gamma_1 = r$, $\gamma_2 = r^2 = 1 - r$, а другий $\frac{1}{r}$ ділить точками $\eta_1 = 1 + r$, $\eta_2 = 2 + r$ проміжок $[1;+\infty)$ [1]. Доведення теореми проведемо методом математичної індукції, використавши, що $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ задовольняє рівняння $r^2 = 1 - r$, $a_2 = 1$, $b_2 = 1$. Для $r^3 = r^2 \cdot r = (1-r) \cdot r = r - r^2 = r - (1-r) = -1 + 2r$, $a_3 = b_2$, $b_3 = a_2 - b_2$. Допустимо, що для довільного $n \geq 3$ елемент послідовності α_n є лінійною формою параметра $r : \alpha_n = r^n = a_n + b_n r$, $a_n, b_n \in Z$. Тоді

$\alpha_{n+1} = r^{n+1} = r^n \cdot r = (a_n + b_n r)r = a_n r + b_n r^2 = a_n r + b_n(1-r) = b_n + (a_n - b_n)r$, $a_{n+1} = b_n$, $b_{n+1} = a_n - b_n \in Z$ (числа $|a_n|$, $|b_n|$ є числами Фібоначчі [1]).

Розглянемо послідовність $\beta_n = r^{-n} : \beta_1 = r^{-1} = \frac{1}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = 1 + r$, $c_1 = 1$, $d_1 = 1$; $\beta_2 = r^{-2} = (1+r)^2 = 1 + 2r + r^2 = 1 + 2r + 1 - r = 2 + r$, $d_2 = c_1$, $c_2 = c_1 + d_1$. Допустимо, що для $n \geq 2$ елемент послідовності β_n є лінійною формою $\beta_n = c_n + d_n r$, $c_n, d_n \in N$. Тоді $\beta_{n+1} = r^{-(n+1)} = r^{-n} \cdot r^{-1} = (c_n + d_n r)(1 + r) = c_n + (c_n + d_n)r + d_n r^2 =$
$= c_n + (c_n + d_n)r + d_n(1-r) = (c_n + d_n) + c_n r$, $c_{n+1} = c_n + d_n$, $d_{n+1} = c_n$. Оскільки $n \in N$, $n \geq 2$, вибрано довільно для обох послідовностей, то з допущення, що α_n, β_n є лінійними формами параметра r з цілими коефіцієнтами Фібоначчі, випливає істинність твердження для $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$. Доведення теореми 1 завершене.

Узагальнення теореми 1 розглянуто в роботі [1]. З доведення теореми 1 випливають важливі висновки: 1) похибка обчислення всіх членів послідовностей α_n, β_n не накопичується в результаті множення на ЕОМ, оскільки похибка значень α_n, β_n визначається як лінійна функція відносно r (всі члени послідовностей α_n, β_n на ЕОМ необхідно подавати парами: $\alpha_n = (a_n, b_n)$, $\beta_n = (c_n, d_n)$); 2) відрізок $[0;1]$ (відрізок $[1;M]$, $M \in N$, $M \geq 2$) можна покрити щільною послідовністю інтервалів (a_n, b_n), де a_n, b_n є лінійними формами параметра r з цілими коефіцієнтами. Дійсно розіб'ємо відрізок $[0;1]$ на три частини $[a_i; b_i] : [0; r^2], [r^2; r], [r;1], i = 1,2,3.$ Кожний з відрізків $[a_i; b_i], i = 1,2,3,$ знову розділимо на три частини з коефіцієнтами поділу r, r^2. Отримане покриття є покриттям відрізка $[0;1]$, що описується лінійними формами параметра r з цілими коефіцієнтами. Утворену послідовність відрізків $[a_n, b_n]$ назвемо послідовністю ξ_n з коефіцієнтом золотого перерізу [1]. Оскільки $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то довільне дійсне число відрізка $[0;1]$ можна наблизити з заданою точністю $\varepsilon > 0$.

2. Інтерполяція функціями $L_m(f, \Omega)$ класу $W^1[a;b]$.

Функціями $L_m(f, \Omega)$ назвемо неперервні функції, що мають неперервні похідні до m-го порядку $(m \geq 2)$ в усіх точках проміжку $[a;b]$, крім вузлів сітки $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, в яких похідна $f'(x)$ терпить розрив першого роду. Побудуємо на кожному проміжку $[x_i; x_{i+1}]$ многочлен Лагранжа $L_{m_i}(f, x_i, x_{i+1})$, що інтерполює функцію у внутрішніх вузлах проміжка $[x_i; x_{i+1}]$ на сітці $\Delta_i = \{x_i = u_{io} < u_{i1} < \ldots < u_{i,m_i} = x_{i+1}\}$. Функція $L_m(f, \Omega)$ є кусково-гладким многочленом в усіх точках $[a;b] \setminus \Delta$. Сітка Ω є об'єднанням вузлів зовнішньої сітки Δ і внутрішніх сіток $\Delta_i, i = 0,1,\ldots, n-1$.

Постановка задачі. Побудувати кусково-кубічний многочлен $L_3(f, \Omega)$ є $W^1[a;b]$ з коефіцієнтами, що є лінійними формами параметра r з цілими коефіцієнтами.

Зовнішня сітка Δ може бути вибрана як сітка ξ_n золотого перерізу. Нехай проміжок $[x_i; x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots, n-1$, відображений у проміжок $[0;1]$, на якому вибрані два внутрішніх вузли r, r^2.

Кожний кубічний многочлен будуватимемо у формі [4]. $P_3(x) = B_0 + B_1(x-r) + B_2(x-r)(x-r^2) + B_3(x-r)(x-r^2)(x-1)$ як інтерполяційний многочлен, що інтерполює $f(x)$ у точках $f(0) = y_0$, $f(r) = y_2$, $f(r^2) = y_1$, $f(1) = y_3$.

Теорема 2. *Коефіцієнти* B_0, B_1, B_2, B_3 *є лінійними формами параметра* r *і визначаються за формулами:*

$$B_0 = y_2,\ B_1 = (y_2 - y_1)(3 + 2r),\ B_2 = 5y_1 - 8y_2 + 3y_3 + r(3y_1 - 5y_2 + 2y_3),$$
$$B_3 = -3y_0 + 13y_1 - 13y_2 + 3y_3 + r(-2y_0 + 8y_1 - 8y_2 + 2y_3).$$

Доведення. Многочлен $P_3(x)$ є многочленом Лагранжа, тому його коефіцієнти визначаються однозначно і послідовно: $B_0 = f(r) = y_2$, $B_1 = \frac{f(r^2) - f(r)}{r^2 - r} = \frac{y_1 - y_2}{r^2 - r} = (y_2 - y_1)(3 + 2r)$.

Доведено рівність $3 + 2r = -\frac{1}{r^2 - r} : \frac{1}{r^2 - r} = \frac{1}{1 - 2r} = \frac{1}{2 - \sqrt{5}} = -(2 + \sqrt{5}) = -2\frac{\sqrt{5} - 1 + 3}{2} = -(2r + 3)$

Аналогічно доводиться формула для коефіцієнта B_2:

$$B_2 = \frac{y_3 - B_0 - B_1(1-r)}{(1-r)(1-r^2)} = \frac{y_3 - y_2 - (y_2 - y_1)(3+2r)(1-r)}{(1-r)(1-r^2)} =$$
$$= 5y_1 - 8y_2 + 3y_3 + r(3y_1 - 5y_2 + 2y_3)$$

та B_3. Формули для коефіцієнтів многочлена $Q_3(x) = A_0 + A_1(x-r) + A_2(x-r)(x-r^2) + A_3 x(x-r)(x-r^2)$ виводяться аналогічно.

Кубічні лагранжеві многочлени можна узагальнити на многочлени довільних порядків і довести, що на сітках з параметром золотого перерізу коефіцієнти Лагранжа є лінійними формами параметра r з цілими коефіцієнтами. Таким чином, проблема мінімізації похибки обчислень в задачах інтерполяції на вибраних сітках розв'язана. Доведення теореми 2 завершене.

Найбільш точними в задачах інтерполяції та інтегрування є симетричні многочлени на симетричних сітках [4-6]. Виведемо формули коефіцієнтів симетричного многочлена

$T_3(x) = C_0 + C_1\left(x - \frac{1}{2}\right) + C_2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + C_3\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$, $x \in [0;1]$, що інтерполює функцію $f \in C^m[0;1]$, $m \geq 1$ на сітці $\Delta = [0, r^2, r, 1]$. Запишемо систему рівнянь

$$y_0 = C_0 - \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{4}C_2 - \frac{1}{8}C_3 , \qquad (1_1)$$

$$y_1 = C_0 - \sigma \cdot C_1 + \sigma^2 \cdot C_2 - \sigma^3 \cdot C_3 , \qquad (1_2)$$

$$y_2 = C_0 + \sigma \cdot C_1 + \sigma^2 \cdot C_2 + \sigma^3 \cdot C_3 , \qquad (1_3)$$

$$y_3 = C_0 + \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{4}C_2 + \frac{1}{8}C_3 , \qquad (1_4)$$

де $\sigma = \frac{1}{2} - r^2 = r - \frac{1}{2}$ (що означає симетрію вузлів сітки відносно центрів $x = \frac{1}{2}$ відрізка $[0;1]$.

Склавши (віднявши) рівності (1_1), (1_2), (1_3), (1_4) матимемо

$$\frac{y_0 + y_3}{2} = C_0 + \frac{1}{4}C_2 , \qquad (2_1)$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = C_0 + \sigma^2 C_2 , \qquad (2_2)$$

$$y_3 - y_0 = C_1 + \frac{1}{4}C_3 , \qquad (2_3)$$

$$y_2 - y_1 = 2\sigma C_1 + 2\sigma^3 C_3 . \qquad (2_4)$$

Комбінуючи ці формули на основі властивостей золотого перерізу, дістанемо формули для коефіцієнтів C_{i1}, $i = 0,1,2,3$, як лінійні форми параметра r з раціональними коефіцієнтами.

3. Двомірні кубічні многочлени $L_{3,3}[x, y, f, \Delta]$ класу $W^1[D]$, $D = [a, b; c, d]$.

Нехай на D задана сітка Ω з зовнішніми вузлами $\Delta_x \times \Delta_y : \Delta_x = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, $\Delta_y = \{c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d\}$, $n \geq 2$, $m \geq 2$, і внутрішніми вузлами $\Delta_{ix} = \{x_i = u_{i0} < u_{i1} < u_{i2} < u_{i3} = x_{i+1}\}$ $\Delta_{jy} = \{y_j = v_{j0} < v_{j1} < v_{j2} < v_{j3} = y_{j+1}\}$.

Нехай на прямокутнику D задана функція $f(x, y) \in C^3[D]$.

Зафіксуємо змінну y і по змінній x побудуємо кусково-кубічні многочлени Лагранжа $L_3(x, y_{j,k}) = L_{3,x}^{(j,k)}(x)$, $j = 0,1,\ldots, m-1$, $k = 0,1,2,3$, на сітках $\Omega_{j,k} = \{\Delta_x \times y_{jk}\}$.

Такі многочлени існують і єдині (на основі твердження теореми 2). Побудуємо кусково-кубічний двомірний многочлен $L_{3,3}(x, y)$ – функціональний многочлен Лагранжа змінної L_3 і незалежної змінної y:

$$L_3^{(j,k)}(x) = C_{y0} + C_{j1}(y-r) + C_{j2}(y-r)(y-r^2) + C_{j3}(y-r)(y-r^2)(y-1)$$

відобразивши відрізок $[y_j; y_{j+1}]$ у відрізок $[0;1]$. Коефіцієнти послідовно визначаються з умов $L_{3,y}(y_{j,k}) = L_{3,x}^{(j,k)}(x, y_{j,k})$, $\forall j = 0,1,\ldots, m-1$, $k = 0,1,2,3$

Теорема 3. *Функція $L_{3,3}(x,y)$ неперервна на D і має неперервні частинні похідні до третього порядку включно у внутрішніх вузлах кожного (i,j)-го елементарного прямокутника $\Delta_{i,j}=[x_i,x_{i+1},y_j,y_{j+1}]$.*

Доведення. Оскільки $L_{3,3}$ є многочленом двох змінних, то він є неперервним в усіх внутрішніх точках для кожного елементарного прямокутника $\Delta_{i,j}$. На границі $y=y_{j0}, y=y_{j3}$, $L_{3,3}(x,y)$ збігається з кубічним многочленом $L_3^{(j,k)}(x)$, тому є функцією неперервною. На границях x_{i0},x_{i3} многочлен $L_{3,3}(x,y)$ збігається з кубічним многочленом $L_3^{(j)}(y)$. Дійсно $\forall j=0,1,...,m-1$, $\forall i=0,1,...,n-1$, $L_3(x_i,y_j)=z(x_{i0},y_{jn})$, $L_3(x_{i3},y_{jk})=z(x_{i3},y_{jk})$. Отже $L_{3,3}(x,y)=L_3^{(j)}(y)$, $x\in\Delta_x$, є кусково-кубічним многочленом – функцією неперервною на основі теореми 2. Доведення теореми 3 завершене.

Кусково-кубічні функції двох змінних легко узагальнюються на функції багатьох змінних $L_{n_1,...n_s}(\vec{x}), \vec{x}\in R^t, t=\sum_{i=1}^{s} n_i, \vec{x}\in D$, D – прямокутний паралелепіпед з гранями паралельними координатним.

Важливість результату теореми 3 полягає у тому, що $L_{3,3}(x,y)$ є неперервною на лініях сітки і диференційовною необхідну кількість раз в області $D\setminus\Delta.$. Це дозволяє побудувати чисельно-аналітичні методи для розв'язування крайових еліптичних задач, переносячи результати обчислень з крупних сіток на дрібні і згортаючи результати (коректуючи їх) з дрібних сіток на грубі, що є узагальненням багатосіткових методів розв'язування крайових задач [2].

4. Квадратурні і кубатурні формули.

Суть оптимізаційних квадратурних і кубатурних формул інтегрування функцій деякого класу K полягає у побудові таких чисельних квадратур, кубатур:

$$\int_a^b f(x)dx\approx S(f,a,b)+R(f,a,b),$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\Phi(f,D)+R(f,D),$$

де S,Φ – наближені формули чисельного інтегрування, R – похибка. Необхідно мінімізувати як абсолютне значення похибки R, так і похибку обчислень (за рахунок мінімізації обчислень підінтегральної функції та вибору алгоритма реалізації обчислень з мінімізацією похибки обчислень.

Зазначимо, що ці дві умови містять протиріччя, бо мінімізація $|R|$, як правило, вимагає збільшення обчислень, а це веде до збільшення похибки обчислень. Зменшити це протиріччя можна лише за рахунок вибору оптимальних сіток області інтегрування – це і є принциповим шляхом до розв'язання проблеми побудови оптимальних формул чисельного інтегрування [4-6].

Нехай інтегрована, наприклад неперервна, на $[a;b]\to[0;1]$ функція інтерполюється на проміжках розбиття $[x_i;x_{i+1}]$ кубічним симетричним многочленом $T_3(x)$.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx=\int_0^1\varphi(t)dt\approx\int_0^1 T_3(t)dt=C_0+\frac{1}{12}C_2, \qquad (3)$$

де $C_2=\frac{2r+3}{2}(y_0-y_1-y_2+y_3)$, $C_0=\frac{2r+3}{2}(y_1+y_2)-\frac{1}{2}(r-\frac{1}{2})(y_0+y_3)$.

Отже, квадратурна форма (3) вимагає обчислення лише двох коефіцієнтів C_0,C_2, значення яких є лінійними формами параметра r, що мінімізує похибку обчислень.

Кубатурні форми можна побудувати на основі інтерполяційних многочленів $L_{3,3}(x,y)$. Щоб отримати не лише мінімізацію похибки квадратурної формули (3), необхідно використати узагальнені формули золотого перерізу і знайти таке число r, яке мінімізує похибку квадратурної формули (3).

Таким чином, у статті обґрунтовується побудова оптимізаційних методів на основі послідовностей золотого перерізу.

Список використаних джерел

1. Абрамчук В.С. Оптимізаційні методи на основі золотого перерізу / В.С. Абрамчук, І.В. Абрамчук, Д.О. Бабюк //Проблеми інформатики та комп'ютерної техніки (ПІКТ – 2016). Праці V-ї Міжнародної науково-практичної конференції, Чернівці, Україна, 21 – 24 травня, 2016. – С. 28-30.
2. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. Пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 400 с.
3. Занг В.Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. Пер. с англ./ В.Б. Занг. – М.: Мир, 1999. – 335 с.

4. Иоффе А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974. – 476 с.
5. Молодцов Д.А. Устойчивость принципов оптимальности. – М.: Наука, 1987. – 280 с.
6. Никольский С.М. Квадратные формулы. – М.: Наука, 1974. – 223 с.
7. Самарский А.А. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
8. Самойленко А.М. Математичне моделювання: Підручник / А.М. Самойленко, К.К. Кенжебаєв, О.М. Станжицький, С.Ю. Таран. – Київ: Наукова думка, 2015. – 328 с.

Анотація. Абрамчук В.С., Абрамчук І.В., Петрук Д.О., Пугач О.С., Руда О.Г., Шмулян Я.В. Базисні системи в задачах математичного моделювання.

У статті виведені формули інтерполяції та чисельних квадратур з використанням сіток з вузлами послідовності золотого перерізу. Доведено, що такі сітки мінімізують похибку обчислень, а коефіцієнти інтерполяційного многочлена Лагранжа та квадратурної (кубатурної) формули на його основі є лінійними формами параметра золотого перерізу з цілими раціональними коефіцієнтами.

В результаті дослідження, дійшли до висновку, що узагальнені формули золотого перерізу використовують для мінімізацію похибок квадратурних формул. Таким чином можна обґрунтувати побудову оптимізаційних методів на основі послідовностей золотого перерізу.

Ключові слова: *золотий переріз, мінімізація похибки обчислень, інтерполяція, квадратурні формули.*

Аннотация. Абрамчук В.С., Абрамчук И.В., Петрук Д.А., Пугач Е.С., Рудая О.Г., Шмулян Я.В. Базисные системы в задачах математического моделирования.

В статье выведены формулы интерполяции и численных квадратур с использованием сеток с узлами последовательности золотого сечения. Доказано, что такие сетки минимизируют погрешность вичислений, а коэфициенты интерполяционного многочлена Лагранжа и квадратурной (кубатурной) формы на его основании являются линейными формами параметра золотого сечения с целыми (рациональными) коэффициентами.

В результате исследования, пришли к выводу, что обобщенные формулы золотого сечения используют для минимизации погрешностей квадратурных формул. Таким образом можно обосновать построение оптимизационных методивна основании последовательностей золотого сечения.

Ключевые слова: *золотое сечение, минимизация погрешности вычислений, интерполяция, квадратурные формулы.*

Abstract. Abramchuk V.S., Abramchuk I.V., Petruk D.O., Puhach O.S., Ruda O.H., Shmulian Y.V. Basic system in the problems of mathematical modeling.

Formulas of interpolation and numerical integration on grids, received on the base of golden ratio, were obtained. It was proved, that these grids have properties of minimizing error of computations and Lagrange coefficients of the polynomial interpolation and quadrature (cubature) forms on the basis thereof are linear forms of the parameter of the golden section with integer (rational) coefficients.

The study, concluded that the generalized formula golden section is used to minimize errors of quadrature formulas. So you can justify building optimization techniques based on the sequences of the golden section.

Keywords. *golden ratio, minimizing computational error, interpolation, quadrature formulas.*