

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)

Fís. Carlos Adrián Jiménez Carballo
Escuela de Física
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Objetivos

Al finalizar esta sección el estudiante deberá ser capaz de

- Identificar un movimiento periódico.
- Identificar las principales características físicas del movimiento periódico
- Identificar diferentes fenómenos físicos que cumplen con el MAS.
- Identificar las causas del movimiento armónico simple (MAS).
- Interpretar la ecuación diferencial del MAS.
- Interpretar la solución de la ecuación diferencial del MAS.
- Extraer información de gráficos de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo de distintos fenómenos físicos.
- Construir las ecuaciones de las funciones de posición, velocidad y aceleración a partir de la información extraída de las gráficas.

Conocimientos previos

Para esta sección los estudiantes deben tener conocimientos previos en

- Matemática básica.
- Cálculo diferencial, principalmente los conceptos de derivada e integral
- Física general, principalmente los conceptos de mecánica clásica, como por ejemplo las leyes de newton, los conceptos de posición, distancia, velocidad y aceleración, las definiciones de energía cinética, energía potencial y energía mecánica.

Contenido

Movimiento periódico

Características del movimiento periódico

Movimiento armónico simple (MAS)

Energía de una masa unida a un resorte que describe un MAS

Contenido

Movimiento periódico

Características del movimiento periódico

Movimiento armónico simple (MAS)

Energía de una masa unida a un resorte que describe un MAS

Movimiento periódico

Un **movimiento periódico** es aquel que después de cierto tiempo se vuelve a repetir de nuevo el ciclo o recorrido de una partícula

Figura: Movimiento periódico de la luna alrededor de la tierra

Ejemplos: Movimiento periódico

- La oscilación de una masa acoplada a un resorte
- El movimiento de un péndulo
- Las vibraciones de las cuerdas de un instrumento musical
- La rotación de la Tierra
- Las ondas electromagnéticas tales como ondas de luz y de radio
- La corriente eléctrica en los circuitos de corriente alterna

Contenido

Movimiento periódico

Características del movimiento periódico

Movimiento armónico simple (MAS)

Energía de una masa unida a un resorte que describe un MAS

Amplitud de movimiento

- Se denota con la letra A y se define como la magnitud máxima del desplazamiento con respecto al equilibrio; es decir, el valor máximo de $|x|$ y siempre es positiva.
- El rango global del movimiento es $2A$.
- Las unidades de A depende del fenómeno físico que estemos trabajando.

Periodo y frecuencia

El **periodo** se denota con la letra T y se define como el tiempo que tarda en cumplirse un ciclo.

La unidad del periodo en el *SI* es el segundo, aunque a veces se expresa como segundos por ciclo.

La **frecuencia** se denota con la letra f , y se define como el número de ciclos por la unidad de tiempo que realiza un movimiento periódico.

La frecuencia se relaciona con el periodo mediante la siguiente relación

$$f = 1/T.$$

La unidad de la frecuencia en el SI es el hertz (1 Hz = ciclo/s = 1 s⁻¹).

Frecuencia angular

La **frecuencia angular** se denota con la letra ω , y se define

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

La frecuencia angular representa la rapidez de cambio de una cantidad angular la cual se mide en radianes, de modo que sus unidades son rad/s

Contenido

Movimiento periódico

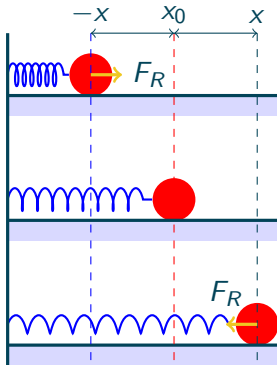
Características del movimiento periódico

Movimiento armónico simple (MAS)

Energía de una masa unida a un resorte que describe un MAS

Movimiento Armónico simple

El **Movimiento Armónico Simple (MAS)** es el movimiento periódico más sencillo que se puede analizar, el cual sucede cuando existe una fuerza de restitución F_R , la cual es directamente proporcional al desplazamiento x con respecto a un punto equilibrio.



MAS: Sistema masa-resorte

El caso mas común es la fuerza que experimenta un partícula de masa m atada a un resorte, donde dicha fuerza se define como

$$F_R = -kx.$$

donde el signo ($-$) en la ecuación se debe a la fuerza restauradora que tiene sentido contrario al desplazamiento. La fuerza se opone o se resiste a la deformación

Oscilador armónico

- Un cuerpo que describe un MAS se denomina *oscilador armónico*.
- El movimiento armónico simple es la proyección del movimiento circular uniforme sobre un diámetro.

Ecuación diferencial del MAS

- Si se considera el sistema masa-resorte y se aplica la segunda ley de Newton a la masa m

$$\sum F_x = -kx = ma.$$

- Usando la definición de aceleración se tiene

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}.$$

- Finalmente se obtiene la ecuación diferencial general del MAS

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

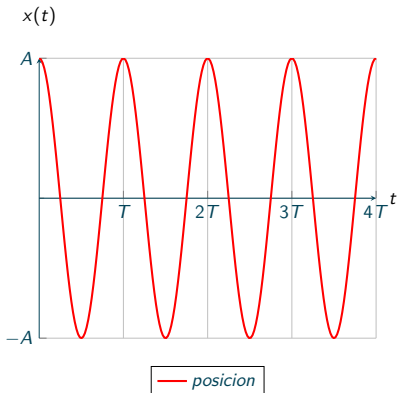
donde la frecuencia angular del sistema se define como

$$\omega = \sqrt{k/m}.$$

La solución de dicha ecuación diferencial es

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi),$$

donde x describe la posición de la masa y la constante ϕ es el ángulo de fase, el cual sirve para encontrar las condiciones iniciales ($x(0)$, $v_x(0)$ y $a_x(0)$) del movimiento del oscilador



Características MAS: Sistema masa-resorte

Para un sistema **masa-resorte que describe un MAS** las características del movimiento quedan definidas en términos de ω , como por ejemplo

- Periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

- Frecuencia

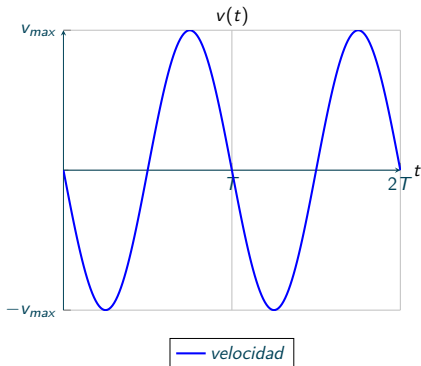
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

De lo anterior se puede ver que en el MAS descrito por un sistema masa-resorte, el periodo y la frecuencia no dependen de la amplitud.

Velocidad para una masa que describe un MAS

Usando la definición de velocidad se obtiene

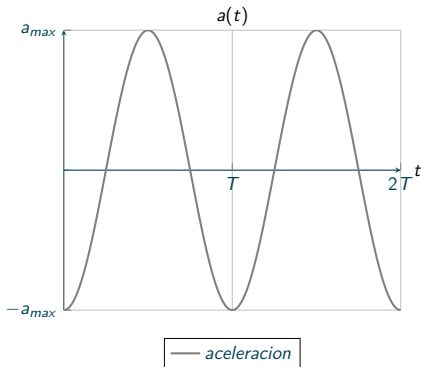
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \text{sen}(\omega t + \phi)$$



Aceleración para una masa que describe un MAS

Usando la definición de aceleración se obtiene

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

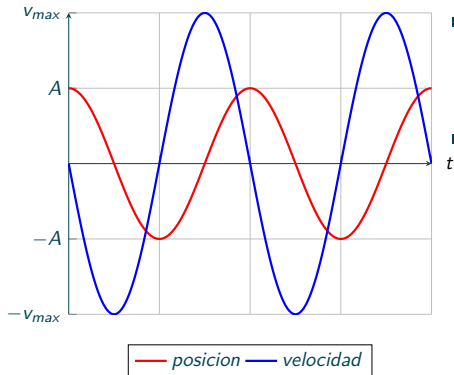


Ecuaciones de posición, velocidad y aceleración

Resumen

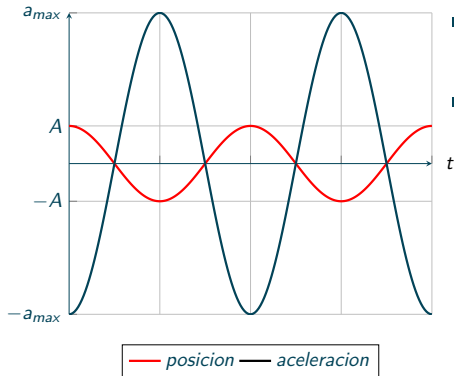
| Cantidad física | definición | Ecuación | Máximo |
|-----------------|---------------------|---|-----------------------|
| Posición | | $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ | $x_{max} = A$ |
| Velocidad | $v = \frac{dx}{dt}$ | $v(t) = -A\omega \text{sen}(\omega t + \phi)$ | $v_{max} = A\omega$ |
| Aceleración | $a = \frac{dv}{dt}$ | $a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$ | $a_{max} = A\omega^2$ |

Posición vs velocidad



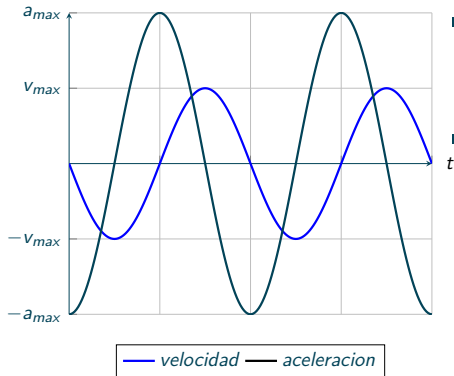
- La velocidad es máxima o mínima en el punto de equilibrio
- La velocidad es cero en los extremos de la oscilación

Posición vs aceleración



- La aceleración es cero en el punto de equilibrio
- La aceleración es máxima o mínima en los extremos de la oscilación

Aceleración vs velocidad



- Cuando la velocidad es máxima o mínima la aceleración es cero
- Cuando la aceleración es máxima o mínima la velocidad es cero

Amplitud y ángulo de fase

- Una forma de determinar la amplitud de movimiento de una masa unida a un resorte que describe un MAS es

$$A = \sqrt{(x(t))^2 + \left(\frac{v(t)}{\omega}\right)^2}$$

- Una forma para determinar el ángulo de fase es

$$\phi = \arctan\left(-\frac{v(t)}{\omega x(t)}\right) - \omega t$$

Le queda a usted como ejercicio demostrar dichas expresiones pues para efectos de examen eso se evalúa

Contenido

Movimiento periódico

Características del movimiento periódico

Movimiento armónico simple (MAS)

Energía de una masa unida a un resorte que describe un MAS

Energía cinética de una masa un MAS

La energía cinética se define como:

$$K \equiv \frac{1}{2}mv_x^2,$$

donde para el caso de una masa puntual que describe un MAS

$$K = \frac{1}{2}m(-A\omega \text{sen}(\omega t + \phi))^2.$$

Usando la definición de ω

$$K = \frac{1}{2}kA^2 \text{sen}^2(\omega t + \phi).$$

Energía cinética

La energía potencial de un resorte se calcula como:

$$U = \frac{1}{2}kx^2,$$

donde para el caso de una masa puntual que describe un MAS

$$U = \frac{1}{2}k (A \cos(\omega t + \phi))^2 .$$

Energía mecánica

La energía mecánica se define como:

$$E \equiv K + U,$$

donde usando los resultados anteriores se obtiene la energía mecánica de una masa que describe un MAS

$$E = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi).$$

donde simplificando se obtiene la energía mecánica de una masa unida a un resorte la cual describe un MAS

$$E = \frac{1}{2}kA^2,$$

donde se puede ver que E es constante en el tiempo.

Velocidad de una masa unida a un resorte

Con el resultado anterior se puede determinar la velocidad de la partícula en cualquier momento. A partir de la expresión de la energía mecánica

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$

se despeja v_x y se obtiene

$$v_x = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{1}{2}kx^2 \right)},$$

donde se encuentra finalmente la velocidad de la masa en términos de su posición

$$v_x = \pm \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)} = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}.$$

De lo anterior se puede ver que velocidad máxima se obtiene para $x = 0$ y se determina $v_{xmax} = \omega A$

Variación de las energías en el MAS

- La energía potencial U es máxima en los extremos del movimiento (A y $-A$).
- La energía cinética K es máxima en la posición de equilibrio (x_0).
- La energía mecánica E es constante en todo el movimiento.

Fórmulas MAS primer examen parcial

| | | | |
|------------------------------------|-------------------------------|-----------------------|---|
| $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ | $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ | $E = \frac{1}{2}kA^2$ | $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ |
| $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ | | | |

Todas las fórmulas que no aparecen aquí deben ser demostradas en el examen

Bibliografía

- Sears, F.W., Zemansky, M.W., Young, H.D., Freedman, R.A. (2013). *Física Universitaria*. Volumen I. Décimo tercera edición. México: Pearson Education.
- Resnick, R., Halliday, D., Krane, K. (2013). *Física*. Volumen I. Quinta edición. México: Grupo Editorial Patria.
- Serway, R.A. y Jewett, J.W. (2008). *Física Para Ciencias e Ingeniería*. Volumen I. Séptima edición. México: Cengage Learning Editores S.A. de C.V.
- Wilson, J.D., Buffa, A.J. y Lou, B. (2007). *Física*. 6ta Edición. México: Pearson educación.

Créditos

- Vicerrectoría de Docencia
- CEDA - TEC Digital
- Proyecto de Virtualización 2016-2017
- Física General III
- Fís. Carlos Adrián Jiménez Carballo (profesor)
- Ing. Paula Morales Rodríguez (coordinadora de diseño)
- Andrés Salazar Trejos (Asistente)