

EL CONCEPTO DE VARIACIÓN: SUS INICIOS EN LA EDUCACIÓN BÁSICA Y REPERCUSIÓN EN EL NIVEL SUPERIOR

Elena Fabiola Ruiz Ledesma
(Departamento de Posgrado de la Escuela Superior de Cómputo
del Instituto Politécnico Nacional. México)*

Resumen

En México los estudiantes tienen una primera aproximación al concepto de variación en el nivel básico, sin embargo, sólo se trabaja la variación proporcional directa e inversa y la mayoría de las veces es de forma mecánica sin que el estudiante logre dar sentido al uso del concepto; lo que se pone de manifiesto cuando intenta resolver problemas. El uso de la variación proporcional directa se reduce a la aplicación de la regla de tres. Cuando el estudiante llega a nivel superior prevalece esta forma de trabajar el concepto de variación, lo que obstaculiza –entre otras cosas- el análisis del comportamiento global de diferentes funciones, que resulta esencial en los cursos de Cálculo. Esta situación motivó el diseño y la aplicación de actividades que incluyen el análisis de diferentes funciones, las cuales se trabajaron en el salón de clases mediante la discusión en grupos de los estudiantes, participaron 25 estudiantes mexicanos, pues es esencial que aquellos que ingresan al nivel universitario identifiquen que la relación entre las variables de un problema no siempre es proporcional. En las dos actividades documentadas se identificó que el uso de una tabla de valores y la exploración gráfica favorecieron la reflexión de los estudiantes.

Palabras Clave

Variación - Regla de tres - Función - Representación gráfica y numérica.

Abstract

In Mexico the students have a first contact with the variation concept in the basic educational level, however, only the direct and inverse proportional variation is worked and most of the times it's on a mechanic way and without the student giving sense to

* Doctora en Ciencias -Especialidad Matemática Educativa-. Licenciada en Matemáticas Cinvestav. IPN. México.

the use of the concept; what is manifested when tries to solve problems. The use of the direct proportional variation is reduced to the use of rule of three. When the students reaches superior school level, this way to work the variation concept prevails and that avoids among another things the analysis of the global behave of different functions that results essential in the calculus courses. This situation motivated the activities design that included the analysis of different functions, were worked in the class room by means of discussion in students groups. Twenty-five 18-19 year old Mexicans students participated in the research, because is essential that the students that get in university can identify that the relation between the variables of a problem is not always proportional. In the two documented activities was identified that the use of values table and the graphic exploration helped the reflection of the students.

Keywords

Variation - Function - Rule of three - Numerical and graphical representations.

Introducción

El estudio de los fenómenos que cambian es esencial en los cursos de Cálculo para desarrollar el concepto de variación. Su conocimiento implica identificar y entender cómo se relacionan las cantidades en un problema particular. Más aún, permite medir y analizar como cambian estas cantidades. Por ejemplo, cambios en la temperatura, peso, posición, población, velocidad, etc. Bassein (1993) señala que la investigación efectuada para llegar a establecer leyes universales e inmutables para estudiar fenómenos que cambian, probablemente ha sido la más poderosa motivación del hombre para construir modelos, los cuales se representan en la forma de ecuaciones que expresan relaciones entre variables. Indica que debido a que estos modelos contienen sólo la información necesaria de los fenómenos de los que surgen, es posible que puedan ser aplicados en otras situaciones. Como un ejemplo se encuentra el modelo de Newton para representar la Ley de la gravitación universal, que puede ser aplicado en la caída de los cuerpos y en el movimiento de los planetas alrededor del Sol.

Los estudiantes tienen su primer acercamiento al estudio de la variación en la educación básica. En los Planes y programas de estudio de Educación Primaria en México (Secretaría de Educación Pública, 2001), se incluye la noción de variación en el eje denominado “procesos de cambio”, y se refiere exclusivamente a desarrollar en el estudiante lo concerniente a variación directamente proporcional e inversamente proporcional. De manera específica, el desarrollo del eje “procesos de cambio” se inicia con situaciones sencillas en el cuarto grado y se profundiza en los dos últimos grados de la educación primaria. Las lecciones de los libros de texto de educación primaria en México

(Secretaría de Educación Pública, 2001) están conformadas por la lectura, la elaboración, y el análisis de tablas y gráficas en las que se deben registrar y analizar procesos de variación. Las lecciones culminan con las nociones de razón y proporción, las cuales son fundamentales para la comprensión de varios tópicos matemáticos y para la resolución de problemas que se presentan en la vida diaria.

Piaget (1988) señala que el sujeto puede construir el esquema de proporcionalidad cualitativa cuando comprende que un incremento en una variable independiente da el mismo resultado que un decremento en la variable dependiente. Es decir, cuando comprende que requiere de un elemento de compensación.

De lo anterior se puede inferir que desde la educación Primaria se trabajan las variables tanto independientes como dependientes, enfocadas sólo a la idea de proporcionalidad.

Para los estudiantes que cursan el bachillerato o los primeros años de universidad, el tema de variación se fundamenta en el concepto de función, de esto se puede inferir que la conexión entre las variables independiente y dependiente y los cambios en la variable dependiente, para cambios en la variable independiente, son elementos esenciales para el conocimiento de la razón de cambio y la construcción e interpretación de gráficas que representan diferentes fenómenos. Relacionar las variables independiente y dependiente se puede favorecer mediante la exploración numérica y gráfica con lápiz y papel o con apoyo de una hoja electrónica de cálculo (García, 2006).

Antecedentes

Dificultades identificadas en los estudiantes de bachillerato.

Pese a la importancia del estudio de la variación, las investigaciones relacionadas con este tópico, documentan que los estudiantes que ya han cursado la asignatura de Cálculo manifiestan las siguientes dificultades: a) Al trabajar considerando una variación proporcional directa entre las variables del problema; b) proponer y trabajar con expresiones algebraicas que representan relaciones entre cantidades; c) obtener información de la gráfica de una función; d) identificar los intervalos en que es creciente o decreciente y e) relacionar las representaciones tabular, algebraica y gráfica de estas funciones.

Problema de Investigación

De acuerdo a las dificultades mencionadas en el párrafo anterior, en este artículo se hace referencia al inciso (a), es decir, la tendencia que muestran los estudiantes a trabajar considerando una variación proporcional directa entre las variables del problema (mediante el uso de la regla de tres) como una primera estrategia al resolver problemas de variación.

Hipótesis de Investigación

El empleo de múltiples representaciones y la relación entre ellas se consideran elementos que pueden contribuir a que los estudiantes de bachillerato modifiquen su concepción de que las variables presentes en un problema se encuentran relacionadas en forma directamente proporcional.

Objetivo del artículo

Este documento tiene dos objetivos, el primero muestra que los estudiantes de bachillerato consideran, en sus primeras exploraciones, que las variables involucradas en los problemas están relacionadas mediante una variación proporcional. Destacando la idea de que los estudiantes de bachillerato muestran un pensamiento similar al que se desarrolla en los estudiantes de nivel básico. El segundo objetivo es mostrar dos actividades en las que los estudiantes logran superar la creencia de que todo varía de forma proporcional. A través del empleo de diferentes representaciones.

Marco teórico

El marco teórico de la investigación se divide en dos apartados el primero hace referencia al estudio de la variación en el nivel primaria y en la segunda parte se estudia lo referente a las representaciones de las funciones en el nivel medio y superior:

- A) Cómo se estudia la variación en el nivel básico
- B) Estudio de las representaciones

- A) Cómo se estudia la variación en el nivel básico

Piaget (1978) comenta que entre los 11 y los 12 años se ve en el sujeto la presencia de la noción de las proporciones en diferentes ámbitos, tales como: las proporciones espaciales (figuras semejantes), las relaciones entre pesos y longitudes de los brazos en la balanza, las probabilidades, etc. Piaget (1988) y Streefland (1991) hacen hincapié en que para que el estudiante logre desarrollar de forma correcta la noción de variación directamente proporcional, es necesario partir de las nociones de ampliación y reducción siguiendo la idea de la fotocopiadora o del dibujo a escala, asumiendo que el estudiante a muy temprana edad logra reconocer lo que es proporcional.

De lo anterior se puede inferir que desde la educación Primaria se trabajan las variables tanto independientes como dependientes, enfocadas sólo a la idea de proporcionalidad.

Por otra parte estudios realizados por Hart (1988), señalan que la noción de variación directamente proporcional es trabajada por los alumnos mediante el uso de la regla de tres, es decir de una forma mecánica, porque así es enseñada por la mayoría de los profesores, sin que promuevan en el estudiante un

pensamiento proporcional cualitativo antes del cuantitativo para darle sentido al uso de la variación proporcional. Al respecto, un estudio previo (1) de carácter exploratorio que muestran Ruiz et al. (1997a y 1997b), Ruiz y Lupiañez (2009) y Ruiz (1997), donde se trabajó con estudiantes de sexto grado de educación primaria y profesores tanto de educación primaria como de secundaria, fue indicador de la utilización de la regla de 3 simple como única herramienta para resolver problemas de valor perdido en su resolución, que en el caso de los profesores, el empleo de este algoritmo fue exitoso, no sucediendo lo mismo con los estudiantes, añadiéndose a ello el que no hubo manifestación de entendimiento en su uso. Este estudio previo permitió ver la trascendencia de la instrucción escolar sometida bajo cierta clase de organización escolar en la resolución de problemas de valor perdido a través del empleo de un algoritmo. Muestra que si la enseñanza no introduce la regla de tres, ésta no aparece por sí sola.

Tanto profesores como estudiantes redujeron el tratamiento de razones y proporciones a la resolución del tipo de problemas antes mencionados, a través de la regla de tres. Se pudo constatar el poco peso que tiene en la enseñanza la elección comprometida acerca de las razones y las proporciones, siendo que a nivel del programa de sexto grado está incluida la variación proporcional simple, en la mayoría de los módulos que lo integran.

Para los estudiantes que cursan el bachillerato o los primeros años de universidad, el tema de variación se fundamenta en el concepto de función, de esto se puede inferir que la conexión entre las variables independiente y dependiente y los cambios en la variable dependiente, para cambios en la variable independiente, son elementos esenciales para el conocimiento de la razón de cambio y la construcción e interpretación de gráficas que representan diferentes fenómenos. Relacionar las variables independiente y dependiente se puede favorecer mediante la exploración numérica y gráfica con lápiz y papel o con apoyo de una hoja electrónica de cálculo (García, 2006).

Las ideas planteadas en los párrafos anteriores han sido el punto de partida en el diseño e implementación de una investigación que tuvo como propósito: analizar y documentar los procesos de pensamiento que siguen los estudiantes para desarrollar el concepto de variación, cuando trabajan en problemas matemáticos que representan situaciones cotidianas.

Referentes Teóricos

En la literatura relacionada con el estudio de la variación se encuentra una recomendación primordial expresada por Hauger (1995) y Nemirovsky (1992). Hauger indica la conveniencia de desarrollar tres tipos de conocimiento de la razón de cambio para que un estudiante identifique el comportamiento de una función: razón de cambio global, en un intervalo y puntual. La razón de cambio global es concomitante con las propiedades generales de una función, como su monotonía. El conocimiento de la razón de cambio, en un intervalo, se refiere

al cambio de la variable dependiente para diferentes intervalos en los que se encuentra la variable independiente. Razón de cambio puntual (instantánea) tiene que ver con qué rapidez cambia la variable dependiente respecto a un valor de la variable independiente. Hauger señala que estos tres tipos de conocimiento de la razón de cambio pueden ser examinados utilizando diferentes representaciones de las funciones, incluyendo gráficas, tablas de valores, ecuaciones y descripciones verbales.

Por su parte, Nemirovsky considera que es importante incluir en el trabajo de los estudiantes un análisis local y global de las funciones. De acuerdo con el autor, son las actividades de aprendizaje las que posibilitan que un sujeto empiecen a recurrir a acercamientos alternativos que les permiten conocer la información que proporciona la gráfica de una función y relacionarla con la gráfica de su derivada. A dicha forma de trabajo le llama acercamiento variacional.

Nemirovsky destaca que un acercamiento de este tipo incluye dos formas de trabajo: analizar la función localmente y en forma global, también señala que cuando un estudiante no cuenta con suficiente experiencia para describir el comportamiento local y global de una función, aplica una estrategia de semejanza entre las gráficas (la gráfica de la función y la de su derivada).

Así mismo Nemirovsky (1992) señala:

“la construcción de un acercamiento variacional es un proceso complejo que involucra coordinación de muchas piezas diferentes de conocimiento. Toma lugar a lo largo del tiempo e incluye pasos hacia delante y hacia atrás. Con frecuencia un estudiante parece tener contruidos elementos de un acercamiento variacional, pero en la solución de un problema más complejo regresa a usar técnicas no variacionales como las de semejanza” (p. 21)

Del trabajo de Hauger, Nemirovsky, se puede inferir que para el estudio de los fenómenos que involucran cambio o variación, es recomendable que los alumnos exploren problemas en los que identifiquen, interpreten y analicen los comportamientos local y global de las funciones.

En relación a las representaciones, Villegas., J. L., Castro., E., y Gutiérrez, J. (2009), señalan que las representaciones juegan un papel fundamental en el pensamiento matemático al favorecer la comprensión de los conceptos matemáticos y estimular el desarrollo de un pensamiento flexible en la resolución de problemas.

Método

Sujetos

El estudio se llevó a cabo con 25 estudiantes de nivel universitario en un primer curso de matemáticas. Participaron 25 estudiantes, cuyas edades oscilan entre 18 y 19 años, provenientes de un bachillerato tecnológico, quienes

ya habían tomado cursos de Álgebra, Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo Diferencial e Integral.

Instrumentos

La investigación, de la que aquí se reportan resultados parciales, se ubica en un paradigma de investigación cualitativo.

Los instrumentos empleados durante la recogida de datos fueron:

- a) Reportes escritos elaborados en forma individual.
- b) Reportes escritos elaborados por cada pareja de estudiantes.
- c) Grabaciones en audio y video del trabajo de los estudiantes.
- e) Reportes elaborados por el profesor-investigador.
- f) Archivos de Excel guardados en discos flexibles elaborados por los estudiantes forma individual y en pareja.

Procedimiento

Las ideas desarrolladas en los referentes teóricos, sirvieron como ejes para diseñar y aplicar tres actividades, de las que aquí se reportan dos, en las que los estudiantes identificaron, interpretaron y analizaron el comportamiento local y global de funciones. Estos elementos se consideran importantes para que los estudiantes analicen la forma en que varían las funciones, que es aspecto primordial en el estudio del Cálculo.

El número de sesiones para cada actividad fue variable, de acuerdo con el tiempo que los estudiantes necesitaron para la exploración y análisis de la información, y la discusión de las ideas matemáticas importantes involucradas en el proceso de solución.

Los elementos que guían el análisis son:

1. Identificar la forma en que los estudiantes representan y explican situaciones que involucran cambio o variación.
2. Conocer cómo relacionan las variables involucradas en situaciones que representan cambio o variación.
3. Documentar la forma en que transitan de un análisis puntual o local del comportamiento de la función que representa el fenómeno a una explicación global.
4. Conocer la forma en que construyen relaciones funcionales que den sentido a la correspondencia entre valores del dominio y el rango de una función (relación entre variables).

Actividades y Resultados

Es importante destacar que un objetivo de este artículo es documentar que una primera forma de trabajo de los estudiantes es considerar que las va-

riables se relacionan en forma proporcional, por lo que el análisis de los datos y la discusión se efectuaran en esta dirección, lo que no resta importancia al desarrollo del concepto de variación.

En este documento se describe el trabajo de cuatro estudiantes en dos actividades. El análisis de los reportes escritos, de los videos y de las entrevistas proporcionó elementos para conocer acerca de los procesos de construcción de relaciones entre representaciones que siguieron los estudiantes, al trabajar en las actividades. Los fragmentos que aquí se presentan se refieren al trabajo de Edgar, Luis, Carlos y Fernando que se consideran representativos del grupo.

Primera actividad. Asistencia al concierto

Suponga que en una investigación de mercado se ha encontrado que el número de personas que asisten a un evento depende del costo del boleto. Esta situación se puede representar mediante la siguiente fórmula $A(p) = 2500 - 175p$ donde,

A = representa el número de personas que asisten al evento.

p = representa el precio del boleto de entrada. Se solicitó a los estudiantes responder las preguntas:

- ¿Cuál es el número máximo de personas que pueden asistir al concierto?
- ¿Cuál es el precio máximo que se puede cobrar por la entrada al concierto para garantizar la asistencia de por lo menos 10 personas?
- ¿Cuál será la asistencia al concierto si el precio del boleto es de \$10?
- ¿Cuál será la asistencia si la admisión es libre?

Edgar y Luis inicialmente trabajaron en forma individual, realizaron un análisis puntual de la función, sustituyeron diferentes valores del precio del boleto en la fórmula proporcionada y con estos valores respondieron en forma correcta el inciso c. Para responder el inciso b despejaron la variable p y sustituyeron el número de personas que asistían al concierto (Figura 1), con esto dieron respuesta a la pregunta ¿cuál es el precio... para tener una asistencia de...? en lugar de ¿cuál es el precio máximo... para tener una asistencia de por lo menos....?

$$A(p) = 2500 - 175() = 10$$
$$\frac{2500 - 10}{175} = 14.228$$

Figura 1. Respuesta de Edgar y Luis al inciso b

Las afirmaciones de Luis confirman lo anterior:

Aquí despejo y puse un valor de 10 personas para sustituir y llegar a la conclusión de que \$14 debe ser el precio mínimo para una entrada de 10 personas.

Esta forma de trabajo coincide con lo reportado por Nemirovsky (1992), quién señala que los estudiantes pueden efectuar un análisis puntual de las funciones –sustituyen valores cuando se les proporciona una fórmula– pero esto no garantiza que entiendan el comportamiento global de una función y la relación entre las variables involucradas en el problema.

Probablemente la respuesta de Luis y Edgar estuvo influenciada por el hecho de que únicamente sustituyeron valores en la expresión algebraica proporcionada, lo que pudo dificultar el análisis del comportamiento global de la función.

Partiendo de este supuesto, el profesor-investigador consideró que la exploración de una tabla o una gráfica podía contribuir para que el estudiante efectuara un análisis global del comportamiento de la función y tuvo una intervención en esta dirección. Se solicitó que construyeran una tabla y una gráfica y se les pidió que respondieran las siguientes preguntas:

¿Cuáles son las variables involucradas en la actividad?

Calcula la asistencia si el precio del boleto cuesta \$0, \$2, \$8, \$5, \$14 y \$12.

Ordena los resultados obtenidos en el punto anterior en una tabla como la siguiente:

Precio	Asistencia

Localiza en un plano cartesiano los puntos con coordenadas (precio, asistencia).

A partir de la gráfica, identifica el cambio en el número de personas que asisten al evento cuando el precio del boleto cambia de \$0 a \$1. Identifica el cambio en el número de personas que asisten al evento cuando el precio del boleto cambia de \$1 a \$2.

Si el precio del boleto aumenta ¿qué ocurre con el número de asistentes al evento?

Por otra parte, el trabajo de Carlos mostró en forma más clara su idea de variación proporcional directa. Como lo señala Ruiz (1997), los estudiantes de educación primaria y secundaria, utilizan la regla de 3 simple como única herramienta para resolver problemas de valor perdido, esta forma de trabajo también se identificó en los estudiantes que participaron en esta investigación, como fue el caso de Carlos, quién en su reporte señaló:

Pensé que todo iba a ser con una sencilla regla de tres, pero no resultó. Después, con las preguntas que puso la maestra empecé a ver otra perspectiva del problema y comprendí que sólo iba a variar p y A .

Después de identificar que esta forma de trabajo se presentó en la mayoría de los estudiantes, el investigador intervino para orientar su reflexión y favorecer el tránsito de un análisis puntual a uno global que les permitiera dar respuesta a las preguntas relacionadas con el comportamiento de la función en un intervalo. Para dar respuesta al inciso b es necesario considerar la asistencia de 10 o más personas. La interacción del investigador con Carlos es evidencia de la reflexión que el estudiante realizó y muestra la forma en que el estudiante cambia de un análisis puntual a uno global.

Investigador: ¿Qué significa que asistan por lo menos 10 personas?

Carlos: Sería de 10 en adelante

La intervención de Carlos propició que otros compañeros del grupo intervinieran dando ejemplos del precio del boleto para 10, 11, 12... personas. Los estudiantes identificaron la pertinencia de elaborar una tabla con un incremento de 10 personas desde 0 hasta 2500. Carlos –que había identificado el comportamiento global de la función- dirigió la discusión, expresó verbalmente el significado de “por lo menos 10” y respondió correctamente los incisos restantes. Con esto concluyó la sesión.

Segunda actividad. El problema de las torres

El problema solicita desarrollar una fórmula para calcular la mayor distancia que se puede ver desde lo alto de un edificio. Si h es la altura en metros del punto de observación, la distancia s de visibilidad en kilómetros se debe escribir como una función de la altura, que puede ser expresada como $s(h)$.

La actividad incluyó las siguientes indicaciones:

- 1) Calcular la distancia de visibilidad que se alcanza desde lo alto de diferentes edificios.
- 2) Elaborar una tabla donde se relacionen alturas con valores de la distancia s
- 3) Realizar interpolación para determinar la distancia de visibilidad a partir de una gráfica de la función $s(h)$.
- 4) Determinar la altura que debe tener un edificio para alcanzar a ver x kilómetros
- 5) Analizar el cambio en la distancia de visibilidad cuando se incrementa la altura
- 6) Describir la tendencia de los cambios del inciso d)

Para ejemplificar el trabajo desarrollado por los estudiantes en esta actividad se describe lo efectuado por Fernando.

Inició su participación trazando dibujos en el pizarrón para representar la situación planteada (Figura 2). Durante esta actividad la intervención de otros estudiantes del grupo fue una constante. Fernando dirigió la discusión y a partir

de las figuras y con la participación de otros compañeros del grupo, elaboró una lista con la información que consideró relevante. Las palabras anotadas en el pizarrón fueron: circunferencia, perpendicular, tangencia, triángulos y propiedades de triángulos.



Figura 2. Figuras elaboradas por Fernando

Posteriormente explicó a sus compañeros su trabajo y obtuvo información de las propiedades de la tangente y el radio de una circunferencia y pensó también en la pertinencia de utilizar el Teorema de Pitágoras para obtener una función que le permitiera calcular la distancia de visibilidad d . Identificó que la recta tangente es perpendicular al radio de la circunferencia r , asoció uno de los catetos con la distancia de visibilidad d y la hipotenusa con el segmento formado por el radio de la tierra R más la altura del edificio h .

En el trabajo inicial de Fernando nuevamente se identifica la tendencia a utilizar en forma mecánica la regla de 3 simple para resolver el problema.

Fernando: Yo lo pensé de esta manera: consideré la torre CN de Ontario y quise hacer una regla de tres utilizando su altura y así para todas las alturas.

El desarrollo que Fernando realizó en el pizarrón se escribe a continuación:

Radio ecuatorial de la tierra = 6378 km

$R+h$ = hip

Em donde:

Radio de la tierra (R)= cateto adyacente (c.a).

distancia (d)= cateto opuesto (c.o).

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$d = \sqrt{(R+h)^2 - R^2}$$

$$d = \sqrt{2R + h^2}$$

Dividió entre mil para convertir la altura de los edificios a kilómetros y obtener el resultado en kilómetros. Fernando identificó que el valor de la altura al cuadrado era menor que el radio de la tierra y escribió:

Fernando: Despreciando h^2 porque es mucho menor que el radio de la tierra $d \approx \sqrt{2R}$

Para verificar la veracidad de la fórmula calculó la distancia de visibilidad para un edificio de 555 metros de altura.

Las ideas que los estudiantes discutieron a partir de la participación de Fernando fueron:

Si utilizar el radio polar o el radio ecuatorial

La forma de obtener el resultado en kilómetros en lugar de metros

Verificar las condiciones para eliminar el valor de h^2 en la fórmula

$$d = \sqrt{(2)(6378)h + h^2}$$

Posteriormente Edgar y Luis elaboraron una tabla con dos columnas, una para las alturas de los edificios y otra para la distancia de visibilidad correspondiente a cada altura, utilizando la fórmula $d = \sqrt{2(R) + h^2}$

Después de elaborar la tabla, su trabajo consistió en la reflexión y el análisis del comportamiento de la función.

Edgar y Luis decidieron utilizar un incremento de 10 m para el valor de la altura, escribieron que con este incremento se facilitaba dar respuesta a los incisos de la actividad:

...la cual, refiriéndose a la tabla, facilita resolver las preguntas de 10 en 10.

Con los datos de la tabla trazaron una gráfica (Figura 3). Con la experiencia de la actividad anterior los estudiantes relacionaron la información de la tabla con la gráfica y efectuaron un análisis de la función en diferentes intervalos, lo que le contribuyó a que comprendieran el comportamiento global de la función que modela el fenómeno.

Pero en la gráfica notamos un cambio en la visibilidad a causa de la altura, o sea que la diferencia no es la misma.

Edgar y Luis describieron el cambio de visibilidad de la siguiente forma:

Entonces cada vez que se aumenta la altura, el aumento en el cambio de visibilidad es menor o sea que no es constante. O sea que al cambiar la altura también cambia la visibilidad pero en menor proporción, no constante.

En esta actividad se identifica que cuando los estudiantes resuelven problemas en los que tienen que formular un modelo matemático una primera estrategia que emplean es considerar que las cantidades cambian en forma proporcional. Aún cuando la fórmula es proporcionada los estudiantes sustituyen valores en la fórmula y asumen que la relación entre

las variables es lineal, sin efectuar un análisis del comportamiento general de la función.

ACTIVIDAD 4

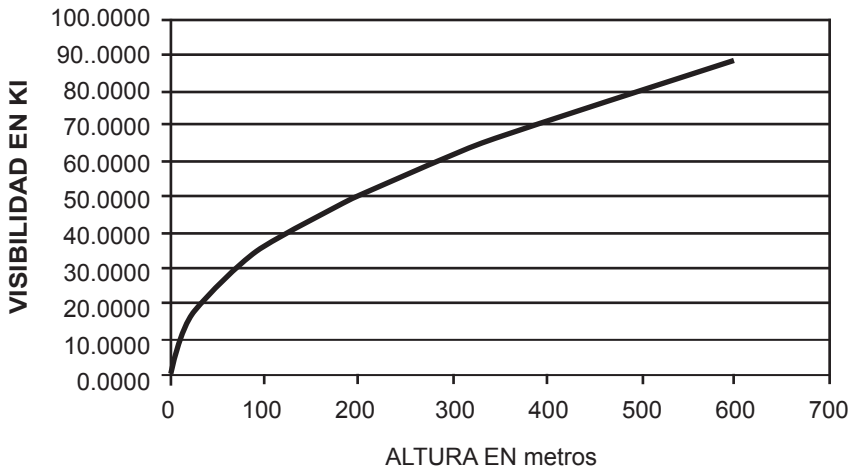


Figura 3. Gráfica elaborada por Edgar y Luis

Discusión y Conclusiones

Aún cuando en la educación primaria en México (Secretaría de Educación Pública, 2001) se incluyen la elaboración y el análisis de tablas y gráficas en las que se deben registrar y analizar procesos de variación, los resultados de esta investigación muestran una tendencia -en los estudiantes que participan- a aplicar la regla de 3 como una primera estrategia al resolver problemas. Esto puede dificultar que efectúen un análisis global del comportamiento de las funciones, lo que posibilita que identifiquen la forma en que varían las funciones, que es un aspecto esencial en los cursos de Cálculo.

En las dos actividades documentadas se identificó que el uso de una tabla de valores y la exploración gráfica favorecieron la reflexión de los estudiantes para organizar sus conocimientos, relacionar las variables del problema modificar su análisis local a un análisis global del comportamiento de la función. De acuerdo con Nemirovsky (1992) es importante que un estudiante analice el comportamiento de una función en dos niveles: analizar la función localmente y en forma global.

Para lograr que el estudiante efectúe estas formas de trabajo, el papel del profesor es fundamental, es él quién debe dirigir la reflexión de los estudiantes para lograr que transiten entre un análisis local y uno global. Las evidencias encontradas muestran lo importante que resulta que el profesor identifique el momento en que la exploración tabular y gráfica pueden contribuir para que un alumno realice una reflexión más profunda, y con ello, logre comprender mejor el comportamiento de un fenómeno.

En la segunda actividad se generó una idea importante que reorganizó la forma en que estudiantes como Edgar y Luis concebían el comportamiento de la función que modela la situación. El análisis de las tablas de valores y la gráfica en la primera actividad seguramente contribuyeron para que efectuaran la comparación de la variación de las funciones utilizadas en las dos actividades.

Edgar y Luis: Entonces cada vez que se aumenta la altura, el aumento en el cambio de visibilidad es menor o sea que no es constante. O sea que al cambiar la altura también cambia la visibilidad pero en menor proporción, no constante.

Aunque no es posible generalizar acerca de los procesos que los estudiantes siguen para robustecer su conocimiento del comportamiento de las funciones, los resultados de esta investigación dan indicios de los beneficios de incluir en el trabajo de los estudiantes el análisis de diferentes tipos de funciones, a través de su exploración gráfica tabular y algebraica. La construcción del concepto de variación es un proceso que toma tiempo y tiene retrocesos por lo que debe ser reforzado mediante actividades que fomenten la reflexión consciente de los estudiantes en los distintos niveles educativos.

Notas Bibliográficas

- (1) Este estudio previo constituyó exclusivamente una fuente de obtención de información. Los problemas que conformaron la actividad eran muy típicos y dieron lugar al uso de la regla de 3, por lo que fue necesario trabajarlos empleando una guía de preguntas (tomando como antecedente el tema de escala) y la estrategia heurística del *diagrama*.

Referencias Bibliográficas

- Bassein, S. (1993). *An Infinite Series Approach to Calculus*. Publish or Perish, Inc. Houston, Texas.
- García, M. (2006). *Patrones de argumentación que emergen en un ambiente de instrucción que incorpora la hoja electrónica de cálculo*. Memoria de la 1ª Reunión Educativa Internacional Virtual de Modalidades Alternativas. D. F. México.
- Hart, K. (1988). Ratio and proportion. En J. Hiebert and M. Behr (Eds.), *Concepts and operations in the Middle Grades, 2*, (pp. 198-219). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

- Hauger, G. (1995). *Rate of change knowledge in high school and college students*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. San Francisco, CA. Recuperado el 18 de julio de 2006, de: <http://www.eric.ed.gov:80/ERICWebPortal/>
- Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.) *Concepts and operations in the Middle Grades*, 2, (pp. 93-139). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Nemirovsky, R. (1992). *Students' Tendency to assume resemblances between a function and its derivative*. Reports-Research/Technical (143). Recuperado el 16 de mayo de 2006, de <http://edres.org/eric/ED351193.htm>
- Piaget, J. (1988). Las operaciones intelectuales y su desarrollo. En J. Delval (Comp.), *Lecturas en Psicología del Niño*, 1 (pp. 70-119). Madrid: Alianza Editorial.
- Ruiz, E. F., Ruiz, E., y Acosta, F. (1997a). Resolución de problemas a nivel primaria haciendo uso de la calculadora Math Explorer. *Resúmenes de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*. (p. 245).
- Ruiz, E. F., Ruiz, E., Acosta, F. (1997b). Taller de Resolución de problemas a nivel medio, haciendo uso de la calculadora Math Explorer Plus. *Memoria del XVI Congreso Nacional de la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 17-18). Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas. Escuela Normal Superior del Estado de México.
- Ruiz, E. (1997). Uso de las calculadoras Math Explorer y TI-92 en la Resolución de Problemas: Una experiencia con profesores de los niveles básico y medio. *Memorias del Seminario Nacional de Calculadoras y Computadoras en Educación Matemática*. 25-35.
- Ruiz, E.F. y Lupiañez, J. L. (2009). Detección de obstáculos psicopedagógicos en la enseñanza y el aprendizaje de los tópicos de razón y proporción en alumnos de sexto grado de educación primaria. *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa*. No. 17 Vol. 7(1), 397-427.
- Secretaría de Educación Pública (2001a). *Plan de programas de estudio. Educación Básica. Primaria*. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal. México D. F.: SEP.
- Secretaría de Educación Pública. (2001b). *Matemáticas. Sexto grado*. Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos. México D. F.: SEP.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education*. Tesis doctoral publicada por la Kluwer Academic Publishers. 46-134.
- Villegas., J. L., Castro., E., y Gutiérrez, J. (2009). Representaciones en Resolución de Problemas: Un estudio de caso con problemas de optimización. *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa*. No. 17 Vol. 7(1), 279-308.