

RELACIÓN ENTRE COMPLEJIDAD Y DIFICULTAD EN TAREAS CON PATRONES LINEALES REITERATIVOS EN ESTUDIANTES DE 5 AÑOS

RELATION BETWEEN COMPLEXITY AND DIFFICULTY IN REITERATIVE LINEAR PATTERN TASKS WITH 5-YEARS OLD STUDENTS

Dionisio Félix Yáñez¹
Pascual D. Diago²
David Arnau²

1. Departamento de Matemáticas, CC. NN. y CC. SS. aplicadas a la educación, Universidad Católica de Valencia

2. Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València (Estudi General);

Proceso editorial

Recibido: 13/11/2018

(30/07/2018)

Aceptado: 13/11/2018

Publicado: 11/12/2018

Contacto

Dionisio Félix Yáñez

dionisiofelix.yanez@ucv.es

Pascual D. Diago

Pascual.Diago@uv.es

David Arnau

David.Arnau@uv.es

CÓMO CITAR ESTE TRABAJO | HOW TO CITE THIS PAPER

Yáñez, D. F., Diago, P. D., y Arnau, D. (2018). Relación entre complejidad y dificultad en tareas con patrones lineales reiterativos en estudiantes de 5 años. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*, 25: 299-318.

RELACIÓN ENTRE COMPLEJIDAD Y DIFICULTAD EN TAREAS CON PATRONES LINEALES REITERATIVOS EN ESTUDIANTES DE 5 AÑOS

RELATION BETWEEN COMPLEXITY AND DIFFICULTY IN REITERATIVE LINEAR PATTERN TASKS WITH 5-YEARS OLD STUDENTS

Resumen

Una de las finalidades de la enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil es fomentar el pensamiento lógico, la creatividad y la capacidad para resolver problemas de los estudiantes. Entre las actividades escolares propias de estas edades es habitual encontrar tareas de identificación y continuación de patrones lineales de repetición. Esta actividad puede ser estudiada desde un contexto de resolución de problemas en el que el estudiante debe discriminar la información superflua de aquella que le permite obtener la regla de generación de la serie y resolver la tarea. Diferentes variables como la longitud del núcleo de repetición, el número de descriptores, su naturaleza o la aparición de distractores permiten establecer diferentes grados de complejidad en la tarea. Nuestro objetivo es explorar qué factores relacionados con la complejidad del patrón influyen en la dificultad experimentada por estudiantes de cinco años de Educación Infantil al abordar este tipo de problemas. Los resultados obtenidos nos indican que factores como la aparición de distractores o la repetición de atributos en el núcleo del patrón afectan significativamente a la tasa de éxito, mientras que otros como la longitud del núcleo o el tipo de descriptor, no ofrecen diferencias significativas.

Palabras clave: Patrones; Educación Infantil; Resolución de Problemas; Información Superflua

Abstract

One of the purposes of the teaching of Mathematics in Early Childhood Education is to encourage logical thinking, creativity and the ability to solve problems of students. Among the typical school activities of these ages it is common to find tasks of identification and continuation of reiterative linear patterns. This activity can be studied from a problem-solving context with surplus data. In it, students must discriminate superfluous information from the one that allows him to obtain the series generation rule and solve the task. Different variables such as the repetition pattern length, the number of descriptors, their nature or the presence of distractors allow us to establish different degrees of complexity in the task. Our aim is to explore which factors related to the complexity affect the difficulty experienced by five-year-old students of Early Childhood Education when dealing with this kind of problems. The results obtained indicate that factors such as the presence of distractors or the repetition of attributes in the pattern significantly affect the success rate, while others such as the pattern length or the type of descriptor do not offer significant differences.

Keywords: Patterns; Early Childhood Education; Problem Solving; Surplus Data

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas las tareas de identificación de patrones en primeras edades escolares, han sido objeto de un amplio estudio. En el área de la psicología y desde principios de los 70, la producción científica se centró en estudiar el grado de complejidad estructural de los patrones (Simon, 1972; Sternberg, 1974; Vitz y Todd, 1967, 1969) y en detectar la relación entre la dificultad de la tarea, su complejidad y el nivel de desarrollo cognitivo de los estudiantes (Greeno y Simon, 1974). Desde la educación matemática, son muchos los investigadores que han puesto de manifiesto la importancia de las tareas de identificación de patrones para el desarrollo de diferentes procesos cognitivos y destrezas, tales como el reconocimiento de relaciones matemáticas generales o el uso de expresiones simbólicas para expresarlas. Hay evidencias de que los procesos cognitivos puestos en juego cuando los estudiantes resuelven tareas de identificación de patrones favorecen el desarrollo del razonamiento lógico y matemático (Kamii, Rummelsburg y Kari, 2005) y que preparan y desarrollan el pensamiento algebraico en el estudiante (Kieran, 2018; National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Orton y Orton, 1999; Sarama y Clements, 2009; Zazkis y Liljedahl, 2002). En esta línea Blanton *et al.* (2018) destacan este tipo de actividades como centrales entre las tareas propias del *Early Algebra* ya que permiten al estudiante generalizar, representar, justificar y razonar sobre las estructuras matemáticas y las relaciones de los objetos circundantes. Desde esta perspectiva, las tareas de reconocimiento e identificación de patrones pueden ser utilizadas para introducir el álgebra en niveles donde lo impediría el simbolismo algebraico (Alsina y Giralt, 2017; Morales, Cañadas y Castro, 2017; Papic, 2015).

MARCO TEÓRICO

Tareas de identificación y continuación de patrones lineales de repetición

Dado que el término *patrón* aparece en gran variedad de contextos, lo definiremos aquí desde la perspectiva matemática, acercándonos a la idea de regularidad predecible que, por lo general, implica relaciones lógicas, numéricas o espaciales entre elementos, eventos, o acciones (Mulligan y Mitchelmore, 2009). En este trabajo nos centraremos en los llamados *patrones de repetición o reiterativos*, término que hace referencia a objetos de una colección en los que se puede percibir cierta estructura cíclica en sus elementos (Owen, 1995).

Por otra parte, el trabajo previo a la identificación de patrones en una colección de objetos exige el establecimiento de semejanzas y diferencias entre ellos. Como in-

dica Boule (1995), en las primeras edades escolares la aproximación a un conjunto de objetos siempre tiende a ser lineal, bien por el gesto (tomar los elementos uno a uno), por la vista (movimiento de la mirada para reconocerlos) o por la palabra (nombrándolos). Debido a la fuerte influencia piagetiana de las llamadas experiencias prenuméricas, en la literatura existente al trabajo de identificación y continuación de patrones lineales se le suele atribuir, al menos a nivel español, el nombre de *tareas de seriación*. Pese a que el concepto *serie* tiene un significado matemático diferente al aquí expuesto, optamos por continuar con la nomenclatura del área.

De este modo, llamaremos *serie reiterativa o de alternancia* al conjunto lineal cuyos elementos están dotados de un patrón lineal de repetición cíclico. Las series de alternancia son, habitualmente, las más usadas en Educación Infantil. Hablaremos de *núcleo* para referirnos al conjunto de menor número de elementos que permitiría generar la serie dada por repetición del mismo (Castro, 1995). Así pues, a cada serie reiterativa es posible asignarle un valor que dará cuenta de la longitud del núcleo que conforma el patrón lineal de repetición de dicha serie, como se muestra en la Figura 1.

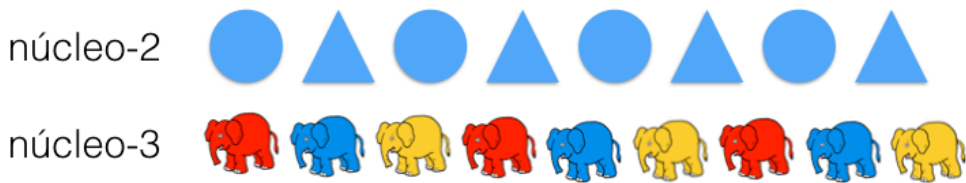


Figura 1. Ejemplos de dos series con patrones de repetición lineales, la primera de núcleo-2 y la segunda de núcleo-3

Son abundantes los estudios sobre identificación de patrones lineales reiterativos. Hay evidencias empíricas que muestran una correlación entre el éxito en tareas con patrones y el nivel de desempeño matemático en los estudiantes de primeras edades escolares (Fyfe, Evans, Matz, Hunt y Alibali, 2017; Kidd *et al.*, 2014; Papic, Mulligan y Mitchelmore, 2011; Rittle-Johnson, Zippert, y Boice, 2018; Rittle-Johnson, Fyfe, Hofer, y Farran, 2017; Owen, 1995; Sarama y Clements, 2004; Sternberg, 1974; Threlfall, 1999; Warren y Cooper, 2007). Con frecuencia estas investigaciones han intentado dar cuenta de las actuaciones de los estudiantes en función de diferentes variables relativas a estas tareas. Por ejemplo, en lo que respecta a la longitud del núcleo del patrón de repetición, estudios como los de Fyfe *et al.* (2017), Morales *et al.* (2017) o Vitz y Todd (1967, 1969) muestran que las tareas con núcleos de menor tamaño representan una menor dificultad para los estudiantes. Este resultado puede parecer intuitivo cuando se comparan patrones con tamaños de núcleo

significativamente diferentes, pues podría responder únicamente a la capacidad de la memoria de trabajo del resolutor, pero no es tan evidente cuando los núcleos presentan tamaños similares. De hecho, Vitz y Todd (1967, 1969) indican que para núcleos de igual tamaño, aquellas tareas con patrones que incluyen repeticiones de sus elementos en el propio núcleo resultan más difíciles que aquellos que no contienen estas repeticiones. Así, considerando núcleo-3, la tarea AABAABAAB (en la nomenclatura tradicional) se esperaría más difícil que la tarea ABCABCABC según estos estudios. No obstante, otros trabajos como el de Sternberg (1974) encuentran justo lo contrario.

Otros trabajos han centrado su atención en analizar el material y/o las características de los elementos que componen la serie (color, forma, tamaño, ...). Estudios como el de Rustigian (1976) indican que tareas de extensión de patrones relacionados con la forma son más sencillas que aquellas relacionadas con el color. En este trabajo también se apunta que las tareas en las que hay que intercalar elementos en el patrón son más sencillas que aquellas en las que hay que continuar el patrón (determinar el siguiente elemento). Otras variables tenidas en cuenta en estudios previos tienen que ver con el uso de unidades de repetición en las que aparecen patrones diferentes para forma y para tamaño que, combinados, crean unidades de repetición complejas (Fyfe *et al.*, 2017).

Las tareas de identificación y continuación de patrones lineales de repetición desde la resolución de problemas

Llamamos *proceso de resolución de un problema* "a la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole presentado un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea" (Puig y Cerdán, 1989, p. 21). La resolución de problemas puede ser observada, explicada y caracterizada desde muchos puntos de vista y ha sido una de las áreas que más se ha desarrollado en la investigación en educación matemática de la última década (Weber y Leikin, 2016). Partiendo de las ideas de Brownell (1942), el concepto de problema tiene un carácter relativo. Desde esta perspectiva la resolución de problemas implica reconocer y comprender una tarea gracias a un aprendizaje previo y experimentar cierta perplejidad, pero no confusión total, ante la misma. Esto implica que una misma tarea propuesta a sujetos con distintas edades, capacidades o formación previa pueda ser considerada un ejercicio, un problema o un enigma (Puig, 1996).

En la escuela, una situación de enseñanza-aprendizaje de resolución de problemas a menudo satisface las siguientes condiciones: i) hay una solución única que resuel-

ve el problema; ii) dicha solución puede ser obtenida a partir de la información que detalla el problema; y iii) suele haber una clara diferencia en el enunciado de la tarea entre información necesaria para su resolución e información superflua.

El carácter relativo de la idea de problema supone un obstáculo a la hora de establecer una relación entre su *complejidad* (que puede no ser única) y su *dificultad*. Distintos estudios han intentado definir medidas de complejidad para los problemas o las familias de problemas que tuvieran en cuenta los aspectos anteriores y que permitieran vincular complejidad con dificultad (Cerdán, 2008). En este sentido, la presencia de información superflua o contradictoria, o la ausencia de datos pueden considerarse como factores que introducen complejidad en la tarea (Puchalska y Semadeni, 1987).

Atendiendo a estudios previos, resulta plausible considerar las tareas de seriación como actividades de resolución de problemas para los estudiantes primeras edades escolares. En lo que se refiere al reconocimiento de patrones, según Threlfall (1999), hay dos factores críticos. Por un lado, la complejidad estructural del patrón de la tarea correspondiente. Por otro, la capacidad del estudiante para identificar el patrón, que a su vez está relacionada con la capacidad de identificar la unidad de repetición, el núcleo de la serie que genera toda la serie reiterativa, y que dará cuenta de la dificultad experimentada por el estudiante al resolver la tarea.

En el caso de las series reiterativas, la complejidad viene determinada por la combinación de los diferentes valores tomados por las variables que conforman la tarea de seriación. Las variables que caracterizan la complejidad de dicha tarea de seriación pueden hacer referencia a la propia estructura de la serie (las relaciones lógico-matemáticas que caracterizan al patrón de repetición, como por ejemplo la longitud del núcleo o el número de descriptores presentes) o a la propia tarea de seriación (número de elementos del conjunto de referencia que pueden usarse para continuar la serie, soporte en el que se facilita la tarea, etc.). Por otra parte, la dificultad de la tarea de seriación vendrá definida como la tasa o porcentaje de errores del resolutor.

OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo es explorar qué variables de las tareas de seriación (longitud del núcleo, número de descriptores, naturaleza del descriptor, distractores, etc.), relacionadas con la complejidad de la serie, influyen en la dificultad experimentada por los niños de último curso de Educación Infantil al abordarlas.

METODOLOGÍA

Participantes

El experimento se realizó con 31 estudiantes elegidos al azar de dos grupos naturales de último curso de Educación Infantil (5-6 años) de un colegio concertado de la Comunitat Valenciana. El tamaño de la muestra es adecuado teniendo en cuenta el carácter exploratorio del experimento. Se eligieron estudiantes de esta edad dado que están familiarizados con el trabajo con patrones lineales de repetición, pero tienen dificultades a la hora de resolver tareas de identificación y continuación de series de alternancia (Sarama y Clements, 2009). Es decir, se puede considerar que estas tareas suponen un problema para ellos.

Las variables de tarea y el diseño de las tareas

Dado un conjunto lineal de objetos, llamaremos *atributo* a cada una de las características que permiten identificar a un objeto y compararlo con el resto mediante el establecimiento de semejanzas y diferencias. Llamaremos *descriptor* al conjunto de atributos relacionados entre sí. Por ejemplo, el color es un descriptor que corresponde al conjunto de atributos "ser rojo", "ser verde", etc. A partir de la comparación de atributos se puede llevar a cabo la identificación del núcleo en una serie reiterativa, dando lugar a lo que se denomina *regla o criterio de generación*. Este criterio constituye las instrucciones lógicas que se han de seguir con el fin de construir dicha serie (Figura 2). Los descriptores presentes en los elementos de la serie que no muestren variación cíclica a lo largo de la serie los denominaremos *distractores* (Figura 3). Es importante resaltar que las relaciones lógicas que permiten la identificación del núcleo, así como de la deducción de la regla de generación de la serie, está ligada exclusivamente a los descriptores y no a los distractores.



Figura 2. Serie generada a partir de la regla "círculo rojo - cuadrado amarillo - triángulo azul" con núcleo-3 y dos descriptores (color y forma)



Figura 3. Serie reiterativa de núcleo-2 con un descriptor (forma) y un distractor (color)

La presencia de distractores en una serie reiterativa (*grados de libertad*) puede entenderse como un problema en el que aparece información superflua o contradictoria. En esta situación típicamente un estudiante para identificar el patrón debe ser capaz de discernir la información innecesaria (distractor) de la necesaria (descriptores). En el ejemplo de la Figura 3 el único descriptor que muestra un cambio cíclico a lo largo de la serie es la forma, mientras que el color no responde a ninguna regla de generación cíclica. En este caso el color actúa como distractor, ofreciendo un grado de libertad a la hora de continuar la serie, pues el resolutor puede elegir un círculo del color que desee para resolver la tarea.

Dado que se trata de un estudio sobre resolución de problemas que involucran a estudiantes resolviendo tareas en un determinado contexto (identificación y continuación de patrones lineales de repetición), será necesario definir las variables de tarea (Kilpatrick, 1978). En nuestro caso, optamos por indagar en el efecto de las siguientes variables:

- Longitud del núcleo (LN). Limitaremos este estudio a series reiterativas núcleo-2 ($LN=2$) y núcleo-4 ($LN=4$). La elección responde a que son longitudes de núcleo bastante “cercanas” como para que no se vean afectadas por la capacidad memorística del estudiante (Fyfe *et al.*, 2017). Como en este estudio se pretende determinar el efecto de la presencia de diferentes descriptores, no se opta por usar series núcleo-3, pues no ofrecerían posibilidad de combinar longitudes de patrón diferentes en los descriptores presentes en la serie.
- Número de descriptores presentes en el núcleo (ND). Consideraremos series reiterativas en las que intervengan 1, 2 o 3 a la vez. Con ellos se realizarán tareas con $LN=2$ y $LN=4$.
- Naturaleza o tipo del descriptor (para cada uno de los descriptores presentes en la serie, Di). Tomaremos en consideración los descriptores color (c), forma (f) y tamaño (t), en este orden.
- Distractores (o grados de libertad, GL). Para estudiar los efectos de la aparición de información superflua en tareas con patrones lineales reiterativos, en la generación de series con 3 descriptores ($ND=3$) se considerará uno de ellos como distractor ($GL=1$), tanto para series con $LN=2$ como $LN=4$.

Con el fin de categorizar y establecer relaciones de complejidad estructural en las tareas administradas, a cada una de las series reiterativas se le asignará un código alfanumérico del tipo $[LN, Di, GL]$. Este código dará cuenta de las variables implicadas en dicha tarea. LN tomará los valores 2 o 4, se añadirán tantas etiquetas c , f o t como descriptores (Di) en juego tenga el patrón lineal de repetición. En el caso de que la serie tenga tres descriptores, dado que necesariamente uno de ellos será distractor (por el diseño del experimento), se indicará con la etiqueta d al final del código. Por ejemplo, la tarea con código $2cf$ (Figura 4, arriba) caracteriza una serie reiterativa núcleo-2, con descriptores color y forma presentes en el núcleo y sin distractores. En cambio, la tarea $2cfd$ (Figura 4, abajo) nos define una serie reiterativa núcleo-2 con tres descriptores, dos de ellos actuando como tales (color y forma) y uno (tamaño) actuando como distractor. Como se observa en la Figura 4, la variable ND no se especifica en el código asignado, pues el número de descriptores se puede derivar a partir de las etiquetas c , f o t presentes en el código.

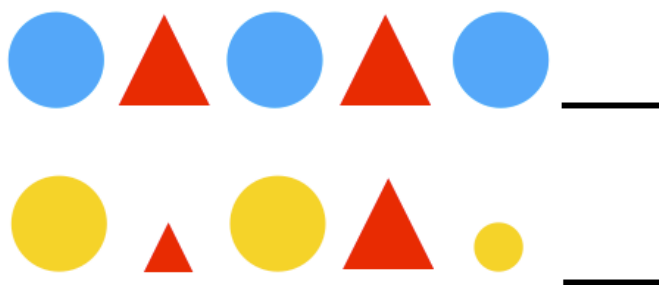


Figura 4. Serie reiterativa con variables de tarea $2cf$ (arriba) y $2cfd$ (abajo)

En general, se diseñan las tareas para que los atributos asignados a cada descriptor Di sean siempre diferentes dentro del núcleo de repetición del patrón. No obstante, se introduce una variable que permita estudiar el efecto que produce que un descriptor repita atributo dentro del núcleo de repetición. Como ya se ha mencionado, Sternberg (1974) encontró que las seriaciones sin atributos repetidos en el núcleo, del tipo ABCDABCD resultaban más difíciles para los estudiantes que las que repetían atributos, del tipo AABCAABC, pese a ser ambas de núcleo-4. Así, introduciremos la variable *repetición o no de atributos dentro del núcleo*. En nuestro caso esta variable solo podrá afectar a las seriaciones núcleo-4 (no tendría sentido en las núcleo-2), como se puede ver en la Figura 5. Estas series se etiquetarán con $_b$ al final del código.



Figura 5. Serie reiterativa sin repetición de atributos en el núcleo (4f, arriba) y con repetición de atributos (4f_b, abajo)

En el diseño de las tareas se decide fijar otras variables implicadas. Así, las tareas serán siempre de continuación de patrón. Con el objetivo de que el estudiante determine el elemento que continúa la serie, se opta por mostrar siempre al menos dos repeticiones completas del núcleo y, como se puede ver en las Figuras 4, 5 o 6, nunca el primer elemento mostrado en la serie reiterativa será el que resuelve la tarea. Al igual que se establece en Fyfe *et al.* (2017), se decide facilitar un conjunto de referencia para que el estudiante elija el elemento que continúa la serie. Este conjunto de posibles soluciones se colocará debajo de cada una de las series reiterativas administradas en el cuestionario. Esta limitación nos obliga a fijar otras variables de tarea relacionadas con el conjunto de referencia. Para ello, limitaremos el conjunto de referencia para continuar la serie a 5 elementos. De estos elementos, solo uno será el elemento correcto; uno (para el caso $LN=2$) o dos (caso $LN=4$) serán otros elementos que aparecen en la serie reiterativa mostrada en la tarea y otros tres (caso $LN=2$) o dos (caso $LN=4$) serán elementos considerados como distractores que compartirán un atributo con el elemento correcto que continúa la serie. Con todo, el aspecto general de cada una de las tareas es el que se muestra en la Figura 6.



Figura 6. Dos ejemplos de tareas administradas a los estudiantes (2c, izquierda; 4cfd, derecha)

Diseño del cuestionario

Hemos diseñado un cuestionario formado por 19 tareas (Tabla 1). En todas ellas se plantea una serie de alternancia y para resolverlas se debe identificar qué elemento, de los ofrecidos, continua la serie. Para evitar la presencia de tareas isomorfas y poder dar repuesta a los objetivos marcados, hemos utilizado distintos valores de las variables de tarea expuestas anteriormente.

Tabla 1. Configuración de las tareas del cuestionario por variables involucradas

	Tareas					
<i>ND</i>	núcleo-2 (<i>LN=2</i>)			núcleo-4 (<i>LN=4</i>)		
1	color	forma	tamaño	color	forma	tamaño
	Tarea 2c	Tarea 2f	Tarea 2t	Tarea 4c (*)	Tarea 4f (*)	Tarea 4t
2 <i>GL=0</i>	color, forma	color, tamaño		color, forma	color, tamaño	
	Tarea 2cf	Tarea 2ct		Tarea 4cf (*)	Tarea 4ct (*)	
3 <i>GL=1</i>	color, forma, distractor	color, tamaño, distractor		color, forma, distractor	color, tamaño, distractor	
	Tarea 2cfd	Tarea 2ctd		Tarea 4cfd (*)	Tarea 4ctd	

Nota: (*) indica que se han incluido tareas del tipo *_b* para estudiar la repetición de un atributo dentro del núcleo

Procedimiento

Para la realización del estudio se planificaron dos fases diferenciadas: una primera fase de enseñanza y una segunda fase de experimentación. En la fase de enseñanza los estudiantes resolvieron 24 tareas de activación en papel. En estas tareas se planteaban juegos lógicos, tablas de doble entrada y máquina de cambios y los estudiantes debían utilizar los descriptores color, forma y tamaño para resolver. Además, se administraron tres tareas en formato papel y lápiz con series reiterativas para familiarizar a los estudiantes con el modelo de cuestionario que se facilitaría en la fase de experimentación.

En la fase de experimentación se administró un cuestionario formado por las 19 tareas con series reiterativas que involucraban las variables: longitud del núcleo, tipo de descriptor, presencia de distractor y repetición de un atributo en el núcleo (Tabla 1). Se facilitó a cada estudiante una copia del cuestionario en formato papel, con una tarea por página. El alumno debía marcar la solución elegida. Decidimos establecer un límite máximo de treinta minutos para cumplimentar el cuestionario. Esta estimación de tiempo fue suficiente ya que todos los estudiantes finalizaron el cuestionario antes de que el tiempo máximo se cumpliera. Para evitar que las respuestas de los estudiantes estuvieran influidas por las de sus compañeros se ofrecieron cuestionarios con las tareas ordenadas de manera aleatoria.

RESULTADOS

Las respuestas se codificaron como 1 si el alumno eligió correctamente el elemento que continuaba la serie y 0 si lo eligió de forma incorrecta o no ofreció respuesta. Esta codificación responde a al interés por cuantificar el éxito en la resolución de los problemas y no en el análisis de los errores cometidos. En las Tablas 2 y 3 podemos ver la proporción de estudiantes que respondieron correctamente a cada una de las tareas. En la Tabla 2, se observa que cuando se introduce un distractor tanto para series con núcleo-2 como núcleo-4, la proporción de aciertos disminuye considerablemente respecto a las tareas que no contienen distractores. En el caso de las tareas con un solo descriptor en el núcleo, y por lo que respecta a la naturaleza del descriptor (color, forma, tamaño), observamos que tanto para núcleo-2 como para núcleo-4 la tasa de éxito disminuye para el descriptor forma, siendo similar en el caso de los descriptores color y tamaño.

Tabla 2. Proporción de respuestas correctas de las distintas tareas

	2c	2f	2t	2cf	2ct	2cfd	2ctd
N=31	0.935	0.806	0.839	0.903	0.839	0.419	0.129
	4c	4f	4t	4cf	4ct	4cfd	4ctd
N=31	0.806	0.677	0.903	0.871	0.710	0.323	0.161

Tabla 3. Proporción de respuestas correctas en tareas donde se ha introducido una variante repitiendo un descriptor dentro del núcleo

	4c_b	4f_b	4cf_b	4ct_b	4cfd_b
N=31	0.290	0.806	0.774	0.710	0.129

Análisis por longitud del núcleo

Para comparar si a mayor longitud del núcleo, mayor dificultad a la hora de resolver la tarea, hemos definido dos nuevas variables como suma de las respuestas correctas para las tareas núcleo-2 y núcleo-4:

$$n_2 = 2c + 2f + 2t + 2cf + 2ct + 2cfd + 2ctd$$

$$n_4 = 4c + 4f + 4t + 4cf + 4ct + 4cfd + 4ctd$$

Para núcleo-2 se obtiene una media de $\bar{x}_{n_2} = 4.870$ y una desviación típica de $sd_{n_2} = 1.477$; mientras que para núcleo-4, $\bar{x}_{n_4} = 4.451$ y $sd_{n_4} = 1.629$. En la Figura 7 mostramos un histograma con el número de respuestas correctas de las tareas dependiendo de la variable longitud del núcleo. Aplicamos una prueba de Shapiro-Wilk (Shapiro y Wilk, 1965) que nos permitió descartar la normalidad de ambas variables. Como consecuencia, y para valorar la existencia de diferencias de dificultad significativas en función de la longitud del núcleo, recurrimos a un test de Wilcoxon (Siegel, 1956; Wilcoxon, 1945). Los resultados de la prueba ($p = .056$) nos permiten afirmar los niveles de éxitos en las tareas de núcleo-2 ($Mdn = 5$) no difieren significativamente de las de núcleo-4 ($Mdn = 5$).

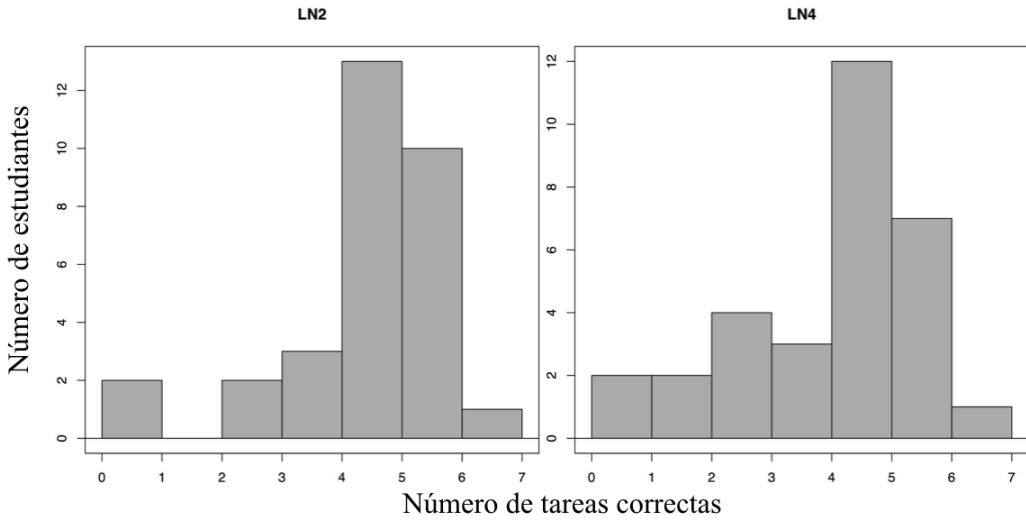


Figura 7. Histogramas con las respuestas correctas para longitud del núcleo-2 (izquierda) y núcleo-4 (derecha)

Análisis por número de descriptores presentes en el núcleo

Para realizar un análisis de la influencia del número de descriptores en la dificultad de la tarea, se definen dos nuevas variables como suma del número de tareas correctas con uno o dos descriptores. A saber, definimos las variables $\widehat{d1}$ (aciertos en tareas con 1 descriptor) y $d2$ (aciertos en tareas con 2 descriptores):

$$\widehat{d1} = 2c + 2t + 2f + 4c + 4t + 4f$$

$$d2 = 2ct + 2cf + 4ct + 4cf$$

Dado que el número de ítems no es el mismo en ambos casos, realizamos una normalización a rango (0,4) de la variable $\widehat{d1}$ multiplicando el valor obtenido por 3/2. Es decir $d1 = \widehat{d1} \cdot 3/2$. Así, obtenemos para los ítems con 1 descriptor una media de $\bar{x}_{d1} = 3.311$ y una desviación típica $sd_{d1} = 1.095$. Para el caso de los ítems con 2 descriptores: $\bar{x}_{d2} = 3.322$ y $sd_{d2} = 1.107$ (Figura 8).

Los resultados del test de Shapiro-Wilk nos impiden afirmar la existencia de normalidad en las variables $d1$ y $d2$. Esto nos condujo a aplicar una prueba de Wilcoxon para determinar si existían diferencias significativas en el número de aciertos en función del número de descriptores. Los resultados de la prueba ($p = .899$) nos permiten afirmar los niveles de éxitos en las tareas con 1 descriptor ($Mdn = 4$) no difieren significativamente de las tareas con 2 descriptores ($Mdn = 4$).

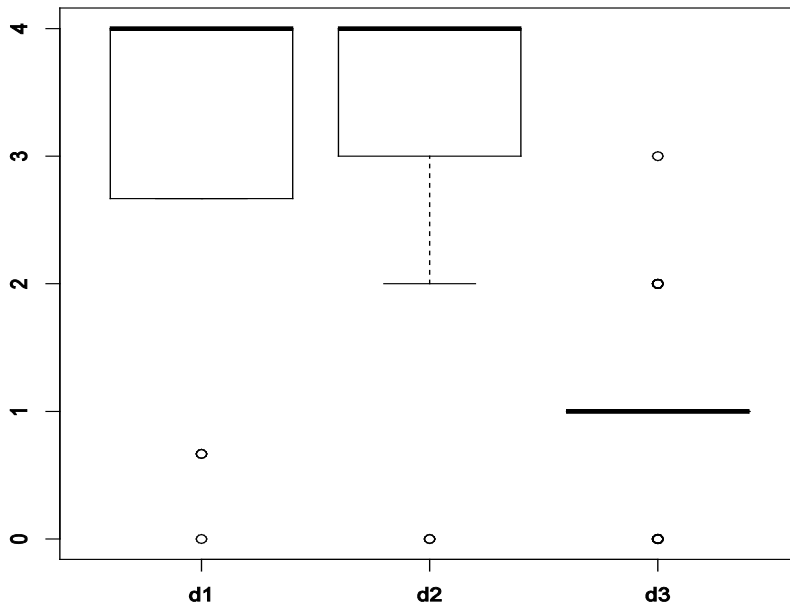


Figura 8. Diagrama de cajas de las variables d1, d2, d3 normalizadas a rango (0,4)

Análisis de la influencia de la presencia de distractores

Para analizar el efecto de introducir un distractor en la tarea de seriación, definimos la variable $d3$ que dará cuenta de los aciertos en los ítems que contienen un distractor. Su definición es:

$$d3 = 2ctd + 2cfd + 4ctd + 4cfd$$

La notación elegida ($d3$) responde al hecho de que en nuestro cuestionario todas las tareas en las que aparecen distractores usan 3 descriptores en el núcleo. El diseño del cuestionario permite la comparación de las variables $d2$ y $d3$ pues los ítems a partir de las cuales se construyen solo se diferencian en la no presencia ($d2$) o presencia ($d3$) de distractores. En la Figura 8 se observan las diferencias entre el número de aciertos en los ítems que contienen o no distractores. Para el caso de la variable $d3$, la media y desviación típica son, respectivamente, $\bar{x}_{d3} = 1.032$ y $sd_{d3} = 0.752$.

Realizamos un test de Wilcoxon para determinar la existencia de diferencias significativas entre $d2$ y $d3$. El número de aciertos en los ítems sin distractores ($Mdn = 4$)

difiere significativamente ($p < .001$, $r = -.606$) del obtenido en los ítems con distractores ($Mdn = 1$).

Análisis de la influencia de la repetición de atributos en el núcleo

Definimos las variables *nob* (aciertos en tareas sin repetición de atributo en el núcleo) y *sib* (aciertos en tareas con repetición de atributo en el núcleo):

$$nob = 4c + 4f + 4cf + 4ct + 4ctd$$

$$sib = 4c_b + 4f_b + 4cf_b + 4ct_b + 4ctd_b$$

En este caso obtenemos como media y desviación típica: $\bar{x}_{nob} = 2.709$, $sd_{nob} = 1.88$ y $\bar{x}_{sib} = 3.387$, $sd_{sib} = 1.188$.

Nuevamente la distribución no normal de las variables nos lleva a plantear la prueba no paramétrica de Wilcoxon para determinar la existencia, o no, de diferencias significativas entre las puntuaciones obtenidas por los estudiantes cuando las tareas contenían o no distractores. Los resultados ($p = .003$, $r = -.378$) nos permiten rechazar la hipótesis de no existencia de diferencias y nos conducen a afirmar que el número de aciertos cuando hay repetición de atributos en el núcleo ($Mdn = 3$) es significativamente menor que cuando no la hay ($Mdn = 4$).

DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES FINALES

Este estudio nos ha permitido explorar la relación complejidad-dificultad en estudiantes de cinco años puestos a resolver tareas de identificación y continuación de patrones lineales reiterativos. Con carácter local, podemos concluir que la longitud del núcleo de repetición del patrón no modifica la dificultad presentada por el alumno a la hora de resolver la serie, pese a que el resultado no es concluyente ya que los valores obtenidos son muy cercanos al nivel de significancia elegido. Parece plausible el hecho de que tareas núcleo-2 y núcleo-4 tengan asociado un nivel de dificultad similar pese a tener distinta complejidad estructural. Esto, que parece chocar con otros planteamientos aquí expuestos, podría fundamentarse teniendo en cuenta que estas tareas tienen longitudes de núcleo cercanas y no se verían fuertemente afectadas por las distintas capacidades de la memoria de trabajo del resolutor. De hecho, es esperable que el efecto de la capacidad de la memoria de trabajo sea más fuerte en tareas de series reiterativas con longitudes de núcleo mayores que obligan al estudiante a retener en su memoria colecciones más extensas de elementos.

Con respecto al número de descriptores presentes en el patrón de repetición (1 o 2), hemos obtenido que no modifican la dificultad de la resolución de la tarea. Además,

podemos afirmar que cuando introducimos tareas en las que un descriptor repite alguno de sus atributos dentro del núcleo de repetición, los estudiantes tienen mayor dificultad para resolverlas; contradiciendo los resultados de Sternberg (1974) y refirmando los de Vitz y Todd (1967, 1969).

Por otra parte, se han estudiado los efectos que produce la aparición de distractores en las tareas con patrones lineales reiterativos. Este tipo de problemas introducen al estudiante en una situación confusa, pues aparecen datos superfluos que le obligan a discernir la información no necesaria de la necesaria. Introducir distractores dificulta considerablemente el éxito en la resolución de la tarea. Esto nos lleva a preguntarnos si no debería la escuela favorecer un abanico más amplio de problemas en los que las situaciones de incertidumbre y las soluciones sean abiertas y no únicas.

Como una limitación de este trabajo podemos indicar el tamaño de la muestra. Sin embargo, el tamaño del efecto observado en los casos que se producen diferencias significativas nos conduce a pensar que un estudio con una muestra mayor produciría resultados similares. Como trabajo futuro nos planteamos aumentar el tamaño de la muestra, analizar las actuaciones con longitudes de núcleo diferentes a 2 y 4, ampliar el rango de edades y llevar a cabo entrevistas clínicas que pongan de manifiesto cuál es el origen de las diferencias de dificultad observadas en este estudio.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha contado con el soporte del proyecto de excelencia Prometeo 2016/413 de la Conselleria d'Educació Investigació, Cultura i Esport de la Generalitat Valenciana, del proyecto EDU2017-84377-R (MINECO/FEDER) del Ministerio de Economía, Industria y Competitividad y del V Premi d'Investigació *Prevere Bernat Beny Montañana* "Matemáticas y Discapacidad: una propuesta para la inclusión".

REFERENCIAS

- Alsina, Á., y Giralt, I. (2017). Introducción al álgebra en educación infantil: un itinerario didáctico para la enseñanza de los patrones. *Didácticas Específicas*, 16, 113–129.
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L., y Stylianou, D. (2018). Implementing a Framework for Early Algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds. ICME-13 Monographs* (pp. 27–49). Cham, Heidelberg: Springer International Publishing. http://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

- Boule, F. (1995). *Manipular, organizar, representar. Iniciación a las matemáticas*. Madrid: Narcea.
- Brownell, W. A. (1942). Problem Solving. En N. B. Henry (Ed.), *The Psychology of Learning*. Chicago: University of Chicago Press.
- Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada, España: Comares.
- Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la familia de problemas aritméticos-algebraicos. Universitat de València (Estudi General)*. Univeristat de València.
- Fyfe, E. R., Evans, J. L., Matz, L. E., Hunt, K. M., & Alibali, M. W. (2017). Relations between patterning skill and differing aspects of early mathematics knowledge. *Cognitive Development*, 44, 1–11. <http://doi.org/10.1016/j.cogdev.2017.07.003>
- Greeno, J. G., y Simon, H. A. (1974). Processes for sequence production. *Psychological Review*, 81(3), 187–198. <http://doi.org/http://dx.doi.org/10.1037/h0036340>
- Kamii, C., Rummelsburg, J., y Kari, A. (2005). Teaching arithmetic to low-performing, low-SES first graders. *Journal of Mathematical Behavior*, 24(1), 39–50.
- Kidd, J. K., Pasnak, R., Gadzichowski, K. M., Gallington, D. A., McKnight, P., Boyer, C. E., y Carlson, A. (2014). Instructing First-Grade Children on Patterning Improves Reading and Mathematics. *Early Education and Development*, 25(1), 134–151. <http://doi.org/10.1080/10409289.2013.794448>
- Kieran, C. (Ed.). (2018). *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds. ICME-13 Monographs*. Cham, Heidelberg: Springer International Publishing. <http://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5>
- Kilpatrick, J. (1978). Variables and Methodologies in Research on Problem Solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical Problem Solving: Papers from a Research Workshop* (pp. 7–20). Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.
- Morales, R., Cañadas, M. C., y Castro, E. (2017). Generación y continuación de patrones por dos alumnas de 6-7 años en tareas de seriaciones. *PNA*, 11(4), 233–252.
- Mulligan, J., y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 33–49. <http://doi.org/10.1007/BF03217544>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Orton, J., y Orton, A. (1999). Pattern and the approach to algebra. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104–120). London, UK: Cassell.

- Owen, A. (1995). In Search of the Unknown: A Review of Primary Algebra. En J. Anghileri (Ed.), *Children's Mathematical Thinking in the Primary Years* (pp. 124–147). London, UK: Continuum.
- Papic, M. (2015). An Early Mathematical Patterning Assessment: identifying young Australian Indigenous children's patterning skills. *Mathematics Education Research Journal*, 27(4), 519–534. <http://doi.org/10.1007/s13394-015-0149-8>
- Papic, M., Mulligan, J., y Mitchelmore, M. (2011). Assessing the Development of Preschoolers' Mathematical Patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(3), 237. <http://doi.org/10.5951/jresmetheduc.42.3.0237>
- Puchaslka, E., y Semadeni, Z. (1987). Children's reactions to verbal arithmetic problems with missing, surplus or contradictory data. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 9–16.
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1989). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.
- Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Hofer, K. G., y Farran, D. C. (2017). Early Math Trajectories: Low-Income Children's Mathematics Knowledge From Ages 4 to 11. *Child Development*, 88(5), 1727–1742. <http://doi.org/10.1111/cdev.12662>
- Rittle-Johnson, B., Zippert, E. L., y Boice, K. L. (2018). The roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Childhood Research Quarterly*. <http://doi.org/10.1016/j.ecresq.2018.03.006>
- Rustigian, A. (1976). *The ontogeny of pattern recognition: significance of colour and form in linear pattern recognition among young children*. PhD thesis, University of Connecticut.
- Sarama, J., y Clements, D. H. (2004). Building Blocks for early childhood mathematics. *Early Childhood Research Quarterly*, 19(1), 181–189. <http://doi.org/10.1016/j.ecresq.2004.01.014>
- Sarama, J., y Clements, D. H. (2009). Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children. New York: Routledge.
- Shapiro, S. S., y Wilk, M. B. (1965). An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples). *Biometrika*, 52(3/4), 591. <http://doi.org/10.2307/2333709>
- Siegel, S. (1956). *Nonparametric statistics for the behavioral sciences*. New York: McGraw-Hill.
- Simon, H. A. (1972). Complexity and the representation of patterned sequences of symbols. *Psychological Review*, 79(5), 369–382. <http://doi.org/10.1037/h0033118>

- Sternberg, L. (1974). *An analysis of achievement characteristics of high and low performers in preschool, kindergarten and first-grade classes on pattern recognition tasks*. PhD Thesis. University of Connecticut.
- Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 18–30). London, UK: Cassell.
- Vitz, P. C., y Todd, T. C. (1967). A model of learning for simple repeating binary patterns. *Journal of Experimental Psychology*, 75(1), 108–117. <http://doi.org/10.1037/h0024881>
- Vitz, P. C., y Todd, T. C. (1969). A coded element model of the perceptual processing of sequential stimuli. *Psychological Review*, 76(5), 433–449. <http://doi.org/10.1037/h0028113>
- Warren, E., y Cooper, T. J. (2007). Repeating patterns and multiplicative thinking: Analysis of classroom interactions with 9 year old students that support the transition from known to the novel. *Journal of Classroom Instruction*, 41, 7–11.
- Weber, K., y Leikin, R. (2016). Recent advances in research on problem solving and problem posing. En A. Gutiérrez, G. C. Leder, y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 353–382). Rotterdam: Sense Publishers. http://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_10
- Wilcoxon, F. (1945). Individual Comparisons by Ranking Methods. *Biometrics Bulletin*, 1(6), 80–83.
- Zazkis, R., y Liljedahl, P. (2002). Generalization of Patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 379–402. <http://doi.org/10.1023/A:1020291317178>