Eötvös Loránd Tudományegyetem

Informatikai Kar

Numerikus Analízis Tanszék

Racionális függvényrendszerek alkalmazása a jelfeldolgozásban

Doktori értekezés tézisei

Lócsi Levente

Témavezető: Schipp Ferenc, professor emeritus, DSc

Budapest, 2014

Doktori iskola:	ELTE Informatika Doktori Iskola
Az iskola vezetője:	Benczúr András, egyetemi tanár, DSc
Doktori program:	Numerikus és szimbolikus számítások
A program vezetője:	Járai Antal, professor emeritus, DSc

Bevezetés

Értekezésünk témája komplex racionális függvényrendszerek tanulmányozása, illetve ezek alkalmazási lehetőségeinek vizsgálata a digitális jelfeldolgozás területén, különös tekintettel EKG görbék analízisére. A doktori értekezés mögött álló kutatómunkát 2008-tól az ELTE Informatika Doktori Iskola ösztöndíjas doktoranduszaként, majd 2011-től az ELTE Informatikai Kar Numerikus Analízis Tanszékének tanársegédjeként végeztem Schipp Ferenc professzor úr témavezetésével.

Komplex racionális függvényeken egyszerű tört alakjában felírható, komplex változós, komplex értékű függvényeket értünk. Jelfeldolgozás szempontjából ezeknek a komplex egységkörön felvett értékeit vizsgáljuk, majd vetjük össze a feldolgozni kívánt jellel. Matematikai szempontból pedig érdekes kérdés többek között az ezekből képzett ortogonális rendszerek, a gyors feldolgozást lehetővé tevő FFT-szerű algoritmusok vizsgálata, kidolgozása.

Az EKG görbék, avagy ElektroKardioGramok az emberi szív működése során bekövetkező elektromos változásokat rögzítik. Ezek vizsgálata igen elterjedt eszköz az orvosok kezében különféle betegségek diagnosztizálása céljából. Manapság a hagyományos papír alapú megoldáson túl, vagy ahelyett sokszor digitális formában tárolják és továbbítják az EKG felvételeket. Ezek hatékony és megbízható feldolgozása: tömörítése, zajszűrése, szegmentálása, elemzése egyre gyakoribb és igen összetett feladat.

Komplex racionális függvények, illetve függvényrendszerek EKG görbék esetében való felhasználási lehetőségeinek alaposabb vizsgálatát – az utóbbi évtizedek racionális approximációval kapcsolatos matematikai eredményei, és a jelfeldolgozásban történő egyre intenzívebb alkalmazása mellett – az a tény is motiválja, hogy már egyszerű racionális függvények képe is nagyon hasonlít az EKG jellegzetes részeihez. Néhány paraméter megfelelő megválasztásával pedig egy-egy EKG-szegmenst nagyon jól közelítő függvényt kaphatunk.

Természetesen a paraméterek jó megválasztásához bizonyos optimalizációs algoritmusokra van szükségünk. Ezek vizsgálata, megfelelő algoritmusok keresése, továbbfejlesztése is kutatásunk egyik iránya. Mindezeken túl a digitális jelfeldolgozásban történő alkalmazás megköveteli a folytonos esetekben, analitikus módon definiált függvények egyfajta diszkretizációját, ezek további, speciális lehetőségei és tulajdonságai is vizsgálatunk tárgyát képezik.

Matematikai háttér

Jelölje $\mathbb{C}$ a komplex számok halmazát, $\mathbb{D} := \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$ a „diszket”, azaz a komplex egységkör belsejét, $\mathbb{T} := \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$ a „tóruszt”, azaz a komplex egységkört, valamint $\mathbb{D}^* := \mathbb{C} \setminus (\mathbb{D} \cup \mathbb{T})$. Természetes számok alatt az $\mathbb{N} := \{ 1, 2, 3, \dots \}$ halmazt fogjuk érteni. A $\mathbb{D}$-n analitikus és $\mathbb{D} \cup \mathbb{T}$-n folytonos függvények halmazát, azaz a „diszk algebrát” jelölje $\mathcal{A}$. Továbbá vezessük be a

$$\langle .,. \rangle : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}, \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cdot \overline{g}(e^{it}) \, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}} f(z) \cdot \overline{g}(z) \, \mathrm{d}z$$

skaláris szorzatot, melyben tehát a $\mathbb{T}$-n vett szorzatintegrált számítjuk.

Induljunk ki a következő elemi racionális függvényekből:

$$\varphi_n(z) := \frac{1}{(1 - \overline{a_n} z)^{m_n}} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{ 1/\overline{a_n} \} ; \ m \in \mathbb{N}; \ n = 1, \dots, m),$$

ahol $a_n \in \mathbb{D}$ $(n = 1, \dots, m)$ paraméterek és $m_n = \sum_{i \le n} \chi(a_i = a_n)$ pedig az a_n paraméter multiplicitása. Megfigyelhetjük, hogy φ_n-nek m_n-edrendű pólusa van az $1/\overline{a_n} \in \mathbb{D}^*$ helyen, továbbá $\Phi := (\varphi_n : n = 1, \dots, m) \subset \mathcal{A}$. Például az $a, a, b, b \in \mathbb{D}$ paraméterekkel a következő függvényeket nyerjük:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{1 - \overline{a} z}, \ \varphi_2(z) = \frac{1}{(1 - \overline{a} z)^2}, \ \varphi_3(z) = \frac{1}{1 - \overline{b} z}, \ \varphi_4(z) = \frac{1}{(1 - \overline{b} z)^2}.$$

Ezeket a függvényeket jelfeldolgozás céljából az egységkörön vizsgáljuk, tehát egy f függvény esetén az $f(e^{it})$ $(t \in [0, 2\pi])$ értékeket, ezek valós, illetve képzetes részét. Kiderül, hogy 3–4 paraméter, illetve hozzájuk tartozó együtthatók megfelelő megválasztásával már igen jó közelítését kaphatjuk EKG görbék szegmenseinek. Kérdés azonban, hogy hogyan keressük meg a megfelelő paramétereket, és hogyan határozzuk meg az ismeretlen együtthatókat.

Az együtthatók kiszámítására kínálkozik egyszerű módszer, ha ortogonális vagy ortonormált rendszerből indulunk ki. A Φ lineárisan független rendszerre a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást alkalmazva egy ortonormált rendszert, úgynevezett Malmquist–Takenaka-rendszert kapunk a fenti skaláris szorzatra nézve, jelölje $\Psi := (\psi_n \,:\, n = 1, \ldots, m)$. Ennek elemei kifejezhetők a

$$B_a(z) := \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \qquad (a \in \mathbb{D};\ z \in \mathbb{C} \setminus \{\, 1/\overline{a}\,\})$$

Blaschke-függvények segítségével, méghozzá

$$\psi_n(z) = \frac{\sqrt{1 - |a_n|^2}}{1 - \overline{a_n}z} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} B_{a_k}(z) \qquad (z \in \mathbb{C};\ n = 1, \ldots, m),$$

amely alak egyúttal ψ_n értékeinek egy kényelmesebb kiszámítási módját is sugallja az ortogonalizációs eljárás tényleges végrehajtása helyett. Megállapíthatjuk, hogy a Φ és Ψ rendszerek által kifeszített m-dimenziós alterek megegyeznek, azaz $\operatorname{span}\Phi = \operatorname{span}\Psi$.

A Malmquist–Takenaka-rendszer ortonormáltságát kihasználva valamely adott $f \in \mathcal{A}$ függvény $\mathcal{P}_\Psi f = \mathcal{P}_{a_1,\ldots,a_m} f$ ortogonális projekcióját a $\operatorname{span}\Psi$ altérre kiszámíthatjuk a következő formula alapján:

$$\mathcal{P}_\Psi f = \sum_{n=1}^{m} \langle f, \psi_n \rangle\, \psi_n,$$

tehát az ismeretlen együtthatókat az $\langle f, \psi_n \rangle$ skalárszorzatok adják.

A megfelelő paraméterek keresése egy újabb feladat. A problémát a következőképpen formalizálhatjuk. Jelölje $\mathcal{E}_\Psi f = \mathcal{E}_{a_1,\ldots,a_m} f$ az f függvény legjobb megközelítését $\|.\|_2$-ban a $\operatorname{span}\Psi$ altéren, azaz

$$\mathcal{E}_\Psi f := \|f - \mathcal{P}_\Psi f\|_2 = \sqrt{\langle f - \mathcal{P}_\Psi f, f - \mathcal{P}_\Psi f\rangle}.$$

A célunk egy (a $\mathbb{T}$-n felvett értékei által) adott $f \in \mathcal{A}$ függvény – felfoghatjuk így az EKG görbe egy szegmensét – és $m \in \mathbb{N}$ rögzített dimenziószám esetén az $\mathcal{E}_\Psi f$ érték minimalizálása a rendszer $a_1, a_2, \ldots, a_m$ paramétereinek „jó” megválasztása által. A paraméterek optimalizálásának megvalósítására alkalmazható a Nelder–Mead-féle szimplex algoritmus.

Természetesen gépi számításaink során a függvények és a skaláris szorzat $\mathbb{T}$ egyenletes felosztása mentén diszkretizált változataival dolgozunk. Például egy EKG-szegmens általában 200–300 mintavételezett értékből áll össze.

Az értekezés tézisei

Az alábbiakban tézisek formájában összefoglaljuk kutatómunkánk eredményeit. Téziseink kimondása után tömören áttekintjük a releváns eredményeinket, utalva az értekezésnek az azokat részletesebben ismertető fejezeteire, és felsorolva a kapcsolódó publikációinkat is.

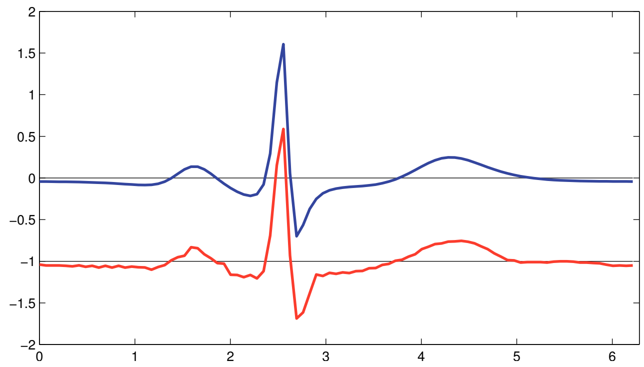
1. tézis: EKG görbék racionális approximációja

Kidolgoztuk EKG jelek feldolgozásának komplex racionális függvényrendszereken alapuló módszerét. A rendszerek paramétereinek közelítő meghatározására eredményesen alkalmaztuk a Nelder–Mead-féle szimplex algoritmust. A módszer EKG görbék szegmenseinek lényegre törő és elegáns reprezentációját teszi lehetővé, felhasználásával egyúttal zajszűrést és hatékony, kis veszteséggel járó tömörítést is nyerhetünk.

Ezzel a tézissel a kutatómunka központi célját és eredményét foglaltuk össze. A tárgyalt függvényrendszerek már pusztán ránézésre is igen emlékeztettek az EKG görbék egyes részeihez, és kiderült, hogy a paramétereik jó megválasztásával nagyszerű közelítést érhetünk el, sőt a paraméterek akár közvetlen diagnosztikai információt is hordozhatnak. Kutatásaink során rábukkantunk a Nelder–Mead-módszerre, amellyel először sikerült a szóban forgó paraméterek optimális értékeit jól megközelíteni, akár az azokra vonatkozó a priori ismeretek nélkül.

Az alkalmazott racionális függvényrendszereket, köztük az ortogonális Malmquist–Takenaka-rendszereket és a – többek között ezek megadásában is fontos szerepet játszó – Blaschke-függvényeket a 2. fejezetben fejtettük ki részletesen, az 5. fejezet pedig ismerteti a Nelder–Mead-féle algoritmust. Végül, a 6. fejezetben ezek megkoronázásaképpen bemutattuk, hogyan lehet e módszerek segítségével valódi EKG jeleket feldolgozni.

Első kapcsolódó munkánkban a módszer alkalmazhatóságát vizsgáltuk mesterségesen generált jelek esetében [1], majd az eljárást több nemzetközi konferencián és folyóiratban is bemutattuk [4, 8, 11], valamint a kapcsolódó



1. ábra. Egy EKG-szegmens (alul, piros) és racionális közelítése (felül, kék).

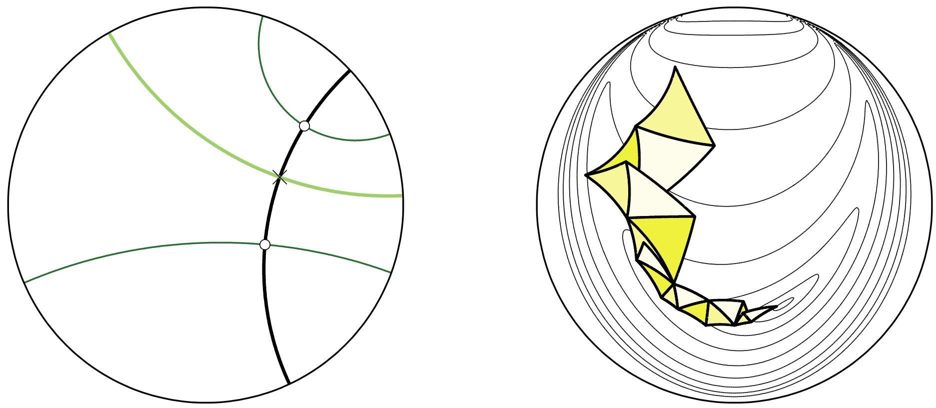
MATLAB eszközeinket is publikáltuk [9, 10]. Az 1. ábrán mutatunk egy példát egy valódi EKG felvétel egy szegmensére, valamint annak racionális függvények alkalmazásával nyert közelítésére.

2. tézis: Hiperbolikus Nelder–Mead-algoritmus

Elkészítettük a Nelder–Mead-féle szimplex módszernek a hiperbolikus síkra, illetve térre adaptált változatát a Poincaré-féle körmodellt, illetve annak háromdimenziós analogonját használva. Az eredeti módszer több ismert tulajdonságát is átültettük az új, hiperbolikus változatokra. Az algoritmus implementációja is rendelkezésünkre áll.

Míg az eredeti algoritmus az n-dimenziós euklideszi térben működik, addig a mi problémánk a komplex egységkörlemezhez köthető. A két halmaz bijektív megfeleltetése mellett felmerült közvetlenül a Nelder–Mead-módszer adaptálása is a Bolyai–Lobacsevszkij-féle hiperbolikus geometria Poincaré-féle körmodelljére. A hiperbolikus geometria szerkesztéseinek megvalósítása után magát az algoritmust is implementáltuk, elkészült annak hiperbolikus változata 2 és 3 dimenzióban. Az eredeti – a gyakorlatban igen széles körben alkalmazott – algoritmusnak meglepően kevés konvergenciával kapcsolatos tulajdonsága ismert. A publikált állítások közül többnek bebizonyítottuk az érvényességét a hiperbolikus esetben is.

Teljes egészében a hiperbolikus Nelder–Mead-algoritmus bemutatásának



2. ábra. Balra: A hiperbolikus síkgeometria néhány alapvető eleme. Két pontra illesztett egyenes, a pontokban az egyenesre állított merőlegesek, valamint a szakaszfelező merőleges. Jobbra: A Nelder–Mead-algoritmus a hiperbolikus síkon.

szenteltük az értekezés 5. fejezetét, ahol ismertetésre kerül az eredeti algoritmus, szó esik a hiperbolikus szerkesztések megvalósításáról, magáról az algoritmus új, hiperbolikus változatáról, valamint a kapcsolódó állítások bizonyításáról.

Ez a munkánk önállóan a [13] írásunkban jelent meg, valamint részét képezi a [4, 8] műveknek is. A 2. ábra szemlélteti a hiperbolikus geometria néhány alapvető elemét a Poincaré-féle körmodellben, valamint a szimplex módszer működését az egységkörlemezen. Ebben az esetben a szimplex egy hiperbolikus háromszög.

3. tézis: Diszkretizációs tulajdonságok

A szóban forgó racionális rendszereknek több diszkretizációval kapcsolatos tulajdonságát is megvizsgáltuk. A rendszerekhez kapcsolódó nem egyenletes felosztásoknak megadtuk egy hatékonyabb szekvenciális kiszámítási algoritmusát. FFT-szerű konstrukciókat implementáltunk. Újabb ortogonális rendszereket vezettünk be a Dirichlet-féle magfüggvény szeletei által.

A szóban forgó rendszereket folytonos esetben definiáltuk, azonban ezek diszkretizációja elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt fontos. Kiderül, hogy míg a hagyományos trigonometrikus rendszer egy egyenletes felosztás mentén ad megfelelő diszkretizációs alappontokat, addig ezen általánosabb rendszerek esetében nem egyenletes felosztások vizsgálandók.

A diszkretizációs tulajdonságokhoz köthető fogalmakat és eredményeket a 3. fejezetben tárgyaltuk. Ebben a témakörben fontos szerep jut többek között a Blaschke-függvények argumentum-függvényének, valamint racionális szorzat-rendszereknek is.

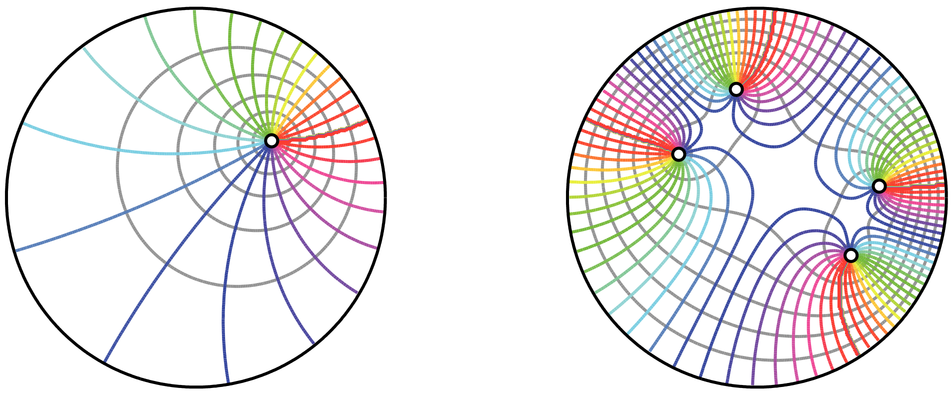
A [2] dolgozatban egyfajta magyarázó leírását adtuk a témakörnek, kiegészítve egy alkalmazási példával EKG görbék esetén. A nem egyenletes felosztások numerikus számítására adott hatékony szekvenciális eljárásunkat az [5] cikkben publikáltuk. Az említett újabb ortogonális rendszereket a [6] műben írtuk le. Az FFT-szerű konstrukciók implementációját pedig [7] rögzíti.

4. tézis: Egy inverz probléma megoldása

Megadtuk és bizonyítottuk, hogy mely esetekben állhat elő valamely előírt pontnégyes kettő darab kéttényezős Blaschke-szorzat zérushelyeinek halmazaként. Megengedett esetben beláttuk végtelen sok megoldás létezését, konstrukciót adtunk ezek előállítására. Bevezettük reciprok Blaschke-függvények fogalmát, bizonyítottuk ezek létezését és egyértelműségét.

Blaschke-szorzatok kompozíció lehetővé teszik szorzatrendszerek, és így FFT algoritmusok szerkesztését. Belátható, hogy ha ismerjük Blaschke-szorzatok paramétereit, akkor kompozíciójuk – egy újabb Blaschke-szorzat – zérushelyeit megkaphatjuk polinomiális egyenletek megoldása által. Felmerül a kérdés a fordított esetben: a kompozíció zérushelyeit ismerve következtethetünk-e az eredeti paraméterekre?

Ezt az inverz problémát megoldottuk a legegyszerűbb nem triviális esetben, méghozzá kettő darab kéttényezős Blaschke-szorzat kompozícióját tekintve. A megoldás részleteit a [12] írás alapján készült 4. fejezet tárgyalja. Egy Blaschke-függvényt, illetve egy példát a szóban forgó kompozícióra a 3. ábrán láthatunk. A különféle árnyalatú vonalak a komplex függvényértékek abszolút értékét, valamint argumentumát jelölik az egységkör belsejében.



3. ábra. Balra: Egy Blaschke-függvény. Jobbra: Kettő darab kéttényezős Blaschke-szorzat kompozíciója. A zérushelyeket mindkét ábrán jelöltük.

5. tézis: Eszköztárak a MATLAB rendszerhez

A kutatómunka során több programot készítettünk a Matlab numerikus matematikai programcsomag felhasználásával. Az elkészített programok javát eszköztárak formájában publikáltuk, amelyek szabadon letölthetők. Eszközeink a feldolgozott témakörök alaposabb megértését, oktatását, tanulmányozását és igényes szemléltetését is lehetővé teszik.

Kutatásaink során általában a MATLAB rendszert alkalmaztuk, mind az elméleti kutatások támogatására, mind a gyakorlati jelfeldolgozási problémák kezelésére. Az egyes témakörökhöz kapcsolódó programjaink javát összegyűjtöttük, úgynevezett eszköztárakba, *toolbox*-okba rendeztük, és szabadon elérhetővé tettük. Mindvégig különös figyelmet fordítottunk a szóban forgó konstrukciók igényes szemléltetésére, illetve azok használatának minél egyszerűbbé tételére.

Ilyen eszköztáraink a következők.

- *RAIT: Rational Approximation and Interpolation Toolbox.* Ez a csomag többek között az alkalmazott racionális rendszerek megvalósítását, illetve az optimalizációs algoritmusokat foglalja magába. Kapcsolódó publikációink a [9, 10] művek. Az eszköztár letölthető az alábbi címen:

`http://numanal.inf.elte.hu/~locsi/rait/`

- *FFTRatSys.* Ebben a racionális szorzatrendszerekkel és FFT-szerű algoritmusokkal kapcsolatos programjainkat gyűjtöttük össze, melyeket [7] dokumentál. Kiemeljük, hogy ez az eszköztár erőteljesen kihasználja az újabb Matlab verziók által már nyelvi konstrukciók szintjén megvalósítható objektumorientált lehetőségeket is. Elérhetősége:

  `http://numanal.inf.elte.hu/~locsi/fftratsys/`

- *HypNM.* A hiperbolikus geometria Poincaré-féle körmodelljén és háromdimenziós analogonján teszi lehetővé a különféle szerkesztések programozását, vizualizációját, valamint a Nelder–Mead-algoritmus hiperbolikus változatának futtatását. A [13] cikkünkben jut szerephez.

  `http://numanal.inf.elte.hu/~locsi/hypnm/`

Jó pár Matlab programunk alkalmazására adtunk példát néhány egyszerűbb feladat megoldásán keresztül a disszertáció B. függelékében. Az A. függelék pedig néhány számítást, bizonyítást tartalmaz a felvonultatott matematikai állításokat alátámasztandó.

Hivatkozások

[1] ~: Approximating poles of complex rational functions, *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica,* **1**/2 (2009), 169–182.

[2] ~: Discrete approximation of ECG signals, *Proc. 8th Int. Conf. on Appl. Inf. (ICAI),* **2** (2010), 45–52.

[3] ~: Az amőbamódszer: egy túl egyszerű algoritmus?, *Adsumus VIII. (Tanulmányok a X. Eötvös Konferencia előadásaiból)*, **8** (2010), 235–248.

[4] Fridli Sándor, ~, Schipp Ferenc: Rational function systems in ECG processing, *Proc. 13th Int. Conf. Computer Aided Systems Theory (EUROCAST), Part I (szerk. Roberto* Moreno–Díaz *et. al.),* Springer LNCS 6927 (2011), 88–95.

[5] ~: Calculating non-equidistant discretizations generated by Blaschke products, *Acta Cybernetica,* **20** (2011), 111–123.

[6] ~: Constructing orthogonal systems using Blaschke products, *Proc. 8th Joint Conf. on Math. and Comp. Sci. (MaCS),* (2011), 43–50.

[7] ~: Rational FFT implementation in Matlab, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.,* **36** (2012), 241–254.

[8] Fridli Sándor, Kovács Péter, ~, Schipp Ferenc: Rational modeling of multi-lead QRS complexes in ECG signals, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.,* **37** (2012), 145–155.

[9] Kovács Péter, ~: RAIT, the Rational Approximation and Interpolation Toolbox for Matlab, *Proc. 35th IEEE Int. Conf. on Telecomm. and Sig. Proc. (TSP),* (2012), 671–677.

[10] Kovács Péter, ~: RAIT, the Rational Approximation and Interpolation Toolbox for Matlab, with experiments on ECG signals, *Int. J. of Advances in Telecommunications, Electrotechnics, Signals and Systems (IJATES^2),* **1**/2–3 (2012), 67–75.

[11] ~, Kovács Péter: Processing ECG signals using rational function systems, *Proc. 7th IEEE Int. Symp. on Medical Meas. and Appl. (MeMeA)*, (2012), 123–127.

[12] ~: An inverse problem with compositions of Blaschke products, *Mathematica Pannonica* **24**/1 (2013), 141–156.

[13] ~: A hyperbolic variant of the Nelder–Mead simplex method in low dimensions, *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica,* **5**/2 (2013), 169–183.

[14] ~: Racionális függvényrendszerek és alkalmazásuk a jelfeldolgozás területén, *Tíz éves az ELTE Eötvös József Collegium Informatikai Műhelye* (szerk.: Csörnyei Zoltán), Eötvös József Collegium (2014), 286–304.