

# Geodetikus gömbök metszetéről

DOKTORI ÉRTEKEZÉS

## Horváth Márton

Témavezető: Csikós Balázs  
tanszékvezető egyetemi docens  
a matematikai tudományok kandidátusa

Matematika Doktori Iskola  
iskolavezető: Laczkovich Miklós

Elméleti Matematika Doktori Program  
programvezető: Szűcs András



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR  
GEOMETRIAI TANSZÉK  
Budapest, 2013

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>3</b>
1.1. Riemann-geometriai ismeretek . . . . .	3
1.2. Speciális Riemann-sokaságok . . . . .	10
1.3. A Kneser–Poulsen-sejtés . . . . .	15
1.4. A $KP_k$ tulajdonságok . . . . .	16
<b>2. Két gömb metszete</b>	<b>21</b>
2.1. Aszimptotika alig metsző tartományok metszetének térfogatára . .	21
2.2. Geodetikus gömbök Weingarten-leképezése . . . . .	27
2.3. Harmonikusság és két geodetikus gömb metszete . . . . .	30
2.4. A $KP_2^-$ tulajdonságú sokaságok . . . . .	34
2.5. $KP_2^-$ tulajdonság és a harmonikusság ekvivalenciája . . . . .	37
2.6. Egy globális tétel . . . . .	42
<b>3. Három gömb metszete</b>	<b>45</b>
3.1. Egy háromszög minimális fedősugara . . . . .	45
3.2. Rauch összehasonlítási tétele . . . . .	48
3.3. Egy lemma . . . . .	53
3.4. Fő eredmények három gömbre . . . . .	56
<b>4. Kiegészítés: A D'Atri-terek ekvivalens jellemzései</b>	<b>59</b>
<b>Jelölések</b>	<b>64</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>66</b>
<b>Összefoglalás</b>	<b>70</b>
<b>English Summary</b>	<b>71</b>

# Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Csikós Balázsnak az érdekes témát, a közös kutatás lehetőségét, és az értekezés elkészítésében nyújtott segítségét.

# 1. fejezet

## Bevezetés

### 1.1. Riemann-geometriai ismeretek

Ebben a szakaszban áttekintjük a szükséges Riemann-geometriai definíciókat és tételeket bizonyítások nélkül.

Legyen  $M$  egy  $\mathcal{C}^\infty$ -osztályú differenciálható sokaság. Tegyük fel, hogy minden  $P \in M$  pontjára a  $T_P M$  érintőtéren adott egy  $g_P$  szimmetrikus pozitív definit bilineáris forma. A  $g_P$  formák együtt egy  $g$  formát alkotnak a  $TM$  érintőnyalábon. Ha  $g$  az atlaszhoz tartozó koordinátázásra nézve sima, akkor az  $(M, g)$  párt *Riemann-sokaságnak*, a  $g$  függvényt *Riemann-metrikának* nevezzük. Általában  $g(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  helyett egyszerűen csak  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ -t, a  $g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  helyett pedig  $\|\mathbf{v}\|^2$ -et írunk, ahol  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_P M$  érintővektorok.

Egy  $c: [a, b] \rightarrow M$  szakaszonként  $\mathcal{C}^1$  görbe *ív hosszát*  $\ell(c)$ -vel jelöljük, és az

$$\ell(c) = \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} \|\dot{c}'(t)\| dt,$$

formulával definiáljuk, ahol  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$  olyan felosztás, hogy  $c$  az  $(a_{i-1}, a_i)$  intervallumokon  $\mathcal{C}^1$ . Ha  $M$  összefüggő, akkor két  $P, Q \in M$  pont *távolságát* a  $P$ -t  $Q$ -val összekötő folytonos és szakaszonként  $\mathcal{C}^1$  görbék hosszának infimumaként definiáljuk, és  $d(P, Q)$ -val jelöljük. Belátható, hogy  $d$  metrika, és az  $M$  sokaság eredeti topológiáját indukálja.

Ha  $N \subset M$  egy részsokaság egy  $(M, g)$  Riemann-sokaságban, akkor adódik egy természetes  $g^N$  Riemann-metrika az  $N$ -en: a  $g$  metrika  $N$ -re való megszorítása, azaz  $g^N(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := g(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  minden  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_P N \subset T_P M$ -re. Az  $(N, g^N)$  párt az  $(M, g)$  *Riemann-részsokaságának* nevezzük. Ha  $P, Q \in N \subset M$  a részsokaság pontjai, akkor az őket összekötő görbéket tekinthetjük az  $N$ , illetve az  $M$

sokaságban is, az így adódó távolságokra a  $d^N(P, Q)$ , illetve a  $d^M(P, Q)$  jelölést használjuk. Ezek általában nem egyeznek meg, közöttük a  $d^M(P, Q) \leq d^N(P, Q)$  egyenlőtlenség áll fenn.

Az  $(M_1, g_1)$  és az  $(M_2, g_2)$  Riemann-sokaságok közti  $f$  diffeomorfizmust akkor nevezzük *izometriának*, ha  $g_1 = f^*g_2$  teljesül. Ekkor  $f$  nyilvánvalóan távolságtartó is:  $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$  minden  $P, Q \in M_1$  pontra.

Jelölje  $\mathcal{B}(P, r)$  a  $P$  középpontú  $r$  sugarú nyílt gömböt, azaz a  $P$ -től kisebb, mint  $r$  távolságra levő pontok halmazát abban a térben, ahol a  $P$  pont fekszik (akár egy Riemann-sokaságban, akár az euklideszi térben). A  $\mathcal{B}(P, r)$  gömb lezártjára a  $\bar{\mathcal{B}}(P, r)$ , míg a határára a  $\Sigma(P, r)$  jelölést használjuk. Az  $n$  dimenziós euklideszi térben fekvő  $\Sigma(\mathbf{0}_n, 1)$  egységgömbfelület  $(n - 1)$  dimenziós térfogatát  $\omega_{n-1}$ -gyel jelöljük.

Az  $M$ -en értelmezett sima vektormezők terét  $\mathfrak{X}(M)$ -mel jelöljük.

**1.1. definíció.** Egy  $M$  differenciálható sokaságon a  $\nabla$  *konnexió* egy olyan

$$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

leképezés, mely minden  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  vektormezőre és  $f \in C^\infty(M)$  sima függvényre eleget tesz a következő feltételeknek ( $\nabla(X, Y)$  helyett általában  $\nabla_X Y$ -t írunk):

- (i) mindkét változójában  $\mathbb{R}$ -lineáris,
- (ii)  $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ ,
- (iii)  $\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f \nabla_X Y$ .

A (ii) feltételből következik, hogy  $\nabla_X Y$  egy  $P \in M$ -beli értékéhez az  $X$  vektormezőt elegendő csak a  $P$  pontban ismerni, így egy  $\mathbf{v} \in T_P M$  érintővektor esetén értelmezhető a  $\nabla_{\mathbf{v}} Y \in T_P M$  érintővektor. Ha egy  $\nabla$  konnexióra a

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

feltétel is teljesül, akkor azt mondjuk, hogy  $\nabla$  *torziómentes* vagy *szimmetrikus*. Egy  $(M, g)$  Riemann-sokaságon adott  $\nabla$  konnexiót akkor nevezzük a  $g$  Riemann-metrikával *kompatibilisnek*, ha fennáll az

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

egyenlőség minden  $X, Y, Z$  sima vektormezőre.

**1.2. Riemann-geometria alaptétele.** Egy  $(M, g)$  Riemann-sokaságon pontosan egy olyan torziómentes konnexió létezik, mely a  $g$  Riemann-metrikával kompatibilis. Ezt a konnexiót az  $(M, g)$  Levi-Civita-konnexiójának nevezzük.

Egy  $M$  Riemann-sokaság  $\nabla$  Levi-Civita-konnexiójából egy  $M' \subset M$  Riemann-részsokaság  $\nabla'$  Levi-Civita-konnexióját merőleges vetítéssel kaphatjuk. Ehhez az  $X', Y' \in \mathfrak{X}(N)$  vektormezőket ki kell terjeszteni  $M$ -re  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  vektormezőkké, és ekkor

$$\nabla'_{X'}(Y')(P) = \text{proj}(\nabla_X(Y)(P)),$$

ahol a  $\text{proj}: T_P M \rightarrow T_P N$  az érintőterek közti merőleges vetítés.

Egy  $\nabla$  konnexiót egy  $\varphi$  térképen elegendő megadni a  $\varphi$ -hez tartozó  $\partial_1^\varphi, \dots, \partial_n^\varphi$  standard bázismezőkre vonatkozóan ( $\partial_i^\varphi = (T\varphi)^{-1}(\partial_i)$ ). A

$$\nabla_{\partial_i^\varphi} \partial_j^\varphi = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k^\varphi$$

felírásban szereplő  $\Gamma_{ij}^k$  együtthatókat a  $\nabla$  konnexió  $\varphi$ -re vonatkozó *Christoffel-szimbólumainak* nevezzük. Egy  $\nabla$  konnexió

$$R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

*görbületi tenzorát* az

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

formulával definiáljuk. Belátható, hogy ez valóban tenzor, azaz egy adott  $P$  pontban az értéke csak az  $X, Y, Z$  vektormezők  $P$ -beli értékétől függ.

Egy  $\mathbf{x} \in T_P M$  érintővektor  $R_{\mathbf{x}}: T_P M \rightarrow T_P M$  *Jacobi-operátora* az a lineáris leképezés, melyet az  $R_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = R(\mathbf{y}, \mathbf{x})\mathbf{x}$  formula definiál. Az  $R_{\mathbf{x}}$  Jacobi-operátor az  $\mathbf{x}^\perp = \{\mathbf{y} \in T_P M \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0\}$  alteret önmagára képezi le. Ismert, hogy az  $\mathbf{y}, \mathbf{z} \mapsto \langle R_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}), \mathbf{z} \rangle$  tenzor szimmetrikus, vagyis a Jacobi-operátor önadjungált, és így a mátrixa egy ortonormált bázisban szimmetrikus.

Egy  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  *görbe menti vektormezőn* egy olyan  $X: [a, b] \rightarrow TM$  sima leképezést értünk, melyre  $X(t) \in T_{\gamma(t)} M$  minden  $t \in [a, b]$ -re. A  $\nabla_{\gamma'}$  kovariáns deriválást lehet értelmezni egy  $\gamma$  menti  $X$  vektormezőn is, és ilyenkor a  $\nabla_{\gamma'(t)} X$  jelölés helyett gyakran használjuk az  $X'(t)$  jelölést. Egy  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  sima görbe mentén az  $X$  vektormezőt akkor mondjuk *párhuzamosnak*, ha  $\nabla_{\gamma'} X = 0$ . Ha adott egy  $\mathbf{x} \in T_{\gamma(a)} M$  érintővektor, akkor egyértelműen létezik olyan  $X$   $\gamma$  menti

párhuzamos vektormező, melyre  $X(a) = \mathbf{x}$ . Ezen állítás segítségével definiáljuk a  $\Pi_\gamma: T_{\gamma(a)}M \rightarrow T_{\gamma(b)}M$  párhuzamos eltolást, mely egy  $\mathbf{x} \in T_{\gamma(a)}M$  érintővektorhoz a megfelelő  $X$   $\gamma$  menti vektormező  $b$ -ben felvett  $X(b)$  érintővektorát rendeli. Egy Riemann-sokaságon a Levi-Civita-konnexió mellett a görbék menti párhuzamos eltolás egy ortogonális transzformáció. Egy  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  görbét *geodetikusként* nevezünk, ha a  $\gamma'$  vektormező párhuzamos  $\gamma$  mentén, azaz  $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$ . Egy  $\gamma$  geodetikusra a  $\|\gamma'(t)\|$  norma állandó a görbe mentén. Ha ez érték 1, akkor *természetes paraméterezésű* vagy *ívhossz szerint paraméterezett* geodetikusként mondjuk.

Minden  $\mathbf{v} \in T_P M$  érintővektorra egyértelműen létezik az a  $\gamma_{\mathbf{v}}: (a_{\mathbf{v}}, b_{\mathbf{v}}) \rightarrow M$  geodetikus, melyre  $\gamma_{\mathbf{v}}(0) = P$ ,  $\gamma'_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}$  és az  $(a_{\mathbf{v}}, b_{\mathbf{v}})$  intervallum maximális ( $a_{\mathbf{v}} = -\infty$  és  $b_{\mathbf{v}} = \infty$  értékeket is megengedve). Tekintsük az

$$\Omega = \{\mathbf{v} \in TM \mid \gamma_{\mathbf{v}}(1) \text{ értelmezve van}\} \subseteq TM$$

nyílt halmazt, és ezen értelmezzük az  $\exp: \Omega \rightarrow M$  *exponenciális leképezést* az  $\exp(\mathbf{v}) = \gamma_{\mathbf{v}}(1)$  képlettel. Az exponenciális leképezés  $T_P M \cap \Omega$ -ra való megszorítására az  $\exp_P$  jelölést használjuk. Az  $\exp_P$  leképezés diffeomorfizmust létesít  $\mathbf{0} \in T_P M$  egy környezeté és  $P$  egy  $U$  környezeté között. Ekkor az  $U$  környezeten az  $\exp_P^{-1}$  egy térképet definiál, melyet *normális térképnek* vagy *normális koordináta-rendszernek* nevezünk. A normális térképen a  $P$  pontban a Riemann-metrika mátrixa az identitás, a Christoffel-szimbólumok pedig eltűnnek (a térképhez tartozó bázisban).

**1.3. Gauss-lemma.** *Ha  $r$  olyan kicsi, hogy  $\mathcal{B}(\mathbf{0}, r) \subseteq T_P M$  gömb egy környezetén az  $\exp_P$  leképezés diffeomorfizmus, akkor az  $\exp_P(\Sigma(\mathbf{0}, r))$  hiperfelület merőleges az összes  $P$ -ből induló geodetikusra.*

Minden  $P$  pontnak van olyan  $U$  nyílt környezete, melynek minden  $Q \in U$  pontjára egyértelműen létezik a  $P$ -t és  $Q$ -t összekötő  $U$ -beli  $\gamma$  geodetikus, és ívhossza megegyezik a  $P$  és  $Q$  pontok távolságával. Általában egy geodetikust *minimálgeodetikusként* nevezünk, ha bármely két pontja között a távolság éppen a megfelelő ívének az ívhossza. Ha a  $P$  és a  $Q$  pontokat egyértelműen tudjuk összekötni minimálgeodetikussal, akkor legyen  $\gamma_{PQ}: [0, d(P, Q)] \rightarrow M$  az az őket összekötő természetes paraméterezésű minimálgeodetikus, melyre  $\gamma_{PQ}(0) = P$ . Ha  $\gamma_{PQ}$  definiált, akkor  $[P, Q]$  jelöli a  $\gamma_{PQ}$  képét  $M$ -ben. Ha a  $P, Q$  pontok egy  $N \subseteq M$  részsokaságban fekszenek, akkor a  $\gamma_{PQ}^N$  és a  $\gamma_{PQ}^M$  jelöléseket használjuk annak jelzésére, hogy melyik sokaságban tekintjük a geodetikusokat. Egy  $D \subseteq M$

halmazt *geodetikusan konvexnek* nevezünk, ha bármely  $P, Q \in D$  pontok egyértelműen köthetőek össze minimálgeodetikussal, és ez az ív  $D$ -ben fekszik.

**1.4. tétel.** *Legyen  $(M, g)$  egy összefüggő Riemann-sokaság. A következő állítások ekvivalensek:*

1. *Az  $M$  geodetikusai korlátlanul meghosszabíthatóak.*
2. *Az exponenciális leképezés az egész  $TM$ -en értelmezve van.*
3. *Van egy olyan  $P \in M$  pont, melyre az  $\exp_P$  az egész  $T_P M$ -en értelmezve van.*
4. *Ha egy  $M$ -beli részhalmaz korlátos és zárt, akkor kompakt.*
5. *Van olyan  $\varepsilon > 0$ , hogy bármely  $P \in M$ -re a  $\overline{B}(P, \varepsilon)$  zárt gömb kompakt.*
6.  *$M$  mint metrikus tér teljes (azaz a Cauchy-sorozatok konvergensek).*

Ha egy Riemann-sokaságra a fentiek bármelyike fennáll, akkor a sokaságot (geodetikusan) *teljesnek* nevezzük. Általában ezt a tulajdonságot feltesszük a szóban forgó Riemann-sokaságokról.

**1.5. Hopf–Rinow-tétel.** *Egy összefüggő teljes Riemann-sokaság bármely két pontja összeköthető minimálgeodetikussal.*

Két  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_P M$  érintővektor szögét a Riemann-metrika által meghatározott skaláris szorzásból a szokásos módon definiálhatjuk:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})\angle = \arccos \left( \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|} \right).$$

Három  $A, B, C \in M$  pont szögét a  $\gamma'_{BA}(0)$  és a  $\gamma'_{BC}(0)$  érintővektorok szögeként definiáljuk, azaz

$$ABC\angle = \arccos(\langle \gamma'_{BA}(0), \gamma'_{BC}(0) \rangle),$$

feltéve, hogy a  $\gamma_{BA}$  és  $\gamma_{BC}$  geodetikusok (egyértelműen) léteznek.

Ha a  $\gamma$  természetes paraméterezésű minimálgeodetikus  $\gamma(a) = P$  és  $\gamma(b) = Q$  pontját ( $a < b$ ) folytonosan elmozgatjuk a  $p(t)$  és a  $q(t)$  görbék mentén ( $p(0) = P$  és  $q(0) = Q$ ), akkor a köztük levő távolság változását az alábbi *távolságváriációs formula* adja meg:

$$\left. \frac{d}{dt} d(p(t), q(t)) \right|_{t=0} = \langle \gamma'(b), q'(0) \rangle - \langle \gamma'(a), p'(0) \rangle.$$



Egy  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  geodetikus *variációján* a  $\Gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  sima leképezést értjük, melyre  $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$  minden  $t \in [a, b]$ -re. Ha minden  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ -ra a  $t \mapsto \Gamma(s, t)$  görbe egy geodetikus, akkor  $\Gamma$ -t *geodetikus variációnak* nevezzük. Ebben az esetben a  $J_\Gamma(t) = \partial_1 \Gamma(0, t)$   $\gamma$  menti vektormezőt *Jacobi-mezőnek* nevezük. Egy  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  geodetikus menti  $J$  vektormező pontosan akkor Jacobi-mező, ha kielégíti a  $J'' + R(J, \gamma')\gamma' = 0$  *Jacobi-féle differenciálegyenletet*. Ebből egyszerűen következik, hogy ha rögzítjük a  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  geodetikust és egy  $t \in [a, b]$  számot, akkor a  $\gamma$  menti  $J$  Jacobi-mezőt egyértelműen meghatározzák a  $J(t)$  és  $J'(t)$  érintővektorok. A differenciálegyenletből az is nyilvánvaló, hogy a  $\gamma'$ -vel párhuzamos Jacobi-mezők  $J(t) = (at + b)\gamma'(t)$  alakúak, ahol  $a$  és  $b$  tetszőleges valós számok.

A Jacobi-mezők segítségével meg tudjuk adni az  $\exp_P$  *exponenciális leképezés deriváltját* egy  $\mathbf{v} \in T_P M$  pontban (a szokásos  $T_{\mathbf{v}} T_P M \cong T_P M$  azonosítással):  $T_{\mathbf{v}} \exp_P(\mathbf{w}) = J(1)$ , ahol  $J$  az a  $t \mapsto \exp_P(t\mathbf{v})$  geodetikus menti Jacobi-mező, melyre  $J(0) = 0$  és  $J'(0) = \mathbf{w}$ . Egy  $\gamma$  geodetikus  $\gamma(0) = P$  és  $\gamma(1) = Q$  pontját *konjugálnak* nevezzük a  $\gamma$  mentén, ha van olyan  $J$  Jacobi-mező a  $\gamma$  mentén, melyre  $J(0) = J(1) = \mathbf{0}$ , de  $J$  nem azonosan  $\mathbf{0}$ . A  $Q$  pont pontosan akkor konjugált  $P$ -hez valamely  $\gamma$  geodetikus mentén, ha a  $Q$  pont az  $\exp_P$  leképezésnek szinguláris értéke.

Ha  $X$  egy  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  geodetikus menti sima merőleges vektormező, akkor definiáljuk a

$$q(X) = \int_a^b \langle X'(t), X'(t) \rangle - \langle R(X(t), \gamma'(t))\gamma'(t), X(t) \rangle dt$$

kvadratikus leképezést. Erről szól a következő lemma.

**1.6. Indexlemma** ([14]). *Legyen  $X$  egy  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  geodetikus menti sima,  $\gamma$ -ra merőleges vektormező, melyre  $X(a) = \mathbf{0}$ , és tegyük fel, hogy a  $\gamma(a)$ -hoz nincsen konjugált pont  $\gamma$  mentén. Legyen  $J$  az a  $\gamma$  menti Jacobi mező, melyre  $J(a) = \mathbf{0}$  és  $J(b) = X(b)$ . Ekkor fennáll a  $q(J) \leq q(X)$  egyenlőtlenség, és egyenlőség pontosan az  $X = J$  esetben van.*

Egy  $V$  vektortér  $k$  dimenziós alterein bevezethető egy sokaságstruktúra. Ezt a sokaságot a  $V$  vektortér  $k$ -adik *Grassman-sokaságának* nevezzük, és a  $\text{Gr}(k, V)$  jelölést használjuk rá. A  $\text{Gr}(1, V)$  sokaság a  $V$ -hez asszociált  $\mathbb{P}(V)$  projektív tér. Egy  $M$  sokaság érintőtereinek  $\text{Gr}(k, T_P M)$  Grassmann-sokaságai ( $P \in M$ ) egy  $\text{Gr}_k(TM)$  sokasággá állnak össze a  $TM$  érintőnyaláb konstrukciójához hasonlóan.

A  $\text{Gr}(k, V) \hookrightarrow \text{P}(\wedge^k V)$  *Plücker-beágyazást* a  $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} \mapsto \mathbb{R}(\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k)$  leképezéssel definiáljuk.

Egy  $M$  Riemann-sokaság  $K$  *szekcionális görbületi függvényét* a  $\text{Gr}_2(TM)$  sokaságon értelmezzük. Ha  $\sigma \subset T_P M$  egy kétdimenziós altér, melyben az  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{y}$  érintővektorok egy bázist alkotnak, akkor a  $\sigma$  sík szekcionális görbületét a

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}$$

formulával definiáljuk (a jobb oldal független az  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  bázis választásától).

Egy  $(M, g)$  Riemann-sokaságban tekintsünk egy  $\Sigma \subset M$  hiperfelületet. Ekkor a  $\Sigma$ -n a  $g$  Riemann-metrika  $g'$  megszorítását nevezzük a felület *első alapformájának*. Jelölje  $\nabla, \nabla'$  az  $M$ , illetve a  $\Sigma$  Levi-Civita-konexióját. Válasszunk  $\Sigma$ -n egy  $N$  egységnormális mezőt, azaz egy olyan  $M$ -beli vektormezőt, mely minden pontban merőleges a hiperfelületre, és egységnyi hosszú. Ekkor ha  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  vektormezők, melyeknek  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  egy kiterjesztése  $M$ -re, akkor a  $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}$  vektormezőt felbonthatjuk  $T_P \Sigma$ -val párhuzamos és rá merőleges komponensekre:

$$\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \nabla'_X Y + b(X, Y)N,$$

ahol a  $b: \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt a hiperfelület *második alapformájának* nevezzük. Az első és a második alapformára gyakran használjuk az  $I$ , illetve a  $II$  jelöléseket. Mivel mindkettő szimmetrikus bilineáris forma és  $I$  nemelfajuló, így minden  $P \in \Sigma$  pontban létezik egy  $L_P: T_P \Sigma \rightarrow T_P \Sigma$  önadjungált leképezés, melyre  $II_P(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = I_P(\mathbf{v}, L_P(\mathbf{w}))$  minden  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_P \Sigma$ -ra. Az így adódó  $L: T\Sigma \rightarrow T\Sigma$  operátort a hiperfelület *Weingarten-operátorának* vagy *alakoperátorának* nevezzük. Belátható, hogy  $L_P(\mathbf{v}) = -\nabla_{\mathbf{v}} N$ . A  $P$ -beli Weingarten-leképezés sajátértékei a  $P$ -beli főgörbületek. Ezek számtani közepét *Minkowski- vagy középgörbületnek* nevezzük, melyet megkaphatunk  $L_P$  nyomából:  $H(P) = \frac{\text{tr} L_P}{n-1}$ .

Legyen  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  egy nyílt paramétertartomány, ekkor az  $\mathbf{r}: \Omega \rightarrow M^n$  sima leképezést egy sima *paraméterezett hiperfelületnek* hívjuk, melyről feltesszük, hogy injektív, és hogy reguláris, ami azt jelenti, hogy a deriváltjai minden pontban lineárisan függetlenek. Válasszunk egy  $N$  egységnormális mezőt a  $\Sigma = \mathbf{r}(\Omega)$  hiperfelületen. A  $P = \mathbf{r}(\mathbf{x})$  pontban a  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n-1} v^i \partial_i \mathbf{r}(\mathbf{x})$  és  $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n-1} w^i \partial_i \mathbf{r}(\mathbf{x})$  érintővektorok első és a második alapformáját a következő képletekkel kapjuk:

$$I_P(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle,$$

$$II_P(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^{n-1} \langle \nabla_{\partial_i \mathbf{r}(\mathbf{x})} (\partial_j \mathbf{r}), N(P) \rangle v^i w^j.$$

Egy  $M^n$  Riemann-sokaság  $D$  részalmozását *reguláris tartománynak* nevezzük, ha minden  $P \in \partial D$  határpontnak van olyan  $U$  környezete, amin van egy olyan  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  térkép, melyre  $\varphi(P) = \mathbf{0}$  és  $\varphi(U \cap D) = \varphi(U) \cap H^n$ , ahol  $H^n$  az  $\mathbb{R}^n$  azon féltére, melyet az  $x_n \geq 0$  koordinátaegyenlőtlenség definiál.

Egy  $(M, g)$  Riemann-sokaságon a  $g$  Riemann-metrika indukál egy *térfogati formát* is, melyet  $\mu$ -vel fogunk jelölni.

## 1.2. Speciális Riemann-sokaságok

Az értekezésben többféle speciális Riemann-sokaság szóba kerül, ezek definícióit, és ekvivalens jellemzéseit írjuk le ebben a szakaszban.

Ha egy  $M$  sokaság  $K$  szekcionális görbületi függvénye konstans a  $\text{Gr}_2(TM)$ -en, akkor a sokaságot *állandó szekcionális görbületűnek*, vagy röviden csak *állandó görbületűnek* nevezzük. Az egyszeresen összefüggő, állandó görbületű tereket osztályozza a következő tétel.

**1.7. tétel.** *Egy  $(M^n, g)$  állandó  $\kappa$  görbületű összefüggő, egyszeresen összefüggő, teljes Riemann-sokaság izometrikus*

1.  $\kappa > 0$  esetén az  $\mathbb{S}_\kappa^n = (\mathbb{S}^n, g_\kappa)$  gömbi térrel, ahol  $g_\kappa$  a standard gömbi metrika  $1/\kappa$ -szorososa;
2.  $\kappa = 0$  esetén az  $(\mathbb{E}^n, g_0)$  euklideszi térrel, ahol  $g_0$  a standard euklideszi metrika;
3.  $\kappa < 0$  esetén a  $\mathbb{H}_\kappa^n = (\mathbb{H}^n, g_\kappa)$  hiperbolikus térrel, ahol  $g_\kappa$  a standard hiperbolikus metrika  $-1/\kappa$ -szorososa.

Ezen állandó görbületű terek  $r$  sugarú geodetikus gömbjei  $\kappa \leq 0$  esetén mindig geodetikusan konvexek, míg  $\kappa > 0$  esetén pontosan akkor, ha az  $r$  sugár kisebb, mint a tér főköre hosszának a negyede (azaz  $r < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ ). Ha egy  $M$  állandó görbületű tér egyik  $T_P M$  érintőterében veszünk egy  $\sigma$  lineáris alteret, akkor annak az exponenciális leképezésnél vett  $N = \exp_P(\sigma)$  képe szintén állandó görbületű sokaság, és bármely két pontját összekötő  $M$ -beli geodetikus  $N$ -ben halad, így az  $N$ -beli pontok közti távolságok megegyeznek az  $N$ -ben és az  $M$ -ben.

A koszinusztétel általánosítható az egyszeresen összefüggő állandó görbületű sokaságokra is.

**1.8. Koszinusztétel.** *Ha egy egyszeresen összefüggő,  $\kappa$  állandó görbületű sokaságon levő háromszög oldalai  $a, b, c$ , és az  $a$  oldallal szemben  $\alpha$  szög van, akkor:*  
 $\kappa > 0$  esetén  $\cos(a\sqrt{\kappa}) = \cos(b\sqrt{\kappa})\cos(c\sqrt{\kappa}) + \sin(b\sqrt{\kappa})\sin(c\sqrt{\kappa})\cos\alpha$ ;  
 $\kappa = 0$  esetén  $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos(\alpha)$ ;  
 $\kappa < 0$  esetén  $\operatorname{ch}(a\sqrt{-\kappa}) = \operatorname{ch}(b\sqrt{-\kappa})\operatorname{ch}(c\sqrt{-\kappa}) - \operatorname{sh}(b\sqrt{-\kappa})\operatorname{sh}(c\sqrt{-\kappa})\cos\alpha$ .

Két egyszerű következménye van a koszinusztételeknek:

**1.9. állítás.** *Ha az  $A_1B_1C_1$  és az  $A_2B_2C_2$  háromszögek állandó  $\kappa_1$ , illetve  $\kappa_2$  görbületű egyszeresen összefüggő sokaságban fekszenek, ahol  $\kappa_1 < \kappa_2$ , továbbá  $d(A_1, B_1) = d(A_2, B_2)$ ,  $d(A_1, C_1) = d(A_2, C_2)$  és  $B_1A_1C_1\angle = B_2A_2C_2\angle$ , akkor  $d(B_1, C_1) > d(B_2, C_2)$ .*

A másik következményt szokás ollótételnek is nevezni.

**1.10. Ollótétel.** *Ha adottak az  $A_1B_1C_1$  és  $A_2B_2C_2$  háromszögek egy egyszeresen összefüggő állandó görbületű sokaságon, melyekre  $d(A_1, B_1) = d(A_2, B_2)$ ,  $d(A_1, C_1) = d(A_2, C_2)$  és  $B_1A_1C_1\angle \leq B_2A_2C_2\angle$ , akkor  $d(B_1, C_1) \leq d(B_2, C_2)$ .*

Érdekes állandó görbületű tér még az  $\mathbb{RP}_\kappa^n$  elliptikus tér is, melyet a szokásos  $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$  faktorizálással kaphatunk az  $\mathbb{S}_\kappa^n$  gömbi térből.

Egy  $M$  Riemann-sokaság *homogén*, ha bármely két  $P, Q \in M$  pontjához létezik egy olyan  $f: M \rightarrow M$  izometria, melyre  $f(P) = Q$ . Egy  $M$  Riemann-sokaságot akkor nevezünk *kétponthomogénnek*, ha minden olyan  $(P_1, P_2)$  és  $(Q_1, Q_2)$  pontpárra, melyekre  $d(P_1, P_2) = d(Q_1, Q_2)$  teljesül, van olyan  $f: M \rightarrow M$  izometria, melyre  $f(P_1) = Q_1$  és  $f(P_2) = Q_2$ .

Egy  $P \in M$  pont esetén legyen a  $V$  a  $\mathbf{0} \in T_P M$ -nek egy olyan  $\mathbf{0}$ -ra szimmetrikus környezete, hogy az  $\exp_P$  leképezés diffeomorfizmust létesít  $V$  és  $U = \exp_P(V)$  között. Ekkor a  $P$  pontra vonatkozó *lokális geodetikus tükrözést* az  $U$  környezeten az  $\exp_P(\mathbf{v}) \mapsto \exp_P(-\mathbf{v})$  képlettel definiáljuk. Ha ezt az egész sokaságon tudjuk definiálni, akkor globális geodetikus tükrözésnek mondjuk. Egy Riemann-sokaságot *szimmetrikusnak* nevezünk, ha minden pontra értelmezhető a globális geodetikus tükrözés, és ezek izometriák. Minden szimmetrikus tér teljes és homogén.

Egy  $P \in M$  pontban a  $\operatorname{Ric}_P: T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$  Ricci-görbületet a görbületi tenzor nyomaként definiáljuk:

$$\operatorname{Ric}_P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \operatorname{tr}(\mathbf{z} \mapsto R(\mathbf{z}, \mathbf{x})\mathbf{y}).$$

Ez kiterjeszhető egy Ric tenzormezővé a sokaságon. Azokat az  $(M, g)$  Riemann-sokaságokat, melyeknél a  $\text{Ric} = \lambda g$  feltétel fennáll, *Einstein-sokaságoknak* nevezük. Ezzel ekvivalens, hogy a Jacobi-operátor  $\text{tr}(R_{\mathbf{x}})$  nyoma állandó az egység-hosszú  $\mathbf{x}$  érintővektorokon. Minden 2 vagy 3 dimenziós Einstein-sokaság állandó görbületű. A következő tételt használni fogjuk az Einstein-sokaságokról.

**1.11. Kazdan–DeTurck-tétel** ([4, 25]). *Egy  $(M, g)$  Einstein-sokaságon a  $g$  metrika analitikus a normális koordinátákban.*

Az Einstein-sokaságok általánosításaként vezették be a *k-stein sokaságok* fogalmát, melyeknél minden  $1 \leq l \leq k$ -ra megköveteljük, hogy a  $\text{tr}(R_{\mathbf{x}}^l)$  nyom nem függ az  $\mathbf{x}$  egység-hosszú érintővektortól. Egy Riemann-sokaságot *Ossermannak* nevezünk, ha minden  $k$ -ra  $k$ -stein. Carpenter, Gray és Willmore [13] osztályozta azokat a szimmetrikus tereket, melyek egy adott  $k$ -ra  $k$ -steinek. Az eredményük-ből következik, hogy egy szimmetrikus tér pontosan akkor Osserman, ha lokálisan kétponthomogén.

Az  $s: M \rightarrow \mathbb{R}$  *skalárgörbület* a Ricci-tenzor Riemann-metrikára vonatkozó nyoma, azaz, ha  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in T_P M$  egy ortonormált bázis a  $P$  pontban, akkor  $s(P) = \sum_{i=1}^n \text{Ric}_P(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)$ . Ha az  $s$  függvény konstans az  $M$  sokaságon, akkor  $M$ -et *állandó skalárgörbületűnek* mondjuk. Könnyen meggondolható, hogy egy kétdimenziós állandó  $s$  skalárgörbületű sokaság állandó  $s/2$  szekcionális görbületű. Az is nyilvánvaló, hogy minden Einstein-sokaság állandó skalárgörbületű.

A következőkben a *harmonikus* terek ekvivalens jellemzéseit szeretnénk megadni. Ehhez szükségünk van néhány definícióra. Egy  $f \in C^\infty(M)$  sima függvény  $\text{Hess}(f): \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  *Hesse-formáját* a

$$\text{Hess}(f)(X, Y) = X(Y(f)) - \nabla_X Y(f)$$

formulával definiáljuk. Belátható, hogy ez egy tenzormező. A Hesse-forma nyoma a *Laplace–Beltrami-operátor*:

$$\Delta(f)(P) = \sum_{i=1}^n \text{Hess}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i),$$

ahol  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  egy ortonormált rendszer a  $P$  pontban. Egy  $f \in C^\infty(M)$  függvényt akkor nevezünk *harmonikusnak*, ha  $\Delta(f) = 0$  teljesül rá. Szükségünk lesz a távolságfüggvényből képezett  $\Omega_P(Q) = \frac{1}{2}d^2(P, Q)$  függvényre is. Egy függvényt *radiálisnak* mondunk, ha csak egy adott ponttól való távolságtól függ. Egy  $\varphi$

térképen definiálhatjuk a  $\Theta^\varphi = \sqrt{\det(g_{ij})_{i,j=1}^n}$  függvényt (részletesen lásd a Ki-egészítésben). Az *első középérték operátort* az

$$M_r f(P) = \frac{1}{\text{Vol}_{n-1}(\Sigma(P, r))} \int_{\Sigma(P, r)} f \, d\sigma$$

formulával definiáljuk, ahol  $d\sigma$  jelöli a gömbfelületre megszorított  $g$  Riemann-metrika térfogati formáját. A *második középérték operátort* az

$$L_r f(P) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\Sigma(\mathbf{0}_{T_P M}, 1)} f(\exp_P(r\mathbf{v})) \, d\mathbf{v}$$

formulával definiáljuk. Egy  $(M^n, g)$  Riemann-sokaságot akkor nevezünk *harmonikusnak*, ha a következő ekvivalens állítások közül valamelyik teljesül rá (lásd a [2] könyv 2.6. szakaszát és a [37] cikk 1.1. lemmáját).

**1.12. tétel.** *A következő állítások ekvivalensek egy  $(M, g)$  Riemann-sokaságra.*

1. *Minden  $P \in M$  pontnak van olyan normális környezete, ahol a  $\Delta u = 0$  Laplace-egyenletnek van olyan valós, nemkonstans megoldása, mely radiális és  $r \neq 0$ -ra analitikus.*
2. *Minden  $P \in M$  pontra a  $P$  középpontú  $\varphi$  normális koordináta-rendszerben a  $\Theta^\varphi$  függvény radiális.*
3. *Minden  $P \in M$  pontra a  $\Delta \Omega_P$  az  $\Omega_P$  függvénye.*
4. *Az  $M$  minden elegendően kicsi geodetikus gömbfelülete állandó középgömbületű.*
5. *Az  $M$  minden elegendően kicsi geodetikus gömbfelülete állandó skalárgömbületű (feltéve, hogy  $M$  dimenziója legalább 3).*
6. *Minden  $P \in M$  pontra, elegendően kicsi  $r \in \mathbb{R}_+$  számra és a  $\overline{\mathcal{B}}(P, r)$  egy környezetén értelmezett  $f$  harmonikus függvényre  $M_r f(P) = f(P)$ .*
7. *Minden  $P \in M$  pontra, elegendően kicsi  $r \in \mathbb{R}_+$  számra és a  $\overline{\mathcal{B}}(P, r)$  egy környezetén értelmezett  $f$  harmonikus függvényre  $M_r f(P) = L_r f(P)$ .*
8. *Minden  $f$  sima függvényre és  $r$  elég kicsi számra  $M_r(\Delta f) = \Delta M_r(f)$ .*

Az értekezésben a harmonikus terek jellemzésére a 4. állítást használjuk, így azt tekinthetjük a harmonikus terek definíciójaként. Ismert még, hogy minden harmonikus tér Einstein ([3]).

Az 1.12. tétel 4. állításából látszik, hogy a kétponthomogén terek harmonikusak. A Lichnerowicz-sejtés azt jósolta, hogy ez visszafelé is igaz, azaz a harmonikus terek kétponthomogének (bár André Lichnerowicz ezt a sejtést csak 4 dimenzióban fogalmazta meg, ezzel a névvel hivatkoznak erre a sejtésre). Szabó I. Zoltán kompakt univerzális fedőterű sokaságokra bebizonyította ezt a sejtést a [37] cikkében, melyben egy fontos lépés volt annak a bizonyítása, hogy a harmonikus tereket jellemzi az 1.12. tétel 8. állítása. Később Ewa Damek és Fulvio Ricci ([24]) konstruáltak olyan harmonikus tereket, melyek nem kétponthomogének, ezeket Damek–Ricci-tereknek nevezzük.

Egy  $(M, g)$  Riemann-sokaságot akkor nevezünk *D'Atri-térnek*, ha a lokális geodetikus tükrözések térfogattartóak. Egy Riemann-sokaság  $P$  és  $Q$  pontjaira jelölje  $h_P(Q)$  a  $\Sigma(P, d(P, Q))$  gömbfelület  $Q$ -beli középgörbületét. Ezen jelöléssel megfogalmazhatjuk a D'Atri-terek ekvivalens jellemzéseit.

**1.13. tétel** ([2, 32]). *Egy  $(M, g)$  analitikus Riemann-sokaságra a következő állítások ekvivalensek:*

1.  $M$  D'Atri-tér;
2.  $h_P(Q) = h_Q(P)$  minden elég közeli  $P, Q \in M$  pontokra;
3.  $h_P(\exp_P(\mathbf{v})) = h_P(\exp_P(-\mathbf{v}))$  minden  $P \in M$  pontra és elég kicsiny normájú  $\mathbf{v} \in T_P M$  érintővektorra;
4.  $h_{\exp_P(\mathbf{v})}(P) = h_{\exp_P(-\mathbf{v})}(P)$  minden  $P \in M$  pontra és elég kicsiny normájú  $\mathbf{v} \in T_P M$  érintővektorra.

Az első három állítás ekvivalenciájának a bizonyítását a Kiegészítésben megadjuk, a negyediket nem fogjuk használni. A D'Atri-terekről többet a [30] könyvfejezetben olvashatunk.

Az 1.12. tétel 4. állítása és az 1.13. tétel 3. állítása szerint minden harmonikus sokaság D'Atri-tér.

### 1.3. A Kneser–Poulsen-sejtés

Mivel az értekezés témájának a motivációját a Kneser–Poulsen-sejtés adta, így erről is ejtünk pár szót. Az itt hivatkozott cikkeken kívül a [6] könyv 5. fejezetében és az [5] cikkben olvashatunk bővebben a sejtésről, és az elért eredményekről.

1954-ben Ebbe Thue Poulsen [36] és 1955-ben Martin Kneser [29] egymástól függetlenül fogalmazták meg azt a sejtést, hogy ha az euklideszi térben egybevágó gömböket úgy rendezünk át, hogy a középpontjaik távolsága nem nő, akkor az uniójuk térfogata sem nőhet, azaz

**1.14. sejtés.** *Ha  $P_1, \dots, P_k$  és  $Q_1, \dots, Q_k$  olyan pontok az  $\mathbb{E}^n$  euklideszi térben, melyekre  $d(P_i, P_j) \geq d(Q_i, Q_j)$  teljesül minden  $1 \leq i < j \leq k$ -ra, akkor tetszőleges  $r > 0$  számra*

$$\text{Vol}_n \left( \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}(P_i, r) \right) \geq \text{Vol}_n \left( \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}(Q_i, r) \right).$$

Fontos speciális eset, mikor a gömböket „folytonosan” mozgatjuk, azaz léteznek olyan  $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^n$  folytonos függvények ( $i = 1, \dots, k$ -ra), melyekre  $\gamma_i(0) = P_i$  és  $\gamma_i(1) = Q_i$ , továbbá  $\|\gamma_i - \gamma_j\|$  monoton csökkenő függvény minden  $1 \leq i, j \leq k$  párra. Ezt a speciális esetet  $n = 2$ -re Bollobás Béla bizonyította 1968-ban ([9]). 1995-ben Csikós Balázs ([15]), majd 1998-ban tőle függetlenül és más módszert használva Marshall Bern és Amit Sahai ([1]) általánosították ezt az eredményt különböző sugarú körökre (azaz az  $r$  sugár függhet  $i$ -től). A [16] cikkben Csikós Balázs kiterjesztette ezt az állítást tetszőleges  $n$  dimenzióra. Ezek az eredmények motiválják a következő sejtést:

**1.15. sejtés.** *Ha  $P_1, \dots, P_k$  és  $Q_1, \dots, Q_k$  olyan pontok az  $\mathbb{E}^n$  euklideszi térben, melyekre  $d(P_i, P_j) \geq d(Q_i, Q_j)$  teljesül minden  $1 \leq i < j \leq k$ -ra, akkor tetszőleges  $r_1, \dots, r_k$  pozitív számokra*

$$\text{Vol}_n \left( \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}(P_i, r_i) \right) \geq \text{Vol}_n \left( \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}(Q_i, r_i) \right).$$

Erre a sejtésre Mikhail Gromov adott bizonyítást a  $k \leq n + 1$  feltétel mellett már 1987-ben ([28]), nem csak az euklideszi, hanem a gömbi térben is. Így ez az eredmény egy hasonló állítást bizonyít unió helyett metszetre is, de ekkor a középpontoknak távolodniuk kell. Négy évvel később Pach János és Vasilis Capovleas bizonyították a Kneser–Poulsen-sejtés azon következményét, mely szerint egy pontrendszer átlagszélessége a pontrendszer kontrakciójánál nem nőhet ([12]).



1995-ben Yehoram Gordon és Mathieu Meyer tovább általánosították a problémát tetszőleges unióval és metszettel megkapható részekre (ebben az esetben bizonyos gömbközéppontoknak közeledni, bizonyosoknak távolodniuk kell), és a  $k \leq n + 1$  feltétel mellett bizonyítást is adtak valószínűségi módszerekkel ([26]). 1999-ben Csikós Balázs ezt az eredményt a folytonos mozgatás esetére is bizonyította ([17]) nem csak az euklideszi, hanem a gömbi és a hiperbolikus terekben is. Megjegyezzük, hogy ez általánosítja Gordon és Meyer eredményét, hiszen az  $n$  dimenziós térben bármely  $n + 1$  pontot bármely  $n + 1$  pontba át lehet vinni folytonos mozgatással úgy, hogy a pontok közti távolságok monoton módon változzanak.

2001-ben Robert Connelly és Bezdek Károly bebizonyította az 1.15. sejtést az  $n = 2$  esetben további feltételek nélkül ([7]). Két évvel később ugyanez a szerzőpáros bizonyította a sejtést a gömbi térben félgömbökre ([8]). 2006-ban Csikós Balázs erősítette a már említett, [17] cikkének eredményeit, belátta, hogy a folytonos kontrakció létezését elegendő 2-vel magasabb dimenzióban megkövetelni ([18]). Az ebben a cikkben szereplő két fontos formula közül az egyik Einstein-sokaságokban is igaz.

Mivel a sejtés megfogalmazható tetszőleges Riemann-sokaságon, az imént leírt eredmények felvetik, hogy a sejtés vajon igaz lehet-e a konstans görbületű tereknél általánosabb Riemann-sokaságokon is. Csikós Balázs és Moussong Gábor 2006-ban megmutatta ([23]), hogy az elliptikus térben nem igaz a sejtés, még akkor sem, ha folytonosan mozgatjuk a gömböket. Végül 2010-ben Csikós Balázs és Kunszenti-Kovács Dávid azt is bizonyította ([22]), hogy az 1.15. sejtés nem terjeszthető ki az állandó görbületű tereknél általánosabb Riemann-sokaságokra. Jelen értekezésben megmutatjuk, hogy még az 1.14. sejtés sem terjeszthető ki.

## 1.4. A $KP_k$ tulajdonságok

Ebben a szakaszban definiáljuk az értekezésben vizsgált  $KP_k$  és  $KP_k^-$  tulajdonságokat, majd összefoglaljuk az ismert eredményeket az ilyen tulajdonságú sokaságokról.

Ha a Kneser–Poulsen-sejtés igaz egy Riemann-sokaságon, akkor az is igaz, hogy gömbök uniójának a térfogata csak a gömbök sugaraitól és a középpontjaik páronkénti távolságaitól függ. A következő ismert állítás szerint unióról áttérhetünk a metszetre.

**1.16. állítás.** *Egy  $M^n$  Riemann-sokaságon  $k$  geodetikus gömb uniójának a térfogata pontosan akkor függ csak a gömbök sugaraitól és a középpontjaik páronkénti távolságaitól, ha ugyanez a feltétel fennáll a metszetre.*

A teljesség kedvéért a bizonyítást is megadjuk.

*Bizonyítás.* Ha bármelyik feltételt tudjuk  $k$  gömbre, akkor  $l < k$  gömbre is tudjuk, hiszen nem követeljük meg, hogy a gömbök különbözőek legyenek.

Tegyük fel, hogy a metszetre fennáll a feltétel. Ekkor  $k$  gömb uniójának a térfogata a szita formula szerint:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}(P_i, r_i)\right) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |I|=j}} \mu\left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{B}(P_i, r_i)\right).$$

Látható, hogy a jobb oldalon csak a metszetek térfogata szerepel, így igaz a feltétel az unióra is.

Most tegyük fel, hogy a feltétel az unióra áll fenn. A különböző gömbök  $l \leq k$  száma szerinti indukcióval bizonyítunk. Az  $l = 1$  eset nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy van  $l$  gömbünk:  $\mathcal{B}(P_i, r_i)$  ( $i = 1, \dots, l$ ). Ezek uniójának a térfogata:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^l \mathcal{B}(P_i, r_i)\right) = \sum_{j=1}^l (-1)^{j+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, l\} \\ |I|=j}} \mu\left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{B}(P_i, r_i)\right),$$

amiből

$$(-1)^l \mu\left(\bigcap_{i=1}^l \mathcal{B}(P_i, r_i)\right) = \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^{j+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, l\} \\ |I|=j}} \mu\left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{B}(P_i, r_i)\right) - \mu\left(\bigcup_{i=1}^l \mathcal{B}(P_i, r_i)\right).$$

A jobb oldal az indukciós feltevés és az unióra tett feltétel szerint csak a gömbök sugaraitól és a középpontok páronkénti távolságaitól függ, így igaz ez a bal oldalra is, azaz a gömbök metszetének térfogatára.  $\square$

Hasonló állítás fogalmazható meg azonos sugarú gömbökre is, a bizonyításban nincsen különbség.

**1.17. definíció.** Azt mondjuk, hogy egy Riemann-sokaság rendelkezik a  $KP_k$  tulajdonsággal ( $k \in \mathbb{Z}_+$ ), ha  $k$  geodetikus gömb metszetének a térfogata csak a gömbök sugaraitól és a középpontjaik páronkénti távolságaitól függ.

Az 1.16. állítás szerint ha egy Riemann-sokaságon igaz a Kneser–Poulsen-sejtés különböző sugarú gömbökre, akkor minden pozitív egész  $k$ -ra rendelkezik a  $KP_k$  tulajdonsággal. Az eredeti sejtésnek megfelelően bevezethető egy gyengébb tulajdonság is:

**1.18. definíció.** Azt mondjuk, hogy egy Riemann-sokaság rendelkezik a  $KP_k^=$  tulajdonsággal ( $k \in \mathbb{Z}_+$ ), ha  $k$  azonos sugarú geodetikus gömb metszetének a térfogata csak a gömbök közös sugarától és a középpontjaik páronkénti távolságaitól függ.

Az eddigieket összefoglalva, az alábbi következtetések fennállnak:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Kneser–Poulsen-sejtés} & & & & \\
k \text{ különböző sugarú gömbre} & \Rightarrow & KP_k & \Rightarrow & KP_{k-1} \\
& & \Downarrow & & \Downarrow \\
\text{Kneser–Poulsen-sejtés} & \Rightarrow & KP_k^= & \Rightarrow & KP_{k-1}^= \\
k \text{ azonos sugarú gömbre} & & & & 
\end{array}$$

Jelen értekezés fő célja az ilyen tulajdonságú Riemann-sokaságok jellemzése.

A  $KP_1$  és a  $KP_1^=$  tulajdonság nyilván ugyanaz, és egyszerűen csak azt jelenti, hogy egy geodetikus gömb térfogata csak a gömb sugarától függ. Ismert a következő aszimptotikus formula egy  $n$  dimenziós Riemann-sokaságban fekvő geodetikus gömb térfogatára:

$$\mu(\mathcal{B}(P, r)) = \frac{\omega_{n-1}}{n} r^n \left( 1 - \frac{s(P)}{6(n+2)} r^2 + O(r^4) \right),$$

ahol  $\frac{\omega_{n-1}}{n}$  az  $n$  dimenziós euklideszi egységgömb térfogata, és  $s(P)$  jelöli a skalárgörbületet a  $P$  pontban. Ebből következik, hogy a  $KP_1$  tulajdonságú terek állandó skalárgörbületűek (amiből  $n = 2$  esetén következik, hogy állandó görbületű a tér).

A  $KP_1$  tulajdonság nagyon hasonlít az Oldřich Kowalski és Lieven Vanhecke által bevezetett gömbhomogén terek definíciójához ([31]). Egy Riemann-sokaság gömbhomogén, ha a „kicsi” geodetikus gömbök térfogata csak a sugaruktól függ. Ezeket a tereket sokan vizsgálták, lásd például a [10], [11], [27] cikkeket.

Szabó I. Zoltán a már említett [37] cikkében azt is megmutatta, hogy az összefüggő, egyszeresen összefüggő, teljes harmonikus terek rendelkeznek a  $KP_2$  tulajdonsággal. Célunk volt ennek az állításnak a megfordítása. Ehhez egy olyan formulát adunk, ami kissé metsző tartományok metszetének térfogatára ad egy aszimptotikát. Ennek alkalmazásával egyszerűen kapjuk, hogy ha egy összefüggő,

egyszeresen összefüggő, teljes Riemann-sokaság rendelkezik a  $KP_2$  tulajdonsággal, akkor harmonikus. A  $KP_2^-$  tulajdonságból hasonlóan egyszerűen következik, hogy a sokaság Einstein (amiből 2 és 3 dimenzióban következik, hogy a sokaság állandó görbületű). Azt is bebizonyítjuk, hogy egy szimmetrikus  $KP_2^-$  tulajdonságú Riemann-sokaság kétponthomogén. További számolásokkal megmutatjuk, hogy egy  $KP_2^-$  tulajdonságú összefüggő, egyszeresen összefüggő, teljes Riemann-sokaság D'Atri-tér, majd ebből már azt is, hogy harmonikus, miközben kihasználjuk, hogy egy  $KP_2^-$  tulajdonságú Riemann-sokaság Einstein, és így a normális koordinátákban a Riemann-metrika analitikus. Ezen eredmények a [19] és [20] cikkekben vannak leírva.

Csikós Balázs és Kunszenti-Kovács Dávid [22] megmutatta, hogy ha egy összefüggő, teljes Riemann-sokaság rendelkezik a  $KP_3$  tulajdonsággal, akkor az az egyszeresen összefüggő állandó görbületű terek egyike. Ezt az állítást is célunk a  $KP_3^-$  tulajdonságra erősíteni. A [21] cikk nyomán ehhez ponthármasok minimális fedősugarát tekintettük, azaz azon  $r$  számok infimumát, melyre  $r$  sugarú geodetikus gömbbel lefedhető a ponthármas. Könnyen meggondolható, hogy egy  $KP_3^-$  tulajdonságú sokaságban a háromszögek minimális fedősugara csak az oldalhosszaktól függ. Ehhez valójában a  $KP_3^-$  tulajdonságból csak azt használjuk, hogy adott sugár és gömbközpontok közti távolság mellett tudjuk, hogy a három gömb metszete üres-e vagy sem, a tényleges térfogatra nincsen szükségünk. Ezek után az euklideszi egyenlő szárú derékszögű háromszögek analogonjait konstruáljuk meg a Riemann-sokaságon, majd ezekre alkalmazzuk Rauch összehasonlítási tételének egy alkalmasan módosított változatát. Így kapjuk, hogy egy  $KP_3^-$  tulajdonságú Riemann-sokaság állandó görbületű.

A [22] cikkben szereplő egyik állítás segítségével azt is könnyedén bebizonyíthatjuk, hogy egy összefüggő, teljes,  $KP_3^-$  tulajdonságú Riemann-sokaság egyszeresen összefüggő állandó görbületű tér, azaz a gömbi, az euklideszi vagy a hiperbolikus tér. Ebből következik, hogy még az eredeti Kneser–Poulsen-sejtést (1.14. sejtés) sem lehet az állandó görbületű sokaságoknál általánosabb Riemann-sokaságokra kiterjeszteni.

Mivel a  $KP_k$ , illetve  $KP_k^-$  tulajdonságú sokaságok  $k > 3$  esetén a  $KP_3^-$  tulajdonsággal rendelkeznek, így az összefüggőség és a teljesség feltétele mellett ezek csak az egyszeresen összefüggő állandó görbületű terek lehetnek. Ezek a terek viszont minden  $k \in \mathbb{Z}_+$ -ra rendelkeznek a  $KP_k$  és a  $KP_k^-$  tulajdonságokkal.

Végül megjegyezzük, hogy ha egy normált térben a  $KP_2^-$  tulajdonságot tesz-

szük fel az egységömbökre, akkor a tér euklideszi Mathieu Meyer, Shlomo Reisner és Michael Schmuckenschläger eredménye szerint ([35]).

## 2. fejezet

# Két gömb metszete

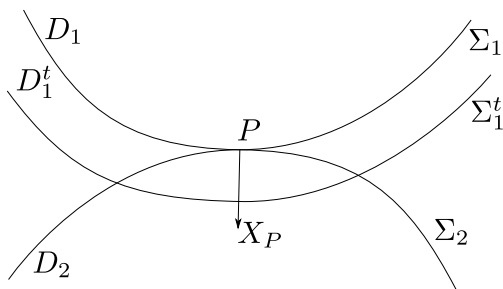
### 2.1. Aszimptotika alig metsző tartományok metszetének térfogatára

Mivel két gömb metszetének a térfogatával szeretnénk számolni, így először adunk egy formulát, mely azt mutatja meg, hogy ha egy Riemann-sokaságban két érintkező tartományt közelítünk egymáshoz, akkor a metszetük térfogata aszimptotikusan hogyan növekszik.

Egy  $n$  dimenziós  $M$  Riemann-sokaságban tekintsük a  $D_1$  és  $D_2$  reguláris tartományokat, melyek egyetlen  $P$  pontban érintik egymást. Tegyük fel, hogy  $D_1$  kompakt és jelölje  $\Sigma_1$  és  $\Sigma_2$  a  $D_1$  illetve a  $D_2$  határát. Legyen  $H: \Sigma_1 \times (-\tau, \tau) \rightarrow M$  egy olyan izotópia, melyre  $H(Q, 0) = Q$  minden  $Q \in \Sigma_1$ -re. Tetszőleges  $t \in (-\tau, \tau)$ -ra a  $H_t: \Sigma_1 \rightarrow M$  leképezést a  $H_t: Q \mapsto H(Q, t)$  formulával definiáljuk, és legyen  $\Sigma_1^t = H_t(\Sigma_1)$ . Ekkor tudjuk értelmezni a  $\{D_1^t \mid |t| < \tau\}$  tartományok egyparaméteres családját, melyet az alábbi feltételek egyértelműen meghatároznak:

- (i)  $D_1^0 = D_1$ ;
- (ii)  $D_1^t$  határa a  $\Sigma_1^t$  hiperfelület;
- (iii) bármely  $Q \in M$ -re  $\{t \in (-\tau, \tau) \mid Q \in \text{int } D_1^t\}$  nyílt halmaz  $\mathbb{R}$ -ben.

Tegyük fel, hogy az  $X_P = \partial_2 H(P, 0)$  kezdeti sebesség nem nulla, és  $D_2$  belsejébe mutat. Ekkor  $H$ -nak  $(P, 0)$ -ban nem szinguláris a deriváltja, és így a  $P$ -nek van egy olyan  $\overline{W}$  környezete a  $\Sigma_1$ -ben és egy pozitív  $\tau_0 < \tau$ , melyre a  $H$ -nak a  $W = \overline{W} \times (-\tau_0, \tau_0)$ -ra való megszorítása diffeomorfizmus  $W$  és  $H(W) \subset M$ ,  $P$  egy nyílt környezete között. Jelöljük a  $\partial_t|_W$  vektormező  $H|_W$  deriváltja általi képét



2.1. ábra.

$X$ -szel. Egy  $Q = H(\bar{Q}, t_0)$  pontban a vektormező értéke  $X(Q) = \partial_2 H(\bar{Q}, t_0)$ . Világos, hogy  $X(P) = X_P$  és a  $W \subset \Sigma_1$  halmazzal az  $X$  folyama által deformáljuk.

A  $D_1^t \cap D_2$  metszet térfogatára szeretnénk aszimptotikus formulát adni  $t < \tau$  kis pozitív értékeire.

Mivel  $D_1$  kompakt,  $P$  bármilyen  $U$  környezetéhez létezik egy olyan pozitív  $\tau' < \tau$ , hogy  $D_1^t \cap D_2 \subset U$  minden  $|t| < \tau'$ -ra. Ez azt jelenti, hogy akárhogyan választunk  $P$  egy környezetében térképet,  $t$  elég kis értékeire a metszet a térkép értelmezési tartományában van, tehát ezt a térfogatot számolhatjuk egy térképen. Célszerű olyan térképet választani, mely egyszerűvé teszi a számolást. Válasszuk a  $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n): U \rightarrow V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  térképet a következő tulajdonságokkal:

- (i)  $\varphi(P) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ ;
- (ii)  $U \subset H(W)$ , és  $\varphi$  kiegyenesíti  $X$ -et, azaz  $X|_U = -\partial_n^\varphi$ ;
- (iii)  $T_P \Sigma_1 = T_P \Sigma_2$ -t a  $\partial_1^\varphi(P), \dots, \partial_{n-1}^\varphi(P)$  vektorok feszítik ki;
- (iv)  $V = \mathcal{B}(\mathbf{0}_{n-1}, r) \times (-c, c)$ ,  $c > 0$ ;
- (v) vannak olyan  $f_1, f_2: \mathcal{B}(\mathbf{0}_{n-1}, r) \rightarrow (-c, c)$  sima függvények, melyekre

$$\begin{aligned} Q \in D_1 \cap U &\iff \varphi^n(Q) \geq f_1(\varphi^1(Q), \dots, \varphi^{n-1}(Q)) \text{ és} \\ Q \in D_2 \cap U &\iff \varphi^n(Q) \leq f_2(\varphi^1(Q), \dots, \varphi^{n-1}(Q)). \end{aligned}$$

A  $D_1 \cap D_2 = \{P\}$ , (i), (iii) és (v) feltételekből következik, hogy  $f_1(\mathbf{0}) = f_2(\mathbf{0}) = 0$ ,  $df_1(\mathbf{0}) = df_2(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ,  $f_1 - f_2 \geq 0$  és  $f_1 - f_2$  csak az origóban 0. Legyen  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$  és  $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$  az  $f_1$  és  $f_2$  origóbeli Hesse-mátrixa, azaz  $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix, melynek elemei:  $a_{ij} = \partial_i \partial_j f_1(\mathbf{0})$  és  $b_{ij} = \partial_i \partial_j f_2(\mathbf{0})$ .

Legyen  $\Theta^\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}_+$  a Riemann-sokaság térfogati sűrűségfüggvénye a  $\varphi$  térképre vonatkozóan. Ezt kifejezhetjük  $\Theta^\varphi = \sqrt{\det G}$  alakban, ahol a  $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$

mátrix elemei a  $g_{ij} = \langle \partial_i^\varphi, \partial_j^\varphi \rangle$ , azaz a Riemann-metrika komponensei a  $\varphi$  térképre vonatkozóan.

**2.1. tétel.** *A fenti jelöléseket használva tegyük fel, hogy  $A - B$  pozitív definit mátrix. Ekkor  $t$  minden elég kis értékére*

$$\mu(D_1^t \cap D_2) = \frac{\omega_{n-2}}{n^2 - 1} \frac{\Theta^\varphi(P)}{\sqrt{\det(A - B)}} (2t)^{\frac{n+1}{2}} + O\left(t^{\frac{n+2}{2}}\right). \quad (2.1)$$

*Bizonyítás.* Egy  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  vektor koordinátáit jelöljük  $x^1, x^2, \dots, x^n$ -nel, és vezessük be az  $\bar{\mathbf{x}}$  jelölést az  $(x^1, \dots, x^{n-1})$  vektorra. Ahogy az előbb észrevettük, ha  $t > 0$  elég kicsi, akkor  $D_1^t \cap D_2 \subset U$  és

$$\mu(D_1^t \cap D_2) = \int_{\varphi(D_1^t \cap D_2)} \Theta^\varphi(\varphi^{-1}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}. \quad (2.2)$$

Egy rögzített  $r_0 < r$ -re a  $\bar{\mathcal{B}}(\mathbf{0}, r_0) \subset \mathcal{B}(\mathbf{0}, r)$  gömb kompaktsága miatt léteznek olyan  $c_1, c_2$  számok, melyekre  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}(\mathbf{0}, r_0)$  esetén

$$\begin{aligned} \left| f_1(\bar{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} x^i x^j \right| &\leq c_1 \|\bar{\mathbf{x}}\|^3, \\ \left| f_2(\bar{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij} x^i x^j \right| &\leq c_2 \|\bar{\mathbf{x}}\|^3. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Mivel  $A - B$  pozitív definit mátrix, van olyan  $c_3 > 0$  konstans, hogy  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n-1}$  esetén

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{ij} - b_{ij}) x^i x^j \geq c_3 \|\bar{\mathbf{x}}\|^2. \quad (2.4)$$

Ha  $r'_0 \leq r_0$ , akkor a (2.3) egyenlőtlenség nyilvánvalóan igaz  $\mathcal{B}(\mathbf{0}, r'_0)$ -ben is, ezért az  $r_0$  értékét a  $c_1, c_2$  és  $c_3$  választása után lecsökkenthetjük úgy, hogy a

$$4(c_1 + c_2)r_0 < c_3 \quad (2.5)$$

egyenlőtlenség teljesüljön.

A  $-\partial_n^\varphi$  vektormező által generált  $\{\Phi_t\}$  folyam könnyen meghatározható  $U$ -ban. Egy  $Q \in U$  pontra a  $\Phi_t(Q)$  pontosan akkor van definiálva, és marad  $U$ -ban, ha  $\varphi^n(Q) - c < t < \varphi^n(Q) + c$ , és ebben az esetben

$$\varphi(\Phi_t(Q)) = (\varphi^1(Q), \dots, \varphi^{n-1}(Q), \varphi^n(Q) - t). \quad (2.6)$$



Innentől feltesszük, hogy  $t > 0$  elegendően kicsi ahhoz, hogy  $\varphi(D_1^t \cap D_2)$  a  $V_0 = \mathcal{B}(\mathbf{0}, r_0) \times (-c, c)$  halmazban legyen. Ekkor a (2.2) egyenletben szereplő integrált a

$$\Delta^t = \varphi(D_1^t \cap D_2) = \{\mathbf{x} \in V_0 \mid f_1(x^1, \dots, x^{n-1}) - t \leq x^n \leq f_2(x^1, \dots, x^{n-1})\}$$

tartományon számoljuk. Ezt közelíthetjük a  $\Delta_-^t \subset \Delta_*^t \subset \Delta_+^t$  tartományokkal, ahol

$$\begin{aligned} \Delta_-^t &= \left\{ \mathbf{x} \in V_0 \mid \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} x^i x^j + c_1 \|\bar{\mathbf{x}}\|^3 - t \leq x^n \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij} x^i x^j - c_2 \|\bar{\mathbf{x}}\|^3 \right\}, \\ \Delta_*^t &= \left\{ \mathbf{x} \in V_0 \mid \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} x^i x^j - t \leq x^n \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij} x^i x^j \right\}, \\ \Delta_+^t &= \left\{ \mathbf{x} \in V_0 \mid \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} x^i x^j - c_1 \|\bar{\mathbf{x}}\|^3 - t \leq x^n \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij} x^i x^j + c_2 \|\bar{\mathbf{x}}\|^3 \right\}. \end{aligned}$$

A  $\Delta_-^t \subset \Delta^t \subset \Delta_+^t$  tartalmazások is nyilvánvalóan fennállnak.

A  $\Delta_*^t$  euklideszi térfogatát kis  $t > 0$  értékekre pontosan ki tudjuk számolni. Mivel  $A - B$  pozitív definit szimmetrikus mátrix, van egy olyan  $(n-1) \times (n-1)$ -es invertálható  $M$  mátrix, melyre  $M^T(A - B)M = 2I$ . Ekkor  $\bar{\mathbf{x}} = M\bar{\mathbf{y}}$  esetén  $\bar{\mathbf{y}}^T \bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{x}}^T (A - B) \bar{\mathbf{x}}$ . Így az  $\bar{\mathbf{x}} = M\bar{\mathbf{y}}$  helyettesítés azt adja, hogy

$$\begin{aligned} \text{Vol}_n(\Delta_*^t) &= \int_{\bar{\mathbf{x}}^T(A-B)\bar{\mathbf{x}} \leq 2t} \left( t - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{x}}^T(A-B)\bar{\mathbf{x}} \right) d\bar{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\bar{\mathbf{y}}^T \bar{\mathbf{y}} \leq t} (t - \bar{\mathbf{y}}^T \bar{\mathbf{y}}) |\det M| d\bar{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Az utolsó integrált gömbi koordináták segítségével számolhatjuk ki:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\mathbf{y}}^T \bar{\mathbf{y}} \leq t} (t - \bar{\mathbf{y}}^T \bar{\mathbf{y}}) d\bar{\mathbf{y}} &= \int_0^{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{S}^{n-2}} (t - r^2) r^{n-2} du dr \\ &= \omega_{n-2} \int_0^{\sqrt{t}} (tr^{n-2} - r^n) dr \\ &= \omega_{n-2} \left( t \frac{t^{\frac{n-1}{2}}}{n-1} - \frac{t^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} \right) \\ &= \frac{2\omega_{n-2}}{n^2 - 1} t^{\frac{n+1}{2}}. \end{aligned}$$

Mivel  $\det M = 2^{\frac{(n-1)}{2}} (\det(A - B))^{-\frac{1}{2}}$ , a  $\Delta_*^t$  térfogatára azt kapjuk, hogy

$$\text{Vol}_n(\Delta_*^t) = \frac{\omega_{n-2}}{(n^2 - 1) \sqrt{\det(A - B)}} (2t)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Legyen  $\bar{\Delta}_+^t$  a  $\Delta_+^t$  ortogonális vetülete  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ -ra. Egyszerűen kapjuk, hogy

$$\bar{\Delta}_+^t \subset \left\{ \bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}(\mathbf{0}, r_0) \left| \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{ij} - b_{ij}) x^i x^j \leq (c_1 + c_2) \|\bar{\mathbf{x}}\|^3 + t \right. \right\}.$$

Így  $\bar{\mathbf{x}} \in \bar{\Delta}_+^t \subset \mathcal{B}(\mathbf{0}, r_0)$  esetén, a (2.4) és a (2.5) egyenlőtlenséget is felhasználva

$$\frac{c_3}{2} \|\bar{\mathbf{x}}\|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{ij} - b_{ij}) x^i x^j \leq (c_1 + c_2) \|\bar{\mathbf{x}}\|^3 + t < \frac{c_3}{4} \|\bar{\mathbf{x}}\|^2 + t.$$

Ekkor  $\frac{c_3}{4} \|\bar{\mathbf{x}}\|^2 < t$ , azaz  $\|\bar{\mathbf{x}}\| < \sqrt{\frac{4t}{c_3}} = O(t^{1/2})$ .

Adunk egy felső becslést is a  $\Delta_-^t$  és a  $\Delta_+^t$  térfogatának a különbségére. A  $\bar{\Delta}_+^t$  vetület  $O(t^{1/2})$  sugarú gömbben van. Másfelől a  $\Delta_+^t \setminus \Delta_-^t$  metszete egy olyan egyenessel, mely az  $n$ -edik koordinátavektorral párhuzamos, lefedhető két intervallummal, melyeknek az összhossza  $2(c_1 + c_2) \|\mathbf{x}\|^3 = O(t^{3/2})$ . Így a térfogatok különbsége

$$|\text{Vol}_n(\Delta_+^t) - \text{Vol}_n(\Delta_-^t)| = O\left(t^{\frac{n-1}{2}}\right) \cdot O\left(t^{\frac{3}{2}}\right) = O\left(t^{\frac{n+2}{2}}\right).$$

Ekkor a  $\Delta^t$  térfogata

$$\begin{aligned} \text{Vol}_n(\Delta^t) &= \text{Vol}_n(\Delta_*^t) + O\left(t^{\frac{n+2}{2}}\right) \\ &= \frac{\omega_{n-2}}{(n^2 - 1)\sqrt{\det(A - B)}} (2t)^{\frac{n+1}{2}} + O\left(t^{\frac{n+2}{2}}\right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ha  $\mathbf{x} \in \Delta_+^t$ , akkor  $\bar{\mathbf{x}} \in \bar{\Delta}_+^t$  hossza  $O(t^{1/2})$ , míg  $|x^n|$  nagysága  $O(\|\bar{\mathbf{x}}\|^2) = O(t)$ , és így  $\|\mathbf{x}\|$  nagyságrendje  $O(t^{1/2})$ .

A  $\Theta^\varphi \circ \varphi^{-1}$  sűrűségfüggvényt felírhatjuk  $\Theta^\varphi(\varphi^{-1}(\mathbf{x})) = \Theta^\varphi(P) + O(\|\mathbf{x}\|)$  alakban. A  $\Theta^\varphi \circ \varphi^{-1}$  integrálja  $\Delta^t$  felett kis hibával közelíthető a  $\Theta^\varphi(P)$  konstans integráljával ugyanazon tartomány felett. Valóban, valamilyen pozitív  $c_4$  konstansra

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Delta^t} \Theta^\varphi(\varphi^{-1}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} - \int_{\Delta^t} \Theta^\varphi(P) \, d\mathbf{x} \right| &\leq c_4 \int_{\Delta^t} \|\mathbf{x}\| \, d\mathbf{x} = \\ &= O\left(t^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \text{Vol}_n(\Delta^t) = O\left(t^{\frac{n+2}{2}}\right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ekkor a (2.1) bizonyítandó állítás már következik a (2.7) és a (2.8) egyenletekből.  $\square$

Most a  $\varphi$  térkép választásától független, természetes kifejezést szeretnénk adni a  $t^{\frac{n+1}{2}}$  együtthatójára.

Legyen  $\mathbf{N}$  a  $T_P\Sigma_1 = T_P\Sigma_2$  egyik normálvektora. Tekintsük a hiperfelületek  $\mathbf{N}$ -re vonatkozó  $P$ -beli második alapformáit és Weingarten-leképezéseiket. A  $\Sigma_\epsilon$  hiperfelület ( $\epsilon \in \{1, 2\}$ )  $P$  egy környezetében paraméterezhető az

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\epsilon: \mathcal{B}(\mathbf{0}_{n-1}, r_0) &\rightarrow M, \\ \mathbf{r}_\epsilon(x^1, \dots, x^{n-1}) &= \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^{n-1}, f_\epsilon(x^1, \dots, x^{n-1})) \end{aligned}$$

leképezéssel. Ekkor a  $\partial_j \mathbf{r}_\epsilon(\mathbf{u}) = \partial_j^\varphi(\mathbf{r}_\epsilon(\mathbf{u})) + \partial_j f_\epsilon(\mathbf{u}) \partial_n^\varphi(\mathbf{r}_\epsilon(\mathbf{u}))$  parciális deriváltak ( $j = 1, \dots, n-1$ ) a  $T_{\mathbf{r}_\epsilon(\mathbf{u})}\Sigma_\epsilon$  egy bázisát adják minden  $\mathbf{u} \in \mathcal{B}(\mathbf{0}_{n-1}, r_0)$  esetén. Számoljuk ki a  $\Sigma_\epsilon$  első és második alapformájának mátrixát ebben a bázisban  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ -ban.

Legyen  $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$  a Riemann-metrika mátrixa a  $\varphi$ -re vonatkozóan. Jelölje  $\mathcal{G}_\epsilon$  a  $\Sigma_\epsilon$  hiperfelület  $P$ -beli első alapformájának mátrixát. Ennek elemei

$$\langle \partial_i \mathbf{r}_\epsilon(\mathbf{0}), \partial_j \mathbf{r}_\epsilon(\mathbf{0}) \rangle = \langle \partial_i^\varphi(P), \partial_j^\varphi(P) \rangle = g_{ij}(P),$$

és így  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$  egyenlő a  $G(P)$  mátrix felső  $(n-1) \times (n-1)$ -es  $\mathcal{G}$  részmátrixszával. Geometriailag  $\Theta^\varphi(P) = \sqrt{\det G(P)}$  a  $\partial_1^\varphi(P), \dots, \partial_n^\varphi(P)$  által kifeszített paralelepipedon térfogata, míg  $\sqrt{\det \mathcal{G}}$  az első  $n-1$  vektor által kifeszített lapjának térfogata. A két térfogat hányadosa a paralelepipedonnak ehhez a laphoz tartozó magassága, azaz  $|\langle \partial_n^\varphi(P), \mathbf{N} \rangle| = |\langle X(P), \mathbf{N} \rangle|$ , és így

$$\Theta^\varphi(P) = |\langle X(P), \mathbf{N} \rangle| \sqrt{\det \mathcal{G}}.$$

Legyen  $\nabla$  az  $M$  Levi-Civita-konnexiója, és  $\Gamma_{ij}^k$  a  $\varphi$ -re vonatkozó Christoffel-szimbólumok. Ekkor a  $\Sigma_\epsilon$  második alapformája  $P$ -ben

$$\begin{aligned} H_\epsilon(\partial_i \mathbf{r}_\epsilon(\mathbf{0}), \partial_j \mathbf{r}_\epsilon(\mathbf{0})) &= \langle \nabla_{\partial_i \mathbf{r}_\epsilon(\mathbf{0})}(\partial_j \mathbf{r}_\epsilon), \mathbf{N} \rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\partial_i^\varphi(P)}(\partial_j^\varphi + ((\partial_j f_\epsilon) \circ \varphi) \partial_n^\varphi), \mathbf{N} \right\rangle \\ &= \left\langle \left( \nabla_{\partial_i^\varphi} \partial_j^\varphi \right)(P) + (\partial_i \partial_j f_\epsilon)(\mathbf{0}) \cdot \partial_n^\varphi(P) + (\partial_j f_\epsilon)(\mathbf{0}) \cdot (\nabla_{\partial_i^\varphi} \partial_n^\varphi)(P), \mathbf{N} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) \cdot \partial_k^\varphi(P) + (\partial_i \partial_j f)(\mathbf{0}) \cdot \partial_n^\varphi(P), \mathbf{N} \right\rangle \\ &= (\Gamma_{ij}^n(P) + (\partial_i \partial_j f_\epsilon)(\mathbf{0})) \cdot \langle \partial_n^\varphi(P), \mathbf{N} \rangle. \end{aligned}$$

Jelöljük  $\mathfrak{B}_\epsilon$ -vel a  $\Sigma_\epsilon$  hiperfelület  $P$ -beli második alapformájának mátrixát és  $C$ -vel a  $(\Gamma_{ij}^n(P))_{i,j=1}^{n-1}$  mátrixot. Ezekkel a jelölésekkel

$$\mathfrak{B}_1 = -\langle X(P), \mathbf{N} \rangle \cdot (C + A),$$

$$\mathfrak{B}_2 = -\langle X(P), \mathbf{N} \rangle \cdot (C + B).$$

A  $\Sigma_\epsilon$  hiperfelület  $P$ -beli  $L_\epsilon$  Weingarten-leképezésének  $\mathcal{L}_\epsilon$  mátrixát a  $\mathcal{L}_\epsilon = \mathcal{G}_\epsilon^{-1}\mathfrak{B}_\epsilon$  képlettel számolhatjuk ki. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \det(L_1 - L_2) &= \det(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2) \\ &= \frac{\det(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2)}{\det \mathcal{G}} \\ &= \frac{\det(\langle X(P), \mathbf{N} \rangle \cdot (B - A))}{\det \mathcal{G}} \\ &= \frac{\langle X(P), \mathbf{N} \rangle^{n+1} \cdot \det(B - A)}{\Theta^\varphi(P)^2}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ezzel már koordinátamentesre átírhatjuk a 2.1. tételt. Ehhez felhasználjuk még, hogy az  $A - B$  pontosan akkor pozitív definit, hogy ha a  $\pm(L_1 - L_2)$  szimmetrikus operátor sajátértékei pozitívak, ahol a  $\pm$  a  $-\langle X(P), \mathbf{N} \rangle$  szám előjele.

**2.2. tétel** ([19]). *Tegyük fel, hogy a fenti jelölésekkel a  $\pm(L_1 - L_2)$  szimmetrikus operátor sajátértékei pozitívak, ahol a  $\pm$  a  $-\langle X(P), \mathbf{N} \rangle$  szám előjele. Ekkor  $t$  kis értékeire*

$$\mu(D_1^t \cap D_2) = \frac{\omega_{n-2}}{n^2 - 1} \frac{|\langle X(P), \mathbf{N} \rangle|^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{|\det(L_1 - L_2)|}} (2t)^{\frac{n+1}{2}} + O\left(t^{\frac{n+2}{2}}\right). \quad \square$$

## 2.2. Geodetikus gömbök Weingarten-leképezése

A 2.2. tételt egymást alig metsző geodetikus gömbök metszete térfogatának számolásához szeretnénk használni. Ehhez ki kell számolnunk a tételben szereplő Weingarten-leképezést geodetikus gömbfelületekre. Sokan foglalkoztak már ezzel, az itteni eredmények nem újak, lásd például a [33] és a [34] cikket.

Először Jacobi-mezők segítségével fejezzük ki egy kis geodetikus gömbfelület Weingarten-leképezését.

Legyen  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$  egy természetes paraméterezésű geodetikus, és tegyük fel, hogy  $0 \in (a, b)$ . Egy  $0 \neq r \in (a, b)$  értékre tekintsük a  $\Sigma_\gamma(r) = \Sigma(\gamma(r), |r|)$  gömbfelületet. Ha  $|r|$  elég kicsi, akkor  $\Sigma_\gamma(r)$  egy sima hiperfelület  $M$ -ben  $\gamma(0)$ -n keresztül. Ebben az esetben legyen  $L_\gamma(r)$  a  $\Sigma_\gamma(r)$  hiperfelület Weingarten-leképezése a  $\gamma(0)$  pontban a  $\gamma'(0)$  normálvektorra vonatkozóan.

**2.3. állítás.** *Legyen  $0 \neq r \in (a, b)$  egy rögzített szám. Tegyük fel, hogy a  $\gamma(r)$ -beli exponenciális leképezés megszorítása a  $\mathcal{B}(\mathbf{0}, |r|)$  gömb egy környezetére diffeomorfizmus a környezet és a képe között. Tekintsük a  $\gamma(0)$  pontban a  $\Sigma_\gamma(r)$  hiperfelület*

egy  $\mathbf{v}$  érintővektorát. Legyen  $J$  az a  $\gamma$  menti Jacobi-mező, melyre  $J(r) = \mathbf{0}$  és  $J(0) = \mathbf{v}$ . Ekkor  $L_\gamma(r)(\mathbf{v}) = -J'(0)$ .

*Bizonyítás.* Mivel az  $\exp_{\gamma(r)}$  leképezés diffeomorfizmus a  $\mathcal{B}(\mathbf{0}, |r|)$  gömb egy környezetén, így itt a deriváltja nem fajul el, azaz létezik egy olyan  $\mathbf{x} \in T_{-r\gamma'(r)}T_{\gamma(r)}M$  vektor, melyre  $T_{-r\gamma'(r)}\exp_{\gamma(r)}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}$ . Mivel  $\mathbf{v}$  merőleges a  $\gamma$ -ra, a Gauss-lemma szerint definiálhatjuk  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ -ra az  $A(s)$  ortogonális transzformációt úgy, hogy  $A(0)$  az identitás és  $\frac{d}{ds}(-r)A(s)\gamma'(r)|_{s=0} = \mathbf{x}$  a szokásos  $T_{-r\gamma'(r)}T_{\gamma(r)}M \cong T_{\gamma(r)}M$  azonosítással. Tekintsük a

$$\begin{aligned}\Gamma &: (-\varepsilon, \varepsilon) \times (a, b) \rightarrow M, \\ \Gamma(s, t) &= \exp_{\gamma(r)}((t-r)A(s)(\gamma'(r)))\end{aligned}$$

leképezést. Ekkor minden  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ -ra a  $\gamma_s: t \mapsto \Gamma(s, t)$  egy természetes paraméterezésű geodetikus és  $\gamma_0 = \gamma$ , azaz  $\Gamma$  a  $\gamma$  egy geodetikus variációja. Mivel  $\gamma_s(r) = \gamma(r)$  és  $\partial_1\Gamma(0, 0) = \mathbf{v}$  is fennáll, ez a variáció a  $J$  Jacobi-mezőhöz tartozik, és így  $J(t) = \partial_1\Gamma(0, t)$  minden  $t \in (a, b)$ -re. Mivel  $\partial_1\Gamma$  egy  $\Gamma$  menti vektormező, így vehetjük a  $\partial_2\Gamma$  szerinti kovariáns deriváltját, jelöljük ezt  $\nabla_2\partial_1\Gamma$ -val. Hasonlóan definiálhatjuk  $\nabla_1\partial_2\Gamma$ -t is. Terjesszük ki  $\gamma'(0)$ -t  $\Sigma_\gamma(r)$  egy  $N$  egységnormális mezőjévé. A Gauss-lemma szerint  $N(\Gamma(s, 0)) = \partial_2\Gamma(s, 0)$ . Ezt és a  $\nabla$  szimmetriáját használva kapjuk, hogy

$$L_\gamma(r)(\mathbf{v}) = -\nabla_{\mathbf{v}}N = -\nabla_1\partial_2\Gamma(0, 0) = -\nabla_2\partial_1\Gamma(0, 0) = -J'(0),$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. □

A következőkben a 2.3. állításban szereplő  $J$  Jacobi-mezőre szeretnénk formulát adni, melynek segítségével felírhatjuk a Weingarten-leképezést.

A  $J$  egy  $\gamma$  menti normális Jacobi-mező, melyeket egyértelműen meghatároznak a  $J(0), J'(0) \in \gamma'(0)^\perp$  érintővektorok, ahol

$$\gamma'(0)^\perp = \{\mathbf{x} \in T_{\gamma(0)}M \mid \langle \mathbf{x}, \gamma'(0) \rangle = 0\}.$$

Jelöljük  $J_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$ -nal azt a  $\gamma$  menti Jacobi-mezőt, melyre  $J_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(0) = \mathbf{x}$  és  $J'_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(0) = \mathbf{y}$ .

Rögzítsünk egy  $E_1, \dots, E_n$   $\gamma$  menti párhuzamos ortogonális bázist, melyre  $E_n = \gamma'$ . Ha  $\mathbf{x} \in \gamma'(t)^\perp$  egy érintővektor, akkor  $[\mathbf{x}]$  jelölje az  $E_1(t), \dots, E_{n-1}(t)$  bázisban felírt koordinátái által alkotott oszlopvektort. Az  $R_{\gamma'(t)}$  Jacobi-operátorhoz vezessük be az  $\hat{R}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  mátrixértékű függvényt, melyre  $\hat{R}(t)$  az

$R_{\gamma'(t)}|_{\gamma'(t)^\perp}$  mátrixa az  $E_1(t), \dots, E_{n-1}(t)$  bázisban. Tehát az  $\hat{R}(t)$  mátrix  $i$ -edik sorának  $j$ -edik eleme

$$\hat{R}(t)_{ij} = \langle R(E_j(t), \gamma'(t)) \gamma'(t), E_i(t) \rangle.$$

Definiáljuk a  $\hat{J}: (a, b) \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  függvényt a

$$\hat{J}(t, [\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) = [J_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(t)]$$

egyenlőség alapján (egy  $(n-1)$  dimenziós vektor egyértelműen meghatároz egy  $\gamma'(0)^\perp$ -beli érintővektort). Mivel  $\hat{J}$  lineáris a második és a harmadik változójában, léteznek olyan  $A$  és  $B$  mátrixok, hogy

$$\hat{J}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = A(t)[\mathbf{x}] + B(t)[\mathbf{y}].$$

A  $J_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$  Jacobi-mező ezen alakjára felírhatjuk a Jacobi-egyenletet:

$$A''(t)[\mathbf{x}] + B''(t)[\mathbf{y}] + \hat{R}(t)(A(t)[\mathbf{x}] + B(t)[\mathbf{y}]) = 0.$$

Mivel ez minden  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \gamma'(0)^\perp$  érintővektorra fennáll, így szétválaszthatjuk ezt az egyenletet az

$$A'' + \hat{R}A = 0 \quad \text{és} \quad B'' + \hat{R}B = 0 \quad (2.10)$$

egyenletekre. Ezeket  $k$ -szor deriválva kapjuk, hogy

$$A^{(k+2)} = - \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} \hat{R}^{(s)} A^{(k-s)} \quad \text{és} \quad B^{(k+2)} = - \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} \hat{R}^{(s)} B^{(k-s)}.$$

A  $J_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(0) = \mathbf{x}$  feltétel adja az  $A(0) = I$  és  $B(0) = 0$ , míg a  $J'_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(0) = \mathbf{y}$  feltétel az  $A'(0) = 0$  és  $B'(0) = I$  kezdeti feltételeket. Így már rekurzívan ki tudjuk számolni az  $A$  és a  $B$  0 körüli Taylor-sorát tetszőlegesen hosszán. A harmadfokú Taylor-polinomra azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A(r) &= I - \hat{R}(0) \frac{r^2}{2!} - \hat{R}'(0) \frac{r^3}{3!} + O(r^4), \\ B(r) &= Ir - \hat{R}(0) \frac{r^3}{3!} + O(r^4). \end{aligned}$$

A  $B$  Taylor-sora mutatja, hogy a  $B$  függvény  $B(r) = rB_0(r)$  alakba írható, ahol  $B_0$  egy sima mátrixértékű függvény, melynek Taylor-sora

$$B_0(r) = I - \hat{R}(0) \frac{r^2}{3!} + O(r^3).$$

Mivel  $B_0(0) = I$ , elegendően kicsi  $|r|$  esetén  $B_0(r)$  invertálható, és így  $B(r)$  is invertálható ugyanilyen kicsi, de nemnulla  $r$ -re.

A 2.3. állításban szereplő  $J$  Jacobi-mező felírható  $J = J_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$  alakban valamilyen  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{y}$  érintővektorokkal, melyeket a

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= [J(r)] = A(r)[\mathbf{x}] + B(r)[\mathbf{y}], \\ [\mathbf{v}] &= [J(0)] = A(0)[\mathbf{x}] + B(0)[\mathbf{y}] = [\mathbf{x}]\end{aligned}$$

kezdeti feltételekből számolhatunk ki. Így kapjuk, hogy

$$[J(t)] = A(t)[\mathbf{v}] - B(t)B^{-1}(r)A(r)[\mathbf{v}].$$

A 2.3. állítás szerint  $L_\gamma(r)(\mathbf{v}) = -J'(0)$ , ami a megfelelő mátrixokkal felírva

$$[L_\gamma(r)(\mathbf{v})] = -A'(0)[\mathbf{v}] + B'(0)B^{-1}(r)A(r)[\mathbf{v}] = B^{-1}(r)A(r)[\mathbf{v}].$$

Tehát az  $L_\gamma(r)$  Weingarten-leképezés  $\hat{L}_\gamma(r)$  mátrixa az  $E_1(0), \dots, E_{n-1}(0)$  bázisban

$$B^{-1}(r)A(r) = \frac{1}{r}B_0^{-1}(r)A(r).$$

Mivel az  $A(r)$  és a  $B(r)$  Taylor-sorát tetszőlegesen hosszan ki tudjuk számolni, így ezeknek a  $\hat{L}_\gamma^0 = B_0^{-1}A$  sima függvényét is. Az első néhány tag:

$$\hat{L}_\gamma^0(r) = B_0^{-1}(r)A(r) = I + \frac{\hat{R}(0)}{3}r^2 + O(r^3).$$

Ez a formula mutatja, hogy  $\hat{L}_\gamma$ -nak egyszeres pólusa van az origóban, továbbá a Laurent-sora az origó körül így kezdődik:

$$\hat{L}_\gamma(r) = I \frac{1}{r} + \frac{\hat{R}(0)}{3}r + O(r^2). \quad (2.11)$$

Természetesen a fenti formulákkal az  $\hat{L}_\gamma(r)$  Laurent-sorának bármelyik elemét rekurzívan ki tudjuk számolni.

## 2.3. Harmonikusság és két geodetikus gömb metszete

A Weingarten-leképezés kiszámolásával már fel tudjuk használni a kissé metsző gömbök térfogatára adott aszimptotikát, ezt fogjuk használni a  $KP_2$  és a  $KP_2^-$  tulajdonságú Riemann-sokaságok jellemzésénél.

Legyen  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$  egy természetes paraméterezésű geodetikus, és tegyük fel, hogy  $0 \in (a, b)$ . Az előző szakaszban bevezetett jelöléseket használva az  $L_\gamma(r_1) - L_\gamma(r_2)$  operátor definiálva van  $r_1$  és  $r_2$  kis nem nulla értékeire, és ugyanígy az operátor

$$D_\gamma(r_1, r_2) = \det(L_\gamma(r_1) - L_\gamma(r_2))$$

determinánsa is.

#### 2.4. állítás ([19]).

- (i) *Ha egy  $M$  Riemann-sokaság rendelkezik a  $KP_2$  tulajdonsággal, akkor a hozzá tartozó  $D_\gamma(r_1, r_2)$  függvény  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  origóbeli csírája nem függ a  $\gamma$  geodetikustól.*
- (ii) *Ha az  $M$  Riemann-sokaság a  $KP_2^-$  tulajdonsággal rendelkezik, akkor a hozzá tartozó  $r \mapsto D_\gamma(r, -r)$  függvény  $0 \in \mathbb{R}$  origóbeli csírája nem függ a  $\gamma$  geodetikustól.*

*Bizonyítás.* Legyen  $\gamma_i: (a_i, b_i) \rightarrow M$  két geodetikus ( $i = 1, 2$ ), ahol  $0 \in (a_i, b_i)$ . Válasszunk egy pozitív  $\rho$ -t úgy, hogy minden  $0 < r < \rho$  sugárra a  $\mathcal{B}(\gamma_1(0), r)$  és  $\mathcal{B}(\gamma_2(0), r)$  gömbök geodetikusan konvexek legyenek.

Azt szeretnénk megmutatni, hogy ha  $r_1$  és  $r_2$  kis nemnulla számok, akkor  $D_{\gamma_1}(r_1, r_2) = D_{\gamma_2}(r_1, r_2)$ . Mivel  $D_\gamma(r, r) = 0$ , és ha  $\bar{\gamma}(t) = \gamma(-t)$  jelöli a fordított irányú geodetikust, akkor

$$D_\gamma(r_1, r_2) = (-1)^{n-1} D_\gamma(r_2, r_1) = (-1)^{n-1} D_{\bar{\gamma}}(-r_1, -r_2),$$

feltehetjük, hogy  $-\rho/2 < r_1 < r_2 < \rho/2$  és  $0 < r_2$ . Tekintsük  $i, j \in \{1, 2\}$ -re a

$$B_{i,j} = \bar{\mathcal{B}}(\gamma_i(r_j), |r_j|) \text{ és } B_{i,1}^t = \bar{\mathcal{B}}(\gamma_i(r_1 + t), |r_1|),$$

gömböket, és legyen  $\Sigma_{i,1}^t$  a  $B_{i,1}^t$  gömb határa. Ha  $\Pi_{i,t}: T_{\gamma_i(r_1)}M \rightarrow T_{\gamma_i(r_1+t)}M$  a  $\gamma_i$  menti párhuzamos eltolás, akkor

$$H_{i,t} = \exp_{\gamma_i(r_1+t)} \circ \Pi_{i,t} \circ (\exp_{\gamma_i(r_1)})^{-1}: \Sigma_{i,1}^0 \rightarrow \Sigma_{i,1}^t$$

a  $\Sigma_{i,1}^0$  egy izotópiája, ahol a  $\gamma_i(0) \in \Sigma_{i,1}^0$  kezdősebessége

$$\left. \frac{d}{dt} H_{i,t}(\gamma_i(0)) \right|_{t=0} = \gamma_i'(0).$$



Az  $r_1$  előjele szerint két esetet különböztetünk meg.

Ha  $r_1 < 0$ , akkor a  $B_{i,1}$  és  $B_{i,2}$  gömböknek pontosan egy közös pontjuk van, a  $\gamma(0)$ . A felületeik  $\mathbf{N} = -\gamma'_i(0)$ -re vett  $\gamma_i(0)$ -beli Weingarten-leképezéseinek a különbsége  $L_{\gamma_i}(r_2) - L_{\gamma_i}(r_1)$ . A (2.11) Laurent-sor mutatja, hogy elég kicsi  $|r_1|$  és  $r_2$  értékekre  $L_{\gamma_i}(r_2)$  pozitív definit, míg  $L_{\gamma_i}(r_1)$  negatív definit, így a különbségük pozitív definit. Ekkor a 2.2. tétel alkalmazható, ami elegendően kicsi  $t$  értékekre adja, hogy

$$\mu(B_{i,1}^t \cap B_{i,2}) = \frac{\omega_{n-2}}{(n^2-1)\sqrt{D_{\gamma_i}(r_2, r_1)}} (2t)^{\frac{n+1}{2}} + O\left(t^{\frac{n+2}{2}}\right). \quad (2.12)$$

A  $KP_2$  tulajdonságból következik, hogy  $\mu(B_{1,1}^t \cap B_{1,2}) = \mu(B_{2,1}^t \cap B_{2,2})$ , és így a (2.12) jobb oldalán szereplő kifejezéseknek is meg kell egyezniük  $i = 1$ -re és  $i = 2$ -re. Összehasonlítva  $t^{\frac{n+1}{2}}$  együtthatóit kapjuk, hogy

$$D_{\gamma_1}(r_1, r_2) = (-1)^{n-1} D_{\gamma_1}(r_2, r_1) = (-1)^{n-1} D_{\gamma_2}(r_2, r_1) = D_{\gamma_2}(r_1, r_2).$$

Az  $r = r_2 = -r_1$  speciális eset adja az állítás (ii) részét is.

Most tekintsük azt az esetet, amikor  $0 < r_1 < r_2$ . Ekkor  $B_{i,2}$  tartalmazza  $B_{i,1}$ -et. Jelölje  $B_{i,2}^c$  az  $M \setminus B_{i,2}$  komplementer lezártját. A  $B_{i,1}$  és a  $B_{i,2}^c$  tartományoknak pontosan egy közös pontjuk van, a  $\gamma(0)$ . A határfelületeik  $\mathbf{N} = -\gamma'_i(0)$ -re vett  $\gamma_i(0)$ -beli Weingarten-leképezéseinek a különbsége  $L_{\gamma_i}(r_1) - L_{\gamma_i}(r_2)$ . Az előző szakaszban bevezetett  $\hat{L}_{\gamma_i}$  mátrix értékű függvény elemeire alkalmazva a Lagrange-féle középértéktételt látjuk, hogy  $(L_{\gamma_i}(r_1) - L_{\gamma_i}(r_2))/(r_2 - r_1)$  csak  $O(1)$  tagokkal különbözik egy olyan diagonális mátrixtól, melynek diagonális elemei az  $(1/r_2^2, 1/r_1^2)$  intervallumba esnek. Így  $L_{\gamma_i}(r_1) - L_{\gamma_i}(r_2)$  pozitív definit elegendően kicsiny  $r_1$  és  $r_2$  esetén. A 2.2. tétel szerint kis negatív  $t$  értékekre

$$\begin{aligned} \mu(B_{i,1}^t \cap B_{i,2}) &= \mu(B_{i,1}^t) - \mu(B_{i,1}^t \cap B_{i,2}^c) = \\ &= \mu(B_{i,1}^t) - \frac{\omega_{n-2}}{(n^2-1)\sqrt{D_{\gamma_i}(r_1, r_2)}} (2|t|)^{\frac{n+1}{2}} + O\left(|t|^{\frac{n+2}{2}}\right). \end{aligned}$$

Mivel a  $KP_2$  tulajdonságból következik a  $KP_1$ , így  $\mu(B_{i,1}^t)$  csak  $r_1$ -től függ. Az előző esethez hasonlóan ez a formula is bizonyítja ezt az esetet.  $\square$

Most már egyszerűen tudjuk bizonyítani a következő tételt.

**2.5. tétel** ([19]). *Egy  $KP_2$  tulajdonságú teljes Riemann-sokaság harmonikus.*

*Bizonyítás.* Legyen  $\gamma$  egy tetszőleges természetes paraméterezésű geodetikus 0 körül, és  $L_{\gamma}$ -t írjuk  $L_{\gamma}(r) = L_{\gamma}^0(r)/r$  alakban. A 2.2. szakaszban bizonyítottuk,

hogy  $L_\gamma^0$  egy sima operátorértékű függvény és  $L_\gamma^0(0) = I$ ,  $L_\gamma^{0'}(0) = 0$ . A 2.4. állítás szerint a  $D_\gamma(r_1, r_2)$  függvény  $(0, 0)$ -beli csírája nem függ  $\gamma$ -tól, és így ezt jelölhetjük egyszerűen csak  $D(r_1, r_2)$ -vel. Vegyük észre, hogy

$$\det \left( \frac{r_2 L_\gamma^0(r_1) - r_1 L_\gamma^0(r_2)}{r_2 - r_1} \right) = \left( \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right)^{n-1} D(r_1, r_2),$$

és így a bal oldal  $(0, 0)$ -beli csírája szintén független  $\gamma$ -tól. Megjegyezzük, hogy habár  $D(r_1, r_2)$  nem definiált a koordinátatengelyeken, a bal oldal definiálja a jobb oldal egy sima kiterjesztését az origó egy pontozott környezetére. A bal oldalt  $r_2$  szerint az  $(r_1, r_2) = (r, 0)$  pontban deriválva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_2} \left( \det \left( \frac{r_2 L_\gamma^0(r_1) - r_1 L_\gamma^0(r_2)}{r_2 - r_1} \right) \right) \Big|_{(r_1, r_2) = (r, 0)} &= \\ &= \operatorname{tr} \left( -\frac{L_\gamma^0(r)}{r} - L_\gamma^{0'}(0) + \frac{L_\gamma^0(0)}{r} \right) = \\ &= -\operatorname{tr}(L_\gamma(r)) + \frac{n-1}{r}. \end{aligned}$$

Így tudjuk, hogy a kis geodetikus gömbök állandó középgörbületűek, mely konstans csak a sugártól függ, azaz a sokaság harmonikus.  $\square$

Szabó I. Zoltán bebizonyította a visszafelé irányt: egy összefüggő, egyszeresen összefüggő és teljes harmonikus sokaság rendelkezik a  $KP_2$  tulajdonsággal [37, corollary 2.1]. Bár a cikkben nem szerepel, de az ott leírtak segítségével is bizonyíthatjuk a 2.5. tételt. Ebből a célból idézzük fel az ott leírt bizonyítást, és az ahhoz szükséges definíciókat és állítást a cikkből. Egy  $M$  Riemann-sokaságon egy  $M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt magfüggvénynek nevezünk. Ha  $H$  és  $G$  két olyan magfüggvény egy  $M$  Riemann-sokaságon, melyekre teljesül, hogy bármely  $x \in M$ -re a  $H_x(\cdot) = H(x, \cdot)$  és a  $G^x(\cdot) = G(\cdot, x)$  függvény  $L^2$ -függvény, akkor a  $H * G: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  konvolúciójukat a

$$H * G(x, y) = \int_M H(x, z)G(z, y) dz.$$

integrállal definiáljuk. Egy  $H$  magfüggvényt radiálisnak mondunk, ha  $H(x, y)$  értéke csak az  $x$  és  $y$  geodetikus távolságától függ, azaz  $H = h \circ d$  alakú, valamilyen  $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  függvénnyel ( $d$  a távolságfüggvény).

**2.6. állítás** ([37, proposition 2.1]). *Egy összefüggő, egyszeresen összefüggő és teljes Riemann-sokaság pontosan akkor harmonikus, ha tetszőleges  $H = h \circ d$  és  $G = g \circ d$  radiális magfüggvények konvolúciója szintén radiális, amikor  $h$  és  $g$  kompakt tartójú sima függvények  $\mathbb{R}_+$ -on.*

Egy pozitív  $r$  számra jelölje  $\chi_r: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  a  $[0, r]$  intervallum karakterisztikus függvényét, azaz legyen

$$\chi_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leq x \leq r, \\ 0 & \text{ha } r < x. \end{cases}$$

A  $KP_2$  tulajdonság ekvivalens azzal, hogy a  $\chi_{r_1} \circ d$  és a  $\chi_{r_2} \circ d$  függvények konvolúciója radiális magfüggvény tetszőleges  $r_1, r_2 > 0$  értékekre. Mivel a karakterisztikus függvényeket tudjuk kompakt tartójú sima függvényekkel közelíteni, így a 2.6. állításból következik, hogy a harmonikus terek rendelkeznek a  $KP_2$  tulajdonsággal.

De ezt visszafelé is bizonyíthatjuk, hiszen ha a karakterisztikus függvények konvolúciója radiális, abból a konvolúció bilinearitása miatt már az is következik, hogy lépcsős  $g$  és  $h$  függvények esetén a  $h \circ d$  és a  $g \circ d$  függvények konvolúciója radiális. Mivel az  $\mathbb{R}_+$ -on értelmezett kompakt tartójú sima függvények a szuprémum normában közelíthetők lépcsős függvényekkel, így azoknak a konvolúciója is radiális, amiből a 2.6. állítás szerint következik, hogy a sokaság harmonikus.

## 2.4. A $KP_2^-$ tulajdonságú sokaságok

Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy a  $KP_2^-$  tulajdonságú Riemann-sokaságok Einstein-sokaságok, továbbá a  $KP_2^-$  tulajdonságú szimmetrikus terek kétponthomogénekek.

**2.7. tétel** ([19]). *Egy  $KP_2^-$  tulajdonságú Riemann-sokaság Einstein.*

*Bizonyítás.* A 2.4. állítás (ii) részéből tudjuk, hogy a  $\det(L_\gamma(r) - L_\gamma(-r))$  függvény csírája nem függ a  $\gamma$  geodetikustól. Az  $L_\gamma$  Weingarten-leképezésre kapott (2.11) Laurent-sort használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \det(L_\gamma(r) - L_\gamma(-r)) &= \det\left(I \frac{2}{r} + \frac{2R_{\gamma'(0)}}{3}r + O(r^2)\right) \\ &= \left(\frac{2}{r}\right)^{n-1} \det\left(I + \frac{R_{\gamma'(0)}}{3}r^2 + O(r^3)\right). \end{aligned}$$

Így

$$\det\left(I + \frac{R_{\gamma'(0)}}{3}r^2 + O(r^3)\right) = 1 + \text{tr}\left(\frac{R_{\gamma'(0)}}{3}\right)r^2 + O(r^3)$$

csak az  $r$ -től függ, a  $\gamma$ -tól nem. Tehát a  $\text{tr}(R_{\gamma'(0)})$  nyom nem függ a  $\gamma'(0)$  egység-hosszú érintővektortól, ami ekvivalens az Einstein-sokaságok definíciójával.  $\square$

Bár a későbbi eredményekből az alábbi tétel következik (mivel minden szimmetrikus harmonikus tér kétponthomogén), érdekes, hogy ezt az eredményt így is megmutathatjuk.

**2.8. tétel** ([19]). *Ha  $M$  egy összefüggő, egyszeresen összefüggő szimmetrikus Riemann-sokaság, mely rendelkezik a  $KP_2^=$  tulajdonsággal, akkor  $M$  kétponthomogén.*

*Bizonyítás.* Legyen  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$  egy természetes paraméterezésű geodetikus, melyre  $0, r \in (a, b)$ . Az  $R_{\gamma'(0)}$  Jacobi-operátor szimmetrikus, így  $R_{\gamma'(0)}$  sajátvektoraiból választhatunk egy ortonormált  $E_1(0), \dots, E_n(0)$  bázist a  $T_{\gamma(0)}M$  érintőtérben. Jelöljük  $\lambda_i$ -vel az  $E_i(0)$ -hoz tartozó sajátértéket. Mivel  $R_{\gamma'(0)}(\gamma'(0)) = 0$ , feltehetjük, hogy  $E_n(0) = \gamma'(0)$  és  $\lambda_n = 0$ . Terjesszük ki az  $E_i(0)$  vektorokat  $E_i: (a, b) \rightarrow TM$   $\gamma$  menti párhuzamos vektormezőkké. A  $\gamma(0)$  és a  $\gamma(t/2)$  körüli középpontos tükrözések kompozíciója  $M$  egy izometriája minden  $t \in (a, b)$ -re. Ennek a leképezésnek a derivált leképezése  $E_i(0)$ -t  $E_i(t)$ -be képezi, ezért  $R_{\gamma'(t)}(E_i(t)) = \lambda_i E_i(t)$  minden  $t \in (a, b)$ -re. Legyen  $\hat{R}(t)$  az  $R_{\gamma'(t)}|_{\gamma'(t)^\perp}$  mátrixa az  $E_1(t), \dots, E_{n-1}(t)$  ortonormált bázisban. Ekkor  $\hat{R}(t)$  diagonális mátrix a  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  diagonális elemekkel ( $t$ -től függetlenül). Ezzel expliciten meg tudjuk oldani a (2.10) egyenletet  $A$ -ra és  $B$ -re. Mindkettő diagonális mátrix, a diagonális elemek az  $A(t)$  esetében

$$\cos\left(\sqrt{-\lambda_1}t\right), \dots, \cos\left(\sqrt{-\lambda_{n-1}}t\right),$$

míg a  $B(t)$  esetében

$$\frac{\sin\left(\sqrt{-\lambda_1}t\right)}{\sqrt{-\lambda_1}}, \dots, \frac{\sin\left(\sqrt{-\lambda_{n-1}}t\right)}{\sqrt{-\lambda_{n-1}}},$$

ahol pozitív  $\lambda$  esetén  $\sqrt{-\lambda_i}$  a pozitív képzetes részű komplex gyököt jelenti. A „ $\sin(at)/a$ ” függvényt a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a^{2k}}{(2k+1)!} t^{2k+1}$$

hatványsorral definiáljuk, speciálisan  $\sin(0t)/0 = t$ . Így azt kapjuk, hogy  $\hat{L}_\gamma(r)$  diagonális mátrix a

$$\sqrt{-\lambda_1} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{-\lambda_1}r\right), \dots, \sqrt{-\lambda_{n-1}} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{-\lambda_{n-1}}r\right)$$

diagonális elemekkel. Ekkor  $L_\gamma(r) = -L_\gamma(-r)$ , és

$$\det(L_\gamma(r) - L_\gamma(-r)) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{-\lambda_k} \operatorname{ctg} \left( \sqrt{-\lambda_k} r \right).$$

Ha a sokaság  $KP_2^-$  tulajdonságú, akkor a  $\det(L_\gamma(r) - L_\gamma(-r))$  függvény  $r = 0$ -beli csírája nem függ a  $\gamma$  geodetikustól. Ebből a következő lemma szerint az is következik, hogy a  $\lambda_i$ -k sem függenek a geodetikustól.

**2.9. lemma.** *Tegyük fel, hogy valamely  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  és  $\mu_1, \dots, \mu_m$  valós számokra*

$$F(r) = \prod_{k=1}^m \sqrt{-\lambda_k} \operatorname{ctg} \left( \sqrt{-\lambda_k} r \right) \quad \text{és} \quad G(r) = \prod_{k=1}^m \sqrt{-\mu_k} \operatorname{ctg} \left( \sqrt{-\mu_k} r \right)$$

*függvények  $r$  kis értékei esetén egyenlők. Ekkor létezik az  $\{1, \dots, m\}$  halmaznak egy  $\sigma$  permutációja, melyre  $\lambda_k = \mu_{\sigma(k)}$  minden  $1 \leq k \leq m$ -re.*

*Bizonyítás.* A lemmát  $m$  szerinti indukcióval bizonyítjuk. Az  $m = 0$  esetben nincs mit bizonyítani. Tegyük fel, hogy  $(m-1)$ -re igaz az állítás. Az unicitás tétel szerint  $F$  és  $G$  ugyanazon meromorf függvénné terjed ki  $\mathbb{C}$ -n. Így a pólusok is ugyanott vannak. Az  $F$  és  $G$  pólusainak halmaza

$$\{0\} \cup \left\{ \frac{j\pi}{\sqrt{-\lambda_k}} \mid j \in \mathbb{Z}, \lambda_k \neq 0 \right\} = \{0\} \cup \left\{ \frac{j\pi}{\sqrt{-\mu_k}} \mid j \in \mathbb{Z}, \mu_k \neq 0 \right\}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha  $F = G$ -nek csak a 0 pólusa, akkor  $\lambda_k = \mu_k = 0$  minden  $1 \leq k \leq m$ -re, és így készen vagyunk. Ha  $F = G$ -nek van nemnulla pólusa, akkor ha  $a$  az egyik legkisebb közülük, akkor  $-(\pi/a)^2$ -nek egyenlőnek kell lennie az egyik leghosszabb nemnulla  $\lambda_k$ -val és az egyik leghosszabb nemnulla  $\mu_k$ -val. Az indexek permutációja után feltehető, hogy  $-(\pi/a)^2 = \lambda_m = \mu_m$ . De ekkor

$$\prod_{k=1}^{m-1} \sqrt{-\lambda_k} \operatorname{ctg} \left( \sqrt{-\lambda_k} r \right) = \prod_{k=1}^{m-1} \sqrt{-\mu_k} \operatorname{ctg} \left( \sqrt{-\mu_k} r \right)$$

kis  $r$  értékek esetén. Így az indukciós feltevessel készen vagyunk.  $\square$

A lemmából adódik, hogy egy  $KP_2^-$  tulajdonságú sokaságon az  $R_{\gamma'(0)}$  Jacobi-operátor spektruma multiplicitásokkal együtt független  $\gamma$ -tól. Mivel minden  $\mathbf{x}$  egység hosszú érintővektorra van egy természetes paraméterezésű  $\gamma$  geodetikus, melyre  $\gamma'(0) = \mathbf{x}$ , azt kapjuk, hogy egy lokálisan szimmetrikus  $KP_2^-$  tulajdonságú sokaság Osserman. Egy szimmetrikus Ossermann-sokaság viszont lokálisan kétponthomogén. Így az  $M$ -re tett feltevések miatt  $M$  kétponthomogén.  $\square$

## 2.5. $KP_2^-$ tulajdonság és a harmonikusság ekvivalenciája

Ebben a szakaszban a [20] nyomán bebizonyítjuk, hogy már a  $KP_2^-$  tulajdonságból is következik, hogy a tér harmonikus. Ehhez a Weingarten-leképezésre adott formulákat tovább kell alakítanunk.

Ehhez tekintsünk a Riemann-sokaságon egy természetes paraméterezésű  $\gamma$  geodetikust. Válasszunk egy  $E_1, \dots, E_n$  párhuzamos ortonormált bázismezőt a  $\gamma$  mentén úgy, hogy  $E_n = \gamma'$  legyen. Egy  $\mathbf{x} \in \gamma'(t)^\perp$  érintővektor esetén használjuk az  $[\mathbf{x}]$  jelölést az  $E_1(t), \dots, E_{n-1}(t)$  bázisban felírt koordinátái által alkotott oszlopvektorra. A  $\gamma'(t)$  Jacobi-operátor  $\gamma'(t)^\perp$ -re való megszorításának a mátrixára egyszerűen csak az  $R(t)$  jelölést használjuk.

A Jacobi-mezők konstruálásához tekintsük a következő definíciót. Rögzített  $r$  valós számra legyen  $J(r, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  a következő mátrix-differenciálegyenlet megoldása:

$$(i) \quad \partial_2^2 J(r, t) + R(t)J(r, t) = 0,$$

$$(ii) \quad J(r, r) = 0,$$

$$(iii) \quad \partial_2 J(r, r) = I.$$

Ha a  $J_{r, \mathbf{v}}(r) = \mathbf{0}$  és  $J'_{r, \mathbf{v}}(r) = \mathbf{v}$  kezdeti feltételekkel rendelkező Jacobi-mezőt keressük (ahol  $\mathbf{v} \in \gamma'(r)^\perp$ ), akkor azt a  $[J_{r, \mathbf{v}}(t)] = J(r, t)[\mathbf{v}]$  egyenlet egyértelműen definiálja. Ha  $\gamma(t)$  közel van  $\gamma(r)$ -hez, azaz  $\gamma(t)$   $\gamma(r)$  azon környezetében fekszik, ahol a  $\gamma(r)$ -beli exponenciális leképezés diffeomorfizmus, akkor  $\gamma(t)$  nem konjugált  $\gamma(r)$ -hez  $\gamma$  mentén, és így  $J(r, t)$  invertálható.

### 2.10. állítás. $A$

$$W(t) = J(r_1, t)^\top \partial_2 J(r_2, t) - \partial_2 J(r_1, t)^\top J(r_2, t)$$

*Wronski-féle mátrix konstans  $\gamma$  mentén.*

*Bizonyítás.* Tekintsük a  $W$  deriváltját, majd használjuk fel a  $J$ -re vonatkozó differenciálegyenletet és  $R$  szimmetriáját.

$$\begin{aligned} W'(t) &= \partial_2 J(r_1, t)^\top \partial_2 J(r_2, t) + J(r_1, t)^\top \partial_2^2 J(r_2, t) - \\ &\quad - \partial_2^2 J(r_1, t)^\top J(r_2, t) - \partial_2 J(r_1, t)^\top \partial_2 J(r_2, t) = \\ &= J(r_1, t)^\top R(t)J(r_2, t) - (R(t)J(r_1, t))^\top J(r_2, t) = \\ &= 0, \end{aligned}$$

így  $W$  valóban konstans a  $\gamma$  mentén.  $\square$

A  $W(t_1) = W(t_2)$  egyenlőségből a  $J$ -re vonatkozó kezdeti feltételeket használva kapjuk, hogy

$$-J(t_2, t_1) = J(t_1, t_2)^T. \quad (2.13)$$

Ez az egyenlőség mutatja, hogy  $J$  az első változójában is differenciálható.

A mostani esetben is a  $\gamma$  geodetikuson fognak feküdni a gömbök középpontjai és a Weingarten-leképezés vizsgált helye, de ez utóbbi már nem feltétlenül lesz a  $\gamma(0)$  pont. Tegyük fel, hogy  $|r|$  olyan kicsi, hogy az  $\exp_{\gamma(t+r)}$  leképezés diffeomorfizmus a  $\mathcal{B}(\gamma(t+r), |r|)$  gömbön, ekkor a  $\Sigma(\gamma(t+r), |r|)$  gömbfelület egy sima hiperfelület. Jelölje  $L(r, t)$  a  $\gamma(t)$  pontban a  $\gamma'(t)$  normálvektorra vonatkozó Weingarten-leképezés mátrixát az  $E_1(t), \dots, E_{n-1}(t)$  bázisban. Ekkor a 2.3. állítás szerint  $L(r, t)J(t+r, t) = -\partial_2 J(t+r, t)$ , azaz

$$L(r, t) = -\partial_2 J(t+r, t)J(t+r, t)^{-1}. \quad (2.14)$$

A (2.11) Laurent-sort átírhatjuk erre az esetre:

$$L(r, t) = I \frac{1}{r} + \frac{R(t)}{3} r + O(r^2). \quad (2.15)$$

A (2.15) formula mutatja, hogy az  $L$ -et nem tudjuk  $r = 0$ -ra definiálni, ezért néha az  $L^0(r, t) = rL(r, t)$  függvényt tekintjük, amit simán ki tudunk terjeszteni  $I$ -vel  $(0, t)$ -re minden  $t$ -re. A (2.15) egyenletből

$$L^0(r, t) = I + \frac{R(t)}{3} r^2 + O(r^3). \quad (2.16)$$

A  $W(t) = W(r_2)$  egyenlőségből azt kapjuk, hogy

$$J(r_1, t)^T \partial_2 J(r_2, t) - \partial_2 J(r_1, t)^T J(r_2, t) = J(r_1, r_2)^T,$$

amiből átrendezéssel

$$\begin{aligned} \partial_2 J(r_2, t) J(r_2, t)^{-1} - (\partial_2 J(r_1, t) J(r_1, t)^{-1})^T &= \\ &= J(r_1, t)^{-1T} J(r_1, r_2)^T J(r_2, t)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

A (2.14), (2.17) egyenletek és  $L^T = L$  adják, hogy

$$-L(r_2 - t, t) + L(r_1 - t, t) = J(r_1, t)^{-1T} J(r_1, r_2)^T J(r_2, t)^{-1}. \quad (2.18)$$

Először csak azt bizonyítjuk be, hogy egy  $KP_2^=$  tulajdonságú Riemann-sokaság D'Atri-tér.

**2.11. tétel** ([20]). *Minden  $KP_2^-$  tulajdonságú Riemann-sokaság  $D'$ Atri-tér.*

*Bizonyítás.* Tekintsünk egy  $\gamma$  geodetikust. Egy  $KP_2^-$  tulajdonságú sokaságban a 2.4. állítás (ii) része szerint a  $D_\gamma(-r, r)$  függvény origóbeli csírája nem függ a  $\gamma$  geodetikustól. Definiáljuk a  $D$  függvényt a  $D(r) = D_\gamma(-r, r)$  egyenlőséggel. Válasszunk egy olyan  $\varepsilon > 0$  számot, hogy minden  $0 < |r| \leq 2\varepsilon$  és  $|t| \leq 2\varepsilon$  értékre az  $L(r, t)$  definiálva van, és  $D(r) = \det(L(r, t) - L(-r, t))$  is fennáll. Ekkor  $0 < |r| \leq \varepsilon$  és  $|t| \leq \varepsilon$  számokra fejezzük ki a  $D$  függvényt a (2.18) egyenlettel:

$$\begin{aligned} D(r) &= \det(L(r, t) - L(-r, t)) \\ &= \det \left( J(t+r, t)^{-1\text{T}} J(t+r, t-r)^{\text{T}} J(t-r, t)^{-1} \right) \\ &= \frac{\det J(t+r, t-r)}{\det J(t+r, t) \det J(t-r, t)}. \end{aligned}$$

Átrendezés után

$$\det J(t+r, t) \det J(t-r, t) D(r) = \det J(t+r, t-r). \quad (2.19)$$

Ennek a  $t$  szerinti logaritmikus deriváltja:

$$\begin{aligned} &\text{tr} \left( \partial_1 J(t+r, t) J(t+r, t)^{-1} \right) + \text{tr} \left( \partial_2 J(t+r, t) J(t+r, t)^{-1} \right) + \\ &+ \text{tr} \left( \partial_1 J(t-r, t) J(t-r, t)^{-1} \right) + \text{tr} \left( \partial_2 J(t-r, t) J(t-r, t)^{-1} \right) = \\ &= \text{tr} \left( \partial_1 J(t+r, t-r) J(t+r, t-r)^{-1} \right) + \\ &+ \text{tr} \left( \partial_2 J(t+r, t-r) J(t+r, t-r)^{-1} \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

A  $\partial_1$  deriválást tartalmazó tagokat át tudjuk írni  $\partial_2$ -t tartalmazó tagokká a

$$\partial_1 J(t_1, t_2) = -(\partial_2 J(t_2, t_1))^{\text{T}}$$

azonosság segítségével, mely következik a (2.13) egyenletből. Még néhányszor használva a (2.13) szimmetriarelációt a (2.20) egyenlet a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned} &\text{tr} \left( \partial_2 J(t, t+r) J(t, t+r)^{-1} \right) + \text{tr} \left( \partial_2 J(t+r, t) J(t+r, t)^{-1} \right) + \\ &+ \text{tr} \left( \partial_2 J(t, t-r) J(t, t-r)^{-1} \right) + \text{tr} \left( \partial_2 J(t-r, t) J(t-r, t)^{-1} \right) = \\ &= \text{tr} \left( \partial_2 J(t-r, t+r) J(t-r, t+r)^{-1} \right) + \\ &+ \text{tr} \left( \partial_2 J(t+r, t-r) J(t+r, t-r)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Ezt a (2.14) formula felhasználásával átírva

$$\begin{aligned} &\text{tr}(L(-r, t+r)) + \text{tr}(L(r, t)) + \text{tr}(L(r, t-r)) + \text{tr}(L(-r, t)) = \\ &= \text{tr}(L(-2r, t+r)) + \text{tr}(L(2r, t-r)) \end{aligned} \quad (2.21)$$



adódik.

Legyen az  $f: [-\varepsilon, +\varepsilon] \times [-\varepsilon, +\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény különböző  $a, b \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$  esetén

$$f(a, b) = \text{tr}(L(b - a, a)) + \text{tr}(L(a - b, b)).$$

Mivel  $L$ -nek szingularitása van  $(0, t)$ -ben minden  $t$ -re,  $f(a, b)$ -t csak  $a \neq b$ -re tudjuk definiálni. A (2.15) kifejezés mutatja, hogy  $f$ -et ki lehet terjeszteni az  $a = b$  átlóra  $f(a, a) = 0$ -val. Meg fogjuk mutatni, hogy  $f$  azonosan 0. A (2.21) egyenlet szerint

$$f(t + r, t) + f(t - r, t) = f(t + r, t - r),$$

ami átbetűzve

$$f(a, b) = f\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, b\right).$$

Ha ezt  $k$ -szor alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$f(a, b) = \sum_{i=0}^{2^k-1} f\left(a + \frac{i}{2^k}(b-a), a + \frac{i+1}{2^k}(b-a)\right). \quad (2.22)$$

A (2.16) szerint a  $\text{tr}L^0(r, t)$  függvény  $r$  szerinti Taylor-polinomja Lagrange-maradéktaggal

$$\text{tr}L^0(r, t) = n - 1 + \frac{\text{tr}R(t)}{3}r^2 + \frac{\text{tr}\partial_1^3 L^0(\tilde{r}, t)}{6}r^3,$$

ahol  $|\tilde{r}| < |r|$ . A  $|\text{tr}\partial_1^3 L^0|$  függvénynek a  $[-2\varepsilon, +2\varepsilon] \times [-\varepsilon, +\varepsilon]$  kompakt halmazon felvett maximumát jelöljük  $C$ -vel. A 2.7. tétel szerint a sokaság Einstein, így  $\text{tr}R$  konstans. Ezért  $|f(a', b')| \leq \frac{C}{3}|a' - b'|^2$  fennáll minden  $a', b' \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$  számra. Ha a (2.22) jobb oldalára alkalmazzuk ezt a becslést, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |f(a, b)| &\leq \sum_{i=0}^{2^k-1} \left| f\left(a + \frac{i}{2^k}(b-a), a + \frac{i+1}{2^k}(b-a)\right) \right| \leq \\ &\leq 2^k \frac{C}{3} \left| \frac{b-a}{2^k} \right|^2 = \frac{C}{3} \frac{|b-a|^2}{2^k} \end{aligned}$$

minden  $a, b \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$  számra. Mivel  $k$  tetszőlegesen nagy lehet,  $f(a, b) = 0$ , tehát

$$\text{tr}L(b - a, a) + \text{tr}L(a - b, b) = 0$$

fennáll minden  $\gamma$  geodetikus elég közeli  $a$  és  $b$  paraméterértékére. Ezt a középgörbületekkel is felírhatjuk

$$h_{\gamma(b)}(\gamma(a)) = h_{\gamma(a)}(\gamma(b))$$

alakban. Mivel  $\gamma(a)$  és  $\gamma(b)$  a sokaság tetszőleges elegendően közeli pontja lehet, ebből már következik, hogy a tér D'Atri.  $\square$

Most már a harmonikusságot is be tudjuk bizonyítani.

**2.12. tétel** ([20]). *Egy  $KP_2^-$  tulajdonságú Riemann-sokaság harmonikus.*

*Bizonyítás.* Legyen  $\varepsilon$  olyan, mint a 2.11. tétel bizonyításában és most is tegyük fel, hogy  $0 < |r| \leq \varepsilon$  és  $|t| \leq \varepsilon$ . A (2.19) egyenlet  $r$  szerinti logaritmikus deriváltja a következő:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr}(\partial_1 J(t+r, t)J(t+r, t)^{-1}) - \operatorname{tr}(\partial_1 J(t-r, t)J(t-r, t)^{-1}) + (\log D)'(r) = \\ & = \operatorname{tr}(\partial_1 J(t+r, t-r)J(t+r, t-r)^{-1}) - \operatorname{tr}(\partial_2 J(t+r, t-r)J(t+r, t-r)^{-1}). \end{aligned}$$

Ahogy a (2.21) egyenletet kaptuk a (2.20) egyenletből, úgy ezt az egyenletet is át tudjuk írni az alábbi formára:

$$\begin{aligned} -\operatorname{tr}(L(-r, t+r)) + \operatorname{tr}(L(r, t-r)) + (\log D)'(r) = \\ = -\operatorname{tr}(L(-2r, t+r)) + \operatorname{tr}(L(2r, t-r)). \end{aligned} \quad (2.23)$$

A 2.11. tétel szerint a sokaság D'Atri, így a  $h_{\gamma(t)}(\gamma(t-r)) = h_{\gamma(t)}(\gamma(t+r))$  egyenlőség is fennáll minden elég kicsi  $r$ -re (ehhez esetleg csökkentjük  $\varepsilon$ -t), ami a Weingarten-leképezés nyomával felírva  $\operatorname{tr}(L(r, t-r)) = -\operatorname{tr}(L(-r, t+r))$ . Már bebizonyítottuk, hogy  $\operatorname{tr}(L(2r, t-r)) = -\operatorname{tr}(L(-2r, t+r))$ . Ezekkel az egyenlőségekkel a (2.23) egyenlőség a

$$2\operatorname{tr}(L(r, t-r)) + (\log D)'(r) = 2\operatorname{tr}(L(2r, t-r)) \quad (2.24)$$

alakra hozható. Mivel a (2.24) egyenlet igaz az olyan  $t, r \in \mathbb{R}$  számokra, melyekre  $0 < |r| \leq \varepsilon$  és  $|t| \leq \varepsilon$ , a

$$(\log D)'(r) = 2\operatorname{tr}(L(2r, t)) - 2\operatorname{tr}(L(r, t)) \quad (2.25)$$

egyenlet fennáll azokra, melyekre  $0 < |r| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  és  $|t| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

A 2.7. tétel szerint a sokaság Einstein, így a Kazdan–DeTurck-tétel szerint egy normális koordináta-rendszerben a metrika analitikus. Mivel a Jacobi-operátor a metrikának analitikus függvénye, így az is analitikus. A Cauchy–Kowalevski-tétel szerint egy analitikus együtthatós differenciálegyenlet megoldása is analitikus,

így a Jacobi-egyenlet megoldása is analitikus. Az ebből kifejezhető Weingarten-leképezés mátrixa, és így  $\text{tr}L^0(r, t)$  is egy analitikus függvény. Ezért a Weingarten-leképezés nyomát egy Laurent-sorba tudjuk fejteni:

$$\text{tr}(L(r, t)) = \frac{n-1}{r} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t)r^i.$$

Ezzel a helyettesítéssel a (2.25) egyenlet a

$$(\log D)'(r) = -\frac{n-1}{r} + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (2^i - 1)a_i(t)r^i$$

alakot ölti. Így a  $(\log D)'(r)$  függvény Laurent-sorának együtthatói meghatározzák az  $a_i(t)$  együtthatókat ( $i = 1, 2, \dots$ ), amiből következik, hogy  $\text{tr}(L(r, t))$  csak az  $r$ -től függ ( $t$ -től és a  $\gamma$ -tól nem). Ez azt jelenti, hogy a kis geodetikus gömbök középgörbülete csak a sugártól függő konstans, azaz a sokaság harmonikus.  $\square$

A [37] cikkből már tudjuk, hogy az összefüggő, egyszeresen összefüggő, teljes harmonikus terek rendelkeznek a  $KP_2^-$  tulajdonsággal, ezért megfogalmazhatjuk a következő tételt.

**2.13. tétel.** *Egy összefüggő, egyszeresen összefüggő teljes Riemann-sokaság pontosan akkor harmonikus, ha  $KP_2^-$  tulajdonságú.*

## 2.6. Egy globális tétel

Az eddigiek csak lokális eredmények voltak, a  $KP_2$  tulajdonságot csak kis gömbökre alkalmaztuk. A következő tétel már egy globális eredményt ad, viszont csak akkor, ha a sokaság állandó görbületű. Egy állandó görbületű  $KP_2^-$  sokaság majdnem egyszeresen összefüggő:

**2.14. tétel.** *Tegyük fel, hogy  $(M, g)$  egy olyan teljes, összefüggő, állandó szekcionális görbületű Riemann-sokaság, mely rendelkezik a  $KP_2^-$  tulajdonsággal. Ekkor  $M$  a  $\mathbb{H}_\kappa^n, \mathbb{E}^n, \mathbb{S}_\kappa^n, \mathbb{RP}_\kappa^n$  terek egyike.*

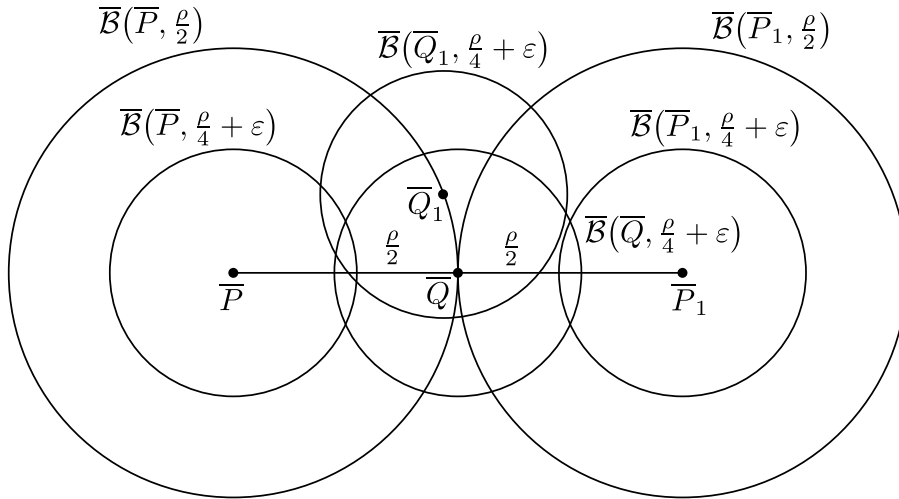
Bár a [22] cikkben ez a tétel csak a  $KP_2$  tulajdonságra volt megfogalmazva, a bizonyítás valójában csak a  $KP_2^-$  tulajdonságot használja.

*Bizonyítás.* Indirekten tegyük fel, hogy  $M \notin \{\mathbb{H}_\kappa^n, \mathbb{E}^n, \mathbb{S}_\kappa^n, \mathbb{RP}_\kappa^n\}$ . Ekkor legyen  $(\overline{M}, \overline{g})$  az univerzális fedőtere az  $F: \overline{M} \rightarrow M$  fedőleképezés által indukált  $\overline{g}$  metrikával. Mivel  $M$  állandó görbületű,  $\overline{M} \in \{\mathbb{H}_\kappa^n, \mathbb{E}^n, \mathbb{S}_\kappa^n\}$ .

Válasszunk egy  $P \in M$  pontot, és annak egy  $\bar{P} \in F^{-1}(P)$  ősét. Legyen

$$\rho = \min \left\{ d(\bar{P}, \bar{P}') \mid \bar{P}' \in F^{-1}(P) \setminus \{\bar{P}\} \right\}.$$

Egy  $r$  pozitív számra jelölje  $\mathcal{G}(r)$  a  $\{\bar{\mathcal{B}}(\bar{P}', r) \mid \bar{P}' \in F^{-1}(P)\}$  gömbök halmazát. Mivel a  $\mathbb{H}_\kappa^n$  és  $\mathbb{E}^n$  minden gömbje, az  $\mathbb{S}_\kappa^n$ -nak pedig a főkör hosszának negyedénél kisebb sugarú gömbjei geodetikusan konvexek, így a  $\mathcal{G}(\frac{\rho}{2})$  elemei geodetikusan konvexek ( $\bar{M} = \mathbb{S}_\kappa^n$  esetén  $\rho$  kisebb, mint egy főkör hosszának a fele, mivel  $M$  sem  $\mathbb{S}_\kappa^n$ , sem  $\mathbb{RP}_\kappa^n$ ). Így  $\mathcal{G}(\frac{\rho}{2})$  elemei közül bármely kettő metszete üres vagy egyetlen pontból áll. Valóban, ha a metszet legalább két pontból állna, akkor a gömbfelületek is legalább két különböző pontban metszenék egymást, és az ezeket összekötő geodetikus ív (nemüres) relatív belseje mindkét gömb belső pontja lenne, ami ellentmondana  $r$  minimalitásának. Megjegyezzük, hogy egyik  $\bar{Q} \in \bar{M}$  pont sem tartozik három  $\mathcal{G}(\frac{\rho}{2})$ -beli gömbhöz, mert akkor a  $\bar{\mathcal{B}}(\bar{Q}, \frac{\rho}{2})$  gömb három páronként antipodális pontot tartalmazna (azaz  $\rho$  távolságú pontokat).



2.2. ábra.

Legyen  $\bar{P}_1 \in F^{-1}(P)$  egy olyan pont, melyre  $d(\bar{P}, \bar{P}_1) = \rho$  (lásd a 2.2. ábrát). A  $\bar{\mathcal{B}}(\bar{P}, \frac{\rho}{2})$  és a  $\bar{\mathcal{B}}(\bar{P}_1, \frac{\rho}{2})$  gömböknek a metszete nem üres, így egyetlen  $\bar{Q}$  pontból áll. A  $\bar{Q}$  pontnak van egy olyan  $U$  nyílt környezete, amely csak a  $\bar{\mathcal{B}}(\bar{P}, \frac{\rho}{2})$  és a  $\bar{\mathcal{B}}(\bar{P}_1, \frac{\rho}{2})$  gömböt metszi a  $\mathcal{G}(\frac{\rho}{2})$  elemei közül. Válasszunk egy  $\bar{Q}_1$  pontot a  $(U \cap \Sigma(\bar{P}, \frac{\rho}{2})) \setminus \{\bar{Q}\}$  halmazból. Ekkor a  $\bar{\mathcal{B}}(\bar{Q}, \frac{\rho}{4})$  gömb pontosan két gömböt érint a  $\mathcal{G}(\frac{\rho}{4})$  elemei közül, míg a  $\bar{\mathcal{B}}(\bar{Q}_1, \frac{\rho}{4})$  csak egyet. Elegendően kicsiny pozitív  $\varepsilon$ -ra a  $\bar{\mathcal{B}}(\bar{Q}, \frac{\rho}{4} + \varepsilon)$  metszete a  $\mathcal{G}(\frac{\rho}{4} + \varepsilon)$ -beli gömbök uniójával a  $\bar{\mathcal{B}}(\bar{Q}, \frac{\rho}{4} + \varepsilon) \cap \bar{\mathcal{B}}(\bar{P}, \frac{\rho}{4} + \varepsilon)$  és a  $\bar{\mathcal{B}}(\bar{Q}, \frac{\rho}{4} + \varepsilon) \cap \bar{\mathcal{B}}(\bar{P}_1, \frac{\rho}{4} + \varepsilon)$  diszjunkt és egybevágó részekből áll, míg a  $\bar{\mathcal{B}}(\bar{Q}_1, \frac{\rho}{4} + \varepsilon)$

és az  $\bigcup \mathcal{G}(\frac{\rho}{4} + \varepsilon)$  metszete pontosan a  $\overline{\mathcal{B}}(\overline{Q}_1, \frac{\rho}{4} + \varepsilon) \cap \overline{\mathcal{B}}(\overline{P}, \frac{\rho}{4} + \varepsilon)$  metszet, mely az előzőekkel egybevágó. Így a faktorizálás után a  $\overline{\mathcal{B}}(F(\overline{Q}), \frac{\rho}{4} + \varepsilon)$  és a  $\overline{\mathcal{B}}(P, \frac{\rho}{4} + \varepsilon)$  gömbök metszetének a térfogata kétszerese a  $\overline{\mathcal{B}}(F(\overline{Q}_1), \frac{\rho}{4} + \varepsilon)$  és a  $\overline{\mathcal{B}}(P, \frac{\rho}{4} + \varepsilon)$  gömbök metszetének térfogatának, ellentmondva a  $KP_2^=$  tulajdonságnak.  $\square$

## 3. fejezet

# Három gömb metszete

Ebben a fejezetben a [21] cikk eredményeit írjuk le.

### 3.1. Egy háromszög minimális fedősugara

A  $KP_3^-$  tulajdonság helyett egy gyengébbet fogunk használni, nevezetesen, hogy a háromszögek minimális fedősugara csak az oldalhosszaktól függ. Ehhez a három gömb metszetének a tényleges térfogatát nem használjuk fel, csak azt, hogy üres-e.

Háromszögön egy *tetszőleges* ponthármaszt értünk a sokaságon. Egy összefüggő Riemann-sokaság  $ABC$  háromszögének  $r_{ABC}$  minimális fedősugara azon  $r$  számok infimuma, melyekre az  $A, B, C$  középpontú  $r$  sugarú gömbök metszete nem üres:

$$r_{ABC} = \inf \{r \mid \mathcal{B}(A, r) \cap \mathcal{B}(B, r) \cap \mathcal{B}(C, r) \neq \emptyset\}.$$

Ha a sokaság teljes, vagy a  $\overline{\mathcal{B}}(A, \rho), \overline{\mathcal{B}}(B, \rho), \overline{\mathcal{B}}(C, \rho)$  zárt gömbök egyike kompakt valamilyen  $\rho > r_{ABC}$  értékre, akkor azt is tudjuk, hogy

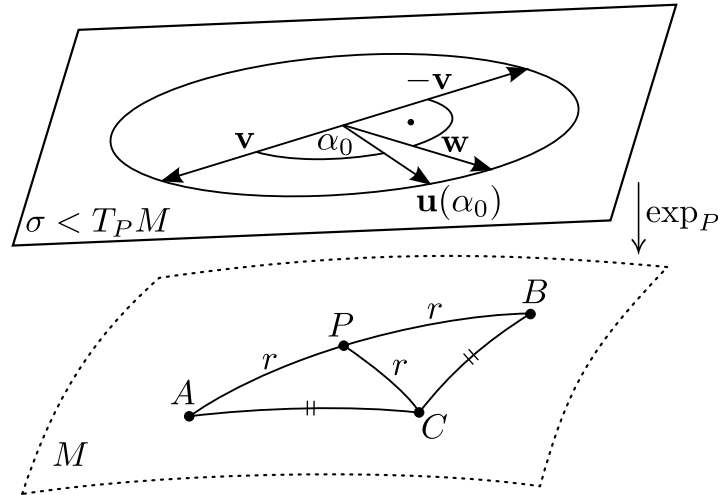
$$\begin{aligned} r_{ABC} &= \min \{r \mid \overline{\mathcal{B}}(A, r) \cap \overline{\mathcal{B}}(B, r) \cap \overline{\mathcal{B}}(C, r) \neq \emptyset\} = \\ &= \min \{r \mid \exists P \in M, \text{ melyre } A, B, C \in \overline{\mathcal{B}}(P, r)\}. \end{aligned}$$

Egy  $KP_3^-$  tulajdonságú sokaságon a  $\mathcal{B}(A, r) \cap \mathcal{B}(B, r) \cap \mathcal{B}(C, r)$  metszet térfogata, és így ennek üressége csak az oldalak geodetikus hosszaitól, vagyis a háromszög oldalhosszaitól függ. Így kapjuk a következő állítást.

**3.1. állítás.** *Egy  $KP_3^-$  tulajdonságú sokaságon a háromszögek minimális fedősugara csak a háromszög oldalhosszaitól függ.* □

Egy tetszőleges összefüggő  $M$  Riemann-sokaságon az  $\mathfrak{r}: M \rightarrow (0, \infty)$  folytonos függvényt úgy választjuk, hogy minden  $P \in M$ -re az  $\exp_P$  definiálva van a  $T_P M$  érintőtér origó középpontú  $\mathfrak{r}(P)$  sugarú gömbjén, és minden  $r \leq \mathfrak{r}(P)$  sugarra a  $\mathcal{B}(P, r)$  gömb geodetikusan konvex. Egy háromszöget akkor nevezünk *kicsinek*, ha egy  $\mathcal{B}(P, \mathfrak{r}(P))$  gömb tartalmazza valamilyen  $P \in M$ -re.

Tekintsünk egy  $\sigma < T_P M$  síkot, és egy  $\mathbf{v} \in \sigma$  érintővektort, melynek a hossza  $r = \|\mathbf{v}\| < \mathfrak{r}(P)$ , lásd a 3.1. ábrát. Legyen  $A = \exp_P(\mathbf{v})$  és  $B = \exp_P(-\mathbf{v})$ . A  $\sigma$



3.1. ábra.

síkban a két  $r$  hosszú  $\mathbf{v}$ -re merőleges érintővektor közül jelölje  $\mathbf{w}$  az egyiket. Definiáljuk az  $\mathbf{u}: [0, \pi] \rightarrow T_P M$  leképezést az  $\mathbf{u}(\alpha) = \mathbf{v} \cos(\alpha) + \mathbf{w} \sin(\alpha)$  formulával. Nyilvánvaló, hogy  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{v}$  és  $\mathbf{u}(\pi) = -\mathbf{v}$ . Ekkor az  $A$  és az  $\exp_P(\mathbf{u}(\alpha))$  közötti távolság folytonosan változik 0-tól  $2r$ -ig míg a  $B$  és  $\exp_P(\mathbf{u}(\alpha))$  közti távolság  $2r$ -től 0-ig változik folytonosan, így van egy olyan  $\alpha_0$  érték, ahol ezek a távolságok egyenlők. Legyen  $C = \exp_P(\mathbf{u}(\alpha_0))$ , melyre így teljesül, hogy  $d(A, C) = d(B, C)$ . Mivel minden  $\alpha \in [0, \pi]$  szögre  $\|\mathbf{u}(\alpha)\| = r$ , a  $d(P, C) = r$  egyenlőség is fennáll. Így az  $ABC$  háromszög minimális fedősugara  $r$ .

Az  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontok függenek a  $P, \sigma, r, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \alpha_0$  választásától. Az  $ABC$  rendezett ponthármaszt nevezzük a  $(P, \sigma, r, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \alpha_0)$  adatokból konstruált háromszögnek. Egy  $P \in M$  pontra,  $\sigma < T_P M$  síkállásra és  $r < \mathfrak{r}(P)$  pozitív számra  $\Delta(P, \sigma, r)$  jelölje azon háromszögek halmazát, melyek megfelelő  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  érintővektorokkal és  $\alpha_0$  szöggel a  $(P, \sigma, r, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \alpha_0)$  adatokból konstruálhatóak.

**3.2. állítás.** *Ha az  $M$  Riemann-sokaságon a háromszögek minimális fedősugara csak a háromszögek oldalhosszaitól függ, akkor létezik olyan  $\hat{a}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$*

függvény, melyre  $d(A, C) = \hat{a}(r)$  fennáll minden olyan  $ABC$  háromszögre, mely valamilyen  $(P, \sigma, r, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \alpha_0)$  adatokból konstruálható az  $r < \frac{\mathfrak{r}(P)}{3}$  kikötéssel.

*Bizonyítás.* Indirekten tegyük fel, hogy az  $ABC$  és az  $A'B'C'$  háromszögek a  $\Delta(P, \sigma, r)$  és  $\Delta(P', \sigma', r)$  halmazból valók, ahol  $3r$  kisebb az  $\mathfrak{r}(P)$  és  $\mathfrak{r}(P')$  számoknál, de az  $a = d(A, C) = d(B, C)$  és  $a' = d(A', C') = d(B', C')$  oldalak nem egyenlőek, mondjuk  $a < a'$ . Háromszög-egyenlőtlenségekből kapjuk, hogy

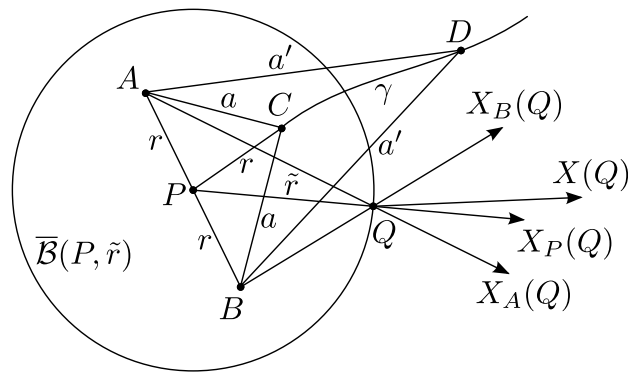
$$r < a < a' < 2r.$$

Tetszőleges  $S \in \mathcal{B}(P, 3r)$  pontra az  $X_S$ -sel jelölt radiális egységvektormezőt az  $X_S(T) = -\gamma'_{TS}(0)$  képlettel definiáljuk a  $\mathcal{B}(P, 3r) \setminus \{S\}$  halmazon. Az  $X_A$  és  $X_B$  vektormezők skaláris szorzata pontosan az  $A$ -t a  $B$ -vel összekötő  $[A, B]$  geodetikus szakasz belsejében  $-1$ , így a  $\mathcal{B}(P, 3r) \setminus [A, B]$  halmazon definiálhatjuk az

$$X = \frac{X_A + X_B}{1 + \langle X_A, X_B \rangle}$$

sima vektormezőt. Legyen  $\gamma: [0, b) \rightarrow \mathcal{B}(P, 3r) \setminus [A, B]$  az  $X$  integrálgörbéje, mely a  $\gamma(0) = C$ -ből indul, ahol  $0 < b \leq +\infty$  olyan, hogy a  $\gamma$  görbe  $b$ -n túl nem terjeszthető ki  $X$  integrálgörbéjeként.

Tekintsünk egy olyan  $Q$  pontot, melyre  $r \leq d(P, Q) = \tilde{r} < 3r$ , lásd a 3.2. ábrát. Mivel  $\overline{\mathcal{B}}(P, \tilde{r})$  geodetikusan konvex, és  $A, B \in \overline{\mathcal{B}}(P, \tilde{r})$ , a Gauss-lemma



3.2. ábra.

szerint  $\langle X_P(Q), X_A(Q) \rangle > 0$  és  $\langle X_P(Q), X_B(Q) \rangle > 0$ . Így  $\langle X_P(Q), X(Q) \rangle > 0$ , mivel  $1 + \langle X_A(Q), X_B(Q) \rangle > 0$ . Ekkor a távolságváriációs formulát alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt}d(P, \gamma(t)) = \langle X_P(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle X_P(\gamma(t)), X(\gamma(t)) \rangle > 0, \quad (3.1)$$



ha  $r \leq d(P, \gamma(t)) < 3r$ . Tudjuk, hogy  $d(P, \gamma(0)) = r$ , és a (3.1) egyenlőtlenség szerint  $d(P, \gamma(t)) \geq r$  esetén  $d(P, \gamma(t))$  növekszik  $t$  egy környezetében, így  $d(P, \gamma(t))$  egy monoton növekvő függvény.

Számoljuk ki a következő deriváltat:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d(A, \gamma(t)) &= \langle X_A(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\ &= \left\langle X_A(\gamma(t)), \frac{X_A(\gamma(t)) + X_B(\gamma(t))}{1 + \langle X_A(\gamma(t)), X_B(\gamma(t)) \rangle} \right\rangle \\ &= 1. \end{aligned}$$

Hasonlóan  $\frac{d}{dt}d(B, \gamma(t)) = 1$ . Ezekből következik, hogy

$$d(A, \gamma(t)) = d(A, \gamma(0)) + t = a + t = d(B, \gamma(t)), \quad (3.2)$$

ha  $0 \leq t < b$ . Így  $t < 2r - a$  esetén

$$d(P, \gamma(t)) \leq d(P, A) + d(A, \gamma(t)) = r + a + t < 3r, \quad (3.3)$$

amiből következik, hogy  $2r - a \leq b$ . Így értelmezhetjük a  $D = \gamma(a' - a)$  pontot, mivel  $a' - a < 2r - a$ . A (3.2) szerint

$$d(A, D) = d(B, D) = a + a' - a = a'.$$

Mivel  $d(P, D) > r$  és a  $\bar{B}(A, r)$  és  $\bar{B}(B, r)$  zárt gömbök csak a  $P$  pontban metszik egymást, a  $\bar{B}(A, r) \cap \bar{B}(B, r) \cap \bar{B}(D, r)$  metszet üres, tehát az  $ABD$  háromszög minimális fedősugara nagyobb  $r$ -nél. Ez ellentmond annak a feltevésünknek, hogy az  $ABD$  és az  $A'B'C'$  azonos oldalhosszúságú háromszögek minimális fedősugara egyenlő, mivel az  $A'B'C'$  háromszögé éppen  $r$ .  $\square$

## 3.2. Rauch összehasonlítási tétele

Az állandó szekcionális görbület bizonyításához a fő eszközünk Rauch összehasonlítási tétele lesz. Az ismert változatnál nekünk egy kicsit erősebb formára lesz szükségünk.

**3.3. tétel.** *Tekintsük az  $M_1, M_2$  Riemann-sokaságokon a  $\gamma_i: [0, l] \rightarrow M_i$  természetes paraméterezésű geodetikusokat  $i = 1, 2$ -re. Tegyük fel, hogy  $\gamma_2(t)$  semmilyen*

$t \in (0, l]$ -re sem konjugált  $\gamma_2(0)$ -hoz  $\gamma_2$  mentén. Legyenek  $J_i$   $\gamma_i$  menti Jacobi-mezők ( $i = 1, 2$ ), melyekre  $J_i(0)$  érinti  $\gamma_i$ -t és

$$\begin{aligned}\langle \gamma_1'(0), J_1(0) \rangle &= \langle \gamma_2'(0), J_2(0) \rangle, \\ \langle \gamma_1'(0), J_1'(0) \rangle &= \langle \gamma_2'(0), J_2'(0) \rangle, \\ \|J_1'(0)\| &= \|J_2'(0)\|.\end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy minden  $t \in (0, l]$ -re és tetszőleges  $\mathbf{v}_2 \in T_{\gamma_2(t)}M_2$  érintővektorra teljesül, hogy

$$K_1(\text{span}\{J_1(t), \gamma_1'(t)\}) \leq K_2(\text{span}\{\mathbf{v}_2, \gamma_2'(t)\}),$$

ahol  $K_i$  az  $M_i$  sokaság szekcionális görbületi függvénye ( $i = 1, 2$ -re). Ekkor minden  $t \in [0, l]$ -re  $\|J_1(t)\| \geq \|J_2(t)\|$ .

Általában a görbületi feltételt az  $M_1$  sokaságban is minden  $\mathbf{v}_1 \in T_{\gamma_1(t)}M_1$  és  $\gamma_1'(t)$  által kifeszített síkra követelik meg, de erre nincs szükség, ahogy a bizonyításból látni fogjuk. Az itt leírt bizonyítás a [14] könyvből származik.

*Bizonyítás.* Először azt az esetet bizonyítjuk, amikor  $J_i$  merőleges  $\gamma_i'$ -re ( $i = 1, 2$ ), azaz  $\|J_1(0)\| = \|J_2(0)\| = \mathbf{0}$ .

Tekintsük a  $\|J_1(t)\|^2/\|J_2(t)\|^2$  hányadost mint  $t$ -nek a függvényét. Mivel  $J_2(t)$  csak a  $t = 0$ -ban  $\mathbf{0}$ , ez mindenütt definiált  $t = 0$  kivételével. A L'Hospital-szabály kétszeri alkalmazásával

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|J_1(t)\|^2}{\|J_2(t)\|^2} = \frac{\langle J_1'(0), J_1'(0) \rangle}{\langle J_2'(0), J_2'(0) \rangle} = 1.$$

Tehát a  $\|J_1(t)\| \geq \|J_2(t)\|$  egyenlőtlenséghez elegendő azt megmutatni, hogy

$$\frac{d}{dt} \frac{\|J_1(t)\|^2}{\|J_2(t)\|^2} \geq 0$$

fennáll minden  $t \in (0, l]$ -re. Ezzel ekvivalens, hogy

$$\frac{\langle J_1'(t), J_1(t) \rangle}{\langle J_1(t), J_1(t) \rangle} \geq \frac{\langle J_2'(t), J_2(t) \rangle}{\langle J_2(t), J_2(t) \rangle}.$$

Rögzítsünk egy  $t_0 \in (0, l]$  számot, és definiáljuk az

$$I_1(t) = \frac{J_1(t)}{\|J_1(t_0)\|} \quad \text{és} \quad I_2(t) = \frac{J_2(t)}{\|J_2(t_0)\|}$$

$\gamma_1$ , illetve  $\gamma_2$  menti vektormezőket. Bár ezek a Jacobi-mezők függenek a  $t_0$  választásától, az egyszerűség kedvéért ezt a függés nem tüntetjük fel a jelölésben.

Nyilvánvalóan  $\|I_1(t_0)\| = \|I_2(t_0)\| = 1$ , és mivel az  $I_i$  a  $J_i$  vektormező konstansszorososa,

$$\frac{\langle J'_i(t), J_i(t) \rangle}{\langle J_i(t), J_i(t) \rangle} = \frac{\langle I'_i(t), I_i(t) \rangle}{\langle I_i(t), I_i(t) \rangle}$$

$i = 1, 2$ -re. Ez  $t = t_0$ -ra

$$\frac{\langle J'_i(t_0), J_i(t_0) \rangle}{\langle J_i(t_0), J_i(t_0) \rangle} = \langle I'_i(t_0), I_i(t_0) \rangle.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{\langle J'_1(t_0), J_1(t_0) \rangle}{\langle J_1(t_0), J_1(t_0) \rangle} &= \langle I'_1(t_0), I_1(t_0) \rangle \\ &= \int_0^{t_0} \langle I'_1(t), I_1(t) \rangle' dt \\ &= \int_0^{t_0} \langle I'_1(t), I'_1(t) \rangle + \langle I''_1(t), I_1(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{t_0} \langle I'_1(t), I'_1(t) \rangle - \langle R_1((I_1(t), \gamma'(t))\gamma'(t), I_1(t)) \rangle dt \\ &= \int_0^{t_0} \langle I'_1(t), I'_1(t) \rangle - K_1(\text{span}\{\gamma'(t), I_1(t)\}) \cdot \|I_1(t)\|^2 dt, \end{aligned} \tag{3.4}$$

ahol  $R_1$  az  $M_1$  sokaság görbületi tenzorát jelöli.

Legyen  $\Pi_{\gamma_i}^t : T_{\gamma_i(t)}M_i \rightarrow T_{\gamma_i(0)}M_i$  a  $\gamma_i$  menti párhuzamos eltolás. Válasszunk egy olyan  $A : T_{\gamma_1(0)}M_1 \rightarrow T_{\gamma_2(0)}M_2$  skaláriszorzat-tartó lineáris leképezést, melyre

$$A(\gamma'_1(0)) = \gamma'_2(0) \quad \text{és} \quad A(\Pi_{\gamma_1}^{t_0}(I_1(t_0))) = \Pi_{\gamma_2}^{t_0}(I_2(t_0))$$

teljesül. Legyen az  $A_t : T_{\gamma_1(t)}M_1 \rightarrow T_{\gamma_2(t)}M_2$  leképezés az

$$A_t = (\Pi_{\gamma_2}^t)^{-1} \circ A \circ \Pi_{\gamma_1}^t$$

kompozíció. Ekkor  $A_t(\gamma'_1(t)) = \gamma'_2(t)$  és  $A_{t_0}(I_1(t_0)) = I_2(t_0)$  fennáll. Definiáljuk az  $\hat{I}_2$   $\gamma_2$  menti vektormezőt az

$$\hat{I}_2(t) = A_t(I_1(t)).$$

formulával. Mivel az  $A$  és a párhuzamos eltolások megőrzik a skaláris szorzatot, így

$$\begin{aligned} \langle I_1(t), I_1(t) \rangle &= \langle \hat{I}_2(t), \hat{I}_2(t) \rangle, \\ \langle I'_1(t), I_1(t) \rangle &= \langle \hat{I}'_2(t), \hat{I}_2(t) \rangle. \end{aligned} \tag{3.5}$$

A görbületi feltétel szerint

$$K_1(\text{span}\{J_1(t), \gamma'_1(t)\}) \leq K_2(\text{span}\{\hat{I}_2(t), \gamma'_2(t)\}).$$

Ezt, a (3.5) egyenlőségeket és az indexlemmát használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_0} \langle I'_1(t), I'_1(t) \rangle - \langle R_1((I_1(t), \gamma'(t))\gamma'(t), I_1(t)) \rangle dt \geq \\ & \geq \int_0^{t_0} \langle \hat{I}'_2(t), \hat{I}'_2(t) \rangle - \langle R_2((\hat{I}_2(t), \gamma'(t))\gamma'(t), \hat{I}_2(t)) \rangle dt \geq \\ & \geq \int_0^{t_0} \langle I'_2(t), I'_2(t) \rangle - \langle R_2((I_2(t), \gamma'(t))\gamma'(t), I_2(t)) \rangle dt. \end{aligned}$$

A (3.4) egyenletben leírt számoláshoz hasonlóan visszafelé elvégezve kapjuk, hogy ez a legutóbbi tag egyenlő a  $\frac{\langle J'_2(t_0), J_2(t_0) \rangle}{\langle J_2(t_0), J_2(t_0) \rangle}$  hányadossal, és így

$$\frac{\langle J'_1(t_0), J_1(t_0) \rangle}{\langle J_1(t_0), J_1(t_0) \rangle} \geq \frac{\langle J'_2(t_0), J_2(t_0) \rangle}{\langle J_2(t_0), J_2(t_0) \rangle}.$$

Mivel  $t_0$  tetszőleges volt, így igaz ez minden  $t_0 \in (0, l]$ -re, és ezzel bebizonyítottuk azt az esetet, amikor  $\|J_1(0)\| = \|J_2(0)\| = \mathbf{0}$ .

Az általános esetben  $\tilde{J}_i$  jelölje a  $J_i$  Jacobi-mező  $\gamma'_i$ -re merőleges komponensét ( $i = 1, 2$ ). Ezekre a fenti bizonyítás adja, hogy  $\|\tilde{J}_1(t)\| \geq \|\tilde{J}_2(t)\|$ . A  $J_i$  Jacobi-mezőket felírhatjuk

$$J_1(t) = \tilde{J}_1(t) + \langle \gamma'_1(t), J_1(t) \rangle \gamma'_1(t), \quad J_2(t) = \tilde{J}_2(t) + \langle \gamma'_2(t), J_2(t) \rangle \gamma'_2(t).$$

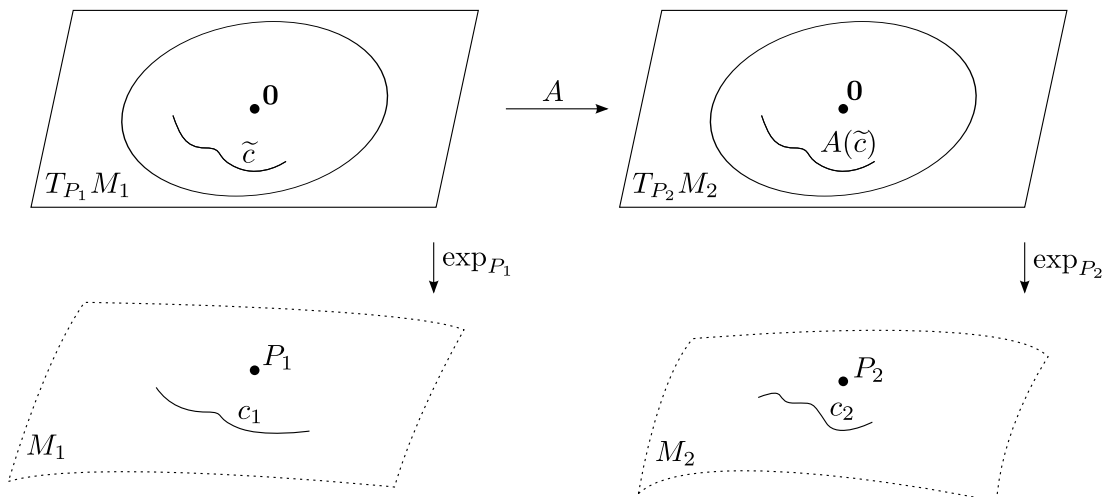
alakban, ahol

$$\langle \gamma'_1(t), J_1(t) \rangle = \langle \gamma'_1(0), J_1(0) \rangle + \langle \gamma'_1(0), J'_1(0) \rangle t = \langle \gamma'_2(t), J_2(t) \rangle,$$

és így a  $\|J_1(t)\| \geq \|J_2(t)\|$  egyenlőtlenséget is megkapjuk.  $\square$

A fenti élesebb tétel segítségével a következményt is erősíteni tudjuk. A bizonyítás szintén a [14] könyvből származik.

**3.4. tétel.** *Legyen  $M_1, M_2$  két Riemann-sokaság, melyekre  $\dim M_1 \leq \dim M_2$ , és tekintsünk bennük egy-egy  $P_i \in M_i$  pontot ( $i = 1, 2$ ), lásd a 3.3. ábrát. Továbbá legyen  $A: T_{P_1}M_1 \rightarrow T_{P_2}M_2$  egy skalárisszorzat-tartó lineáris leképezés. Válasszuk az  $r$  sugarat olyan kicsinek, hogy az  $\exp_{P_1}|_{\mathcal{B}(\mathbf{0}, r)}$  leképezés beágyazás és az  $\exp_{P_2}|_{\mathcal{B}(\mathbf{0}, r)}$  leképezés nem szinguláris. Tekintsünk egy  $c_1: [a, b] \rightarrow \exp_{P_1}(\mathcal{B}(\mathbf{0}, r))$  görbét, és azt a  $\tilde{c}: [a, b] \rightarrow \mathcal{B}(\mathbf{0}, r)$  (egyértelmű) görbét, melyre  $\exp_{P_1} \tilde{c}(t) = c_1(t)$ . Ekkor a*



3.3. ábra.

$c_2: [a, b] \rightarrow \exp_{P_2}(\mathcal{B}(\mathbf{0}, r))$  görbét a  $c_2(t) = \exp_{P_2}(A(\tilde{c}(t)))$  formulával definiáljuk. A  $\Lambda_1: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow M$  szinguláris téglalap legyen a  $\Lambda_1(s, t) = \exp_{P_1}(s\tilde{c}(t))$  leképezés. Végül tegyük fel, hogy  $K_1(\sigma_1) \leq K_2(\sigma_2)$  fennáll minden  $\sigma_2 < TM_2$  és  $\sigma_1 \in S_{P_1}(c_1)$  síkra, ahol

$$S_{P_1}(c_1) = \{ \text{im} T_{(s,t)} \Lambda_1 \mid s \in [0, 1], t \in [a, b] \text{ és } \dim \text{im} T_{(s,t)} \Lambda_1 = 2 \}.$$

Ekkor  $\ell(c_1) \geq \ell(c_2)$ .

*Bizonyítás.* Egy rögzített  $t_0 \in [a, b]$  számra a  $\Lambda_1$ -hez rendelt  $J_{t_0}(s) = \partial_2 \Lambda_1(s, t_0)$  variációs vektormező az a  $\gamma_{t_0}(s) = \exp_{P_1}(s\tilde{c}(t_0))$  geodetikus menti Jacobi-mező, melyre  $J_{t_0}(0) = \mathbf{0}$  és  $J_{t_0}(1) = c'_1(t_0)$ . Ekkor

$$J_{t_0}(s) = \left. \frac{d}{dt} \exp_{P_1}(s\tilde{c}(t)) \right|_{t=t_0} = s T_{s\tilde{c}(t_0)} \exp_{P_1}(\tilde{c}'(t_0)).$$

Így  $J'_{t_0}(0) = \tilde{c}'(t_0)$ .

Hasonlóan a  $\Lambda_2(s, t) = \exp_{P_2}(A(s\tilde{c}(t)))$  szinguláris téglalaphoz is tartozik egy  $I_{t_0}$  Jacobi-mező, melyre  $I_{t_0}(1) = c'_2(t_0)$ , és

$$I'_{t_0}(0) = (A(\tilde{c}(t_0)))' = A(\tilde{c}'(t_0)).$$

Mivel  $A$  izometria,

$$\|J'_{t_0}(0)\| = \|\tilde{c}'(t_0)\| = \|A(\tilde{c}'(t_0))\| = \|I'_{t_0}(0)\|.$$

Ekkor a 3.3. tétel szerint  $\|J_{t_0}(1)\| \geq \|I_{t_0}(1)\|$ , azaz  $\|c'_1(t_0)\| \geq \|c'_2(t_0)\|$ . Mivel  $t_0 \in [a, b]$  tetszőleges volt, minden  $t \in [a, b]$ -re igaz, hogy  $\|c'_1(t)\| \geq \|c'_2(t)\|$ , amit integrálva kapjuk a bizonyítandó tétel állítását.  $\square$

### 3.3. Egy lemma

Rauch tételének alkalmazásához szükségünk lesz a következő, a 3.4. tételben szereplő  $S_P(c)$  halmazról szóló lemmára is.

**3.5. lemma.** *Egy  $\sigma < T_P M$  sík bármely  $U \subseteq \text{Gr}_2(TM)$  környezetéhez van olyan pozitív  $\rho$  szám, melyre igaz, hogy bármely  $r < \rho$  sugárra a  $\Delta(P, \sigma, r)$  minden  $ABC$  háromszögére fennáll, hogy  $S_P(\gamma_{AC}) \subseteq U$ .*

Bár a lemma bizonyítása eléggé technikai jellegű, óvatosnak kell lenni, mert a lemma nem igaz, ha a  $\gamma_{AC}$  geodetikust egy tetszőleges  $A$ -t és  $C$ -t a  $\mathcal{B}(P, \rho)$  gömbben összekötő görbére cseréljük.

*Bizonyítás.* Legyen  $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n): V \rightarrow \mathbb{R}^n$  egy normális koordináta-rendszer  $P$  körül. Egy  $Q \in V$  pont  $\varphi$ -nél vett  $\varphi(Q)$  képére a  $Q^\varphi$  jelölést fogjuk használni. Jelölje  $(g_{ij})_{i,j=1}^n$  a Riemann-metrika mátrixát, és  $\Gamma_{ij}^k$  a  $\varphi$  térképhez tartozó Christoffel-szimbólumokat. Mivel  $\varphi$  normális koordináta-rendszer,  $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$  és  $\Gamma_{ij}^k(P) = 0$ . Bármely  $\varepsilon > 0$ -ra, mondjuk  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ -re, létezik egy  $\mathcal{B}(P, \delta) \subseteq V$  gömb, melyre

$$\frac{1}{2}I = (1 - \varepsilon)I < g(Q) < (1 + \varepsilon)I = \frac{3}{2}I \quad \text{és} \quad |\Gamma_{jk}^i(Q)| < \varepsilon = \frac{1}{2} \quad (3.6)$$

minden  $1 \leq i, j, k \leq n$  indexre és  $Q \in \mathcal{B}(P, \delta)$  pontra, ahol  $A$  és  $B$   $n \times n$ -es mátrixok esetén az  $A < B$  azt jelenti, hogy  $(B - A)$  pozitív definit.

Tekintsünk egy  $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathcal{B}(P, \delta)$  természetes paraméterezésű geodetikust. Ennek a  $\gamma^i = \varphi^i \circ \gamma$  koordinátafüggvényei ( $1 \leq i \leq n$ ) kielégítik a következő differenciálegyenletet:

$$\gamma^{i''}(t) + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(\gamma(t)) \cdot \gamma^{j'}(t) \cdot \gamma^{k'}(t) = 0.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\gamma^{i'}(t) - \gamma^{i'}(0) = \int_0^t - \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(\gamma(\tau)) \cdot \gamma^{j'}(\tau) \cdot \gamma^{k'}(\tau) d\tau. \quad (3.7)$$

Ezt szeretnénk felülről megbecsülni. Mivel  $\sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \gamma^{i'2}(t)} \leq \|\gamma'(t)\| = 1$  a (3.6) szerint,  $|\gamma^{i'}(t)| \leq \sqrt{2}$  fennáll, így a (3.6) és a (3.7) adja, hogy

$$\left| \gamma^{i'}(t) - \gamma^{i'}(0) \right| \leq \int_0^t n^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} d\tau = n^2 t. \quad (3.8)$$

A (3.8) egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| (\gamma^i(t) - \gamma^i(0)) - t\gamma^{i'}(0) \right| &= \left| \int_0^t \gamma^{i'}(\tau) - \gamma^{i'}(0) \, d\tau \right| \leq \\ &\leq \int_0^t \left| \gamma^{i'}(\tau) - \gamma^{i'}(0) \right| \, d\tau \leq \frac{1}{2}n^2t^2. \end{aligned}$$

Ebből az egyenlőtlenségből kapunk egy felső becslést a  $\gamma$  görbe  $\varphi$ -nél vett  $\gamma^\varphi$  képe és a  $t \mapsto \gamma^\varphi(0) + t\gamma^{\varphi'}(0)$  ( $t \in [0, T]$ ) lineáris görbe eltérésére az euklideszi normában (amit szintén  $\|\cdot\|$  jellel jelölünk)

$$\|\gamma^\varphi(t) - (\gamma^\varphi(0) + t\gamma^{\varphi'}(0))\| \leq \frac{1}{2}n^{5/2}t^2. \quad (3.9)$$

Tegyük fel, hogy  $0 < \rho < \min\left\{\delta, \frac{r(P)}{3}\right\}$ . Egy  $r < \rho$ -ra vegyünk egy  $ABC$  háromszöget a  $\Delta(P, \sigma, r)$  halmazból. Ha a  $\gamma_{AC}$  geodetikusra és  $t = T = d(A, C)$ -re alkalmazzuk a (3.9) egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy

$$\|C^\varphi - (A^\varphi + T\gamma_{AC}^{\varphi'}(0))\| \leq \frac{1}{2}n^{5/2}T^2,$$

és így

$$\left\| \gamma_{AC}^{\varphi'}(0) - \frac{C^\varphi - A^\varphi}{T} \right\| \leq \frac{1}{2}n^{5/2}T. \quad (3.10)$$

A (3.9) és a (3.10) becslésekből

$$\left\| \gamma_{AC}^\varphi(t) - \left( A^\varphi + t \frac{C^\varphi - A^\varphi}{T} \right) \right\| \leq n^{5/2}T^2. \quad (3.11)$$

A (3.8) egyenlőtlenségből következik, hogy  $\|\gamma_{AC}^{\varphi'}(t) - \gamma_{AC}^{\varphi'}(0)\| \leq n^{5/2}t$ , ami a (3.10) egyenlőtlenséggel azt adja, hogy

$$\left\| \gamma_{AC}^{\varphi'}(t) - \frac{C^\varphi - A^\varphi}{T} \right\| \leq \frac{3}{2}n^{5/2}T. \quad (3.12)$$

A (3.6) és a (3.12) egyenlőtlenségeket használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} T &= \int_0^T \|\gamma'_{AC}(t)\| \, dt \leq \int_0^T \sqrt{\frac{3}{2}} \|\gamma_{AC}^{\varphi'}(t)\| \, dt \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^T \left( \left\| \frac{C^\varphi - A^\varphi}{T} \right\| + \frac{3}{2}n^{5/2}T \right) \, dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \|C^\varphi - A^\varphi\| + \frac{3}{2}n^{5/2}T^2 \right). \end{aligned}$$

Átrendezés után

$$\sqrt{\frac{2}{3}}T - \frac{3}{2}n^{5/2}T^2 \leq \|C^\varphi - A^\varphi\|. \quad (3.13)$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{2}{3}}T - \frac{3}{2}n^{5/2}T^2 \leq \|C^\varphi - B^\varphi\|. \quad (3.14)$$

Thalész tétele szerint az  $A^\varphi C^\varphi B^\varphi$  szög derékszög, és így az  $A^\varphi C^\varphi P^\varphi$  háromszög  $P^\varphi (= \mathbf{0})$  csúcsához tartozó magassága  $\frac{\|C^\varphi - B^\varphi\|}{2}$ , amiből

$$\frac{\|C^\varphi - B^\varphi\|}{2} \leq \left\| A^\varphi + t \frac{C^\varphi - A^\varphi}{T} \right\|. \quad (3.15)$$

A (3.11), a (3.14) és a (3.15) egyenlőtlenségek adják, hogy

$$\frac{T}{\sqrt{6}} - \frac{7}{4}n^{5/2}T^2 \leq \|\gamma_{AC}^\varphi(t)\|.$$

Ez a becslés a (3.11) egyenlőtlenséggel azt mutatja, hogy

$$\frac{\|\gamma_{AC}^\varphi(t) - (A^\varphi + t \frac{C^\varphi - A^\varphi}{T})\|}{\|\gamma_{AC}^\varphi(t)\|} \leq \frac{n^{5/2}T^2}{\frac{T}{\sqrt{6}} - \frac{7}{4}n^{5/2}T^2}. \quad (3.16)$$

Az  $S_P(\gamma_{AC})$  halmazba a következő síkok tartoznak:

$$\text{im}T_{(s,t)}\Lambda = \text{span} \left\{ T_{s\widetilde{\gamma_{AC}}(t)} \exp_P(s\widetilde{\gamma_{AC}}'(t)), T_{s\widetilde{\gamma_{AC}}(t)} \exp_P(\widetilde{\gamma_{AC}}(t)) \right\},$$

ahol  $s \in [0, 1]$ ,  $t \in [0, T]$  és  $\dim \text{im}T_{(s,t)}\Lambda = 2$ . Ahogy  $\rho$  0-hoz tart,  $s\widetilde{\gamma_{AC}}(t)$  egyenletesen tart az azonosan  $\mathbf{0}$  függvényhez, így  $T_{s\widetilde{\gamma_{AC}}(t)} \exp_P$  tart  $T_{\mathbf{0}} \exp_P$ -hez, ami a szokásos  $T_{\mathbf{0}}T_P M \cong T_P M$  azonosítással az identitás. Ezért elegendő azt bizonyítani, hogy  $\text{span} \{s\widetilde{\gamma_{AC}}'(t), \widetilde{\gamma_{AC}}(t)\}$  közel van  $\sigma$ -hoz. A normális koordinátákra áttérve, és használva a  $\text{Gr}(2, \mathbb{R}^n) \hookrightarrow \text{P}(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n)$  Plücker-beágyazást, azt akarjuk megmutatni, hogy  $[\gamma_{AC}'^\varphi(t) \wedge \gamma_{AC}^\varphi(t)] \in \text{P}(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n)$  közel van  $[C^\varphi \wedge A^\varphi] \in \text{P}(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n)$ -hez valahányszor  $\rho$  elég kicsi. A  $[C^\varphi \wedge A^\varphi]$  és a  $[\gamma_{AC}'^\varphi(t) \wedge \gamma_{AC}^\varphi(t)]$  egyeneseket a  $\frac{C^\varphi \wedge A^\varphi}{T \|\gamma_{AC}^\varphi(t)\|}$  és a  $\gamma_{AC}'^\varphi(t) \wedge \frac{\gamma_{AC}^\varphi(t)}{\|\gamma_{AC}^\varphi(t)\|}$  átméretezett vektorokkal fogjuk reprezentálni ( $0 \leq t \leq T$ ). Ezeknek az átméretezéseknek az az előnye, hogy  $\mathbf{0}$ -tól el vannak határolva, ha  $\rho$  elég kicsi. Valóban, ha  $\alpha$  jelöli az  $A^\varphi P^\varphi C^\varphi$  szöget, akkor  $B^\varphi P^\varphi C^\varphi \angle = \pi - \alpha$ . Mivel  $t \in [0, T]$ -re  $\gamma_{AC}(t) \in \overline{\mathcal{B}}(P, r)$ , így  $\|\gamma_{AC}^\varphi(t)\| \leq r$ . Ezt és az  $r < T < 2r$ , majd a (3.13) és (3.14) egyenlőtlenségeket használva

$$\begin{aligned} \left\| \frac{C^\varphi \wedge A^\varphi}{T \|\gamma_{AC}^\varphi(t)\|} \right\| &= \frac{r^2 \sin(A^\varphi P^\varphi C^\varphi \angle)}{T \|\gamma_{AC}^\varphi(t)\|} > \frac{\sin(\alpha)}{2} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \\ &= \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) = \frac{\|C^\varphi - A^\varphi\|}{2r} \cdot \frac{\|C^\varphi - B^\varphi\|}{2r} \geq \\ &\geq \left( \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}T - \frac{3}{2}n^{5/2}T^2}{2r} \right)^2 > \left( \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}n^{5/2}T}{2} \right)^2 \geq \frac{1}{9}, \end{aligned}$$

ha  $2\rho(> T)$  elég kicsi.



A (3.12) és a (3.16) egyenlőtlenségek segítségével felső becslést tudunk adni a fenti ékszorzatok különbségére:

$$\begin{aligned}
& \left\| \gamma_{AC}^\varphi'(t) \wedge \frac{\gamma_{AC}^\varphi(t)}{\|\gamma_{AC}^\varphi(t)\|} - \frac{C^\varphi \wedge A^\varphi}{T \|\gamma_{AC}^\varphi(t)\|} \right\| = \\
& = \left\| \gamma_{AC}^\varphi'(t) \wedge \frac{\gamma_{AC}^\varphi(t)}{\|\gamma_{AC}^\varphi(t)\|} - \frac{C^\varphi - A^\varphi}{T} \wedge \frac{A^\varphi + t \frac{C^\varphi - A^\varphi}{T}}{\|\gamma_{AC}^\varphi(t)\|} \right\| = \\
& = \left\| \left( \gamma_{AC}^\varphi'(t) - \frac{C^\varphi - A^\varphi}{T} \right) \wedge \frac{\gamma_{AC}^\varphi(t)}{\|\gamma_{AC}^\varphi(t)\|} + \frac{C^\varphi - A^\varphi}{T} \wedge \left( \frac{\gamma_{AC}^\varphi(t)}{\|\gamma_{AC}^\varphi(t)\|} - \frac{A^\varphi + t \frac{C^\varphi - A^\varphi}{T}}{\|\gamma_{AC}^\varphi(t)\|} \right) \right\| < \\
& < \frac{3}{2} n^{5/2} T \cdot 1 + 2 \cdot \frac{n^{5/2} T^2}{\frac{T}{\sqrt{6}} - \frac{7}{4} n^{5/2} T^2}.
\end{aligned}$$

Mivel ez a felső korlát 0-hoz tart, ha  $2\rho(> T)$  tart 0-hoz, a lemmát bebizonyítottuk.  $\square$

### 3.4. Fő eredmények három gömbre

Most már bebizonyíthatjuk, hogy a  $KP_3^-$  tulajdonságból következik, hogy a tér állandó görbületű.

**3.6. tétel** ([21]). *Ha az  $M$  Riemann-sokaságon a kis háromszögek minimális fedősugara csak a háromszögek oldalhosszaitól függ, akkor  $M$  állandó szekcionális görbületű. Speciálisan minden  $KP_3^-$  tulajdonságú sokaság állandó szekcionális görbületű.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy van két  $\sigma < T_P M$  és  $\sigma' < T_{P'} M$  sík, melyekre  $K(\sigma) \neq K(\sigma')$ . Legyen  $\kappa = K(\sigma)$  és  $\kappa' = K(\sigma')$ , feltehető, hogy  $\kappa < \kappa'$ . Legyen  $\kappa_1 = \frac{2\kappa + \kappa'}{3}$  és  $\kappa_2 = \frac{\kappa + 2\kappa'}{3}$ . Válasszunk a  $\sigma$  körül egy olyan  $U$  környezetet  $\text{Gr}_2(TM)$ -ben, melyre  $K(\tilde{\sigma}) < \kappa_1$  fennáll minden  $\tilde{\sigma} \in U$ -ra. A 3.5. lemma szerint választhatjuk  $\rho$ -t úgy, hogy  $S_P(\gamma_{AC}) \subseteq U$  teljesüljön minden  $r < \rho$  esetén a  $\Delta(P, \sigma, r)$ -beli  $ABC$  háromszögekre. Minden  $\rho' > 0$  számra az  $\exp_{P'}(\sigma' \cap \mathcal{B}(\mathbf{0}, \rho'))$  felület  $P'$ -beli szekcionális görbülete  $\kappa'$ . Mivel a szekcionális görbület egy folytonos függvény ezen a felületen, a  $\rho'$ -t megválaszthatjuk úgy, hogy a felületnek a szekcionális görbülete mindenütt nagyobb legyen, mint  $\kappa_2$ . Ekkor rögzítsünk egy olyan pozitív  $r$  számot, mely kisebb a  $\rho, \rho', \frac{\tau(P)}{3}, \frac{\tau(P')}{3}$  számok mindegyikénél.

Válasszunk  $ABC$  és  $A'B'C'$  háromszögeket a  $\Delta(P, \sigma, r)$ , illetve a  $\Delta(P', \sigma', r)$  halmazokból. Legyen  $a = d(A, C) = d(B, C)$  és  $a' = d(A', C') = d(B', C')$ . Az

a célunk, hogy megmutassuk, hogy  $a > a'$ , ami ellentmond a 3.2. állításnak. Tekintsünk még  $i = 1, 2$ -re az összefüggő, egyszeresen összefüggő, állandó  $\kappa_i$  görbületű  $M_{\kappa_i}$  sokaságokon egy-egy tetszőleges  $P_i \in M_{\kappa_i}$  pontot és  $\sigma_i < T_{P_i}M_{\kappa_i}$  síkot. Vegyünk egy-egy  $A_iB_iC_i$  háromszöget a  $\Delta(P_i, \sigma_i, r)$  halmazokból, és legyen  $a_i = d(A_i, C_i) = d(B_i, C_i)$   $i = 1, 2$ -re. Mivel  $\kappa_1 < \kappa_2$ , tudjuk, hogy  $a_1 > a_2$ .

Tegyük fel, hogy az  $APC$  szög legalább  $\frac{\pi}{2}$ . Válasszunk  $A'_1, P'_1, C'_1$  pontokat az  $M_{\kappa_1}$  sokaságon úgy, hogy  $d(P'_1, A'_1) = d(P'_1, C'_1) = r$  és  $A'_1P'_1C'_1\angle = APC\angle$ . Az  $M$  és az  $M_{\kappa_1}$  sokaságokra és a  $c_1 = \gamma_{AC}^M$  görbére alkalmazhatjuk a 3.4. tételt, mivel az  $r$  választása szerint a görbületi feltétel teljesül. Ekkor az  $M_{\kappa_1}$  sokaságon kapunk egy  $A'_1$ -t és  $C'_1$ -t összekötő  $c_2$  görbét, melyre  $a = d^M(A, C) = \ell(c_1) \geq \ell(c_2)$ . Nyilvánvaló, hogy  $\ell(c_2) \geq d^{M_{\kappa_1}}(A'_1, C'_1)$ . Mivel  $A'_1P'_1C'_1\angle \geq \frac{\pi}{2} = A_1P_1C_1\angle$ , az ollótétel szerint  $d^{M_{\kappa_1}}(A'_1, C'_1) \geq d^{M_{\kappa_1}}(A_1, C_1) = a_1$ . Ezekből azt kapjuk, hogy  $a \geq a_1$ .

Most tekintsük az  $N' = \exp_{P'}(\sigma' \cap \mathcal{B}(\mathbf{0}, \bar{\rho}))$  és az  $N_{\kappa_2} = \exp_{P_2}(\sigma_2 \cap \mathcal{B}(\mathbf{0}, \bar{\rho}))$  részsokaságokat. Tegyük fel, hogy az  $A'P'C'$  szög legfeljebb  $\frac{\pi}{2}$ . Legyenek az  $A'_2, P'_2, C'_2$  pontok olyanok  $N_{\kappa_2}$ -ben, hogy  $d(P'_2, A'_2) = d(P'_2, C'_2) = r$  és  $A'_2P'_2C'_2\angle = A'P'C'\angle$ . Az  $N_{\kappa_2}$  és  $N'$  sokaságokra és a  $c_1 = \gamma_{A'_2C'_2}^{N_{\kappa_2}}$  görbére alkalmazva a 3.4. tételt, azt kapjuk, hogy  $d^{N_{\kappa_2}}(A'_2, C'_2) = \ell(c_1) \geq \ell(c_2)$  fennáll valamilyen  $A'$ -t és  $C'$ -t  $N'$ -ben összekötő  $c_2$  görbére. Tudjuk, hogy  $\ell(c_2) \geq d^{N'}(A', C') \geq d^M(A', C') = a'$ . Az  $N_{\kappa_2}$  részsokaság egy sík exponenciális leképezésnél vett képe egy állandó görbületű sokaságban, így  $d^{M_{\kappa_2}}(A'_2, C'_2) = d^{N_{\kappa_2}}(A'_2, C'_2)$ . Az  $A'_2P'_2C'_2$  szög legfeljebb  $\frac{\pi}{2}$ , így az ollótétel adja, hogy  $a_2 = d^{M_{\kappa_2}}(A_2, C_2) \geq d^{M_{\kappa_2}}(A'_2, C'_2)$ . Tehát azt kaptuk, hogy  $a_2 \geq a'$ .

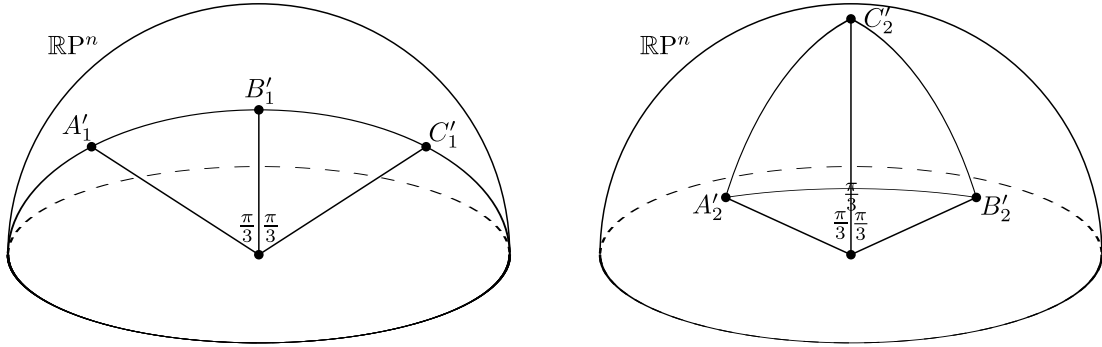
Az egyenlőtlenségeinket összefűzve  $a \geq a_1 > a_2 \geq a'$ , azaz  $a > a'$ , ami ellentmond a 3.2. állításnak.  $\square$

A 2.14. globális tétel segítségével a 3.6. tételből is kaphatunk egy globális tételt.

**3.7. tétel** ([21]). *Tegyük fel, hogy  $M$  egy összefüggő, teljes  $KP_3^-$  tulajdonságú sokaság. Ekkor  $M$  egyszeresen összefüggő állandó görbületű tér.*

*Bizonyítás.* A 3.6. és a 2.14. tételek szerint elég csak azt bizonyítani, hogy az  $\mathbb{R}P_{\kappa}^n$  nem rendelkezik a  $KP_3^-$  tulajdonsággal. Habár a [23] cikkben van egy bizonyítás erre, adunk egy egyszerűbbet. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy  $\kappa = 1$ . Tekintsük az  $A_1, B_1, C_1$  pontokat  $S^n$  egy főkörén  $\frac{2\pi}{3}$  páronkénti távolságokkal, és három másik,  $A_2, B_2, C_2$  pontot egy nyílt félgömbben  $\frac{\pi}{3}$  páronkénti távolsággal.

Legyen  $A'_1, B'_1, C'_1, A'_2, B'_2, C'_2 \in \mathbb{RP}^n$  az előbbi pontok képei az  $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$  faktORIZÁCIÓS leképezés során (3.4. ábra). Ekkor az  $A'_1 B'_1 C'_1$  és az  $A'_2 B'_2 C'_2$  háromszögek



3.4. ábra.

minden oldala  $\frac{\pi}{3}$ . Könnyen meggondolható, hogy az  $A'_1 B'_1 C'_1$  háromszög minimális fedősugara  $\frac{\pi}{3}$ , míg az  $A'_2 B'_2 C'_2$  háromszögé kisebb, mint  $\frac{\pi}{3}$ . Így a 3.1. állítás szerint az  $\mathbb{RP}^n$  sokaság nem rendelkezik a  $KP_3^=$  tulajdonsággal.  $\square$

**3.8. megjegyzés.** Egy egyszeresen összefüggő, állandó  $\kappa$  görbületű sokaságon kiszámolhatjuk a 3.2. állításban szereplő  $\hat{a}(r)$  függvényt. Állandó görbületű sokaságon az  $APC$  és a  $CPB$  szögek a szimmetria miatt egyenlőek, így a nagyságuk  $\frac{\pi}{2}$ . Ekkor a koszinusztétel szerint:

$$\kappa = 0 \text{ esetén } \hat{a}(r) = \sqrt{2}r,$$

$$\kappa < 0 \text{ esetén (amikor } \hat{a}(r) > \sqrt{2}r) \text{ ch } (\hat{a}(r)\sqrt{-\kappa}) = \text{ch } (r\sqrt{-\kappa})^2,$$

$$\kappa > 0 \text{ esetén (amikor } \hat{a}(r) < \sqrt{2}r) \text{ cos } (\hat{a}(r)\sqrt{\kappa}) = \text{cos } (r\sqrt{\kappa})^2.$$

Bár ezekből a  $\kappa$  értékét közvetlenül nem tudjuk kifejezni, tudjuk, hogy az  $\hat{a}$  függvény egyetlen pontban felvett értéke meghatározza a sokaság görbületét.

## 4. fejezet

# Kiegészítés: A D'Atri-terek ekvivalens jellemzései

Ebben a kiegészítésben a D'Atri-terekről szóló 1.13. tételben szereplő első három állítás ekvivalenciáját bizonyítjuk be (mivel csak ezt használtuk). A bizonyítás a [32] cikkből származik (a szükséges egyéb ismeretek a [3] könyvben szerepelnek).

Egy függvényt kétpontfüggvénynek nevezünk, ha egy  $M$  Riemann-sokaság  $\Delta(M \times M) = \{(P, P) \mid P \in M\}$  átlójának egy nyílt környezetén van definiálva (esetleg csak a  $\Delta(M \times M)$  átlón kívül). Egy  $f$  kétpontfüggvény esetében  $f_P$  jelöli a  $Q \mapsto f(P, Q)$ , míg  $f^Q$  jelöli a  $P \mapsto f(P, Q)$  függvényt. A már bevezetett  $h_P$  függvény (a  $P$  középpontú kis geodetikus gömbfelületek középgörbületi függvénye) is így származik a  $h(P, Q) = h_P(Q)$  kétpontfüggvényből.

Egy  $f$  kétpontfüggvény szimmetrikus, ha  $f(P, Q) = f(Q, P)$ . Bal centrálisan szimmetrikusnak mondjuk, ha  $f(P, \exp_P(\mathbf{v})) = f(P, \exp_P(-\mathbf{v}))$  minden elég kicsi  $\mathbf{v} \in T_P M$  érintővektorra. Hasonlóan definiáljuk a jobb centrálisan szimmetrikus tulajdonságot. Szimmetrikus kétpontfüggvény esetén a jobb és a bal centrális szimmetria ekvivalens, ekkor a függvényt egyszerűen csak centrálisan szimmetrikusnak nevezzük.

Egy  $f$  kétpontfüggvénynek értelmezzük az  $f'$  deriváltját (az átlón kívül) az

$$f'(P, Q) = \left. \frac{d}{dt} f(P, \gamma_{PQ}(t)) \right|_{t=d(P, Q)}$$

formulával. Mivel ez az  $f_P$  függvénynek a  $d_P$  sima (analitikus) függvény gradiense szerinti deriváltja (ahol  $d$  a távolságfüggvény), sima (analitikus)  $f$  esetén az  $f'$  kétpontfüggvény is sima (analitikus).

**4.1. lemma.** *Legyen  $M$  egy analitikus sokaság, és rajta  $f$  egy analitikus, átlón is értelmezett kétpontfüggvény, mely szimmetrikus és centrálisan szimmetrikus. Ekkor  $f'$  szimmetrikus.*

*Bizonyítás.* Rögzítsünk egy természetes paraméterezésű  $\gamma$  geodetikust. Ekkor tekintsük a

$$\varphi_s(t) = f(\gamma(t), \gamma(s)) - f(\gamma(0), \gamma(s-t))$$

függvényt. Ha  $f$  analitikus, akkor  $\varphi_s$  valós analitikus egy  $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$  intervallumon. Mivel  $f$  szimmetrikus és centrálisan szimmetrikus, elegendően nagy pozitív egész  $n$  számra

$$f\left(\gamma(0), \gamma\left(\frac{1}{n}s\right)\right) = f\left(\gamma\left(\frac{1}{n}s\right), \gamma\left(\frac{2}{n}s\right)\right) = \dots = f\left(\gamma\left(\frac{n-1}{n}s\right), \gamma(s)\right),$$

és ezzel

$$\varphi_s\left(\frac{n-1}{n}s\right) = f\left(\gamma\left(\frac{n-1}{n}s\right), \gamma(s)\right) - f\left(\gamma(0), \gamma\left(\frac{1}{n}s\right)\right) = 0.$$

Így  $s$  torlódási pontja a  $\varphi_s$  nullhelyeinek, amiből az analitikusság miatt következik, hogy  $\varphi_s(t) = 0$  minden  $t \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ -ra. Ezért  $f(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = \psi_\gamma(t_2 - t_1)$  valamilyen  $\psi_\gamma$  páros függvényre, ha  $|t_2 - t_1|$  elegendően kicsi. Így közeli  $P, Q \in M$  pontokra

$$f'(P, Q) = \left. \frac{d}{dt} f(P, \gamma_{PQ}(t)) \right|_{t=d(P, Q)} = \psi'_{\gamma_{PQ}}(d(P, Q)),$$

ami hasonlóan egyenlő  $f'(Q, P)$ -vel (mivel  $\psi_{\gamma_{PQ}} = \psi_{\gamma_{QP}}$ ), azaz  $f'$  valóban szimmetrikus.  $\square$

**4.2. lemma.** *Ha  $f$  egy olyan szimmetrikus kétpontfüggvény, melyre  $f'$  is szimmetrikus, akkor  $f$  centrálisan szimmetrikus.*

*Bizonyítás.* Az  $f$  függvény centrális szimmetriájához elegendő azt belátni, hogy minden  $\gamma$  természetes paraméterezésű geodetikus és elég kicsi  $\tau$  esetén

$$f(\gamma(t), \gamma(t+\tau)) = f(\gamma(t), \gamma(t-\tau)),$$

Az  $f'$  szimmetriája szerint

$$\left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t_1), \gamma(t)) \right|_{t=t_2} = - \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t_2), \gamma(t)) \right|_{t=t_1},$$

ha  $|t_1 - t_2| < \varepsilon$  és  $t_1 \neq t_2$ . A  $\varphi(t_1, t_2) = f(\gamma(t_1), \gamma(t_2))$  jelöléssel

$$\partial_2 \varphi(t_1, t_2) = -\partial_2 \varphi(t_2, t_1).$$

Mivel a  $\varphi$  függvény szimmetrikus,

$$\partial_2\varphi(t_1, t_2) + \partial_1\varphi(t_1, t_2) = 0,$$

azaz a  $\varphi$  függvény  $(1, 1)$  irányú deriváltja nulla, így ebben az irányban konstans. Ezt és  $\varphi$  szimmetriáját használva kapjuk, hogy

$$\varphi(t, t + \tau) = \varphi(t - \tau, t) = \varphi(t, t - \tau),$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. □

**4.3. lemma.** *Egy  $f$  átlón is értelmezett kétpontfüggvény pontosan akkor bal centrálisan szimmetrikus, ha  $f'$  bal centrálisan szimmetrikus.*

*Bizonyítás.* Egy  $\gamma$  természetes paraméterezésű geodetikus esetén legyen

$$\varphi_\gamma(t) = f(\gamma(0), \gamma(t)) - f(\gamma(0), \gamma(0)).$$

Ekkor

$$f'(\gamma(0), \gamma(s)) = \varphi'_\gamma(s).$$

Így  $f$  pontosan akkor bal centrálisan szimmetrikus, ha minden  $\gamma$  geodetikusra

$$\varphi_\gamma(t) = \varphi_\gamma(-t) \quad \forall t \neq 0, \tag{4.1}$$

míg  $f'$  pontosan akkor bal centrálisan szimmetrikus, ha

$$\varphi'_\gamma(s) = -\varphi'_\gamma(-s) \quad \forall s \neq 0. \tag{4.2}$$

A  $\varphi_\gamma(t)$  0-hoz tart, ha  $t$  0-hoz tart, így a (4.1) és a (4.2) egyenlet ekvivalens. □

A kitűzött célhoz kapcsolatot kell találnunk a sokaság térfogati formája és a kis gömbfelületek középgörcülete között ([3]).

Tekintsük a  $P, Q \in M$  közeli pontokat, és az őket összekötő  $\gamma_{PQ}$  geodetikus. Válasszunk  $E_1, \dots, E_{n-1}$   $\gamma_{PQ}$  menti párhuzamos vektormezőket úgy, hogy az  $E_1(t), \dots, E_{n-1}(t), E_n(t) = \gamma'_{PQ}(t)$  érintővektorok ortonormált bázist alkossanak minden  $t \in [0, d(P, Q)]$ -ra. Ekkor a 2.5. szakaszban bevezetett  $J(r, t)$  mátrixfüggvény segítségével definiáljuk a  $\Theta$  kétpontfüggvényt az átlón kívül:

$$\Theta(P, Q) = d(P, Q)^{-(n-1)} \det(J(0, d(P, Q))).$$

A (2.13) egyenlet szerint  $\Theta$  szimmetrikus függvény.

Legyen  $J_i$  az a  $\gamma_{PQ}$  menti Jacobi-mező, melyre  $J_i(0) = \mathbf{0}$  és  $J'_i(0) = E_i(0)$   $i = 1, \dots, n-1$ -re. A  $J_i(d(P, Q))/d(P, Q)$  vektor az  $\exp_P$  leképezés  $\exp_P^{-1}(Q)$  pontbeli  $J'_i(0)$  irányú deriváltja a szokásos azonosítások mellett. A  $\gamma'_{PQ}$  irányban az  $\exp_{PQ}$  deriváltja  $\gamma'_{PQ}$ , így az

$$\frac{1}{d(P, Q)} J_1(d(P, Q)), \dots, \frac{1}{d(P, Q)} J_{n-1}(d(P, Q)), \gamma'_{PQ}(d(P, Q))$$

érintővektorok tetszőleges ortonormált rendszerben felírt determinánsa adja meg a Riemann-metrika  $\mu$  térfogati formájának és a  $T_P M$ -en értelmezett  $\lambda$  Lebesgue-mérték  $\exp_P$  által indukált térfogati formájának az arányát.

Ha a fenti érintővektorokat az  $E_1(d(P, Q)), \dots, E_n(d(P, Q))$  bázisban írjuk fel, akkor a mátrixuknak a felső  $(n-1) \times (n-1)$ -es részmátrixa éppen a  $J(0, d(P, Q))$  mátrix  $1/d(P, Q)$ -szerese, az  $n$ -edik sorának  $n$ -edik eleme 1, a többi eleme pedig 0 (mivel  $\gamma'_{PQ}(d(P, Q))$ -nak a koordinátái ebben a bázisban  $(0, \dots, 0, 1)$ , és a  $J_i$  Jacobi-mezők merőlegesek  $\gamma_{PQ}$ -ra). Tehát a  $\Theta$  függvény a két térfogati forma arányát adja meg:

$$\Theta(P, Q) = \frac{\mu}{\exp_P^* \lambda}(Q).$$

Ez a formula mutatja, hogy a  $\Theta$  függvényt az átlóra 1-gyel sima módon kiterjeszthetjük (analitikus sokaságon analitikusan is). Továbbá azt is látjuk, hogy a  $\Theta$  függvény pontosan akkor centrálisan szimmetrikus, ha a sokaságban a lokális geodetikus szimmetriák térfogattartóak, ami a D'Atri-terek definíciója.

Egy rögzített  $\gamma$  természetes paraméterezésű geodetikus esetén tekintsük a  $\tilde{\Theta}(t) = \Theta(\gamma(0), \gamma(t))$  függvényt. Ekkor a

$$t^{n-1} \tilde{\Theta}(t) = \det(J(0, t))$$

egyenletet deriválva kapjuk, hogy

$$(n-1)t^{n-2} \tilde{\Theta}(t) + t^{n-1} \tilde{\Theta}'(t) = \text{tr}(\partial_2 J(0, t) J(0, t)^{-1}) \det(J(0, t)).$$

Ami átrendezve és a (2.14) formulát használva,

$$\frac{n-1}{t} + \frac{\tilde{\Theta}'(t)}{\tilde{\Theta}(t)} = \text{tr}(-L(-t, t)). \quad (4.3)$$

A

$$\frac{\tilde{\Theta}'(t)}{\tilde{\Theta}(t)} = (\log \Theta)'(\gamma(0), \gamma(t))$$

és a

$$\operatorname{tr}(-L(-t, t)) = (n-1)h(\gamma(0), \gamma(t))$$

azonosságok segítségével a (4.3) egyenlet

$$\frac{n-1}{t} + (\log \Theta)'(\gamma(0), \gamma(t)) = (n-1)h(\gamma(0), \gamma(t)).$$

Mivel a  $\gamma$  geodetikus tetszőleges volt, így minden elég közeli  $P, Q \in M$  pontra

$$\frac{n-1}{d(P, Q)} + (\log \Theta)'(P, Q) = (n-1)h(P, Q). \quad (4.4)$$

Most már könnyedén be tudjuk bizonyítani a következő tételt, mely a definíciókat alkalmazva az 1.13. tétel megfelelő része.

**4.4. tétel** ([32]). *Egy analitikus Riemann-sokaságra ekvivalensek a következő állítások.*

- (i)  $\Theta$  centrálisan szimmetrikus;
- (ii)  $h$  szimmetrikus;
- (iii)  $h$  bal centrálisan szimmetrikus.

*Bizonyítás.* (i) $\Rightarrow$ (ii). Ha fennáll az (i) feltétel, akkor a  $\log \Theta$  is centrálisan szimmetrikus. Mivel a  $\log \Theta$  mindig szimmetrikus, a 4.1. lemma szerint  $(\log \Theta)'$  is szimmetrikus, ami a (4.4) egyenlettel adja  $h$  szimmetriáját.

(i) $\Rightarrow$ (iii). A  $\log \Theta$  centrális szimmetriájából a 4.3. lemma szerint következik, hogy  $(\log \Theta)'$  bal centrálisan szimmetrikus, amiből a (4.4) egyenlet adja ugyanezt a  $h$  függvényre.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Ha a (ii) fennáll, akkor a (4.4) egyenlet szerint  $(\log \Theta)'$  szimmetrikus, továbbá tudjuk, hogy  $\log \Theta$  is szimmetrikus. Ekkor a 4.2. lemma szerint  $\log \Theta$ , és így  $\Theta$  is centrálisan szimmetrikus.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Ha a (iii) áll fenn, akkor a (4.4) egyenlet szerint  $(\log \Theta)'$  bal centrálisan szimmetrikus, amiből a 4.3. lemma szerint  $\log \Theta$  bal centrálisan szimmetrikus, amiből már következik (i). □



# Jelölések

$\mathcal{B}(P, r)$	$P$ középpontú, $r$ sugarú (tömör) nyílt gömb
$\overline{\mathcal{B}}(P, r)$	$P$ középpontú, $r$ sugarú (tömör) zárt gömb
$d(P, Q)$	$P$ és $Q$ pontok (geodetikus) távolsága
$d^M(P, Q)$	$P$ és $Q$ pontok geodetikus távolsága az $M$ sokaságban
$\partial_i^\varphi$	$\varphi$ térképhez tartozó $i$ -edik standard bázismező ( $\partial_i^\varphi = (T\varphi)^{-1}(\partial_i)$ )
$\text{Gr}(k, V)$	$V$ vektortér $k$ dimenziós altereinek Grassmann-sokasága
$\text{Gr}_k(TM)$	$M$ érintőtereinek $k$ -adik Grassmann-sokaságainak nyalábja
$\gamma_{PQ}$	$P$ -t és $Q$ -t összekötő természetes paraméterezésű minimálgeodetikus ( $\gamma_{PQ}(0) = P$ és $\gamma_{PQ}(d(P, Q)) = Q$ )
$\gamma_{PQ}^M$	az $M$ sokaságban tekintett $\gamma_{PQ}$ (ha ez nem egyértelmű)
$\Gamma_{ij}^k$	Christoffel-szimbólumok
$h_P(Q)$	$P$ középpontú, $Q$ -n átmenő geodetikus gömb középgörbülete a $Q$ pontban
$I$	egységmátrix
$\ell(c)$	$c$ görbe ívhossza
$K(\sigma)$	$\sigma$ síkállás szekcionális görbülete
$\Pi_\gamma$	$\gamma$ geodetikus menti párhuzamos eltolás
$R(X, Y)Z$	görbületi tenzor
$R_{\mathbf{x}}$	$\mathbf{x}$ érintővektorhoz tartozó Jacobi-operátor
$\mathfrak{r}(P)$	$P$ pont azon környezetének sugara, mely geodetikusan konvex (részletesen lásd a 3.1. szakaszban)
$\Sigma(P, r)$	$P$ középpontú, $r$ sugarú gömbfelület

$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$	$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok által kifeszített lineáris altér
$\text{Vol}_n$	$n$ dimenziós térfogat
$\mathfrak{X}(M)$	$M$ -en értelmezett sima vektormezők tere
$\omega_{n-1}$	az $n$ dimenziós euklideszi térben fekvő egységgömbfelület ( $n - 1$ ) dimenziós térfogata
$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$	$\mathbf{v}$ és a $\mathbf{w}$ érintővektorok Riemann-metrika szerinti skaláris szorzata
$\ \mathbf{v}\ $	$\mathbf{v}$ érintővektor Riemann-metrika szerinti normája
$[P, Q]$	$\gamma_{PQ}$ képe a sokaságban

# Irodalomjegyzék

- [1] M. Bern, A. Sahai: Pushing disks together—the continuous-motion case. *Discrete Comput. Geom.*, 20(4):499–514, 1998.
- [2] J. Berndt, F. Tricerri, L. Vanhecke: *Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces*, volume 1598 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [3] A. L. Besse: *Manifolds all of whose geodesics are closed*, volume 93 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]*. Springer-Verlag, Berlin, 1978. With appendices by D. B. A. Epstein, J.-P. Bourguignon, L. Bérard-Bergery, M. Berger and J. L. Kazdan.
- [4] A. L. Besse: *Einstein manifolds*, volume 10 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [5] K. Bezdek: From the Kneser-Poulsen conjecture to ball-polyhedra. *European J. Combin.*, 29(8):1820–1830, 2008.
- [6] K. Bezdek: *Classical topics in discrete geometry*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer, New York, 2010.
- [7] K. Bezdek, R. Connelly: Pushing disks apart—the Kneser-Poulsen conjecture in the plane. *J. Reine Angew. Math.*, 553:221–236, 2002.
- [8] K. Bezdek, R. Connelly: The Kneser-Poulsen conjecture for spherical polytopes. *Discrete Comput. Geom.*, 32(1):101–106, 2004.
- [9] B. Bollobás: Area of the union of disks. *Elem. Math.*, 23:60–61, 1968.
- [10] G. Calvaruso, Ph. Tondeur, L. Vanhecke: Four-dimensional ball-homogeneous and  $C$ -spaces. *Beiträge Algebra Geom.*, 38(2):325–336, 1997.

- [11] G. Calvaruso, L. Vanhecke: Special ball-homogeneous spaces. *Z. Anal. Anwendungen*, 16(4):789–800, 1997.
- [12] V. Capoyleas, J. Pach: On the perimeter of a point set in the plane. In *Discrete and computational geometry (New Brunswick, NJ, 1989/1990)*, volume 6 of *DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, pages 67–76. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [13] P. Carpenter, A. Gray, T. J. Willmore: The curvature of Einstein symmetric spaces. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 33(129):45–64, 1982.
- [14] J. Cheeger, D. G. Ebin: *Comparison theorems in Riemannian geometry*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1975. North-Holland Mathematical Library, Vol. 9.
- [15] B. Csikós: On the Hadwiger-Kneser-Poulsen conjecture. In *Intuitive geometry (Budapest, 1995)*, volume 6 of *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pages 291–299. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1997.
- [16] B. Csikós: On the volume of the union of balls. *Discrete Comput. Geom.*, 20(4):449–461, 1998.
- [17] B. Csikós: On the volume of flowers in space forms. *Geom. Dedicata*, 86(1-3): 59–79, 2001.
- [18] B. Csikós: A Schläfli-type formula for polytopes with curved faces and its application to the Kneser-Poulsen conjecture. *Monatsh. Math.*, 147(4):273–292, 2006.
- [19] B. Csikós, M. Horváth: On the volume of the intersection of two geodesic balls. *Differential Geom. Appl.*, 29(4):567–576, 2011.
- [20] B. Csikós, M. Horváth: A characterization of harmonic spaces. *J. Differential Geom.*, 90(3):383–389, 2012.
- [21] B. Csikós, M. Horváth: A characterization of spaces of constant curvature by the minimum covering radius of triangles. *Közlésre beadva*.
- [22] B. Csikós, D. Kunszenti-Kovács: On the extendability of the Kneser-Poulsen conjecture to Riemannian manifolds. *Adv. Geom.*, 10(2):197–204, 2010.

- [23] B. Csikós, G. Moussong: On the Kneser-Poulsen conjecture in elliptic space. *Manuscripta Math.*, 121(4):481–489, 2006.
- [24] E. Damek, F. Ricci: A class of nonsymmetric harmonic Riemannian spaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 27(1):139–142, 1992.
- [25] D. M. DeTurck, J. L. Kazdan: Some regularity theorems in Riemannian geometry. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 14(3):249–260, 1981.
- [26] Y. Gordon, M. Meyer: On the volume of unions and intersections of balls in Euclidean space. In *Geometric aspects of functional analysis (Israel, 1992–1994)*, volume 77 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 91–101. Birkhäuser, Basel, 1995.
- [27] A. Gray, L. Vanhecke: Riemannian geometry as determined by the volumes of small geodesic balls. *Acta Math.*, 142(3-4):157–198, 1979.
- [28] M. Gromov: Monotonicity of the volume of intersection of balls. In *Geometrical aspects of functional analysis (1985/86)*, volume 1267 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–4. Springer, Berlin, 1987.
- [29] M. Kneser: Einige Bemerkungen über das Minkowskische Flächenmass. *Arch. Math. (Basel)*, 6:382–390, 1955.
- [30] O. Kowalski, F. Prüfer, L. Vanhecke: D'Atri spaces. In *Topics in geometry*, volume 20 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 241–284. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996.
- [31] O. Kowalski, L. Vanhecke: Ball-homogeneous and disk-homogeneous Riemannian manifolds. *Math. Z.*, 180(4):429–444, 1982.
- [32] O. Kowalski, L. Vanhecke: Two-point functions on Riemannian manifolds. *Ann. Global Anal. Geom.*, 3(1):95–119, 1985.
- [33] O. Kowalski, L. Vanhecke: A new formula for the shape operator of a geodesic sphere and its applications. *Math. Z.*, 192(4):613–625, 1986.
- [34] O. Kowalski, L. Vanhecke: Geodesic spheres and a new recursion formula on Riemannian manifolds. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 45(1):119–132 (1988), 1987.

- [35] M. Meyer, S. Reisner, M. Schmuckenschläger: The volume of the intersection of a convex body with its translates. *Mathematika*, 40(2):278–289, 1993.
- [36] E. T. Poulsen: Problem 10. *Math. Scand.*, 2:346, 1954.
- [37] Z. I. Szabó: The Lichnerowicz conjecture on harmonic manifolds. *J. Differential Geom.*, 31(1):1–28, 1990.

# Összefoglalás

Az értekezés témájának az ötletét a Kneser–Poulsen-sejtés adta, mely szerint ha euklideszi egybevágó gömböket úgy rendezünk át, hogy a középpontjaik távolsága nem nő, akkor az uniójuk térfogata sem nőhet. Ez a sejtés mindmáig nincs bebizonyítva teljesen, bár sok részeredmény ismert. Ezekből az eredményekből úgy tűnik, hogy a sejtés igaz különböző sugarú gömbökre is, továbbá a gömbi és a hiperbolikus terekben is. Ezért természetesen merül fel a kérdés, hogy esetleg igaz lehet-e még általánosabb Riemann-sokaságokon.

Ha egy Riemann-sokaságon igaz a sejtés, akkor bármely  $k$  gömb uniójának a térfogata csak a gömbök sugarától és a középpontjaik távolságaitól függ. Ha ez igaz, akkor a szita formula szerint hasonló állítás igaz a  $k$  gömb metszetére is. Ez utóbbi tulajdonságot nevezzük  $KP_k^-$ , illetve  $KP_k$  tulajdonságnak, aszerint, hogy megköveteljük-e, hogy a gömbök azonos sugarúak legyenek, vagy sem.

Szabó I. Zoltán megmutatta, hogy az összefüggő, egyszeresen összefüggő, teljes harmonikus terek rendelkeznek a  $KP_2$  tulajdonsággal. Bebizonyítottuk, hogy ez visszafelé is igaz még a gyengébb  $KP_2^-$  tulajdonsággal is, azaz ha egy összefüggő, egyszeresen összefüggő, teljes Riemann-sokaság rendelkezik a  $KP_2^-$  tulajdonsággal, akkor harmonikus.

Csikós Balázs és Kunszenti-Kovács Dávid megmutatta, hogy ha egy összefüggő, teljes Riemann-sokaság rendelkezik a  $KP_3$  tulajdonsággal, akkor az az egyszeresen összefüggő állandó görbületű terek egyike. Bebizonyítottuk, hogy ehhez elegendő csak a  $KP_3^-$  tulajdonságot megkövetelni. Ebből következik, hogy még az eredeti Kneser–Poulsen-sejtést sem lehet az állandó görbületű sokaságoknál általánosabb Riemann-sokaságokra kiterjeszteni.

# English Summary

The motivation of this dissertation was the Kneser–Poulsen conjecture, which claims that if some congruent balls of the Euclidean space are rearranged in such a way that the distances between the centers do not increase, then the volume of the union of the balls does not increase. Though there is no complete proof of this conjecture, many partial results are known. Based on these results, the conjecture seems to be true also for non-congruent balls, and also in the spherical and hyperbolic spaces. Thus, it is natural to ask whether the conjecture can be true in Riemannian manifolds more general than the constant curvature spaces.

If the conjecture is true in a Riemannian manifold, then the volume of the union of  $k$  geodesic balls can depend only on the distances between the centers and the radii of the balls. By the inclusion-exclusion principle, an analogous claim is true for the intersection of  $k$  balls. Call the latter property the  $KP_k^\pm$  or  $KP_k$  property depending on whether the balls are supposed to be congruent or not.

Z. I. Szabó showed that the connected simply connected and complete harmonic manifolds have the  $KP_2$  property. We proved that the other direction also true with the weaker  $KP_2^\pm$  property, that is, if a connected, simply connected, and complete Riemannian manifold has the  $KP_2^\pm$  property, then it is harmonic.

B. Csikós and D. Kunszenti-Kovács showed that if a connected simply connected and complete Riemannian manifold has the  $KP_3$  property, then it is one of the simply connected spaces of constant curvature. We proved that it is enough to suppose the  $KP_3^\pm$  property for this claim. Thus, the original Kneser–Poulsen conjecture cannot be generalized for spaces of non-constant curvature.