

# Turbulenciával kapcsolatos léptékfüggő jelenségek az asztrofizikában

Doktori értekezés

Készítette:

Marschalkó Gábor

Témavezető:

Dr. Petrovay Kristóf

tanszékvezető egyetemi tanár

ELTE Földrajz- és Földtudományi Intézet

Csillagászati Tanszéke

Fizika Doktori Iskola

Doktori Iskola vezetője: Dr. Palla László

Részecskefizika és Csillagászat Program

Programvezető: Dr. Csikor Ferenc

ELTE Földrajz- és Földtudományi Intézet

Csillagászati Tanszéke

Budapest, 2013.



## Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet szeretném kifejezni mindazoknak, akik munkám folyamán a segítségemre voltak tudományos meglátásaikkal, programozási ötleteikkel, munkám nyugodt feltételeinek biztosításával, a cikkek megírásában és átnézésében, illetve értekezésem átolvasásával és javítására irányuló tanácsaikkal.

Elsősorban Petrovay Kristófnak tartozom köszönettel, hogy elvállalta témavezetésemet és munkám folyamán végig támogatott. Ki szeretném még emelni Forgácsné Dajka Emesét, akihez bármikor fordulhattam kérdéseimmal, valamint Szabados Lászlót, aki támogatott dolgozatom befejezésében.

Köszönetet szeretnék mondani továbbá az Eötvös Loránd Tudományegyetem Csillagászati Tanszékének és az MTA Csillagászati és Földtudományi Kutatóközpont Konkoly Thege Miklós Csillagászati Intézetének is.





# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>5</b>
1.1. Turbulencia és csillagászat . . . . .	6
1.1.1. A turbulenciáról általában . . . . .	6
1.1.2. A Kolmogorov-spektrum . . . . .	8
1.1.3. A turbulencia modellezése az asztrofizikában . . . . .	11
1.2. Néhány szó a Fourier-analízisről . . . . .	13
<b>2. A szuperdiffúzió hideg felhőmagok relatív elemgyakoriságára gyakorolt hatása</b>	<b>17</b>
2.1. Hideg felhőmagok . . . . .	18
2.2. Anomális diffúzió . . . . .	21
2.3. A szuperdiffúzió hatásával kapcsolatos vizsgálataink . . . . .	26
2.3.1. Kutatási témánkat illető korábbi eredmények bemutatása . . . . .	27
2.3.2. A kutatás során alkalmazott módszer ismertetése . . . . .	31
2.3.3. Analitikusan is kezelhető, egyszerűsített probléma vizsgálata . . . . .	35
2.3.4. Reálisabb modellekkel kapott eredmények . . . . .	41
2.3.5. Az eredmények összefoglalása . . . . .	47
<b>3. A Nap turbulens mágneses energiaspektruma és a kioltási függvény kapcsolata</b>	<b>49</b>
3.1. A Nap felépítése . . . . .	50
3.1.1. A Nap felépítése és mágneses tere . . . . .	50
3.1.2. A Nap mágneses tere és a kioltási függvény . . . . .	54
3.2. A Nap turbulens mágneses energiaspektrumával és a kioltási függvénnyel kapcsolatos vizsgálataink . . . . .	57
3.2.1. A vizsgált analitikus összefüggés . . . . .	57
3.2.2. Monte Carlo-szimulációkkal kapott eredmények és azok értelmezése	62
3.2.3. Az eredmények összefoglalása . . . . .	67
<b>4. Összegzés</b>	<b>71</b>
<b>5. Summary</b>	<b>73</b>



# 1. Bevezetés

Doktori értekezésemben két különböző léptékfüggő turbulens asztrofizikai problémát vizsgálok meg a csillagászat két eltérő területéről. Az első a csillagközi anyag fizikájához kapcsolódik: az intersztelláris anyagban úszó sűrűsödésekben – az ún. hideg felhőmagokban – kialakuló elemgyakoriságok eloszlásának időbeli változását mutatom be. A második téma a napfizika területéhez tartozik, s középpontjában a nyugodt Nap mágneses terének vizsgálata áll.

A molekulafelhők hideg, sűrű magjának kutatása hosszú múltra tekint vissza, mivel egy igen jelentős, a csillagkeletkezéssel szoros kapcsolatban levő területről van szó, melyet az utóbbi évtizedekben már modern, űrszondás megfigyelések is elősegítenek. A hideg felhőmagokat alkotó anyag összetételének és eloszlásának modellezésére létrehozott elméleteknek igen bonyolult, komplex fizikai folyamatokat kell leírniuk. Természetesen ezek a modellek ma még nem képesek tökéletesen visszaadni a megfigyelésekből adódó elemgyakoriságokat, ezért első témámban azt tűztük ki célul, hogy megvizsgáljuk miként befolyásolná

a kialakuló elemgyakoróságokat, ha a modellekben hagyományos diffúzió helyett anomális diffúziót, jelen esetben szuperdiffúziót alkalmaznánk. A probléma igen összetett volta miatt mi is kénytelenek voltunk különböző egyszerűsítő feltevésekkel élni, de a kapott eredmények alapján kijelenthetjük, hogy a szuperdiffúzió használata reálisabb eredményeket ad a molekulafelhők elemgyakoróságának modellezésében.

Miként a csillagközi anyag fizikája, a napfizika is számos megoldatlan kérdést rejt magában még napjainkban is. Nem csupán a globális mágneses tér kialakulásának és fennmaradásának (napdinamó) pontos részletei nem ismertek egyelőre teljes részletességgel, hanem azt sem tudjuk pontosan, hogy mekkora mágneses tér marad rejtve előttünk műszereink véges felbontása miatt. Mi a nyugodt Nap fotoszférájában kimutatható turbulens mágneses tér energiájának spektrumát vizsgáltuk meg.

A fotoszferikus mágneses térre egyfajta kettősség jellemző: az erősebb, erővonalcsövekben koncentrálódó mágneses tér mellett jelen van egy gyengébb, erősen csavarodott, mikroturbulens tér is, ami a Zeeman-effektuson alapuló mérések számára sokáig rejtve maradt. A Hanle-effektusnak köszönhetően ma már ezt a gyengébb teret is egyre jobban megismerjük, bár az erővonalak jelentős mértékű csavarodottsága miatt a felbontási határ alatti mágneses tér egy része továbbra is rejtve marad előlünk. Célként az ezzel a jelenséggel kapcsolatos kioltási függvény (részletes magyarázatát lásd a 3.1.2. szakaszban) Monte Carlo-szimulációkkal történő vizsgálatát tűztük ki, amelynek révén a fotoszféra turbulens mágneses energiájának spektrumára tudtunk kijelentéseket tenni.

## 1.1. Turbulencia és csillagászat

Mivel mindegyik témakört külön részletesen bevezetem, ezért most csupán röviden mutatom be az azokat összekapcsoló turbulencia jelenségét (1.1.1. szakasz) – a jelen értekezés tárgyát képező léptékfüggő vizsgálatok alapjául szolgáló Kolmogorov-spektrumra külön is kitérve (1.1.2. szakasz) – , illetve tárgyalási módjait (1.1.3. szakasz), végül röviden a célunk eléréséhez nélkülözhetetlen Fourier-analízist is ismertetem (1.2. szakasz).

### 1.1.1. A turbulenciáról általában

A turbulencia közismert jelensége alapvetően a nyíró áramlási instabilitásokra vezethető vissza, amelyek akkor alakulnak ki, ha a sebességnek az áramlás irányára merőleges gradiense van. Ilyen sebességgradiens kialakulhat például keveredő rétegek határán; az áramlásba helyezett nyugvó, vagy mozgásban levő szilárd területet megkerülő áramlási ágak újraegyesülésekor; egy gyorsan haladó sugárnyaláb kiterjedtebb, lassabb közegbe történő behatolásakor (csillagászati példák a fentiekre: gázóriások légkörében kialakuló örvények, a bolygók mellett elhaladó napszél szerkezete, bipoláris kilövellések találkozása hideg csillagközi felhőkkel).

A turbulencia leírására nagyon sokféle módszer létezik, sőt a kutatók még abban sem értenek teljesen egyet, milyen áramlásokat tekinthetünk turbulensnek. Stehen B. Pope *Turbulent Flows* című monográfiájában (2000) a következőképpen jellemzi a turbulens áramlásokat: „az áramlás nem egyensúlyi, irreguláris, láthatóan véletlenszerű és kaotikus; biztosan állíthatjuk, hogy minden egyes örvény (...) mozgása kiszámíthatatlan”, és „a turbulens áramlások alapvető jellemzője, hogy az áramlás sebességtére mind hely, mind pedig idő szerint számottevő mértékben és szabálytalanul változik”.

Lesieur három kritériumot javasol a turbulencia azonosításához (a kritériumokat Petrovay Kristóf *Elméleti asztrofizika 1: Az elméleti asztrofizika fizikai alapjai előadásához kapcsolódó jegyzetéből* idézem):

- „véletlenszerűség,
- nagyságrendi növekedés a makroszkopikus transzportban, különösen az impulzusében,
- különböző léptékű mozgások vannak jelen több nagyságrendet átfogó, folytonos mérettartományban.”

Elmondhatjuk tehát, hogy a turbulenciát általában véletlenszerű, irreguláris, kaotikus és több mérettartományt átfogó áramlásként jellemzik, ezért nem meglepő, hogy leírására statisztikai módszereket alkalmaznak, miként Arnab Rai Choudhuri is teszi 1998-as összefoglaló asztrofizikai munkájában (*The Physics of Fluids and Plasmas*). A turbulenciát leíró statisztikai elméletek sokaságokra vett átlagokkal dolgoznak: az áramlásra jellemző mennyiségeket (így az egyik legalapvetőbbet, a sebességet is) egy átlagos értékre és egy kis fluktuációra bontják:

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}', \quad (1)$$

a turbulencia jellemzésére egy adott  $\mathbf{x}$  helyvektorú pontban pedig a következő mennyiséget használják:

$$\overline{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)}. \quad (2)$$

Ez a vizsgált pontban ( $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ) egyszerűen a turbulens mozgási energiát adja vissza  $t$  időpontban, míg  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  esetén (ahol  $r$  az adott ponttól mért távolság) az  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{x} + \mathbf{r}$  pontokban mért sebességek között semmilyen korreláció nincs, vagyis értéke nulla. A turbulens áramlás *korrelációs hosszának* ezért azt az  $r$  távolságot nevezzük, ahol a fenti kifejezés értéke gyakorlatilag még nullától különbözőnek tekinthető. Éppen ezért a (2) összefüggés kifejezetten alkalmas a turbulencia statisztikus jellemzésére, hiszen annak erősségét és korrelációs hosszát is meghatározza.



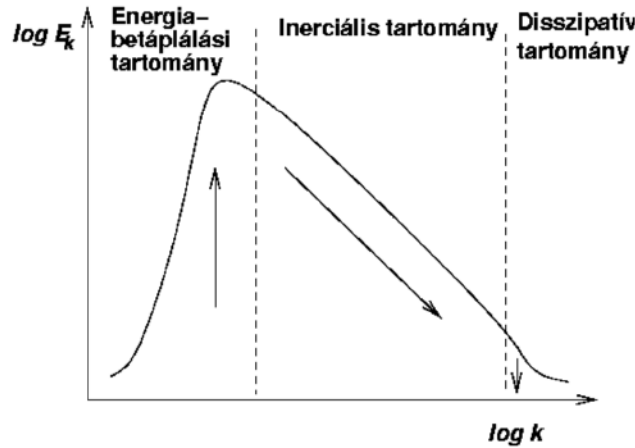
A turbulencia lényegét egy igen egyszerű képpel is meg lehet ragadni: a különböző sebességekkel mozgó rétegek között fellépő nyíró erők hatására a két réteg határán instabilitás esetén örvények alakulhatnak ki. Az örvények mérete a nyírást okozó, nem nulla sebességgradiensű tartomány  $L$  méretétől függ. Az instabilitás fejlődésére jellemző időskála az  $L$  lépték és a nyírást okozó sebességkülönbség ( $V$ ) segítségével becsülhető meg:  $\tau = L/V$ . Instabilitás akkor lép fel, ha a Reynolds-szám ( $Re = LV/\nu$ , ahol  $\nu$  a kinematikai viszkozitás) egy kritikus értéket meghalad. Mivel a csillagászatban általában igen magas Reynolds-számokkal találkozunk – s így elmondhatjuk, hogy az asztrofizikai áramlások általában turbulensek –, ezért maguk a keletkezett örvények is instabilak, így további, kisebb örvényekre bomlanak. Ez a folyamat mindaddig tart, míg az egyre kisebb örvények  $l$  léptéke és  $v$  karakterisztikus sebessége alapján képzett Reynolds-szám ( $lv/\nu$ ) el nem éri a kritikus értéket: ezek az örvények már stabilak.

A legegyszerűbb, inkompresszibilis, izotrop turbulencia esetén az energiaátadás lokális (Petrovay, 2001), ami azt jelenti, hogy a fellépő instabilitásnak köszönhetően az örvények csak az eggyel felettük levő örvényektől nyernek energiát, ami így egy energiakaszkádot hoz létre: az  $L$  léptéken betáplált energia folyamatosan oszlik el az egyre kisebb léptékek között, míg a minimális léptékeket elérve a viszkozitásnak köszönhetően disszipál. (Ezt a folyamatot a következő – 1.1.2. – szakaszban részletesebben is bemutatom.)

A turbulens áramlások köre azonban a fentieknél sokkal szélesebb, olyan jelenségekkel is rendszeresen találkozhatunk, mint az intermittencia és a koherens struktúrák, amelyek még tovább bonyolítják az eddig sem könnyen kezelhető jelenségkör leírását. A koherens struktúrák szokatlanul hosszú – az adott léptékre jellemző karakterisztikus időt számottevően meghaladó – ideig fennmaradó képződmények az áramlásban. Megjelenésük nem jósolható meg előre, az egyes, adott fázisú Fourier-módusok szuperpozíciója következtében jönnek létre, ami az áramlási kép fraktáldimenziójának megváltozásához vezet. Az intermittencia jelensége pedig azt takarja, hogy a disszipáció nem egyenletesen van jelen az egész áramlásban, az energiakaszkad csak az áramlás egyes diszjunkt, fraktálszerűen elhelyezkedő tartományaiban megy végbe. Bár ez utóbbi jelenségek mind a csillagközi anyagban, mind pedig a szoláris fotoszférában jelen levő áramlásokra jellemzők, mi eltekintettünk ezek figyelembevételétől, mivel az értekezésemben bemutatott problémák egyszerűsített vizsgálatához nem szükségesek. A fotoszferikus mágneses tér reálisabb fázisviszonyokkal történő modellezése érdekében azonban a későbbiekben mindenképpen szükség lesz a turbulens mágneses tér fraktálszerkezetét is figyelembe vevő pontosabb modell kialakítására.

### 1.1.2. A Kolmogorov-spektrum

A Fourier-térben vizsgálva a fentebb említett energiakaszkad-képet jutunk el az ún. Kolmogorov-spektrumhoz, melyet néhány megszorító feltevéssel élve csupán dimenzionális alapon



1. ábra. *Statistikailag stacionárius turbulencia vázlatos energiaspektruma. Az ábra Petrovay Kristóf online jegyzetéből származik.*

le lehet vezetni. Az örvények léptékére jellemző karakterisztikus hosszak helyét a Fourier-térben az ezekenek megfelelő hullámszámok ( $k \sim 1/l$ ) veszik át. Az egyes szinteket – azonos léptékű örvényeket – a logaritmikus skálán vett spektráltartomány egyenletes felosztásával kapjuk. Dekádok esetén a  $k/10$  és  $k$  közötti hullámszámértékeket tekintjük egy szinthez (léptékhez) tartozónak, az ebben tárolt turbulens energia ekkor:  $E_d = \int_{k/10}^k E_k dk$ . Az áramlást továbbra is összenyomhatatlannak és izotropnak tekintjük. A fluidum kinetikus energiáját az energia spektrálfüggvényének ( $E_k$ ) a teljes hullámszámtartományra vett integrálásával kapjuk meg, ami nyilván az előbbi dekádok szummájával ekvivalens:

$$E = \int_0^{\infty} E_k dk. \quad (3)$$

Kolmogorov-spektrumnak az energia fenti spektrálfüggvényének ( $E_k$ ) egyik speciális alakját nevezzük. Alapvetően három – az 1. ábrán is látható – tartományt különböztetünk meg:

- betáplálási tartomány: a turbulenciát létrehozó nyíró instabilitás révén  $L$  nagyságrendű léptékeken itt jut az áramlás a turbulenciát létrehozó többletenergiához;
- inerciális tartomány: lokális energiaátadás révén az energia a kisebb léptékek felé kaszkádol;
- disszipatív tartomány: a Reynolds-számok fokozatos csökkenése révén az instabilitás megszűnik, az energia disszipál.

Most nézzük meg ezt részletesebben is. Az energiakaszkád-képben bemutatott legnagyobb  $L$  léptékeken, ahol a sebességgradiens és a magas Reynolds-számok következtében

létrejövő nyírási instabilitás elindítja az örvények kialakulását, történik meg az energia betáplálása, itt jelenik meg a turbulenciát hajtó többletenergia, ami a spektrum kis hullámszámokhoz tartozó részén az  $E_k$  értékek fokozatos növekedéséhez vezet. A legkisebb tartományokban pedig, ahol a Reynolds-számok elérik a kritikus szintet, az energia viszkózus disszipáció révén tűnik el.

Az igazán érdekes rész a kettő között meghúzódnó inerciális tartomány. Itt adódik át a nagyobb örvények energiája az egy szinttel alattuk levőknek, Kolmogorov feltevései szerint lokálisan, azaz az örvények energiát mindig csak a szomszédos méretű örvényektől kaphatnak. Mivel disszipáció csak a legkisebb léptékeken történik, ezért az energiaátadási ráta az inerciális tartományban konstans, vagyis nem függ az örvények  $l$  léptékétől. A lokális energiaátadás miatt az  $L$  és  $l_{min}$  közötti örvények sem a betáplálási, sem pedig a disszipatív tartományban zajló folyamatokkal nem lehetnek kapcsolatban, egyedül a mozgásegyenlet inerciális tagja, azaz  $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$  a meghatározó (Petrovay, 2001) – ebből adódik e tartomány neve is. Az eddigiek alapján így az energia spektrálfüggvényének az inerciális tartományban hatványfüggvény alakot kell felvennie ( $E_k \sim k^\alpha$ ).

Az egy dekádhoz rendelhető  $E_d = \int_{k/10}^k E_k dk$  energia az adott méretű örvények turbulens kinetikus energiájával egyezik meg:

$$\frac{v^2}{2} = E_d = \int_{k/10}^k E_k dk \sim \left[ \frac{kE_k}{\alpha + 1} \right]_{k/10}^k \sim kE_k. \quad (4)$$

Az energiaátadás időskálája – pusztán dimenzionális alapon –  $v$  sebességkülönbségű nyíráás következtében létrejövő  $l$  léptékű örvények esetén:  $\tau \sim l/v$ . A disszipációs ráta ( $\tau$  idő alatt átadott energia) (4) alapján:  $\epsilon = v^2/2\tau$ , ami az energiátadás időskálájának segítségével kifejezve:  $\epsilon = v^3/2l$ . Mivel az energiaátadási ráta Kolmogorov feltevése szerint állandó – vagyis  $v^3/2l$  is állandó –, dimenzionális alapon a következő becsléseket tehetjük:  $v \sim l^{1/3} \sim k^{-1/3}$ , az energiátadási ráta konstans értékét is figyelembe véve pedig:  $v \sim \epsilon^{1/3} k^{-1/3}$ . Ezért  $v^2 \sim \epsilon^{2/3} k^{-2/3}$ , ezt beírva (4)-be pedig adódik a Kolmogorov-spektrum:

$$E_k \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (5)$$

Bár konkrét esetekben nem várhatjuk el a Kolmogorov-spektrum teljesülését – mágneses tér jelenléte esetén (MHD turbulencia) például a  $-3/2$  kitevőjű Iroshnikov–Kraichnan-spektrumot szokás emlegetni, ami szintén csak egy ideális határesetnek tekinthető –, a turbulencia leírásában és alapvető jellegzetességeinek megragadásában igen hasznos szerepet játszik. A 3. szakaszban a kioltási függvényvel kapcsolatos vizsgálataink révén kapott turbulens mágneses energiaspektrum kitevője például mindkét esettől – Kolmogorov, illetve Iroshnikov–Kraichnan-spektrum – eltér.



### 1.1.3. A turbulencia modellezése az asztrofizikában

Mint láttuk, a turbulencia igen összetett jelenség, ezért leírására is nagyon sokféle módszer létezik. Bár a turbulens áramlások erősen véletlenszerűek és kaotikusak, pontos, determinisztikus leírásukra is igény van. Egy áramlás szimulálására alapvetően két különböző módszer létezik: a *direkt numerikus szimulációk* (DNS) és az ún. *large-eddy* szimulációk (LES). A szimulációk során mindkét esetben egy kezdeti sebességtérből kiindulva vizsgálják az áramlás időbeli fejlődését, a benne megjelenő struktúrákat, azok élettartamát, szerkezetét, evolúcióját.

A direkt numerikus szimulációk (DNS) során közvetlenül a Navier–Stokes-egyenletek megoldását keressük. Bár a Navier–Stokes-egyenletek egyértelműen leírják az áramlásokat – így a turbulens áramlásokat is –, nagy Reynolds-számok esetén (a számításigény a Reynolds-szám harmadik hatványával arányos!) azonban az egyenletekben megjelenő komplex sebességtér és a nemlineáris konvektív tag miatt ezek numerikusan is csak igen nehezen kezelhetők még a jelenlegi számítástechnikai feltételek mellett is. A direkt numerikus szimulációk csupán a legegyszerűbb, kis Reynolds-számokkal jellemezhető, tankönyvi példák esetében – mint amilyen például egy függőleges falak által határolt áramlás – lehetnek eredményesek, így az asztrofizikai turbulencia DNS szimulációkkal történő determinisztikus, prediktív kezelése a rendkívül magas Reynolds-számok következtében nem célravezető.

A large-eddy szimulációk ismertetése előtt tekintsük át a fenti nehézségek miatt igen elterjedt, különböző átlagmenyiségek meghatározásán alapuló módszereket. Ezek nagy része az átlagos sebességtér meghatározásához az ún. Reynolds-egyenleteket oldja meg, melyet a kontinuitási egyenletből és a mozgásegyenletből a sebességtér (1) felbontása révén kapunk meg:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \overline{v_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 \overline{v_i}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}. \quad (6)$$

A Reynolds-egyenletek láthatóan hasonlítanak a Navier–Stokes-egyenletekre, a különbség – ami igen lényeges különbség ugyanakkor – a Reynolds-feszültségek megjelenésében van. Reynolds feszültségeknek a fluktuáló sebességkomponens autokovariancia-tenzorának elemeit ( $\overline{v'_i v'_j}$ ) nevezzük. A Reynolds-egyenletek megoldásához a Reynolds-feszültségtenzort különböző turbulens viszkozitás modellek segítségével adják meg. Kimutatható ugyanis (lásd pl. Pope, 2000), hogy a Reynolds-feszültségek a következőképpen is kifejezhetők:

$$\overline{v'_i v'_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_T \left( \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right), \quad (7)$$

ahol  $k$  a turbulens kinetikus energia ( $\frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i}$ ),  $\delta_{ij}$  a Kronecker-delta,  $\nu_T$  pedig a (helytől és időtől is függő) turbulens viszkozitás.

A turbulens viszkozitás különböző módon történő beépítése alapján több modellt is megkülönböztethetünk:

- keveredési-hossz-modell,
- $k - \epsilon$  modell,
- $k - \omega$  modell.

Ezek közül a legegyszerűbb az egyetlen skalár meghatározására visszavezethető keveredési-hossz-elmélet, míg a  $k - \epsilon$ , valamint a részletesebb  $k - \omega$  modellek (melyek az úgynevezett kétegyenletes modellek közé tartoznak) már pontosabb közelítést adnak. A megfelelő modell kiválasztásához mindig több szempontot is át kell gondolni: milyen pontosan írja le az adott problémát, mekkora a számításigénye, milyen pontosságú és relevanciájú eredményeket várhatunk a használatától.

A keveredési-hossz-modellben egyetlen – az áramlás geometriájából következő – paraméterrel helyettesíthetünk több szabad paramétert, melynek különböző értékeket adva modellünket a konkrét fizikai problémához hangolhatjuk. A turbulens viszkozitás értékét a keveredési hossz négyzete és a nyírást okozó sebességgradiens segítségével lehet meghatározni ( $\nu_t \sim l_m V$ ). A keveredési-hossz-modell alkalmazásának négy feltétele van, melyek segítségével a keveredési hossz meghatározható:

- a Reynolds-szám nagyon magas (az átlagolt HD egyenletekben a viszkózus tagok elhanyagolhatók),
- a Mach-szám nagyon kicsi (a turbulens nyomás elhanyagolható a termikus nyomás mellett),
- csak kismértékű anizotrópia jellemző az áramlásra (a különböző irányokban az áramlási sebességek és a skálahosszok nagyságrendileg megegyeznek),
- a turbulencia korrelációs hossza elhanyagolható a nyomás skálamagasságához képest (lokális közelítés).

Az úgynevezett kétegyenletes modellekben a turbulens viszkozitás meghatározásához két transzportegyenletet kell megoldani. Ezek a modellek teljesek, vagyis nincs szükség az áramlás további, speciális tulajdonságainak (például a keveredési-hossznak) a meghatározására. A  $k - \epsilon$  és  $k - \omega$  modellekben, amint neveik is mutatják, az egyik egyenlet a turbulens kinetikus energia transzportját leíró egyenlet. A  $k - \epsilon$  modellben a másik megoldandó egyenlet az energiátadási ráta ( $\epsilon$ ) transzportegyenlete. A kinetikus energia és az energiátadási ráta ismeretében dimenzionális alapon már a turbulens áramlás hosszúság-

$(k^{3/2}\epsilon)$  és időskálája  $(k/\epsilon)$ , valamint a turbulens viszkozitás  $(k^2/\epsilon)$  is meghatározható, majd így a Reynolds-feszültségek révén maguk a Reynolds-egyenletek is megoldhatók. Viszonylagos egyszerűsége és ugyanakkor kellően általános és precíz volta miatt a  $k - \epsilon$  modell a legelterjedtebb a különböző turbulens jelenségeket is tartalmazó elméletekben. Ez ugyanis a legegyszerűbb, legszélesebb felhasználási lehetőségekkel rendelkező, teljes modell. Sajnos a komplexebb áramlások esetén már nem ad olyan pontos képet, mint szeretnénk, de a számításigényt, a számítási nehézségeket, a várt eredményt és a kívánt pontosságot tekintve még mindig a  $k - \epsilon$  modell az egyik legjobb választás.

A  $k - \omega$  modell a  $k - \epsilon$  modellhez igen hasonló ( $\omega \equiv \epsilon/k$ ), homogén turbulencia esetén a modellekre jellemző konstansok megfelelő megválasztásával a két modell megegyezik. Inhomogén esetben a  $k - \omega$  modell jobb választás, mivel több esetben is pontosabb eredményeket ad.

Most térjünk vissza a large-eddy szimulációk ismertetéséhez. A DNS módszer legnagyobb hátránya az volt, hogy az asztrofizikai áramlások léptékei igen sok nagyságrendet fognak át, ami jelenlegi számítástechnikai kapacitásunkkal a legtöbb probléma esetén lehetetlenné teszi a Navier–Stokes-egyenletek direkt megoldását. A large-eddy szimulációk átmenetet képeznek a direkt numerikus szimulációk és Reynolds-feszültségtenzoron alapuló módszerek között, ugyanis csak a nagyléptékű áramlásokat szimulálják közvetlenül, a kisléptékű mozgások leírására pedig valamilyen modellt alkalmaznak. Ezzel a DNS módszerhez képest nagyságrendekkel csökkenthetőek a számítási igények, ugyanakkor az áramlás nagyléptékű szerkezetéről a Reynolds-egyenletek megoldásán alapuló átlagtér módszerektől várhatónál sokkal élethűbb képet kapunk. (A large-eddy szimulációkat részletesen tárgyalja Pierre Sagaut, 2002.)

Természetesen az itt bemutatottakon kívül még számos különböző modell és módszer létezik a turbulens áramlások leírására és szimulációjára, itt csak egy rövid, átfogó kép bemutatására törekedtem, hogy milyen bonyolult és összetett jelenségkörrel van szó. Munkám során a két vizsgált területen a Kolmogorov-spektrumhoz is elvezető, léptékfüggő módszereket használok majd, amelyeket részletesen ismertetek az egyes témák bevezetése folyamán.

## 1.2. Néhány szó a Fourier-analízisről

Mivel a kutatásainkban felhasznált Fourier-analízis igen jól ismert eszköztárt biztosít a legkülönbözőbb fizikai problémák megoldásához, ezért csak röviden ismertetem (Bronstejn és mtsai, 2000 alapján). A periodikus függvények Fourier-sorba fejthetők trigonometrikus vagy exponenciális függvények segítségével, ezen alapul például az idősorok elemzése is, amikor az adatokban valamilyen periodikus ismétlődést keresünk (például a napmágneses ciklus pontos hosszát, vagy egy pulzáló változócsillag periódusát kívánjuk meghatározni).

A Fourier-sorokat több módon is felírhatjuk:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)), \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega x + \phi_n), \text{ ahol } A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \text{ tg}\phi_k = \frac{a_k}{b_k}, \quad (9)$$

$$f(x) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}, \text{ ahol } c_k = \frac{1}{T} \int_0^T g(x) e^{-ik\omega x} dx = \begin{cases} \frac{1}{2}a_0 & \text{ha } k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & \text{ha } k > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & \text{ha } k < 0 \end{cases} \quad (10)$$

A Fourier-transzformáció segítségével valamilyen időtől függő, nem periodikus függvény frekvenciaspektrumát határozhatjuk meg. Ezzel analóg módon valamely térbeli függvény hullámszámtérbeli spektrumát is megadhatjuk, hiszen az idő és a körfrekvencia, valamint a távolság és a hullámszám közötti kapcsolat alakilag megegyezik. Egy nem periodikus  $f(x)$  függvény Fourier-integrálja akkor létezik, ha tetszőleges véges intervallumban kielégíti a Dirichlet-féle feltételeket, vagyis

- a fenti bármelyik intervallum véges sok olyan részintervallumra bontható, ahol az  $f(x)$  függvény monoton és folytonos,
- az  $f(x)$  függvény minden  $x$  szakadási helyén a bal és jobb oldali határértékek –  $f(x+0)$ , illetve  $f(x-0)$  – is értelmezve vannak, akkor a Fourier-sor konvergál ehhez a függvényhez,
- a sor összege a folytonos  $x$  helyeken  $f(x)$ -vel, a szakadási helyeken pedig  $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ -vel egyezik meg.

Ebben az esetben, ha  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  konvergens, akkor

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)} f(\xi) dk d\xi. \quad (11)$$

Fourier-transzformációval a Fourier-integrálokat felhasználva a térbeli struktúrák hullámszámtérbeli spektrumát a következő formula segítségével kaphatjuk meg:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) dx, \quad (12)$$



míg a hullámszámtérbeli spektrumból a térbeli struktúrákat az inverz Fourier-transzformációval a következőképpen nyerhetjük vissza:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} F(k) dk. \quad (13)$$

Az exponenciális, komplex transzformációk helyett páros, illetve páratlan függvények esetén szinusz-, illetve koszinusztranszformációkat is végezhetünk, melyek részletezésére nem térek ki. Érdemesebb megemlíteni a Fourier-transzformáció egyik különösen hasznos felhasználási területét, a differenciálegyenletek megoldását. A Fourier-térben ugyanis a differenciálegyenletek egyszerűbb alakot öltenek. Közönséges differenciálegyenletek esetén algebrai egyenleteket, parciális differenciálegyenletek esetén pedig közönséges differenciálegyenleteket kapunk. Ez nyilvánvalóan jelentősen megkönnyíti az eredeti egyenletek megoldását. Az igazi problémát a transzformáció elvégzése, majd a Fourier-térbeli egyenlet megoldása után az eredmény visszatranszformálása jelenti. Míg az összegfüggvények és a konstanssal szorzott függvények transzformációja a Fourier-transzformáció linearitása miatt igen egyszerű, szorzatfüggvények esetén már konvolúciót kell alkalmazni, ami nagymértékben bonyolítja az átalakítások elvégzését.

A molekulafelhők elemgyakoriságait érintő probléma vizsgálatakor alapegyenletünk, mely a valós térben egy közönséges (diffúziós) differenciálegyenlet, a transzformáció elvégzése után algebrai egyenletbe megy át. De nem csak ezért alkalmaztuk ezt a módszert, hanem – mint azt a 2.2. szakaszban részletesen is kifejttem – az anomális diffúzió kezelésére választott módszerünk nem alkalmazható a hagyományos térben felírt időfejlődő differenciálegyenletekre. A Nap mágneses terének vizsgálatánál pedig a turbulens mágneses energia hullámszám szerinti spektruma alapján az inverz Fourier-transzformációt alkalmazva építjük fel mesterséges mágneses térképeinket. Az így kapott magnetogramok alapján határozzuk meg a kioltási függvény alakját, melyből a turbulens mágneses energia spektrumának alakjára vonatkozó következtetéseket tudunk levonni.



## 2. A szuperdiffúzió hideg felhőmagok relatív elemgyakoriságára gyakorolt hatása

2007-es (Marschalkó, Forgács-Dajka és Petrovay) referált cikkünkben azt vizsgáltuk meg, miként változik hideg felhőmagokban a különböző elemek relatív gyakoriságának eloszlása, ha hagyományos diffúziós folyamatok helyett szuperdiffúziót feltételezünk. Az eredményeket poszteren is bemutattam a Nemzetközi Csillagászati Unió XXVI. kongresszusán Prágában, melynek rövid összefoglalása konferenciakiadványban is megjelent (Marschalkó, 2007). Az első eredményeket egy Magyarországon rendezett konferencia kiadványában is (Marschalkó, 2006) közzétettem.

Ebben a fejezetben a következő felépítést követem: először röviden bemutatom a vizsgálatunk tárgyát képező csillagászati képződményeket – a hideg felhőmagokat – (2.1.), majd az anomális diffúziót tárgyalom(2.2.), végezetül rátérek az általunk vizsgált problémára (2.3.), részletezve az alkalmazott módszereket és a kapott eredményeket.

## 2.1. Hideg felhőmagok

A csillagok közötti teret kitöltő anyag rendkívül ritka, laboratóriumi körülmények között nem is tudunk ilyen tökéletes vákuumot előállítani. A csillagközi anyag (amelynek 99 százaléka gáz, 1 százaléka pedig por alakjában van jelen) szerkezetét a hűtési és fűtési folyamatok viszonya határozza meg. A fűtést a fiatal csillagok sugárzása, a kozmikus sugárzás és a galaktikus lágy röntgenháttér biztosítja, míg a hűtés elsősorban az ütközések következtében fellépő termikus sugárzás révén megy végbe. Az ionizációs rekombinációnak köszönhetően a különböző elemek át is alakulhatnak egymásba, ez pedig a reakciós hálózaton keresztül szintén visszahat az intersztelláris anyag állapotegyenletére. Mivel a csillagközi anyag sűrűség-nyomás fázisdiagramjának sajátosságai révén két egyensúlyi állapot is kialakulhat, ez azt eredményezi, hogy a ritkább, melegebb anyagban sűrűbb, hidegebb felhők úsznak.

A csillagközi anyag – a kozmikus elemgyakorisággal összhangban – túlnyomó részben semleges hidrogénből (HI) áll. A semleges hidrogént legkönnyebben a 21 centiméteres rádiósugárzás révén lehet megfigyelni, ami a Tejútrendszer nagyléptékű szerkezetének feltérképezéséhez segít hozzá minket. A HI mellett a második leggyakoribb elem – a rejtőzködő – molekuláris hidrogén ( $H_2$ ), amit leginkább csak közvetett módon (pl. a csillagközi anyagban egyik leggyakrabban megfigyelt molekula, a CO mérésének segítségével) lehet kimutatni. De nem csupán ilyen egyszerű molekulákat találunk a csillagközi térben, hanem bonyolultsági fokukat tekintve igen széles skálán mozgó szerves és szervetlen molekulákat is az ammóniától kezdve egészen a sokgyűrűs aromás szénhidrogénekig (PAH-okig) bezárólag.

Bár a porkomponens csak a csillagközi anyag 1%-át teszi ki, szerepe mégis különösen fontos az itt lezajló kémiai és fizikai folyamatok szempontjából. Egyrészt árnyékoló hatása révén a komplexebb molekulákat megvédi a kozmikus sugárzástól, ezáltal növelve élettartamukat, másfelől a felületükön adszorbeálódni tudnak a gázmolekulák, ami komplexebb reakciós háló létrejöttét, s így a por katalizátor szerepének köszönhetően gazdagabb összetételű felhők kialakulását teszi lehetővé.

A csillagközi anyag kb. 80%-a a hidegebb, sűrűbb felhőkben koncentrálódik. Ezek a felhők többféle típusba sorolhatók. Az atomos hidrogén az úgynevezett HI-felhőkbe tömörül, melyek hőmérséklete 50-100 K, számsűrűségük pedig kisebb mint  $10^{-2} \text{ cm}^{-3}$ . A kisebb sűrűségű molekulafelhőkben a csillagok ultraibolya sugárzása könnyebben disszociálja a hidrogénmolekulákat, így lesz a felhőt alkotó anyag túlnyomó része atomos hidrogén.

A sűrűbb felhőkben egyrészt a disszociációs folyamatok kevésbé tudnak végbemenni, másrészt a porszemcséken adszorbeálódó hidrogénatomok könnyebben kombinálódnak molekulákká, így azokban túlnyomórészt a molekuláris hidrogén lesz a jellemző, ezért is nevezik ezeket molekulafelhőknek. Az összetétel mellett a molekulafelhők mérete is különböző



lehet. A törpe molekulafelhők lineáris mérete mindössze néhány parszek, míg az óriás molekulafelhők elérhetik a 30 parszekes mérettartományt is. Az óriás molekulafelhők tömege néhány nagyságrenddel nagyobb, s valamivel melegebbek is, mint a törpe molekulafelhők (20 K szemben a 10 K-nel). A törpe molekulafelhőkben hidegebb, sűrűbb csomósodások, úgynevezett hideg felhőmagok – csillagkezdemények – is találhatóak, míg az óriás molekulafelhők gyakorlatilag szorosabban kapcsolódó törpe molekulafelhők konglomerátumai.

A molekulafelhők jelenlegi ismereteink szerint valójában az átlagosnál sűrűbb fluktuációk a csillagközi anyag nagyléptékű kompresszibilis turbulens áramlásában (Glower és Mac Low, 2007). A csillagközi turbulenciát elsősorban a szupernóva-robbanások folyamán keletkezett lökéshullámok, valamint a fiatal óriáscsillagok csillagszele hajtja. Ennek következtében nagy kiterjedésű, különösen forró, óriási buborékok jönnek létre, melyekben a sűrűség még a meleg komponensénél is egy nagyságrenddel kisebb, míg a lökéshullámfrontok találkozásánál fraktálszerű szerkezetben sűrűsödik össze a csillagközi anyag előbb említett hideg és meleg komponense. Turbulenciához természetesen a fizikai jelenségek előbb említetténél sokkal szélesebb skálája vezet, a nagyléptékű mozgások főbb forrásai Elmegreen és Scalo (2004) összefoglaló cikke alapján:

- táguló HII-területek, protocsillagok, O típusú és Wolf–Rayet-csillagok csillagszele, szupernóva-robbanások lökéshullámai, valamint az ezek kombinációja által létrehozott szuperbuborékok,
- a galaktikus rotáció
  - magnetorotációs instabilitás (Sellwood és Balbus, 1999), és a Balbus–Hawley-instabilitás (Balbus és Hawley, 1991),
  - spirál alakú lökéshullámokban tárolt rotációs energia (spirálkarok),
- a csillagközi gázfelhők gravitációs összehúzódása közben fellépő instabilitások,
- Kelvin-Helmholtz instabilitás és egyéb hidrodinamikai instabilitások,
- a korong-haló cirkuláció során a Tejútrendszer gravitációs tere, Parker-instabilitás, galaxisok kölcsönhatása.

A csillagközi térben található turbulencia felismeréséhez és elfogadásához azonban hosszú út vezetett. Egyes kutatók egyenesen tagadták, hogy a csillagközi anyag szerkezetét a turbulencia alakítaná, mivel megfigyelését a korabeli technológia még nem tette lehetővé, pedig Von Hoerner Doppler-méréseket elemezve már 1951-ben arra jutott, hogy az intersztelláris turbulencia Kolmogorov-spektrumú. Az intersztelláris turbulencia elutasításában elméleti megfontolások is szerepet játszottak, mivel a turbulencia jellegéről egészen

más elképzelések uralkodtak: összenyomhatatlan áramlásokban terjedő, a teret teljesen kitöltő örvényekben gondolkodtak, mely szerint az energiakaszád nem mehet zavartalanul végbe a felhők ütközése következtében fellépő energiadisszipáció miatt, az intermittencia és koherens struktúrák pedig még teljesen ismeretlenek voltak. A hideg csillagközi anyag alkotta felhők Glower és Mac Low (2007) szerinti fentebb bemutatott jellemzése jól mutatja, mennyire átalakult mára a turbulenciáról alkotott képünk, s így jelenlétének elfogadottsága is a csillagközi anyagban. A műszerek és az észlelési technikák fejlődésével a turbulencia jelenléte egyértelmű megerősítést nyert: Crovisier & Dickey (1983) kimutatták, hogy a HI-emisszió spektruma összehasonlítható az inkompresszibilis turbulencia Kolmogorov-féle spektrumával.

A turbulencia kimutatása nem véletlenül ütközött nehézségekbe, mivel a csillagközi anyag igen változatos struktúrákat vehet fel, melyek fizikai folyamatokkal történő azonosítása nem triviális. Mivel a turbulencia önhasonló, fraktálszerű szerkezettel jár, a csillagközi anyagban található struktúrák fraktáldimenziójának meghatározása fontos lépést jelent a jelen levő áramlások kategorizálásában, miként a mért oszlopsűrűségek és felületi fényességek vizsgálata során meghatározott különböző korrelációs és struktúrafüggvények is hasonló jelentőséggel bírnak. Példaként egy  $p$ -ed rendű struktúrafüggvény alakja a következő (Elmegreen és Scalo, 2004):

$$S_p(\delta r) = \langle |A(r) - A(r + \delta r)|^p \rangle \quad (14)$$

ahol  $A$  egy megfigyelt mennyiség,  $r$  a pozíciója,  $\delta r$  az elmozdulás. Az erre illesztett hatványfüggvény kitevőjét jelölhetjük  $\zeta_p$ -vel. Az  $A$  mennyiség autokorrelációs függvénye pedig:

$$C(\delta r) = \langle A(r)A(r + \delta r) \rangle \quad (15)$$

amelynek teljesítményspektruma:

$$P(k) = \hat{A}(k)\hat{A}(k)^*. \quad (16)$$

Háromdimenziós esetben a fenti teljesítményspektrum (16) kitevője Kolmogorov-spektrum esetén  $-11/3$ .

A csillagközi turbulens struktúrákat különböző emisszós vonalak segítségével is lehet vizsgálni, ilyenkor a különböző rendű struktúrafüggvények kapcsolatát elemzik. A radiális sebességekre alkalmazott korrelációs vizsgálatok is sok részletet feltárhatnak a csillagközi anyag szerkezetéről.

Az intersztelláris anyagra jellemző turbulencia igen gyakran kompresszibilis, így az inerciális tartományról esetenként nem is beszélhetünk, ekkor az önhasonló, fraktálszerű

struktúrákat felváltja az intermittens jelleg. A csillagközi anyag feltehetően igen gyakran ilyen, a felhőkre kis kitöltési faktor és relatíve magas energiadiSSIPáció jellemző, vagyis nem teljesülnek tökéletesen a Kolmogorov-féle elmélet feltételei.

Térjünk rá az intersztelláris térben zajó turbulens áramlások egyik legfontosabb következményére. Fém-tartalom-vizsgálatok alapján elmondható, hogy a csillagközi anyag keveredése igen hatékony, az átlagérték körüli tipikus fluktuációk értéke 5-20% között van. Feltehetjük a kérdést, hogyan jöhet létre ilyen alapos keveredés? A megoldást az intersztelláris turbulencia nyújtja, mivel elősegíti a csillagközi anyag hatékonyabb keveredését, szétterítve a szupernóva-robbanások során kikerülő nehezebb elemeket a Tejútrendszerben. Edmunds (1975) kimutatta, hogy a turbulencia és a galaktikus nyírás következtében létrejövő keveredés időskálája sokkal rövidebb, mint a csillagkeletkezési időskála. Hasonlóan rövid keveredési időt talált Roy és Kunth (1995) is. A turbulencia azonban önmagában ilyen rövid időskálákon nem tud ilyen fokú homogenizálódást megmagyarázni, az atomi szintű homogenizáláshoz segítségül kell hívni a turbulens viszkozitást és a molekuláris diffúziót is, amire de Avillez és Mac Low (2002) is mutattak egy itt nem részletezendő megoldást.

A turbulens transzport jelentős mértékben módosítja a kémiai folyamatokat is (Xie, Allen és Langer, 1995), méghozzá a következő módokon:

- a különböző fizikai állapotban (pl. a környező UV sugárzás fluxusa, hőmérséklet, sűrűség eltérő lehet) levő területek között folyamatosan szállítja (s így elkeveri) az anyagot,
- lokális fűtést eredményez, ami a hőmérsékletre érzékeny folyamatokat jelentős mértékben befolyásolja (különösen az endoterm reakciókat),
- termális sebességüknél gyorsabb mozgásra kényszeríti az ionokat, ami megnöveli a hőmérséklet-érzékeny ion-atom reakciók rátáját.

Ezen a ponton el is érkeztünk kutatásunk témájához, a diffúzió – mégpedig az anomális diffúzió – elemgyakoróságokra gyakorolt hatásának vizsgálatához. Mielőtt erre rátérünk, nézzük meg, mi is az az anomális diffúzió.

## 2.2. Anomális diffúzió

A diffúzió jelenségét több oldalról is megközelíthetjük. Az egyik legáltalánosabban elterjedt definíció szerint az anyagnak a nagyobb koncentrációjú helyekről az alacsonyabb koncentrációjú területek felé történő áramlását takarja (Fick I. és II. törvénye tulajdonképpen ezt írja le). Általánosan elmondhatjuk, hogy az egyensúly kialakulását elősegítő



folyamatról van szó. Mivel többkomponensű rendszerekről beszélünk, az egyensúlyt ezáltal a szabad entalpia minimuma jellemzi, s ennek megfelelően a hajtóerőt pedig a kémiai potenciál (mint a részecskeszám intenzív párja) gradiense biztosítja.

Szokás a diffúziót véletlenszerű, Brown-mozgásként is jellemezni. Az anomális diffúzió bevezetéséhez mi is ezt az utat választjuk most Petrovay Kristóf (2001) nyomán (bár ő a hivatkozott cikkben a Nap fotoszférájával kapcsolatban tér ki a szuperdiffúzió jelenségére, az ott bemutatott tárgyalásmód teljesen általános, így esetünkben is alkalmazható). A véletlenszerű mozgás leírásakor azt vizsgáljuk, átlagosan miként távolodik egymástól a vizsgált anyag (pl. atom, ion, molekula, vagy elemi részecske) két képviselője. A véletlenszerű mozgás során az ütközések között átlagosan  $\Delta t$  idő telik el, mialatt  $\Delta x$  utat tesznek meg. A két nyomjelző közötti átlagos (rms: root mean square – négyzetes közép) távolság időfüggése a következő egyszerű törvénnyel írható le:

$$r^2 = Dt, \text{ ahol } D = \frac{\Delta x^2}{\Delta t}, \quad (17)$$

a *diffúziós együttható*.

Anomális diffúzió (Isichenko 1992) esetén a hagyományos diffúziónál megszokottól eltérő jelenségeket figyelhetünk meg. Az egyik sokat idézett (pl. Vlahos és mtsai, 2008) laboratóriumi példa (Solomon és mtsai, 1994) egy forgó körgyűrűben áramló folyadék, ahol a gyűrű belső és külső fala között, azokkal koncentrikusan elhelyezve két lyuksor található, ahol be-, illetve kipumpálják a folyadékot. A folyadékba bejuttatott nyomjelző elemeket a kialakuló turbulens áramlásban egy videokamera segítségével követik. Hagyományos (markovi) diffúzió esetén bár a nyomjelző elemek pályája rendszertelen, a kis szabad úthossznak köszönhetően mégis homogén, addig a gyűrűben kialakuló erősen turbulens áramlásban mozgó nyomjelző elemek által bejárt pályák két csoportra oszlanak, így nem tekinthetők homogénnek. Vannak nyomjelző elemek, amelyek az örvényekbe beragadva sokáig szinte egy helyben keringenek, míg mások egyetlen lépéssel igen nagy távolságokat tesznek meg.

A (17) egyenlet által megadott összefüggés így az anomális diffúzió esetén nem lesz igaz. Az átlagos távolodási sebesség a hagyományos esetnél vagy nagyobb, vagy kisebb lesz. Miként az áramlás jellege, úgy a jelenségek matematikai leírása is lényegesen bonyolultabbá válik. Az anomális diffúzió kezelésére több matematikai modellt is bevezettek – például a Levy-eloszlásra épülő folyamatos idejű véletlen bolyongás (részletes leírása megtalálható: Vlahos és mtsai, 2008) –, mi azonban – mivel az általunk vizsgálni kívánt feladatra alkalmas – egy egyszerűbb megközelítést választottunk, és a diffúziós együttható oldaláról közelítettük meg a kérdéskört. Állandó diffuzivitás helyett *léptékfüggő* diffúziós együtthatót vezettünk be (Petrovay, 2001 nyomán). Ehhez általánosítanunk kellett a (17) egyenletet:

$$r = Kt^\zeta. \quad (18)$$

Ez akkor egyezik meg a hagyományos diffúziós esettel, ha  $\zeta = 1/2$  (és nyilván  $K = D$ ). Ha  $\zeta > 1/2$ , akkor a nyomelemek távolsága gyorsabban növekszik, mint a hagyományos esetben, ekkor beszélünk *szuperdiffúzióról*, míg a hagyományosnál lassabb diffúziót ( $\zeta < 1/2$ ) *szubdiffúzió*nak nevezzük. Mivel a (18) összefüggés egyértelmű matematikai kapcsolatot teremt az rms távolságok és az idő között, ezt fölhasználhatjuk a fent említett léptékfüggő diffúziós együttható bevezetésére. Matematikailag ugyanis a (18) egyenlet – ahol a nyomelemek távolsága konstans diffuzivitás mellett az idő  $1/2$ -dik hatványa szerint növekszik – egyenértékű a következővel (ahol az időfüggés a hagyományos diffúzióéval megegyező, ellenben a diffúziós együttható léptékfüggő – azaz függ a nyomelemek távolságától):

$$r = K'(r)t^{1/2}. \quad (19)$$

Ezt könnyen be is lehet látni. Bontsuk fel a (18) egyenletben szereplő időtagot úgy, hogy szerepeljen benne a négyzetgyökös időfüggés, majd ugyanezen összefüggés alapján küszöböljük ki a fennmaradó időtagot, s az így kapott kifejezés adja meg a diffuzivitás léptékfüggését:

$$r = Kt^\zeta = Kt^{(\zeta-1/2)t^{1/2}} = K(K^{-1/\zeta}r^{1/\zeta})^{(\zeta-1/2)t^{1/2}} = K^{1/2\zeta}r^{(1-1/2\zeta)}t^{1/2}. \quad (20)$$

Összevetve a kapott eredményt a (17) egyenlettel, megkapjuk a diffúziós együttható léptékfüggését:

$$D(r) = K'^2(r) = K^{1/\zeta}r^{(2-1/\zeta)}. \quad (21)$$

Igen egyszerű módon, a diffúziós együttható átalakításával sikerült tehát az anomális diffúzió jelenségét megragadnunk, látni kell azonban a benne rejlő igen lényeges problémát is: ez a tárgyalásmód egyáltalán nem alkalmas a vizsgált mennyiség időbeli alakulásának nyomon követésére, a hagyományos diffúziós differenciálegyenleteket ebben az esetben nem lehet alkalmazni. Azonnal adja azonban magát a megoldás: mivel léptékfüggő problémáról van szó, vizsgáljuk meg mindezt a Fourier-térben. Az általunk használt matematikai formalizmust a 2.3.2. fejezetben mutatom be.

A körgyűrűben áramló folyadékos kísérletben már szóba került a turbulencia, most nézzük meg közelebbről, miként befolyásolják a diffúziós folyamatokat a jelen lévő turbulens áramlások. Ha csupán a molekuláris (hagyományos) diffúzióra hagyatkozunk, a nyomelemek elkeveredése, a koncentrációkülönbségek kiegyenlítődése viszonylag sokáig tart. A jelen levő turbulens (sztochasztikus) áramlások azonban felgyorsítják a keveredést és a

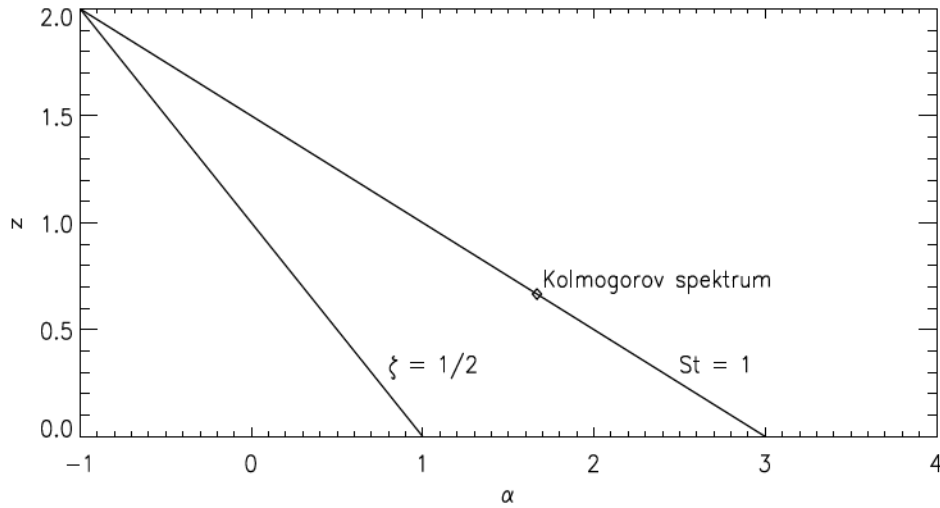
transzportfolyamatokat, a jelen levő örvények a nyomjelző elemeket magukkal ragadva lényegesen nagyobb távolságokra képesek eljuttatni azokat, mint amekkorára csupán saját hőmozgásuk következtében képesek lennének (természetesen azzal a feltétellel, hogy az áramlás karakterisztikus sebessége meghaladja a részecskék hőmozgásból adódó sebességét). A turbulens áramlási térben jelen levő örvényeknek köszönhetően a nyomelemek sebessége a Brown-mozgáshoz hasonlóan véletlenszerűen változik, így ezt a jelenséget is hasonló formalizmussal lehet leírni. A különbség csupán az lesz, hogy a *turbulens diffúzió* esetében a szabad úthossz ( $\Delta x$ ) szerepét az örvények mérete, a repülési idő ( $\Delta t$ ) szerepét pedig az élettartamuk határozza meg. Nem meglepő, hogy a turbulens diffúziót így matematikailag is a Brown-mozgáshoz hasonlóan lehet kezelni (lásd például Choudhuri 1998), csak ebben a diffuzivitás meghatározásához a karakterisztikus mennyiségeket a fenti módon kell megválasztani. A diffúziós egyenletben mindössze annyi változik, hogy a diffúziós együttható két tagból tevődik össze: a hőmozgásból és a turbulens áramlási tértől származó tagból ( $D' = D + D_T$ ).

Ez alapján nem is meglepő, hogy a turbulenciával szinte együtt jár az anomális diffúzió. A turbulens áramlás különböző méretű örvényeihez tartozó karakterisztikus sebességek, mint az 1.1.1 szakaszban láttuk, különbözőek, így eltérően hatnak az általuk hordozott nyomelemek távolodására is, vagyis az anyag más és más diffuzivitást „él meg”, amint a különböző örvények magukkal ragadják, s a (21) egyenlet épp ezt fejezi ki. De miként lehet meghatározni a fenti egyenletben szereplő  $\zeta$  kitevőt? Ennek bemutatásához ismét Petrovay Kristóf 2001-es cikkét követem.

A diffúziós együttható léptékfüggésének kvantitatív meghatározásához kapcsolatot kell találnunk az anomális diffúziót (léptékfüggő) véletlen bolyongásként leíró modell karakterisztikus ideje ( $\Delta t$ ) és hossza ( $\Delta x$ ), valamint a turbulens áramlás karakterisztikus mennyiségei között. A hierarchia egy adott szintjéhez tartozó örvény méretét jelöljük  $\lambda$ -val. A turbulens áramlásban bolyongó nyomjelző elem sebessége  $\Delta t = \tau_L$  idő (azaz az áramlás Lagrange-féle – együttmozgó rendszerben mért – korrelációs ideje) alatt változik meg számottevően. Ez alatt a megtett távolság  $\Delta x = v\tau_L$ , ahol  $v$  az áramlás karakterisztikus sebessége (az adott hierarchikus szint sebességterének négyzetátlaga). Az áramlás jellegének függvényében ez a következő két érték közül a kisebbiket veszi fel:  $v\tau_E$  ( $\tau_E$  a rögzített koordináta-rendszerbeli korrelációs idő), illetve  $\lambda$ . Hogy pontosan melyiket, az az áramlás *Strouhal-számától* ( $St = \tau_E v / \lambda$ ) függ. Így a (17) egyenletben  $D$  meghatározását figyelembe véve a diffúziós együttható a Strouhal-szám függvényében a következő értékeket veheti fel:

$$D = \begin{cases} \tau_E v^2 & \text{ha } St < 1 \\ \lambda v & \text{ha } St > 1. \end{cases} \quad (22)$$





2. ábra. Az  $\alpha - z$  sík ábrázolása Petrovay (2001) nyomán

A hierarchikus örvények rendszeréből felépülő turbulens áramlás esetén viszont az Euler-féle korrelációs idő és a sebességnégyzetek átlaga is hatványfüggvény szerint skálázódik az áramlás korrelációs léptéke ( $\lambda$ ) szerint (lásd az 1.1.2. szakaszt):

$$\tau_E \sim \lambda^z, \text{ illetve } v^2 \sim \lambda^{\alpha-1}, \quad (23)$$

így a diffúziós együttható  $\lambda$ -függése a következőképpen alakul:

$$D \sim \begin{cases} \lambda^{z+\alpha-1} & \text{ha } St < 1 \\ \lambda^{\alpha/2+1/2} & \text{ha } St > 1. \end{cases} \quad (24)$$

A  $z$  és  $\alpha$  kitevők értéke az áramlás jellegétől függ. Továbbra is témavezetőm 2001-es cikkét követve e kitevők értékeit vizsgálva három esetet különböztethetünk meg (mivel jelen dolgozat a szuperdiffúzió relatív elemgyakoriságokra gyakorolt hatásait vizsgálja hideg felhőmagokban, így a szubdiffúzióhoz vezető esetet – amikor is a (21) kifejezésben  $r$  kitevője negatív, s így a diffuzivitás meghatározásában a legkisebb léptékek játszanak jelentős szerepet – nem mutatom be, ezért a továbbiakban a nagyobb ( $r \sim \lambda$ ) léptékekre koncentrálok).

A Strouhal-szám léptékfüggését a (23) összefüggés alapján tudjuk meghatározni:

$$St \sim \lambda^{z+\alpha/2-3/2}. \quad (25)$$

Ez az  $\alpha - z$  síkot (2. ábra) két részre osztja a  $z = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}$  egyenes mentén. Az egyenes felett a Strouhal-szám értéke egynél nagyobb, alatta pedig egynél kisebb. Mivel feltettük,

hogy az áramlásban a nagyobb léptékek dominálnak ( $\lambda \sim r$ ), a diffúziós együttható léptékkülső megváltozásához elegendő a megfelelő kitevőket összevetni a (21) és (24) egyenletekben, s megkapjuk  $\zeta$  értékét az egynél nagyobb

$$\zeta = \frac{2}{3 - \alpha} \quad (St > 1), \quad (26)$$

illetve az egynél kisebb Strouhal-számok esetében:

$$\zeta = \frac{1}{3 - z - \alpha} \quad (St < 1). \quad (27)$$

A 2. ábrán megtalálható még a  $\zeta = 1/2$ -nek megfelelő egyenes is, melynek egyenletét ( $z = 1 - \alpha$ ) akkor kapjuk meg, ha a (27) egyenlet jobb oldalát  $1/2$ -vel tesszük egyenlővé. Ezen egyenesre illeszkedő  $z - \alpha$  párok esetén tehát hagyományos (Fick-törvényei által leírt) diffúzióhoz jutunk. Ábrázoltuk még a Kolmogorov-spektrumot jellemző pontot is, a különböző értékeket (5) és (27) alapján határozhatjuk meg:

$$\alpha = 5/3, \quad z = 2/3, \quad \zeta = 3/2. \quad (28)$$

### 2.3. A szuperdiffúzió hatásával kapcsolatos vizsgálataink

A molekulafelhőkben található elemgyakoróságok, illetve ezek eloszlásának vizsgálata több szempontból is fontos feladat. Egyrészt a kozmoszt felépítő anyagok összetételének feltérképezése is igen hasznos, már csupán a kozmológia szemszögéből is, de mivel a molekulafelhők adnak otthont a születő csillagoknak is, így a csillagok kialakulását és fejlődését leíró kutatások számára is nélkülözhetetlenek. Korábban számos modell született arra vonatkozóan, miként alakul egy ilyen felhőn belül a különböző elemek (atomok, molekulák, ionok) relatív gyakoróságának eloszlása, de ezek egy dologban közösek voltak: a kémiai reakciók egyre részletesebb tárgyalása mellett a diffúziós folyamatokat komoly egyszerűsítésekkel élve vették figyelembe. Márpedig az előző (2.1. és 2.2.) szakaszok alapján nyilvánvaló, hogy erősen turbulens közegben az anomális diffúzió fellépése szinte természetes, a csillagközi anyag pedig igen erősen turbulens. A 2.3.2. szakaszban a szakirodalomban található adatok alapján meg is mutatom, hogy a hideg felhőmagokban fellépő diffúzió anomális. Bár a mi modellünk sem teljes, amint ezt a 2.3.5. szakaszban részletesebben is ismertetem, azt azonban egyértelműen felveti, hogy a korábbi modellek esetében alkalmazottaknál valóságosabb diffúzió figyelembevételére van szükség.

E kutatási eredményeinket bemutató szakaszban a következő felépítést követem: először röviden fölvezetem a témára vonatkozó korábbi irodalmat (2.3.1.), majd ismertetem az általunk alkalmazott módszert (2.3.2.). Ezek után rátérek a konkrét eredmények bemutatására, először egy egyszerű, analitikusan is kezelhető modell esetében (2.3.3.), majd a



valóságához közelebb álló, reálisabb modellt vizsgálva (2.3.4.). Végezetül pedig modellünk korlátait is megemlítve összefoglalom a kapott eredményeket (2.3.5.).

### 2.3.1. Kutatási témánkat illető korábbi eredmények bemutatása

Az egyes elemek gyakorisága a felhő egy adott helyén alapvetően két ok miatt változhat: egyrészt az egyes molekulák különböző kémiai folyamatok következtében átalakulhatnak egymásba, másfelől mennyiségük a koncentrációkülönbségek miatt fellépő diffúzió következtében is megváltozik. A molekulafelhőkben zajló reakciók feltérképezésében Herbst és Klemperer 1973-as cikke jelenti az alapot, amelyben pontosan száz (különböző típusú) folyamatot vettek figyelembe. Modelljük főként gáz halmazállapotú reakciókat tartalmaz; a porszemcséken történő kikondenzálódásra egy igen egyszerű megközelítést alkalmaztak, ami csak igen ritkán befolyásolta a kialakult egyensúlyi megoldásokat. A csillagközi anyag gáz halmazállapotú összetevőivel kapcsolatos reakciókat hat nagyobb csoportba osztották.

Az ionizációs folyamatok elsősorban a nagy energiájú kozmikus részecskéknek köszönhetőek, mivel az UV-sugárzás a molekulafelhők sűrű magjába már nem tud behatolni. Háromféle ionizációs folyamat mellett 53 ion-molekula reakció, 8 töltésmegmaradással járó reakció, 1 radiatív asszociációs reakció, 21 ion-elektron rekombinációs reakció, valamint 14 semleges-semleges molekulák, ill. atomok közötti reakció szerepel modelljükben. A hideg felhőmagokra jellemző sűrűségek miatt az ütközések következtében fellépő reakciók esetén csak két elem ütközésével számoltak. Az alacsony kinetikus hőmérsékletnek köszönhetően elsősorban exoterm reakciókról van szó. Az egyes folyamatok igen erősen csatoltak, ezért a kialakuló egyensúlyi eloszlások, illetve a kialakulásukhoz szükséges karakterisztikus idő meghatározása is több bizonytalan tényezőt tartalmaz, ezért nem meglepő, hogy néhol a megfigyeltektől jelentősen eltérő elemgyakoriságokat kaptak. Elsősorban a szén, illetve különböző komplex szerves molekulák esetében kaptak az egyensúlyi állapot kialakulásakor a megfigyeltnél alacsonyabb értékeket a felhő belsejében. Ezért több kutató, immár időfüggő egyenleteket alkalmazva – pl. Herbst és Leung (1989), illetve Millar és Herbst (1990) – tovább próbálta gazdagítani a kémiai reakciók skáláját. E modellekben rögzített fizikai feltételek mellett (a gáz főkomponens és a por sűrűsége, hőmérséklet, vizuális extinkció) vizsgálták a gáz halmazállapotú elemek között fellépő kémiai reakcióknak köszönhető elemgyakoriság-változásokat, s az egyensúlyi állapot eléréséhez szükséges karakterisztikus időnek a molekulafelhők életkorával összemérhető időtartamot (néhány millió évet) kaptak.

A megfigyeléseknek ellentmondó elemgyakoriságokat azonban nem lehetett csupán a kémiai reakciók kibővítésével pontosítani. A fenti időfejlődést is figyelembe vevő modellek alapján azt látták, hogy a kívánt – a megfigyelésekkel egyező – elemgyakoriságok már mintegy százezer év elteltével kialakulnak, azonban a karakterisztikus idő elteltével kialakuló egyensúlyi állapot ettől eltérő lesz. Olyan fizikai folyamatokat kell tehát találni, amelyek

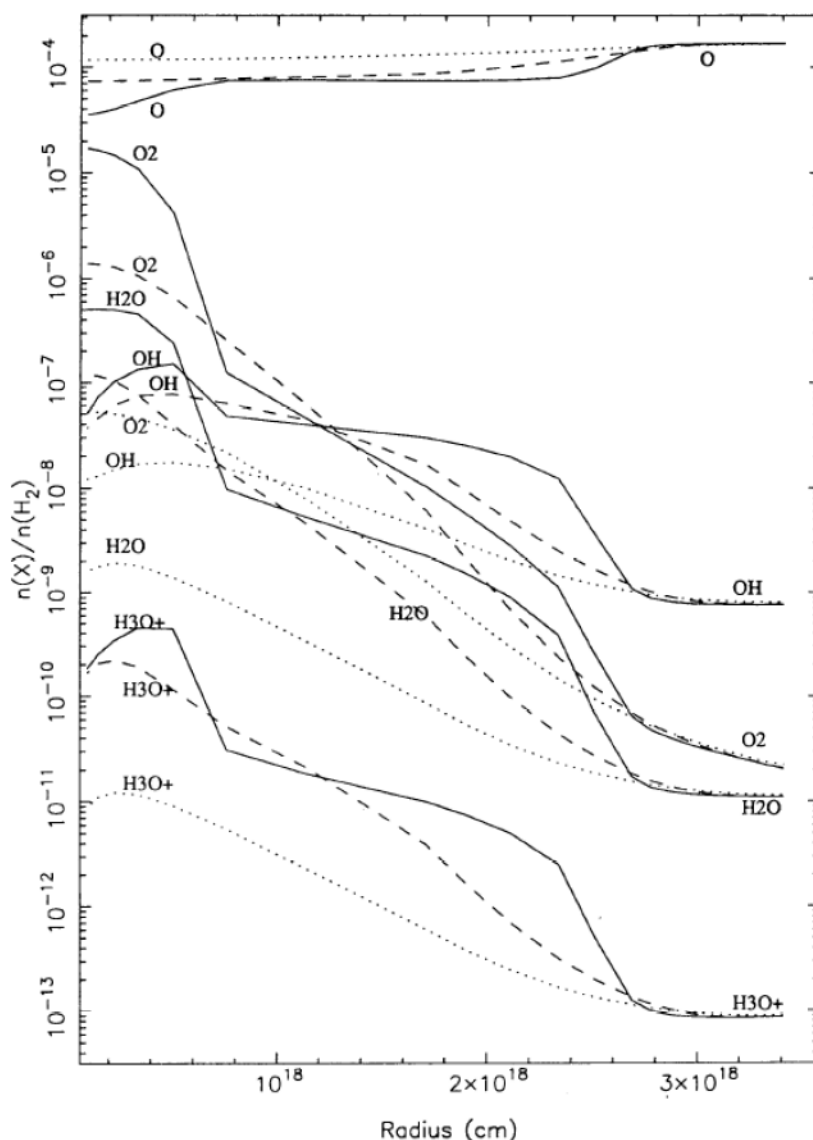
megakadályozzák a kémiai egyensúly túl korai elérését, s a kívánt eloszlásokat a kémiai reakciók révén kialakuló egyensúly eléréséhez szükséges karakterisztikus idővel összemérhető időskálán eredményezik. Így az idősebb molekulafelhőkben is megmagyarázhatóak lennének a megfigyelt elemgyakoriságok.

A szóba jöhető dinamikai folyamatokra különböző javaslatok érkeztek. Az első magától értetődő jelölt a megfigyelésekkel ellenkező egyensúlyi állapot kialakulásának megakadályozására a turbulens keveredés volt. Ez ellen azonban Williams és Hartquist (1984, 1991) azt az érvet hozta fel, hogy a diffúziós folyamatok időskálája általában hosszabb, mint a kémiai folyamatoké, egy ilyen lassabb folyamat pedig nem tudná megakadályozni a gyorsabban felépülő kémiai egyensúly kialakulását. Ők 1984-es cikkükben egy másik lehetőséget javasoltak: szerintük a csillagszél erodálja folyamatosan a felhőmagokat és keveri fel a felhő anyagát, így akadályozva meg a kémiai egyensúly korai kialakulását. E két megoldáson kívül olyan cikkek is megjelentek (pl. Brown és mtsai, 1988), amelyek a gravitáció figyelembevételével kísérlik meg feloldani a fenti problémát.

Mivel mi az első megoldást követtük, nézzük át röviden, miként módosítja az eredményeket a diffúzió figyelembevétele. Leung és mtsai (1984) időfüggő egyenleteket alkalmazó modelljükben jelentősen megnövelték a figyelembe vett kémiai reakciók számát (1800 reakció mintegy 200 elem részvételével). Vizsgálataikat állandó fizikai feltételek mellett, a fotodisszociációs folyamatok figyelmen kívül hagyásával végezték. A gáz halmazállapotú elemeket (beleértve a korábbiaknál komplexebb molekulákat is) érintő kémiai reakciókon túl a hidrogén és porszemek, valamint a porszemcsék és ionok közötti reakciókat, továbbá a felhőben lezajló diffúziós folyamatokat is modellezték. Bonyolultsága miatt kódjuk két különálló egységre bomlott: a kémiai reakciókat tartalmazó modul egyes elemek gyakoriságát megadó kimenete a megfelelő diffúziós egyenlet forrástagjában jelent meg.

Míg Lung és mtsai (1984) még viszonylag egyszerű diffúziós megközelítést használtak, addig Xie és mtsai (1995) a hideg felhőmagok esetén a keveredési-hossz-elméletet alkalmazták a turbulens diffúzió kémiai struktúrákra gyakorolt hatásának vizsgálatára. Ezáltal nem csupán valóságosabbá tették elméletüket, hanem az időskálák vizsgálatával Williams és Hartquist ellenvetéseit is megválaszolták. Az egyes elemekre vonatkozó kontinuitási egyenletben a turbulens keveredést a megfigyeléseken alapuló diffúziós taggal vették figyelembe. Gáz halmazállapotú reakciókat vizsgáltak, fix sűrűség- és hőmérsékletprofil mellett. Eredményeik szerint a turbulens keveredés jelentősen befolyásolta a kialakuló elemgyakoriságokat, s így a megfigyelésekkel jobban egyező eloszlásokat kaptak: a felhők belsejében megnövekedett a C, C<sup>+</sup> és egyéb széntartalmú vegyületek aránya, míg a H<sub>2</sub>O, O<sub>2</sub> gyakorisága csökkent.

Xie és mtsai (1995) azt is felvázolták, miért gyakorolt olyan jelentős hatást a diffúzió a kialakuló elemgyakoriságokra, s miért olyan érzékenyek a kémiai folyamatok a fizikai



3. ábra. Relatív gyakoriságok a stacionárius állapot elérésekor néhány elem esetén. A folytonos vonal a diffúziómentes megoldást mutatja, míg a szaggatott  $D_0 = 10^{23} \text{ cm}^2/\text{s}$ , a pontozott pedig  $D_0 = 10^{24} \text{ cm}^2/\text{s}$  diffúziós együttható alkalmazása esetén. Az ábra forrása: Xie és mtsai (1995)

körülményekre. A kémiai reakciók esetében ugyanis az egyik leglényegesebb paraméter az elektronsűrűség ( $\rho_e$ ), ami jelentős mértékben befolyásolja a felhőben végbemenő rekombinációk számát. Az elektronsűrűséget több minden befolyásolja, például a kozmikus sugárzás mértéke, a fémek gyakorisága, s természetesen a diffúzió, ami a felhő belsejében módosítja a legjobban  $\rho_e$  értékét (a kifelé irányuló transzportfolyamatok révén).

A felhő magjában kétféle (kémiai) egyensúlyi fázis létezik, amelyek kvázi-diszkontinuan és nemlineáris módon váltanak át egymásba, ami az elektronok, ionok, valamint az



atomok és molekulák relatív gyakorisága közötti erős csatolás következtében a fizikai paraméterek elég szűk tartományán belül bekövetkezik. Ezért eredményeztek a diffúzió nélküli számítások a felhő belső részében több ponton is éles töréseket a vizsgált elemgyakoriságokban, melyek a 3. ábrán jól láthatók (folytonos vonalak). A külső tartományokban megfigyelhető törések oka más: itt válnak egyre jelentősebbé a kozmikus sugárzás okozta fotodisszociációs folyamatok. A diffúzió (szaggatott és pontozott vonalak) jól láthatóan kisimítja az eloszlásokat, s a megfigyeléseken alapuló elvárásoknak megfelelően a felhő magjában – megnövelve az elektronsűrűséget – a  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{O}_2$  gyakoriságát csökkenti, míg a  $\text{C}$ ,  $\text{C}^+$ ,  $\text{CH}^+$  gyakoriságát növeli.

Williams és Hartquist (1984, 1991) időskálákkal kapcsolatos ellenvetéseire a – következő szakaszban bevezetésre kerülő – (34) összefüggés alapján válaszoltak. Eszerint hiába számolnak a felhő egészében konstans diffuzivitással, attól az egyes nyomjelző elemekre vonatkozó diffúziós időskála a felhő egyes pontjaiban még igen változatos lehet, ugyanis  $D$  értéke mellett az adott elemre érvényes sűrűség-skálamagasságtól is függ, ami a felhő különböző pontjaiban eltérő értékeket vehet fel. Így e nyomjelző diffúziója már nem fogható fel a felhő külső és belső rétegei közötti egyszerű keveredésként, s ezáltal Williams és Hartquist (1984, 1991) által kritizált túl hosszú diffúziós időskálát eredményező  $R^2/D$  összefüggés (ahol  $R$  a felhő mérete) is érvényét veszti – mindössze egy felső határnak tekinthető. A felhő így több különböző kémiai összetételű, eltérő fizikai paraméterekkel jellemezhető zónára osztható, amelyekben, ha a transzport időskálák kellően rövidek a kémiai időskálákhoz képest, a kémiai és a diffúziós folyamatok között igen erős csatolás lép fel.

Xie és mtsai (1995) munkája (mivel a szakirodalomban ezt a cikket XAL95-ként hivatkozzák, a továbbiakban én is ezt követem) után a kutatások hangsúlya a reakciós háló pontosítása és újabb folyamatok figyelembevételére fordult, miközben a turbulens diffúziót továbbra is változatlan módon építették be modelljeikbe. Willacy és mtsai (2002) a XAL95-öt fejlesztették tovább, beépítve a gáz halmazállapotú elemek és a porszemcsék között fellépő kölcsönhatásokat, valamint a  $\text{H}_2\text{O}$  és a  $\text{CO}$  árnyékoló hatását is, aminek következtében a  $\text{HI}$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  esetében tovább tudták javítani az egyezést a megfigyelésekkel.

Yate és Millar (2003) munkája szintén a XAL95-re épül, amit a gáznemű anyagok porszemcséken történő megkötődésével egészít ki. Ezen adszorpciós folyamatoknak köszönhetően Rawlings és Hartquist (1997) kritikájára is válaszolni tudtak, akik azt kifogásolták, hogy Xie és mtsai (1995) kénytelenek voltak különösen magas diffúziós együtthatót alkalmazni annak érdekében, hogy a diffúzió kellő mértékben befolyásolja a kialakuló stacionárius elemgyakoriság-eloszlásokat. A molekulafelhőkre jellemző átlagos turbulens sebességek alapján ugyanis a XAL95 által használt értéknél két nagyságrenddel kisebb diffuzivitás adódik. Yate és Millar (2003) porszemcséken történő kiüledést is figyelembe

vevő modellje pedig már e kisebb, realisabb diffúziós együtthatót alkalmazva is összhangba tudta hozni a kialakuló egyensúlyi eloszlásokat a megfigyelésekkel.

Mivel a témában a legtöbbet idézett modell a XAL95, s a további munkák ennek egyes részleteit pontosítják, munkánk alapjául mi is ezt választottuk. Mivel célunk annak vizsgálata volt, hogy a hagyományos diffúziót anomális diffúzióval helyettesítve mennyiben változnak meg a kialakuló egyensúlyi eloszlások, ezért számunkra nem voltak fontosak a kémiai reakciós hálót érintő módosítások – magukat a kémiai reakciókat egy speciális forrástag segítségével vettük figyelembe (lásd 2.3.2. szakasz) –, így a fentebb említett újabb modellek módosításait nem kellett beépítenünk (ugyanakkor modellünket a Yate és Millar (2003) által javasolt alacsonyabb diffuzivitással is lefuttattam).

### 2.3.2. A kutatás során alkalmazott módszer ismertetése

Mivel csupán azt szerettük volna meghatározni, hogy a skalár diffúziós együttható léptékfüggő diffuzivitással való helyettesítése milyen mértékben változtatja meg a kialakuló egyensúlyi eloszlásokat, ezért a XAL95 modellt két ponton is jelentősen egyszerűsítettük: a kémiai reakciókat csak egy speciális forrástag paraméterrel vettük figyelembe, és az elemgyakoriság-eloszlások időbeli fejlődését sem vizsgáltuk, csak az adott karakterisztikus idő eltelte után bekövetkező stacionárius megoldásokat kerestük. A diffúziós egyenlet felírásában, illetve a skalár diffuzivitás mértékének meghatározásában mi is követtük Xie és mtsai (1995) keveredési-hossz-elméleten alapuló megközelítését, azonban megoldását már eltérő módon végeztük, hogy össze tudjuk hasonlítani a szuperdiffúzióval. Ebből adódóan – amint ezt a 2.2. szakaszban beláttuk – nem alkalmazhattunk hagyományos, időfüggő módszereket.

Először vizsgáljuk meg közelebbről a számításaink alapját képező turbulens diffúzióra jellemző skálákat. Mint a 2.1. szakaszban is láttuk, a hideg felhőmagok fő összetevője a molekuláris hidrogén ( $H_2$ ), ennek számsűrűségét jelölje  $n_{H_2}$ . Mivel a molekulafelhők felépítését gömbszimmetrikusnak vehetjük, így minden csak a felhő középpontjától mért távolságtól ( $r$ ) függ. A vizsgálni kívánt elem számsűrűsége legyen  $n_i$ , relatív gyakorisága pedig  $f_i = n_i/n_{H_2}$ . A diffúziós együttható értékének, valamint a sötét felhőmagok karakterisztikus mennyiségeinek meghatározásához vezető utat XAL95 alapján mutatom be, hiszen a szuperdiffúzió jelentette eltéréseket az ő modelljükhöz képest vizsgáltuk.

Egy adott elem relatív gyakoriságának fluktuációját ( $\delta f_i$ ) annak  $r$  irányú gradiense és a keveredési hossz ( $l$ ) segítségével becsülhetjük meg ( $\delta f_i \sim -l df_i/dr$ ),  $r$  irányú fluxusát pedig e fluktuáció, a felhőre jellemző turbulens sebesség és a főkomponens számsűrűsége alapján határozhatjuk meg:

$$\Phi_i = n_{H_2} \langle V_t \delta f_i \rangle = -D n_{H_2} \frac{df_i}{dr} = -D n_i \left[ \frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{dr} - \frac{1}{n_{H_2}} \frac{dn_{H_2}}{dr} \right]. \quad (29)$$

A  $D$  diffúziós együttható értékét (a szóban forgó kutatások CGS mértékegységeket használnak) a felhőre jellemző – a vonalprofilok alapján megállapítható – turbulens sebesség és a keveredési hossz alapján határozhatjuk meg:

$$D = \langle V_t l \rangle. \quad (30)$$

A (29) és (30) egyenleteket összevetve látható, hogy a vizsgált elemre vonatkozó diffúziót nem csupán a vizsgált elem sűrűségének gradiense, hanem a főkomponens gradiense is befolyásolja, ezért két különböző skálamagasságot is meghatározhatunk:

$$H_j = -n_j \left( \frac{dn_j}{dr} \right)^{-1}, \quad j = \{i, H_2\}, \quad (31)$$

melyekből a vizsgált elem sűrűségére vonatkozó eredő skálamagasság:

$$H = \left( \frac{1}{H_i} - \frac{1}{H_{H_2}} \right)^{-1}, \quad (32)$$

amelynek segítségével a (29) egyenlet a következőképpen írható:

$$\Phi_i = D n_i \frac{1}{H}. \quad (33)$$

Dimenzionális alapon a diffúzió sebessége a  $D/H$  értékkel lesz arányos, így a diffúziós időskála:

$$\tau \sim H/v_d \sim H^2/D. \quad (34)$$

Mivel  $H$  definíciója folytán erősen függ a vizsgált elem relatív gyakoriságától, s ezen keresztül a kémiai reakciók alakulásától, ezért értéke igen erősen függ a felhő különböző részeiben uralkodó fizikai viszonyoktól (pl. a beérkező sugárzás mértéke) és kémiai összetételtől. Így lokális diffúziós időskálákat kell figyelembe venni, amivel el lehet kerülni a Williams és Hartquist (1984, 1991) által kritizált időskála-problémákat.

A diffúziós együttható értékének becslését XAL95 kétféleképpen is megtette, s mindkét módon hasonló eredményre jutott. A fentebb ismertetett keveredési-hossz-elmélet alapján  $D$  értékének meghatározásához a turbulens örvények átlagos sebességét és a keveredési hosszt kell megbecsülnünk ( $D \sim V_t l$ ). E kettő közül az előbbi a könnyebb feladat, Leung és mtsai (1982)  $^{13}\text{CO}$  mérések alapján összefüggést találtak a felhőmagok mérete és a turbulens sebesség között –  $V_t(\text{km/s}) = 0,58(\text{pc})^{0,48}$  –, ami alapján XAL95 szerzői  $V_t$  átlagos értékének 1 km/s-ot választottak. A keveredési hossz becslése azonban már lényegesen nehezebb a csillagközi turbulenciára vonatkozó ismereteink meglehetősen hiányos volta miatt, azonban a szerzők a felhő méretének 10%-át megfelelő választásnak tartották. Ez tipikus felhők esetén 0,1-0,5 pc, ami  $D$  értékére  $3 \times 10^{22} - 2 \times 10^{23} \text{ cm}^2/\text{s}$  közötti értéket



ad. Egy másik megközelítés (inkoherens hidrodinamikai hullámok) alapján azt kapták, hogy  $D$  értéke a  $10^{23}$  cm<sup>2</sup>/s-os nagyságrendbe esik. Yate és Millar (2003)  $10^{21}$  -  $10^{23}$  cm<sup>2</sup>/s közötti diffúzivitásokkal számoltak.

A vizsgálandó egyenlet legáltalánosabb alakja:

$$\begin{aligned} \partial_t n_i(r, t) = & D \nabla [\nabla n_i(r, t) - f_i(r, t) \nabla n_{\text{H}_2}(r)] \\ & + S_i(r, t), \end{aligned} \quad (35)$$

melyben az  $S_i(r, t)$  forrástag a kémiai modellt hivatott igen egyszerű módon helyettesíteni:

$$S_i(r, t) = \frac{n_{i,0}(r, \tau_c) - n_i(r, t)}{\tau_c}. \quad (36)$$

A forrástagban  $n_{i,0}$  a vizsgált elem számsűrűségének  $\tau_c$  karakterisztikus idő elteltével kialakuló diffúziómentes egyensúlyi eloszlását takarja. Ennek értékét a módszert tesztelő legegyszerűbb eloszlásoktól eltekintve XAL95 diffúziómentes megoldásai alapján vettük.

Talán meglepő lehet, hogy miután a kémiai folyamatok jelentőségét és komplexitását az előző szakaszban kellőképpen kihangsúlyoztam, egy ilyen egyszerű forrástagra cseréljük le a kémiai reakciók igen kiterjedt rendszerét. A szuperdiffúzió általunk alkalmazott megközelítésével (2.2. szakasz) azonban, mint láttuk, nem tudunk időfüggő egyenleteket kezelni, s az eddig elmondottak alapján az szintén egyértelmű, hogy a kémiai folyamatok és a diffúzió igen erősen csatolt rendszerének pontos kezeléséhez ez elengedhetetlen. A transzfer-időskálák, miként az egyes elemekre jellemző sűrűségskálák is, lokális jellegűek, s a rendszer időfejlődése alatt is folyamatos változásban vannak.

A mi célunk azonban nem a teljes rendszer modellezése, a kialakuló elemgyakoriságok még pontosabb, a megfigyelésekkel még jobb összhangban levő meghatározása, hanem csupán annak megállapítása volt, hogy a hagyományos diffúzió anomális diffúzióval történő helyettesítése módosítja-e olyan mértékben az eredményeket, ami érdemessé teszi a szuperdiffúzió modellekbe integrálására irányuló erőfeszítések megtételét. Ennyit pedig a mi modellünk segítségével is megtehetünk, nem feledkezve meg közben arról, hogy noha egy realisabb esetben az eredményül kapott eloszlások minden bizonnyal eltérnének az általunk kapottaktól, de a várható trendekre a mi kutatásunk is hasznos előrejelzésekkel szolgál.

Noha különböző fizikai problémák vizsgálata esetén az anomális diffúzió alkalmazása már általános elterjedt (Avellaneda és Majda, 1992), munkánkig – noha de Avillez és Mac Low (2002) az állandó diffúziós együttható elkerülése érdekében már keveredő időskálákat használt a szupernóva-robbanások által hajtott csillagközi anyag numerikus modellezésére – csupán néhány esetben alkalmazták csillagászati példákban (Petrovay, 2001). Éppen

ezért is tekinthető jelentős tudományos eredménynek ezen kutatásunk, hiszen egy olyan területen mutattuk ki az anomális diffúzió használatának létjogosultságát, ahol ezzel korábban még nem foglalkoztak. Bár modellünk, mint minden első megközelítés, igen egyszerű, eredményeink jól mutatják, milyen fontos lenne reálisabb diffúziós modelleket alkalmazni a csillagközi anyag kémiáját vizsgáló kutatásokban.

A 2.1. és 2.2. szakaszok alapján nem is kérdéses, hogy a csillagközi anyag – s így a hideg felhőmagok – vizsgálatában a szuperdiffúzió alkalmazásának megvan a létjogosultsága. A csillagközi anyagot állandó mozgásban tartó – többek között – szupernóva-robbanásokból eredő lökeshullámokra jellemző léptékek ugyanis meghaladják a molekulafelhők méretét. A felhőkben található turbulens áramlások hajtóerejét e lökeshullámok nagyobb léptékei felől kaszkádoló kinetikus energia biztosítja, mely kaszkád egészen a felhőmagok belsejére jellemző léptékekig is lehatol (Boldyrev, 2002, Scalo és Elmegreen, 2004, Ryan Joung és Mac Low, 2006).

E megközelítés – napjaink tudományos elgondolása – szerint a csillagközi anyagban úszó felhők nem mások, mint pozitív sűrűségfluktuációk a fent leírt szupernóva-hajtotta, nagyléptékű, összenyomható, turbulens áramlásban (Glover és Mac Low, 2007). Egy ilyen áramlásban pedig (mint a 2.2. szakaszban is láttuk) a véletlen bolyongás során a két nyomjelző elem átlagos  $\Delta$  szeparációjához csak azok az örvények járulnak hozzá, amelyek léptéke  $\Delta$ -nál kisebb, vagyis csillagközi anyagra jellemző fizikai viszonyok miatt léptékfüggő, anomális diffúzió lép fel.

Mivel a szuperdiffúziót csak a hullámszám-térben tudjuk figyelembe venni, ezért először egyenleteinket, illetve kiinduló eloszlásainkat is transzformálni kellett. Mivel gömbszimmetrikus közelítést alkalmazunk, a transzformálandó eloszlások egyedül a felhő magjától mért  $r$  távolságtól függenek. Abban az esetben pedig, ha egy fizikai mennyiség csak az  $r = \sqrt{\sum x_i^2}$  változótól függ, akkor az  $n$  dimenziós Fourier-transzformációk egy egydimenziós Hankel-transzformációval helyettesíthetők (Sneddon, 1951). Három dimenzió esetén a transzformációs képletek a következők:

$$\hat{n}(k) = \int_0^\infty r^{\frac{3}{2}} n(r) J_{\frac{1}{2}}(kr) dr, \text{ illetve} \quad (37)$$

$$n(r) = \int_0^\infty k^{\frac{3}{2}} \hat{n}(k) J_{\frac{1}{2}}(kr) dk, \quad (38)$$

ahol  $J_{\frac{1}{2}}$  az  $n = 1/2$  értékű félegész Bessel-függvény. Ezek a transzformációk a 2.3.3. szakaszban vizsgált egyszerűsített esetben – amikor az  $n_{i,0}(r, \tau_c)$  függvényt egy egyszerű Gauss-eloszlással közelítjük – analitikusan is elvégezhetők, míg az általánosabb esetekben (2.3.4. szakasz) a számításokat numerikusan végeztem el.

A diffúziós egyenlet stacionárius megoldását  $\tau_c$  idő elteltével a Fourier-térben differenci-



álegyenlet helyett egyszerű algebrai egyenlet megoldásaként kapjunk. Az anomális diffúzió vizsgálatához a konstans diffuzivitást léptékfüggő (hullámszámfüggő) diffúziós együtthatóval helyettesítjük. A léptékfüggést a 2.2. szakaszban bemutatott módon, Kolmogorov-spektrumot ( $\alpha = 5/3$ ,  $z = 2/3$ ,  $\zeta = 3/2$ ) feltételezve határoztuk meg:

$$D(k) = D_0(k/k_0)^{-4/3}, \quad (39)$$

ahol  $D_0$  az irodalom alapján meghatározott keveredési hosszhoz ( $l$ ) rendelhető diffuzivitás értéke,  $k_0$  pedig az  $l$ -hez rendelhető hullámszám. A pontos értékeket és a megoldás további menetét az egyes eseteket tárgyaló (2.3.3., illetve 2.3.4.) szakaszokban részletezem.

### 2.3.3. Analitikusan is kezelhető, egyszerűsített probléma vizsgálata

Először egy analitikusan is kezelhető  $n_{i,0}(r, \tau_c)$  eloszlást vizsgáltunk, melynek célja elsősorban módszerünk működőképességének tesztelése, illetve annak megállapítása volt, hogy érdemes-e egyáltalán tovább foglalkozni a problémával. Kezdeti vizsgálatainkra vonatkozó eredményeinket egy nem referált konferenciakiadványban tettem közzé (Marschalkó, 2006).

Egyszerűsített modellünkben a következő feltevésekkel élünk:

- a felhő gömbszimmetrikus, vagyis a fizikai mennyiségek egyedül a felhő magjától mért távolságtól ( $r$ ) függenek,
- a kémiai reakciókat leíró egyenleteket egy egyszerű forrástaggal helyettesítettük,
- a főkomponens ( $H_2$ ) eloszlása egyenletes a felhőben ( $n_{H_2}$  állandó),
- $\tau_c$  idő elteltével beálló stacionárius megoldást kerestünk.

A harmadik egyszerűsítő feltevés következtében a vizsgálandó (35) diffúziós egyenlet a következőképpen módosul (a vizsgált elemek számsűrűségét jelölő  $n_i$  mellől ebben a szakaszban végig elhagyom az indexet):

$$\partial_t n(r, t) = D \nabla^2 n(r, t) + S(r, t), \quad (40)$$

amelynek Fourier-transzformáltja a következő:

$$\partial_t \hat{n}(k, t) = -D(k)k^2 \hat{n}(k, t) + \hat{S}(k, t), \quad (41)$$

ahol  $\hat{S}(k, t)$  a forrásfüggvény Fourier-transzformáltja, amelynek pontos alakja:

$$\hat{S}(k, t) = \frac{\hat{n}_0(k, \tau_c) - \hat{n}(k, t)}{\tau_c}. \quad (42)$$

A (41) egyenlet egyszerű algebrai művelettel megoldható:

$$\hat{n}(k, t) = \frac{\hat{n}_0(k, \tau_c)}{1 + \tau_c D(k) k^2}. \quad (43)$$

A (40) egyenlet megoldása így igen egyszerű:  $n(r, t)$  meghatározásához a diffúziómentes megoldást adó eloszlást  $n_0(k, \tau_c)$  – a (37) képlet segítségével át kell transzformálni a Fourier-térbe. Az így nyert  $\hat{n}_0(k, \tau_c)$  transzformált eloszlást a (43) egyenletbe behelyettesítve egyszerű algebrai műveletek után megkapjuk a kívánt, diffúziót is figyelembe vevő eloszlás Fourier-transzformáltját ( $\hat{n}(k, t)$ ), amit már csak vissza kell alakítanunk a (38) képlet segítségével, hogy megkapjuk  $n(r, t)$  diffúziót is figyelembe vevő,  $\tau_c$  idő eltelte után kialakuló egyensúlyi eloszlását ( $n(r, \tau_c)$ ).

Ha az  $n_0(r, \tau_c)$  eloszlást Gauss-eloszlással közelítjük, akkor a (37) és (38) transzformációk analitikus úton is elvégezhetőek. A jellemző méretek nagy számértéke folytán a számítások egyszerűsítése érdekében dimenziótlanított egyenletekkel dolgoztam. A dimenziótlanításhoz a vizsgált problémára jellemző értékeket használtam: távolságegységnek  $4 \times 10^{17}$  cm (kb. 0,13 pc) értéket vettem alapul. Az időegység meghatározásához a  $10^5$  cm/s-os átlagos turbulens sebességet használtam fel, s így a dimenziótlanításhoz használt időegység értéke  $4 \times 10^{12}$  másodperc (kb.  $1,27 \times 10^5$  év) lett. Ezekkel az egységekkel a diffúziós együttható egysége:  $4 \times 10^{22}$  cm<sup>2</sup>/s.

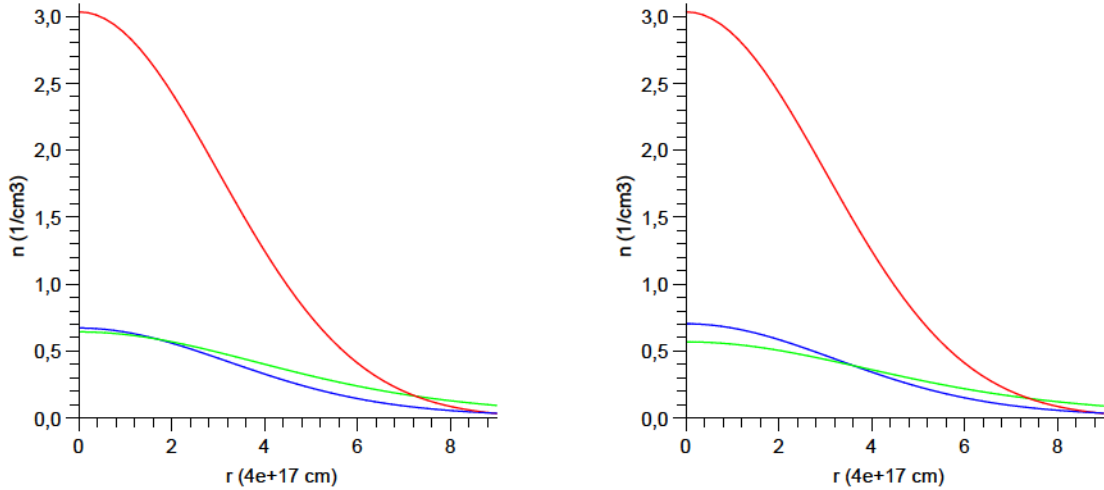
Az analitikus számításokhoz két különböző Gauss-eloszlást is felhasználtam: az egyik esetben a felhő külső határán a valóságoshoz közeli sűrűségértékek adódtak, de a felhő össztömege a valódinál nagyobb volt (igazából azt mondhatjuk, hogy ebben az esetben csupán egyetlen összetevőből (hidrogénből) álló felhőt vizsgáltunk, ami nyilván nem reális, de mivel ezeket a számításokat csak a módszer tesztelése céljából végeztem, így ennek nincs most különösebb jelentősége), míg a másik esetben reális felhőtömeget kapunk, de a felhő szélén a sűrűség a kívántnak csupán mintegy a felét éri el. Az általam használt dimenziótlan mennyiségekkel kifejezve a következő két Gauss-eloszlást vizsgáltam:

$$n_0(r, \tau_c) = \frac{6,8}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \text{ ahol } \sigma = 0,9, \text{ illetve} \quad (44)$$

$$n_0(r, \tau_c) = \frac{22,8}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \text{ ahol } \sigma = 3,0. \quad (45)$$

A fenti eloszlásokat különböző diffúziós együtthatók ( $D_0 = 1; 2, 5; 4$ ) és karakterisztikus idők ( $\tau_c = 1; 6; 8$ ) esetén is megnéztem (ez  $4 \times 10^{22}$  -  $1,6 \times 10^{23}$  cm<sup>2</sup>/s diffuzivitásnak, illetve kb.  $1,27 \times 10^5$  -  $10^6$  évnek felel meg).

Az analitikus megoldásokat szemianalitikus módon, a *maple* programcsomag segítségével ellenőriztem, illetve ábrázoltam. A 4, 5. és 6. ábrákon néhány különböző számítás eredménye látható. A piros vonal jelöli a diffúzió nélküli megoldást (vagyis a kiinduló,

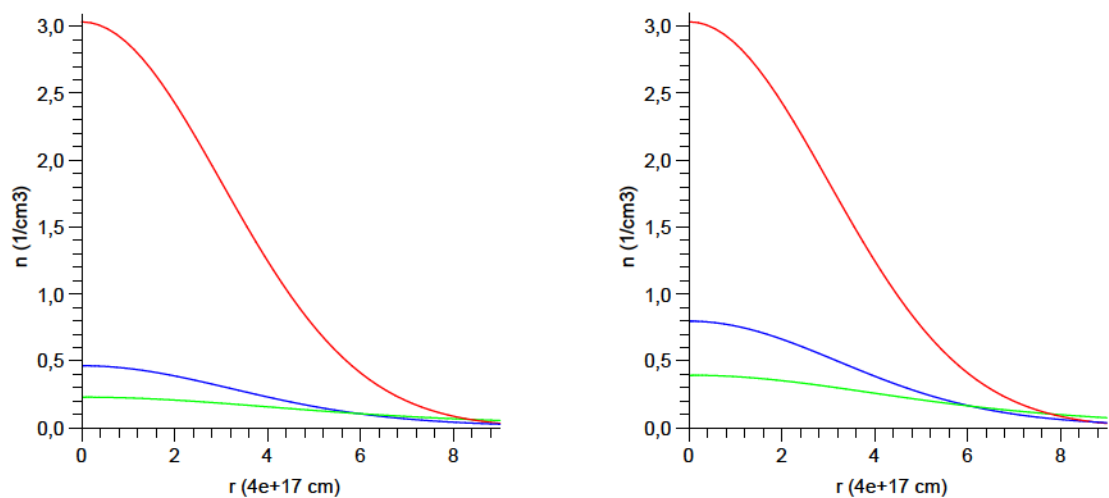


4. ábra. A (45) által definiált diffúziómentes megoldások vizsgálata különböző paraméterekkel I. A piros vonal a diffúziómentes, a zöld a diffúzióval, a kék pedig a szuperdiffúzióval számított megoldást jelöli (bal oldalt:  $\tau_c = 10^6$  év,  $D_0 = 10^{23}$  cm<sup>2</sup>/s jobb oldalt:  $\tau_c = 10^6$  év,  $D_0 = 1,2 \times 10^{23}$  cm<sup>2</sup>/s)

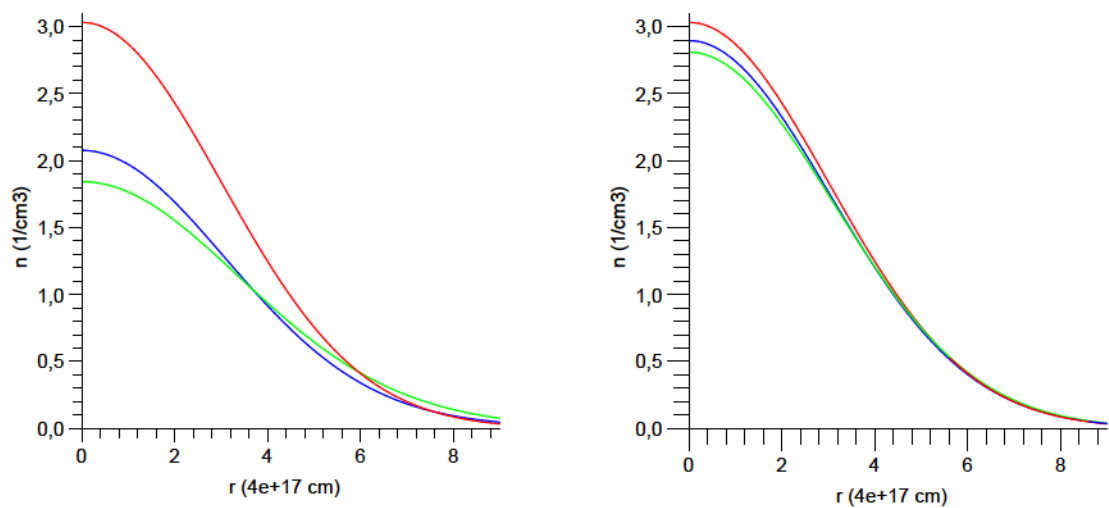
mindegyik esetben a (45) által definiált  $n_0(r, \tau_c)$  eloszlást), a zöld vonal a hagyományos diffúzióval, a kék vonal pedig a szuperdiffúzióval számolt,  $\tau_c$  idő elteltével kialakuló stacionárius eloszlást mutatja.

Az ábrákon jól látható, hogy mind az egyre nagyobb diffúziós együtthatók, mind pedig az egyre hosszabb karakterisztikus idők esetén egyre jobban lecsökken a vizsgált nyomjelző elem (ez esetben az idealizált felhőt alkotó egyetlen elem) mennyisége a felhő belsejében. Szintén leolvasható az ábrákról, hogy a szuperdiffúzióval számolt esetekben a felhő belsejében a diffúziós esetnél magasabb, míg a felhő külső tartományaiban alacsonyabb sűrűségeket kapunk. A hagyományos diffúzióval és a szuperdiffúzióval számolt esetek a diffúziós együttható értékétől függően a felhő különböző mélységeiben egyeznek meg. Ennek magyarázata abban rejlik, hogy a diffúziós együtthatók számításakor felhasznált (30) képletben a különböző értékekhez különböző korrelációs (keveredési) hosszok tartoznak. Nagyobb diffúziós együtthatóknál a két eset közötti egyezés jól láthatóan a felhő külsőbb tartományaiban valósul meg.

Az analitikusan is kezelhető, a valós helyzettől azért még elég távol álló eset vizsgálatából az mindenesetre már látszott, hogy a hagyományos diffúzióval és az anomális diffúzióval számolt esetek között jelentős eltérés mutatkozik, vagyis érdemes a problémát közelebbről is megvizsgálni. Mivel a kémiai folyamatok karakterisztikus ideje  $10^6$  év nagyságrendjébe esik, ezért a továbbiakban érdemes ezeket az értéktartományokat vizsgálni (a 6. ábra jól mutatja, hogy lényegesen rövidebb idők alatt mind a diffúzió, mind a szuperdiffúzió ha-

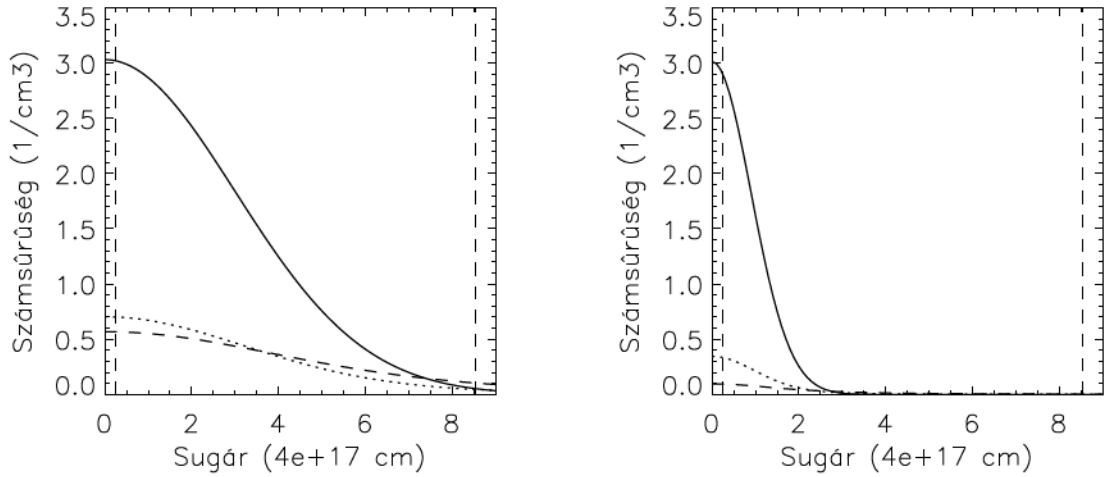


5. ábra. A (45) által definiált diffúziómentes megoldások vizsgálata különböző paraméterekkel II. (bal oldalt:  $\tau_c = 2 \times 10^6$  év,  $D_0 = 2 \times 10^{23}$  cm<sup>2</sup>/s jobb oldalt:  $\tau_c = 10^6$  év,  $D_0 = 2 \times 10^{23}$  cm<sup>2</sup>/s, a színek megegyeznek az előző ábránál használttal)



6. ábra. A (45) által definiált diffúziómentes megoldások vizsgálata különböző paraméterekkel III. (bal oldalt:  $\tau_c = 1,2 \times 10^5$  év,  $D_0 = 10^{23}$  cm<sup>2</sup>/s jobb oldalt:  $\tau_c = 1,2 \times 10^4$  év,  $D_0 = 10^{23}$  cm<sup>2</sup>/s, a színek megegyeznek az előző ábránál használttal)





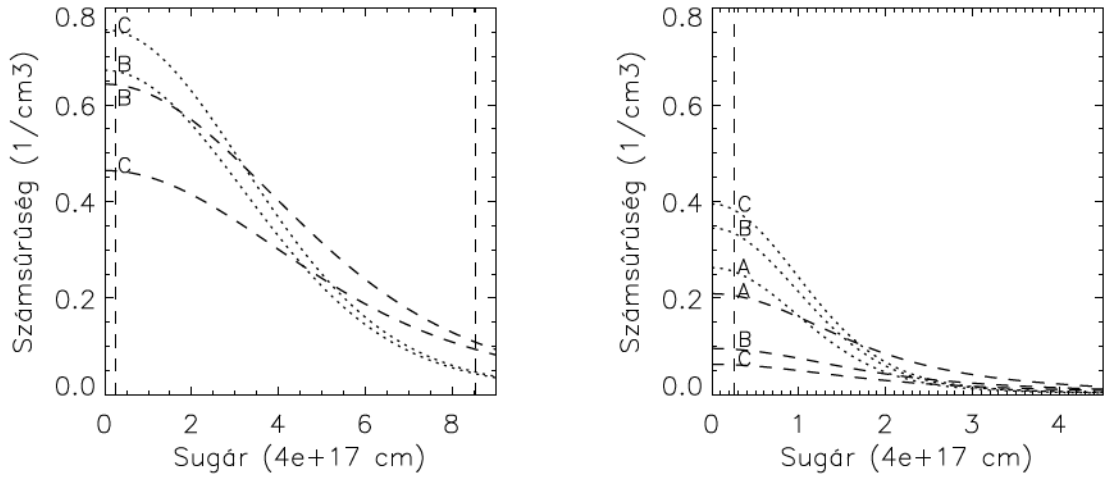
7. ábra. Gauss-eloszlások vizsgálata numerikus módszerrel I. A folytonos vonal a kiinduló (diffúziómentes) eloszlást, a szaggatott vonal a hagyományos diffúzióval számolt megoldást, míg a pontozott vonal a szuperdiffúzióval kapott megoldást mutatja. A függőleges szaggatott vonalak a felhő méretét hivatottak jelezni. Bal oldal: a (45) által definiált Gauss-eloszlás; jobb oldal: a (44) által definiált Gauss-eloszlás ( $\tau_c = 10^6$  év,  $D_0 = 1,2 \times 10^{23}$  cm<sup>2</sup>/s)

tása mennyivel jelentéktelenebb). Nagyobb diffúziós együtthatók esetén a hagyományos és anomális diffúziós esetek közötti eltérés is nagyobb (ez jól leolvasható a 4. ábra jobb és bal oldali, valamint az 5. ábra jobb oldali grafikonja alapján). A Xie és mtsai (1995), valamint Yate és Millar (2003) által használt diffuzivitások metszetében található  $10^{23}$  cm<sup>2</sup>/s értéket használva is jól megfigyelhető az eltérés a két eset között.

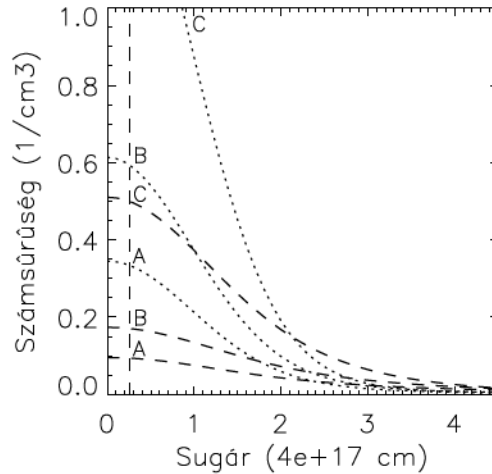
Az analitikus vizsgálatok célja nem csupán az volt, hogy megnézzük, érdemes-e a kérdést behatóbban is vizsgálni, hanem a csak numerikusan megoldható esetekre kifejlesztett módszer tesztelését is szolgálta. Az általánosabb vizsgálatokhoz ugyanis egy IDL kódot fejlesztettem ki, amelynek segítségével a valóságához közelebbi kiinduló eloszlásokat is vizsgálni tudtuk. Ezt a kódot először a fent bemutatott Gauss-eloszlásokkal teszteltem, s mind a hagyományos diffúziót, mind a szuperdiffúziót alkalmazó esetekben a szemi-analitikus megoldásokkal egyező eloszlásokat kaptam (lásd a 4. ábra jobb oldali és a 7. ábra bal oldali grafikonját).

Nem meglepő tehát, hogy a numerikus vizsgálatok során is hasonló eredményekre jutottam, mint a korábbi analitikus számításoknál. A 7. ábrán a két különböző Gauss-eloszlás vizsgálatának eredménye látható. A karakterisztikus idők és a diffúziós együtthatók megegyeznek ( $\tau_c = 10^6$  év,  $D_0 = 1,2 \times 10^{23}$  cm<sup>2</sup>/s). A szűkebb – (44) által definiált – eloszlásnál is hasonlóan viszonyul egymáshoz a hagyományos és az anomális diffúziót tartalmazó megoldás, viszont a két eset közötti különbségek markánsabbak.

A 8. ábrán a jobb áttekinthetőség kedvéért csak a kétféle diffúzióval számolt görbéket



8. ábra. Gauss-eloszlások vizsgálata numerikus módszerrel II. A folytonos vonal a kiinduló (diffúziómentes) eloszlást, a szaggatott vonal a hagyományos diffúzióval számolt megoldást, míg a pontozott vonal a szuperdiffúzióval kapott megoldást mutatja. A függőleges szaggatott vonalak a felhő méretét hivatottak jelezni.  $\tau_c = 10^6$  év, a diffúziós együtthatók pedig: (A)  $4 \times 10^{22}$  (B)  $10^{23}$ , illetve (C)  $1,6 \times 10^{23}$   $\text{cm}^2/\text{s}$  (bal oldal: a (45) által definiált Gauss-eloszlás; jobb oldal: a (44) által definiált Gauss-eloszlás).



9. ábra. Gauss-eloszlások vizsgálata numerikus módszerrel III. A folytonos vonal a kiinduló (diffúziómentes) eloszlást, a szaggatott vonal a hagyományos diffúzióval számolt megoldást, míg a pontozott vonal a szuperdiffúzióval kapott megoldást mutatja. A függőleges szaggatott vonalak a felhő méretét hivatottak jelezni. A (44) által definiált Gauss-eloszlás,  $D_0 = 10^{23}$   $\text{cm}^2/\text{s}$ , a karakterisztikus idők pedig: (A)  $10^6$  (B)  $7,6 \times 10^5$ , illetve (C)  $1,2 \times 10^5$  év.

ábrázoltam (főleg a (44) eloszlás esetében nem ad kellően áttekinthető képet, ha az eredeti, diffúziómentes eloszlás is szerepel az ábrán). Itt is a bal oldalon szerepelnek a nagyobb szórású, jobb oldalt pedig a kisebb szórású Gauss-eloszlásokból számított eredmények. A karakterisztikus idő mindegyik esetben ugyanakkora (egymillió év), azonban egy ábrán különböző diffúziós együtthatókkal számolt esetek szerepelnek. Az ábrákról ugyanazok a következtetések vonhatók le, mint amelyeket az analitikus vizsgálatoknál bemutattam. A hagyományos és az anomális diffúziót alkalmazó megoldások közötti különbségek jelentősek, nagyobb diffuzivitások esetén a kettes faktort is elérhetik a felhő belsejében.

A 9. ábrán a kisebb szórású Gauss-eloszlással kapcsolatos futtatásaim eredményei láthatók azonos diffúziós együtthatót ( $D_0 = 10^{23} \text{cm}^2/\text{s}$ ), de különböző karakterisztikus időket használva. Erről az ábráról az a következtetés is levonható, hogy az arányokat tekintve a különbségek nem nőnek a kétféle diffúzióval történő számítások esetén a karakterisztikus idő növekedésével.

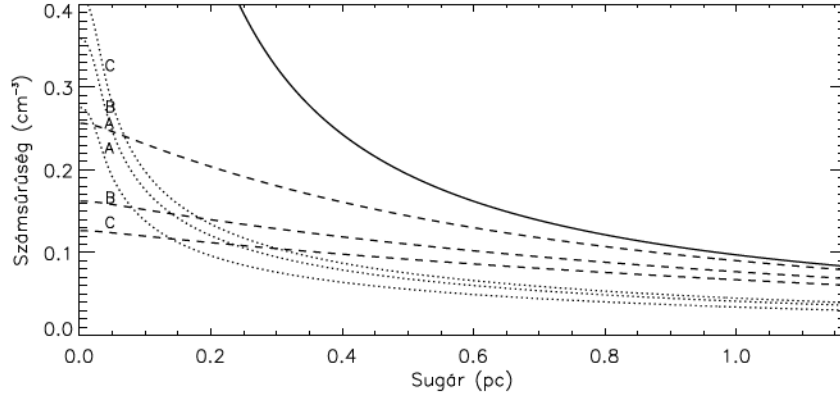
#### 2.3.4. Reálisabb modellekkel kapott eredmények

Az első lépés a valósághoz közelebb álló vizsgálatok felé a kiindulási eloszlás lecserélése volt. Az e szakaszban ismertetett eredményeket a Marschalkó és mtsai (2007) referált cikkben tettük közzé. Továbbra is csupán egyetlen komponensből állónak tekintettük a felhőt, azonban a felhő sűrűségprofilját a korábbi Gauss-eloszlások helyett a valóságnak megfelelő  $1/r$ -es lefutású profillal írtuk le (amelyet XAL95 is használt a főkomponens sűrűségprofiljának leírására, valamint Willacy és mtsai (2002) is ezt használták), vagyis:

$$n_0(r, \tau_c) \sim r^{-1}. \quad (46)$$

A numerikus számításokat most is ugyanazzal a programmal végeztem el, mint a Gauss-eloszlások esetében. Mivel az  $1/r$  függvény a felhő magjához közelítve divergál, ezért ott ( $r < 0,25$ , dimenzióatlanított egységben számolva) azt egy parabolával helyettesítettem úgy, hogy a felhő magjában a centrális sűrűségnek megfelelő értéket kapjunk. A számításokat ez esetben is lefuttattam a  $\tau_c$  és  $D$  paraméterek széles skáláján. Az eredmények a Gauss-eloszlások alkalmazása során kapottakhoz hasonlóak, a hagyományos és anomális diffúziót használó megoldások közötti szignifikáns különbség itt is megjelenik.

A 10. ábrán a két eset közti különbség áttekinthetősége érdekében csak a számunkra fontos, a karakterisztikus idő (ebben az esetben egymillió év) eltelte után bekövetkező stacionárius megoldásokat magában foglaló tartományt ábrázoltam. A felhő belsejében ebben az esetben is magasabb számsűrűségeket kapunk a szuperdiffúzióval számolt esetben, s nagyobb diffúziós együtthatók esetén a különbség is nagyobb, éppen úgy, mint azt a Gauss-eloszlásoknál is láttuk. A hagyományos és anomális diffúzióval számolt görbék a felhő centrumához közelebb eső tartományokban egyeznek meg (ezáltal jobban hasonlít a



10. ábra.  $n_0 \sim 1/r$  diffúziómentes eloszlás (folytonos vonal) vizsgálata egyenletes főkomponens-eloszlás mellett I. A szaggatott vonalak a hagyományos diffúzióval, a pontozott vonalak pedig a szuperdiffúzióval számolt megoldásokat mutatják. A számítások során alkalmazott karakterisztikus idő értéke:  $\tau_c = 10^6$  év, a diffúziós együtthatók pedig:  $D_0 = 4 \times 10^{22}$  (A);  $10^{23}$  (B);  $1,6 \times 10^{23}$   $\text{cm}^2/\text{s}$  (C).

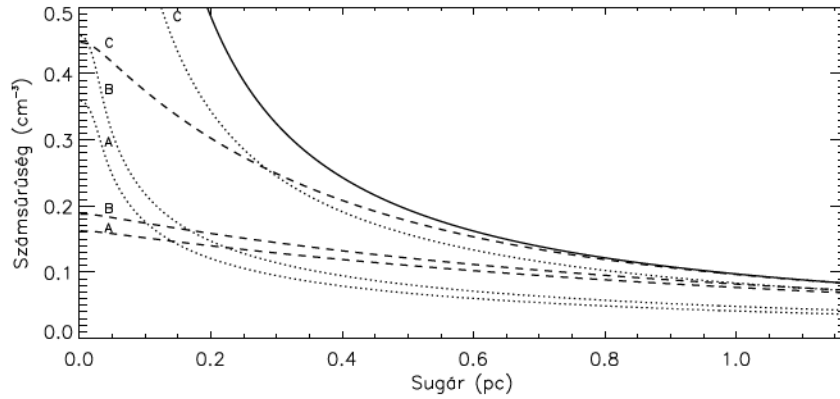
(44) által leírt, kisebb szórású Gauss-eloszláshoz). Kis diffuzivitás ( $D_0 = 4 \times 10^{22}$   $\text{cm}^2/\text{s}$ ) esetén a felhő centrumában igen kicsi a különbség, míg növekvő diffúziós együtthatók esetén egyre nagyobb, az átlagosnak számító diffúziós együttható esetében (az ábrán B-vel jelölt görbék) a kettes faktort is meghaladja. A különbségek azonban a felhő egészében mindegyik esetben egyértelműek.

A 11. ábrán a fenti átlagos diffuzivitás mellett különböző karakterisztikus időkkel számolt görbéket ábrázoltam. A felhő centrumában mért számsűrűségek a kétféle diffúzióval számolt esetben nagyobb karakterisztikus idők esetén nagyobb arányú eltérést mutatnak (s természetesen hosszabb ideig számolva a centrális sűrűségek egyre jobban lecsökkennek).

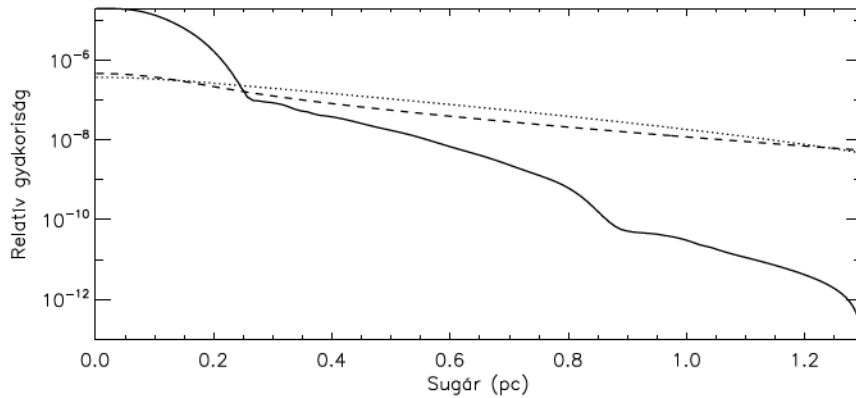
Összefoglalásként elmondhatjuk, hogy a reálisabb,  $n_0 \sim 1/r$  lefutású diffúziómentes megoldások esetén is hasonló eredményeket kaptunk, mint a módszerünk tesztelésére szolgáló Gauss-eloszlásoknál, és a kétféle eset viszonya is hasonló volt a felhő külső, illetve belső részében. Mivel azonban még ez az eset is túlságosan elméleti, s a megfigyelésekkel nem vethető össze, messzemenő következtetéseket nem vonhatunk le belőle. Annyit azonban itt is megállapíthatunk, hogy a szuperdiffúzióval számolt stacionárius megoldások szignifikánsan különböznek a hagyományos diffúzióval számoltaktól.

A következő lépés már egy konkrét elem eloszlásának vizsgálata volt, igaz, még mindig egyenletes főkomponens-eloszlás ( $n_{H_2} = \text{állandó}$ ) mellett. Az oxigénnek a felhő középpontjától való távolsága függvényében mért eloszlásának vizsgálatához  $n_0(r, \tau_c)$  értékét XAL95 diffúziómentes megoldása szolgáltatta. Számításaim eredménye a 12. ábrán látható. Itt is láthatunk különbséget a kétféleképpen számolt relatív gyakoriságok között, bár az ordináta tengely logaritmikus skálázása miatt ez nem mutatkozik meg olyan jól. Szembetűnő





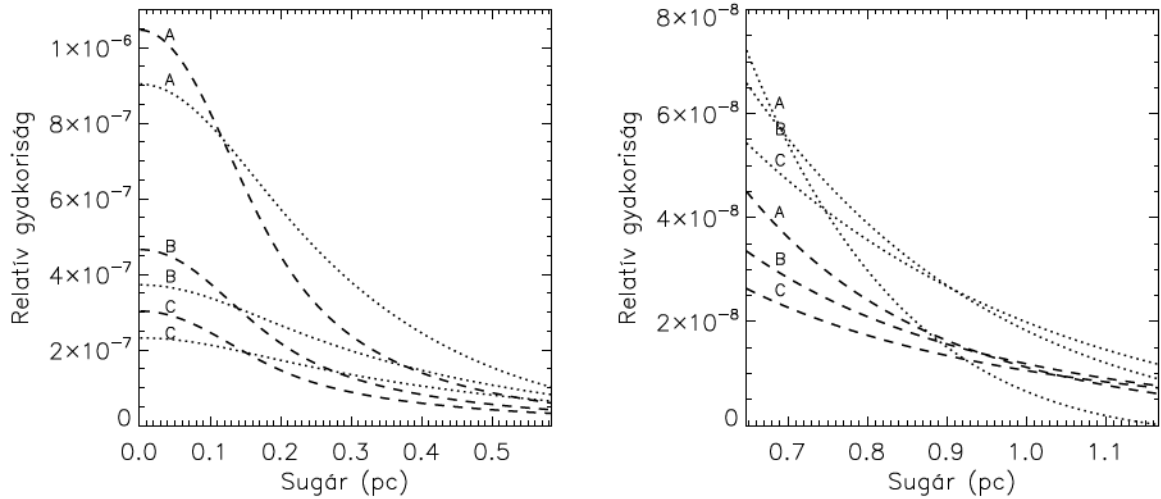
11. ábra.  $n_0 \sim 1/r$  diffúziómentes eloszlás (folytonos vonal) vizsgálata egyenletes főkomponens-eloszlás mellett II. A szaggatott vonalak a hagyományos diffúzióval, a pontozott vonalak pedig a szuperdiffúzióval számolt megoldásokat mutatják. A diffúziós együttható értéke:  $D_0 = 10^{23} \text{ cm}^2/\text{s}$ , a karakterisztikus idők pedig  $\tau_c = 10^6$  (A);  $7,6 \times 10^5$  (B);  $1,2 \times 10^5$  év (C).



12. ábra. Az  $\text{O}_2$  relatív gyakoriságának eloszlása a sugár függvényében, egyenletes főkomponens-eloszlás mellett. A paraméterek értéke:  $D_0 = 10^{23} \text{ cm}^2/\text{s}$ ,  $\tau_c = 10^6$  év. Folytonos vonal: XAL95 alapján vett diffúziómentes eloszlás; szaggatott vonal: hagyományos diffúzióval számított megoldás; pontozott vonal: szuperdiffúzióval számolt megoldás.

azonban, hogy két ponton is metszi egymást a két görbe, s hogy a felhő belsejében az oxigén relatív gyakorisága most a szuperdiffúzió alkalmazása esetén csökkent le jobban. A két görbe a felhő szélén ismét találkozik.

A 13. ábrán az áttekinthetőség érdekében külön ábrázoltam a felhő belső és külső tartományait, valamint a relatív gyakoriságokat ábrázoló tengelyt nem logaritmikusan skáláztam. Az egymillió éves karakterisztikus idő mellett három (eddig is használt) különböző diffúziós együtthatóval számolt görbét is felrajzoltam. A kapott eloszlások mindhárom esetben hasonló lefutásúak: a felhő centrumában ekkor a szuperdiffúzióval számolt esetben kapunk kisebb gyakoriságokat, de a két esetben kapott centrális gyakoriságok aránya

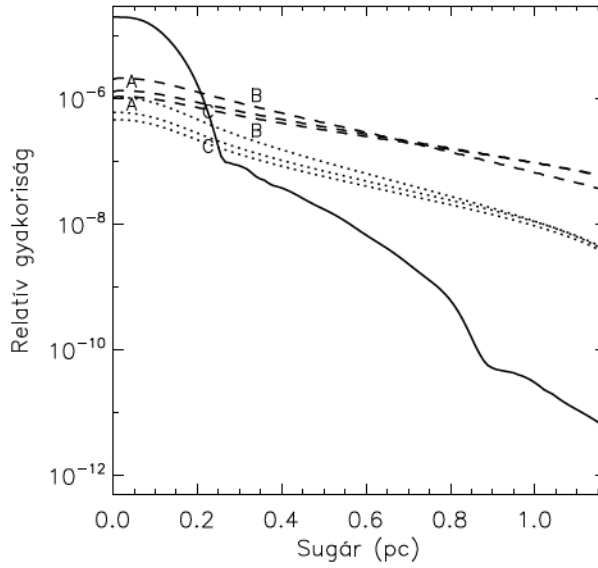


13. ábra. Az  $O_2$  relatív gyakoriságának eloszlása a sugár függvényében, egyenletes főkomponens-eloszlás mellett, a felhő belső (bal oldali ábra) és külső (jobb oldali ábra) tartományai külön ábrázolva. A számítások során alkalmazott karakterisztikus idő értéke:  $\tau_c = 10^6$  év, a diffúziós együtthatók pedig:  $D_0 = 4 \times 10^{22}$  (A),  $10^{23}$  (B) and  $D_0 = 1,6 \times 10^{23} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$  (C).

kisebb, mint korábban – nem éri el a kettes faktort –, s nem állapítható meg a relatív különbségek számottevő növekedése sem a diffuzivitások növekedésével. A felhő külső tartományaiiban a különböző típusú diffúziókkal számolt görbék ismét keresztezik egymást, bár ez egyértelműen csak az A jelű (legkisebb diffuzivitással számolt) görbe esetében látszik.

Itt két megjegyzést teszek. Egyrészt, a hagyományos és anomális diffúzióval számolt görbék viszonya a fenti számítások szerint függ a kiinduló, diffúziómentes  $n_0(r, \tau_c)$  eloszlás alakjától, különösen bonyolultabb, több törési pontot tartalmazó görbék esetén más és más jellegű szuperdiffúzióval számolt eloszlásokat kapnánk. Másodszor a 12. és a 3. ábrát összehasonlítva látható, hogy bár a Xie és mtsai (1995) által, valamint az általunk számolt (hagyományos) diffúziót is figyelembe vevő megoldás lefutása hasonló, messze nem egyezik. Ebben természetesen semmi meglepő nincs, hiszen mi egyenletes főkomponens-eloszlást használtunk, míg XAL95 nem, másrészt a kémiai reakciós hálót mi csak az  $S_i(r, t)$  függvényben vettük figyelembe, s a 2.3.1. fejezetben láthattuk, hogy a diffúziós és a kémiai reakciókat leíró egyenletek a felhő fizikai paraméterein keresztül milyen bonyolultan kapcsolódnak egymásba.

Most pedig nézzük meg, mennyiben befolyásolja eredményeinket az egyenletes főkomponens-eloszlás ( $n_{H_2} = \text{állandó}$ ) feltételezése. Ebben az esetben az eddig vizsgált (40) egyenlet a lényegesen bonyolultabb (35) alakot veszi fel. Ennek a Fourier-térbe történő transzformálása a szorzatok miatt fellépő konvolúció miatt már lényegesen bonyolultabb.

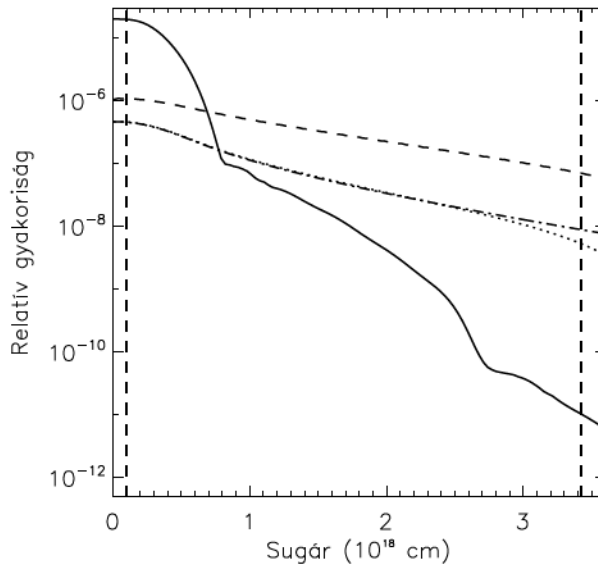


14. ábra. Az  $O_2$  relatív gyakoriságának összehasonlítása hagyományos diffúziót feltételezve egyenletes (pontosított vonal), illetve nem egyenletes (szaggatott vonal) főkomponens-eloszlás esetén. A:  $D_0 = 10^{23} \text{ cm}^2/\text{s}$ ,  $\tau_c = 7.6 \times 10^5 \text{ év}$ . B:  $D_0 = 4 \times 10^{22} \text{ cm}^2/\text{s}$ ,  $\tau_c = 10^6 \text{ év}$ . C:  $D_0 = 10^{23} \text{ cm}^2/\text{s}$ ,  $\tau_c = 10^6 \text{ év}$ . Folytonos vonal:  $n_0(r)$ .

Ezért mi egy egyszerűbb közelítő módszert választottunk. Először megvizsgáltuk, miként befolyásolja a hagyományos diffúzióval számolt eredményeket az egyenletes főkomponens-eloszlás választása.

A transzformációs nehézségek miatt ehhez nem alkalmazhattuk a korábban használt IDL kódot, ezért a (35) differenciálegyenletet egy C nyelven írt, Euler módszert használó kóddal oldottuk meg. Időben elsőrendű, a térkoordinátákban pedig másodrendű pontossággal, 512-es, egyenletes eloszlású ( $r_{\min} = 4 \times 10^{15}$  és  $r_{\max} = 4 \times 10^{18}$  cm) rácson számoltunk, a rács belső ( $r = r_{\min}$  határán a következő határfeltétel:  $\partial_r n_i(r = r_{\text{in}}, t) = 0$ . A felhő külső szélén a számsűrűséget nullának tekintettük:  $n_i(r = r_{\text{out}}, t) = 0$ . Ez utóbbi határfeltétel a korábbi (Fourier-térbe történő transzformálást használó módszerhez képest csak a felhő külső határán okozott kisebb eltérést – lásd 15. ábra).

Ebben az esetben is XAL95 oxigénre vonatkozó diffúziómentes megoldásából –  $n_0(r, \tau_c)$  – indultunk ki. Az  $n_{H_2} = \text{állandó}$  esetben a kapott eredmények megegyeztek a korábbi módszerrel számított relatív gyakoriságokkal. A nem egyenletes (hanem a valóságnak megfelelő  $1/r$  lefutású) főkomponens-eloszlás esetén kapott görbék lefutása hasonló – bár a különböző diffuzivitással számolt görbék aránya nem – az állandó  $n_{H_2}$ -vel számolt esethez, a kapott gyakoriság-értékek azonban nagyobbak, s a görbe meredeksége is kisebb, amint ez a 14. ábrán is látszik. Miként az is, hogy az egyenletes főkomponens-eloszlás feltételének elhagyása a felhő külső részeiben eredményezett nagyobb eltérést.



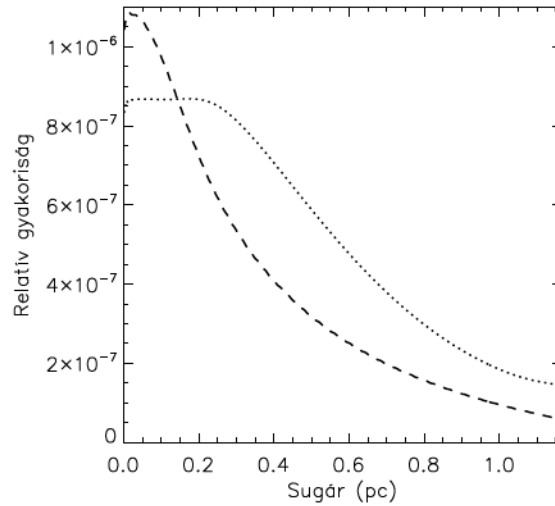
15. ábra. Az  $O_2$  relatív gyakoriságának vizsgálata. Szaggatott vonal: nem egyenletes főkomponens-eloszlással, Euler módszerrel számolva; pontozott vonal: egyenletes főkomponens-eloszlással, Euler-módszerrel számolva; pontozott-szaggatott vonal: egyenletes főkomponens-eloszlással, Fourier-transzformációval számolva

A különböző  $D_0$  és  $\tau_c$  paraméterekkel, valamint kiinduló (diffúziómentes) eloszlásokkal ( $n_0$ ) történő futtatások azt mutatták, hogy kvalitatíve hasonlóan, illetve kvantitatíven az egyenletes főkomponens-eloszlás esetén kapott görbékkel összevethető módon viselkednek a  $n_{H_2} \neq$  állandó esetben kapott görbék is. Ezért úgy véltük, hogy a hagyományos és anomális diffúzió hatása közötti különbségek megbecsléséhez ezeket felhasználhatjuk. Ehhez a korábban kapott, szuperdiffúzióval számolt eredményeket kell felszorozni az Euler-módszerrel nem egyenletes és egyenletes főkomponens-eloszlással számolt normál diffúziós megoldások hányadosával (vagyis a 14. ábrán szereplő megfelelő szaggatott és pontozott görbéjének arányával).

Az oxigénre vonatkozó számításaim eredménye a 16. ábrán látható. A korábbiaknak megfelelő jelölés szerint a szaggatott görbe jelöli a hagyományos diffúzióval, míg a pontozott görbe a fent leírt módszerrel kapott, szuperdiffúzióval számolt megoldást. Akárcsak a 12. és 13. ábrákon, az oxigén gyakorisága szuperdiffúzióval számolva itt is alacsonyabb a felhő centrumában, mint a normál diffúziós esetben (s az arányok itt sem olyan nagyok, mint a Gauss és az  $1/r$ -es eloszlások esetében voltak).

Összegzésül elmondhatjuk, hogy szuperdiffúzió alkalmazása a hagyományos diffúzió helyett szignifikánsan megváltoztatja a kapott eredményeket, ezért mindenképpen érdemes lenne egy anomális diffúzióra épülő kód kidolgozása. A korábbi modellek egyik problémája éppen az volt, hogy a felhő centrumában a megfigyeltnél több oxigént eredményeztek, ezen a szuperdiffúzió figyelembevétele javíthat, bár nem szabad elfelejteni, modellünk jelentős





16. ábra. Az  $O_2$  relatív gyakoriságának eloszlása a sugár függvényében, nem egyenletes főkomponens-eloszlást feltételezve.  $D_0 = 10^{23} \text{ cm}^2/\text{s}$ ,  $\tau_c = 10^6 \text{ év}$ . Szaggatott vonal: hagyományos diffúzióval számolva. Pontozott vonal: a várt gyakoriságprofil szuperdiffúzió esetén esetén (a leírást lásd a szövegben).

egyszerűsítésekkel élt, így a következtetésekkel is igen óvatosan kell bánni.

### 2.3.5. Az eredmények összefoglalása

Végső összegzésként elmondhatjuk, hogy mindenképpen érdemes lenne a szuperdiffúziót a molekulafelhők kémiai összetételével foglalkozó kódokba beépíteni, hiszen nemcsak közelebb áll a felhőkben jelen levő fizikai viszonyokhoz (lásd 2.3.1. szakasz), hanem – igaz, egyszerűsítésekkel élő – modellünk az oxigénmolekula esetét vizsgálva azt is kimutatta, hogy az anomális diffúzió alkalmazása a megfigyelésekkel jobban egyező irányba mozdíthatja el az elemgyakoriságokat a felhő belsejében.

Mindez akkor is igaz, ha láttuk, hogy a felhőkben végbemenő kémiai folyamatok milyen bonyolultan függenek a nekik helyet biztosító környezet fizikai paramétereitől, illetve a diffúziós időskálák is milyen erősen csatolva vannak a kémiai folyamatokhoz és a különböző fizikai paraméterekhez, s az egyre realisabb modellek felé haladva a mi modellünkben is csökkentek a különbségek a kétféle diffúziót használó számítások között.

Éppen ezért hasznos lenne egy olyan modell kidolgozása, amely az időfejlődéses módszerekbe is be tudná építeni a szuperdiffúziót. Minden bizonnyal ez adná meg a végső választ arra, hogy az anomális diffúzió milyen mértékben befolyásolná a kialakuló egyensúlyi eloszlásokat. Véleményünk szerint ez a modellek megfigyelésekkel való jobb egyezését biztosítaná. Láthattuk, hogy a diffúziómentes megoldás egyre bonyolultabb alakja esetén egyáltalán nem volt triviális a szuperdiffúzióval számolt görbe lefutása, így a különböző modellekbe történő beépítése mindenképpen új eredményekkel járna.

Modellünk korlátozott volta miatt – a kémiai reakciós háló helyettesítése az  $S(r, t)$  forrásfüggvénnyel, főleg egyenletes főkomponens-eloszlás használata, a szuperszonikus turbulenciával együtt járó és a kémiai folyamatokat jelentősen befolyásoló sűrűségfluktuációk (Glover és Mac Low, 2007), az ionizációt jelentősen befolyásoló külső sugárzási tér, valamint a gázcseppképzés porszemcséken történő adszorpciójának figyelmen kívül hagyása – nem várhatjuk el, hogy a megfigyelésekkel komolyan összevethessük eredményeinket – s nem is ez volt a célunk –, viszont azt megmutattuk – ami ellenben a célunk volt –, hogy a szuperdiffúzióval igenis számolni kell. Számításainkat a különböző modellekből kapott diffúziómentes megoldásokra alkalmazva legalább egy közelítő képet kaphatunk az anomális diffúzió hatásairól (amint ezt tettük XAL95 oxigénre vonatkozó eredményeivel is).

Mivel mi nem kémikusok vagyunk, így a teljes reakciós háló kezeléséhez nincs meg a kellő apparátusunk, ezért erre a feladatra nem vállalkozhattunk, de cikkünkkel megpróbáltuk felhívni a figyelmet a problémára. Másrészt – a nem egyenletes főkomponens-eloszlás vizsgálata céljából is – megpróbáltunk kidolgozni egy vegyes módszert, amely a Fourier-térben számoló, illetve az időlépéses Euler módszert ötvözi, azonban sajnos nem sikerült stabilan működő kódot létrehozni.

A munkánk megjelenése óta eltelt időben a témában megjelent cikkek a diffúzió kezelésén nem változtattak számottevő módon. Hincelin és mtsai (2011) modellje például – az általuk használt Nautilus kód (Hersant és mtsai, 2009) révén – Sakura- és Szunyajev-féle  $\alpha$  turbulens viszkozitást alkalmazó turbulens keveredési modellt tartalmaz. Mint láttuk a 2.2. szakaszban is, a léptékfüggő diffúzió beépítése nem egyszerű a hagyományos differenciálegyenleteket használó modellekbe, ezért a különböző szerzők inkább a forrás tagokat pontosító újabb és újabb kémiai és fizikai folyamatokat bevezetve próbálják módszerüket finomítani (ami nyilvánvalóan szintén igen fontos). Amennyiben sikerülne a mi módszerünket ötvözni egy részletes kémiai reakciós és egyéb fizikai (pl. fotodisszociációs és porszemcséken történő leülepedést leíró) folyamatokat is tartalmazó modellel, nem csupán a szuperdiffúzió hatását lehetne még pontosabban figyelembe venni, hanem a molekulafelhőkben mérhető relatív elemgyakoriságok eloszlásáról is sokkal reálisabb képet kaphatnánk.

### 3. A Nap turbulens mágneses energiaspektruma és a kioltási függvény kapcsolata

2013-as cikkünkben (Marschalkó és Petrovay) a Nap turbulens mágneses energiaspektruma és az úgynevezett kioltási függvény közötti kapcsolatot vizsgáltuk meg. Az első eredményeket poszteren is bemutattam a SOLAIRE program 2011. május 9–13. között Teistungenben tartott IV. összejövételén, jelen eredményeket pedig 2012. szeptember 3–6. között Budapesten megrendezett 6<sup>th</sup> Workshop of Young Researchers in Astronomy and Astrophysics konferencián adtam elő.

Ebben a fejezetben a következő felépítést követem: először röviden bemutatom a Nap fotoszférájára jellemző mágneses jelenségeket (3.1.1) – külön kitérve a kioltási függvényre (3.1.2.) –, majd rátérek munkánk ismertetésére (3.2.). Akárcsak az előbb vizsgált probléma, ez a kutatás is szorosan kapcsolódik a léptékfüggő turbulens áramlásokhoz a Nap fotoszférájában zajló turbulens áramlásokba „befagyott” mágneses tér spektrumának vizsgálata révén.

### 3.1. A Nap felépítése

Ebben a szakaszban röviden bemutatom a Nap felépítését, különös tekintettel az általunk vizsgált fotoszféra jelenségeire, majd rátérek a fotoszferikus mágneses tér, valamint a kutatásunk tárgyát képező kioltási függvény ismertetésére.

#### 3.1.1. A Nap felépítése és mágneses tere

Jelen kutatásunkban a Nap fotoszferikus mágneses terével kapcsolatban végeztünk vizsgálatokat. A fotoszféra a Nap mintegy kétszáz kilométer vastag „léggöre”, melyet közvetlenül meg tudunk figyelni. Naprendszerünk központi égitestjének belsejéről már csak közvetett módon tudunk ismereteket gyűjteni. A Nap magja sugarának mintegy a negyedéig terjed, itt megy végbe az energiatermelő fúzió, mely során a hidrogénmagok héliummagokká alakulnak át. Az így keletkező energia nagyenergiájú fotonok és neutrínók révén távozik a magból. Míg a neutrínók gyakorlatilag akadálytalanul hagyják el a Napot, ez a nagyenergiájú gamma fotonok számára lényegesen tovább tart.

A termonukleáris reakciók során keletkezett elektromágneses sugárzásnak először a radiatív zónán kell áthaladnia, mely nevét az itt lejátszódó energiatranszport-folyamatokról kapta. Mivel a fotonok számára ez a zóna gyakorlatilag átlátszatlan, az átjutás számukra millió éves nagyságrendbe esik a gyakori ütközés, szóródás, elnyelődés és újra kibocsátódás következtében.

Kb.  $0.7 R_{\odot}$ -nál kezdődik a konvektív zóna, ahol az energiatranszport már konvekció útján történik. A fokozatosan csökkenő hőmérséklet következtében a különböző elemek ionizációs foka egyre kisebb lesz, így a kifelé haladó fotonokat azok „tartósan” el tudják nyelni. Az így nyert többletenergának köszönhetően egyes tartományok környezetüknél jobban felmelegednek, sűrűségük lecsökken, így a rájuk ható felhajtó erő a felszín felé indítja őket. Mivel a Nap konvektív zónájának rétegződése szuperadiabatikus, ezért a Schwarzschild-kritérium  $-dT/dP > (\partial T/\partial P)_S$  – értelmében termikus konvektív instabilitás lép fel: megfelelő visszatérítő erő hiányában a melegebb, adiabatikus cellák mindaddig felfelé mozognak, amíg a fenti feltétel teljesül (a környezetüknél hidegebb cellák pedig természetesen lefelé áramlanak ilyenkor).

Az előbbieken ismertetett felosztás a transzportfolyamatokon alapult, viszont ha a napbelső áramlási terét vizsgáljuk, a két zóna erőteljesen eltér egymástól. Míg a radiatív zóna merev testként forog, addig a konvektív zóna differenciálisan, a rotációs sebesség az egyenlítőtől a pólusok felé haladva csökken. A két zóna határán áramlási szempontból átmeneti réteg található, melyet tachoklínának nevezünk. A tachoklína jelenségét a Nap mágneses terének kialakításában betöltött szerepe adja, mivel ez a réteg a dinamó motorja (Spiegel és Zahn, 1992).

Mivel a fizikai paraméterek a Nap belsejében folytonosan változnak, ezért a Nap „fel-

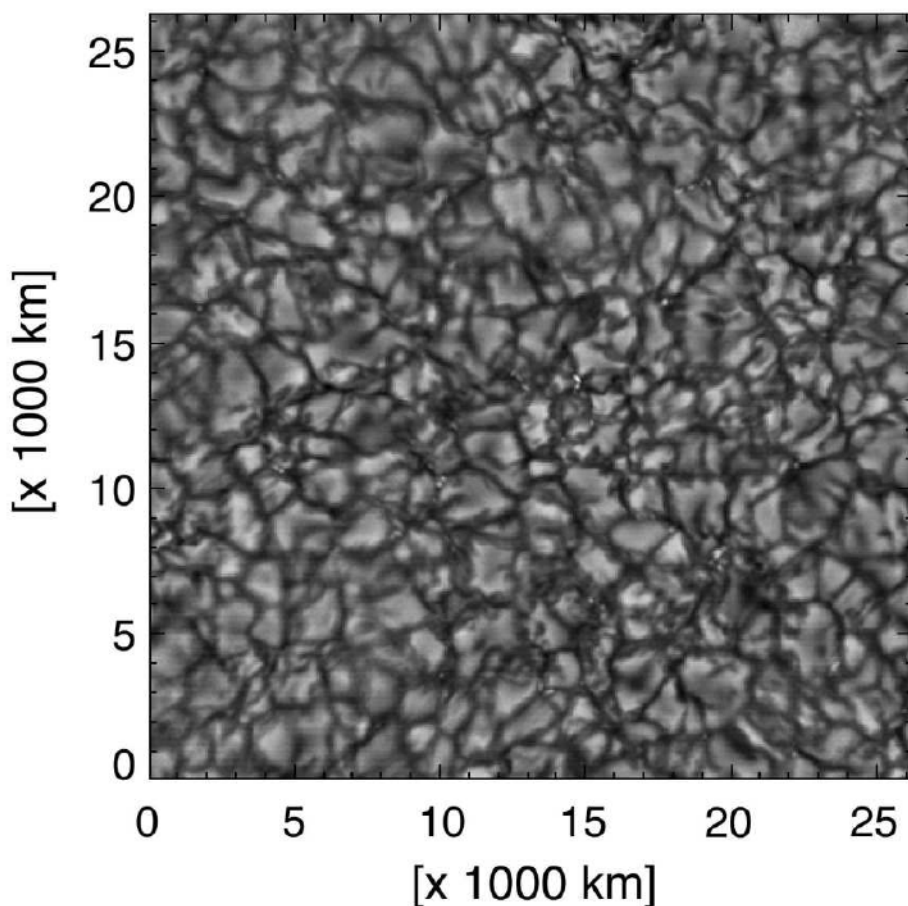


színét” nem lehet egyértelműen meghatározni: az opacitás változásának köszönhetően egy bizonyos határ után már nem látunk mélyebbre, s ezt a határt tekinthetjük a Nap „felszínének”. Efölött helyezkedik el a Nap légköre, mely a napbelsőhöz hasonlóan több tartományra osztható, a felszínhez legközelebbi réteget fotoszférának nevezzük. Mivel az opacitás hullámhosszfüggő, ezért a Nap színképének fotoszferikus vonalai eltérő hőmérsékletű környezetből érkeznek.

Míg a fotoszféra optikailag vastag, addig a naplégkör további rétegei optikailag vékonyak – ezért is tudunk átlátni rajtuk, noha kiterjedésük a fotoszféránál sokkal nagyobb. A kromoszféra speciális körülmények között (pl. napfogyatkozás), vagy egy jellegzetes hullámhosszon (az egyszeresen ionizált kalcium H- és K-vonalában – 394,4 nm) vizsgálva figyelhető meg. A rendkívül magas hőmérsékletű napkorona szintén napfogyatkozáskor, vagy koronográf segítségével tanulmányozható. A kromoszféra és a korona között meg szokás még különböztetni az ún. átmeneti réteget is, ahol a lényegesen hidegebb kromoszféra hőmérséklete hirtelen átvált a napkorona millió fokok hőmérsékletébe. A napkoronát is több részre oszthatjuk: K-, E- és X-korona. A korona magas hőmérsékletére ma még nincs pontos magyarázat, de minden bizonnyal a lokális mágneses tér tulajdonságaival magyarázható, amely nem ér véget a korona határánál. A Nap mágneses tere a napszél révén az egész Naprendszerre kiterjed, a heliopauza a Naptól kb. 85 csillagászati egység távolságban található, de a helioszféra határa a naptevékenység függvényében változik.

Nemcsak a korona extrém magas hőmérsékletéért, hanem a naptevékenység klasszikus formáiért is a Nap mágneses tere a felelős. A legismertebbek ezek közül a napfoltok, amelyekről már a Kr. e. IV. századból is vannak feljegyzések, de tudományos megfigyelésük csak a távcső feltalálása, majd XVII. század eleji égbolt felé fordítása óta idült meg. Észlelései alapján már Galilei kikövetkeztette, hogy a napfoltok a Nap felszínén találhatók, nem pedig csupán központi csillagunk előterében elúszó képződmények. Schwabe 1844-ben tette közzé megfigyelését, miszerint nagyjából 10 évente az átlagosnál több napfolt figyelhető meg. 1848-ban Wolf már bevezette a napfolt-relatívszámot is. Az azóta eltelt időben a napfoltokról igen sokat megtudtunk: számuk kb. 11 éves – a mágneses polaritás változását is figyelembe véve 22 éves – ciklussal változik; a napfoltok keletkezési helye eleinte kb. 30 fokos heliografikus szélességen található, majd a ciklus vége felé közeledve egyre közelebb kerül az egyenlítőhöz (Spörer-törvény); a foltcsoportok vezető és követő része ellentétes polaritású, egy cikluson belül a vezető foltok polaritása a két félgömbön ellentétes, majd a következő ciklusban a polaritások megfordulnak (Hale-szabály); a foltcsoportok egyenlítővel bezárt dőlésszöge a napciklus folyamán változik (Joy-szabály).

A napfoltok egy sötétebb umbrából és az azt körülvevő, világosabb, szálás szerkezetű penumbrából állnak. A napfoltok magányosan és nagyobb foltcsoportok tagjaként is megjelenhetnek. A napfoltok tulajdonképpen a nap felszínét átdöfő mágneses fluxuscsovek,



17. ábra. *A nyugodt fotoszféráról a Hinode űrszonda által készített felvétel*

melyek mágneses tere környezetükénél jóval erősebb. Környezetükkel csak úgy lehetnek nyomásegyensúlyban, ha hőmérsékletük kisebb – hiszen a bennük található plazma mágneses többletnyomása miatt gáznyomásuk a környező plazmáénál kisebb, s így hőmérsékletük is alacsonyabb –, ezért látszanak sötétebbnek. A napfoltcsoportok környezetében található kis fényesebb pontokból álló képződmények a fotoszferikus fáklyák (a foltokon kívüli gyenge mágneses terek).

A Nap felszínén mindenhol megfigyelhető granulációs szerkezet a konvektív zónában fel-, illetve lefelé áramló konvektív cellák következménye. A granulák mérete 1-2 ívmásodperc körül van (kb. 750-1500 km), élettartamuk néhányszor 10 perc, a bennük áramló plazma sebessége – ami kb. 7 km/s – jelentősen meghaladja a fotoszferikus hangsebességet. A modern űrszondák (SOHO, Hinode) egyre jobb felbontóképességének köszönhetően a fotoszféra granulációs szerkezete ma már kiválóan tanulmányozható (17. ábra). A granulációs szerkezetet kialakító konvekciós cellák méreténél mintegy hússzor nagyobb cellák alakítják ki a csupán Doppler-képeken megfigyelhető szupergranulációs szerkezetet.

A naptevékenység nemcsak a fotoszférában, hanem a kromoszférában is megfigyelhető. Itt is találhatunk a környezetüknél fényesebb területeket, ezek a kromoszferikus fáklyák.

Megjelenik a kromoszferikus hálózat is, melynek mintázata tulajdonképpen a fotoszféra szupergranulációs szerkezetét rajzolja ki. A protuberanciák napfogyatkozásakor jól megfigyelhető, igen látványos jelenségek, a Nap gravitációja ellenében a mágneses görbületi erő által megtartott plazmaívek. A filamentumokat korábban a protuberanciáktól eltérő jelenségeknek gondolták, ma azonban már tudjuk, hogy ugyanarról a jelenségről van szó: míg a protuberanciák a napkorong szélén láthatóak, addig a filamentumok ugyanezek a képződmények a napkorongon. A kromoszferikus jelenségek között meg kell még említeni a szpikulákat, melyek tulajdonképpen anyagkidobódások: néhány perces időskálán felemelkednek, majd visszahullanak. Jellemzően fogva különösen a napkorong szélén láthatók.

Már a koronához tartoznak az eruptív jelenségek kiindulási pontjai az ún. koronahurkok, melyek alakja viszonylag gyorsan változik, élettartamuk mindössze néhány nap, vagy hét, s ha a mágneses átkötődés következik be, akkor anyaguk kidobódik az űrbe, látványos CME-ket (Coronal Mass Ejection, vagyis korona-anyagkidobódás) hozva létre. A CME-k a hevesebb flerek (napkitörések) kísérő jelenségei. A flerek folyamamán rövid (egy-két órára, az UV és röntgentartományokban jelentősebb mértékű) felfényesedést figyelhetünk meg, mialatt jelentős mennyiségű energia szabadul fel.

Ha a fenti jelenségeket egyszerre vizsgáljuk meg, nagyon hamar kiderül, hogy a fotoszféra, a kromoszféra és a korona jelenségei igen szoros kapcsolatban állnak egymással. Vannak ugyanis olyan területek a Napon, amelyek kiemelkedő aktivitást mutatnak, ahol a legtöbb a napfolt, legnagyobbak a napfoltcsoportok, legjellegzetesebbek a plázsok (kromoszferikus fáklyák), amelyek felett flereket figyelhetünk meg: ezek az úgynevezett aktív vidékek. Az aktív vidékek közös jellemzője a koncentráltabb, bonyolultabb topológiájú, ezért nagyobb lokális gradiensű mágneses tér.

De milyen is a Nap mágneses tere? A Nap anyagát alkotó plazma vezetőképessége végtelennek, s így mágneses diffuzivitása nullának tekinthető, ezért ideális magneto-hidrodinamikai (MHD) közegként viselkedik. Feltehető továbbá, hogy a Napban található áramlások nem relativisztikusak, így az első Maxwell-egyenletben az eltolási áram elhanyagolható, valamint a Nap anyaga kvázineutrális, ezért a negyedik Maxwell-egyenletben az elektromos töltéssűrűség is nullának vehető. Az általánosított – mozgó közegekben érvényes – Ohm-törvényből és a fenti egyszerűsítések révén nyert Maxwell-egyenletekből levezethető az MHD első alapegyenlete, az úgynevezett indukciós egyenlet:

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}). \quad (47)$$

Mivel ideális MHD közeg esetén ( $\eta = 0$ ) a második tag a jobb oldalon elhagyható, így adódik a befagyás tétele, mely szerint az anyag nem áramolhat a mágneses erővonalakkal szöveget bezáró irányokban. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy ahol a mágneses energiasűrűség a nagyobb (mint például a napszél esetében), ott az anyag kényszerül a



mágneses erővonalak mentén mozogni, ahol pedig a kinetikus energiasűrűség a nagyobb (mint például a fotoszférában), ott az anyag áramlásai viszik magukkal a mágneses erővonalakat. Éppen ez utóbbinak van különös jelentősége a Nap mágneses terét kialakító dinamó-effektus létrehozásában és fenntartásában.

Bár a Nap-dinamó pontos működését ma még nem ismerjük, a legelfogadottabb  $\alpha - \Omega$  modell főbb vonalaiban meg tudja magyarázni a megfigyelésekből levont törvényszerűségeknek megfelelő mágneses tér jelenlétét a Napon. Az  $\Omega$ -effektus mögött a Nap differenciális rotációja áll, amely a mágneses tér poloidális (a hosszúsági körök mentén fekvő) komponensét az egyenlítő menti nagyobb sebességek következtében egyre jobban felcsavarja, így hozva létre a toroidális (az egyenlítővel párhuzamos) térkomponenst. Az  $\Omega$ -effektus a tachoklínában a leghatékonyabb.

Az  $\alpha$ -effektus pontos működése ma még nem teljesen tisztázott, a napdinamó legtöbb vitatott pontja e területen található. Az alapvető kérdés az, miként lesz a toroidális térkomponensből poloidális térkomponens? Az általánosan elfogadott kép szerint a poloidális térre merőleges csavarvonalú áramlások hurokokat képeznek az erővonalakötegeken, amelyek a mágneses diffúzió következtében egyre nagyobb hurkokban egyesülnek, így hozva létre a poloidális térkomponenst. A kérdés csak az, hogy pontosan milyen áramlásokról van szó, s az  $\alpha$ -effektus hol hat. A mai legelterjedtebb dinamók (pl. a Babcock–Leighton-dinamó) szerint a tachoklínában, illetve a konvektív zóna legfelső tartományában történik mindez.

A Nap mágneses terének létrehozásában és fenntartásában e két folyamat szimultán vesz részt. Az aktív vidékek kialakulásának, a Nap mágneses terének, különböző mágneses jelenségeknek (pl. mágneses átkötődések) modellezése a mai napfizikai kutatás igen kiterjedt ága. A következő szakaszban (3.1.2.) röviden bemutatom a kutatásunk tárgyát képező fotoszferikus mágneses teret.

### 3.1.2. A Nap mágneses tere és a kioltási függvény

Bár a Nap fotoszferikus mágneses terének szerkezete a mai napig nem ismert kimerítő részletességgel – a nyugodt Nap kis léptékű mágneses teréről igen jó összefoglalást ad de Wijn és mtsai (2009) cikke –, a Zeeman- és a Hanle-effektusnak köszönhetően egyre többet tudunk meg róla. Az a kérdés azonban még továbbra is nyitott, hogy mekkora mágneses tér rejtőzködik még, amelyet műszereink elégtelen felbontása miatt nem tudunk megfigyelni. Mivel a Zeeman és a Hanle effektus eltérő erősségű terek kimutatására érzékeny, ezért a Nap mágneses terének kutatása kezdetén dichotomikus kép alakult ki. A kG nagyságrendű mágneses terű fluxuscsovek jelenléte már a kezdetektől fogva elég nyilvánvaló volt, de még nem ismerték, mi tölti ki a közöttük található teret.

Bár matematikailag működő megoldásnak bizonyult a Nap mágneses terét szétbontani

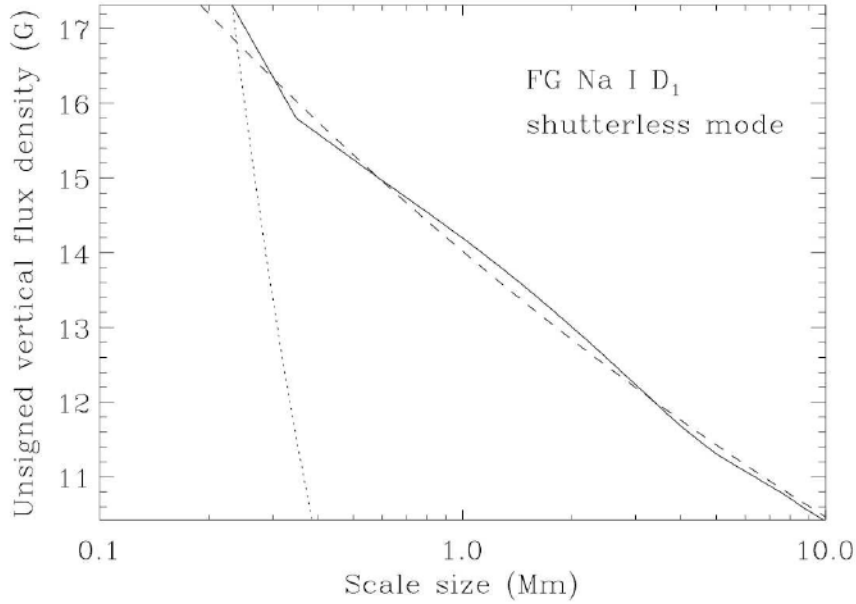


intermittens, nagy térerősségű fluxuscövekre és a köztük levő mágneses tértől mentes területekre, ez azonban fizikailag nyilván nem lehet valós, hiszen a fotoszféra ideális MHD közegként viselkedő plazmája folyamatosan mágneses teret generál. Sokkal közelebb áll a fizikai realitásokhoz Jan Stenflo 1982-es modellje, ahol a mágneses erővonalkötegek közötti területet a lényegesen gyengébb, erősen csavarodott, mikroturbulens mágneses tér tölti ki. Érdekes, hogy a numerikus szimulációk nem utalnak erre a kettősségre (Stenflo, 2011): azokban ugyanis nem található olyan ugrás a térerősségekben, ami szétválasztaná a két komponenst, a mágneses tér folyamatosan változik a minimális és maximális értékek között. Jan Stenflonak (2011) sikerült először a Zeeman-effektusra hagyatkozva, speciális maszkolási technikával is kimutatni a mágneses tér e két különböző populációját (a granulák közötti vonalak erős és a fényes granulák gyenge, erősen csavarodott, turbulens terét) a nyugodt Nap granulációs szerkezetében, a korábbiaknál lényegesen jobb felbontású Hinode-mérések alapján.

A fényes granulákban található gyenge, erősen feltekeredett mágneses tér jelentős része mérőműszereink aktuális felbontási határának köszönhetően rejtve marad a szemünk előtt. Az erősen csavarodott térerősség-vonalak ugyanis többször átdöfik a felszínt egy felbontási elemen belül, így ugyanazon mágneses erővonal térerősségvektora hol befelé, hol pedig kifelé mutat. Így egy felbontási elemen belül ugyanaz a térerősség érték egyszer pozitív, egyszer pedig negatív előjellel járul hozzá a látóirányú fluxushoz, ami így kioltást eredményez, a mért fluxus pedig lényegesen kevesebb lesz.

Nem véletlen tehát, hogy a 70-es években még a fotoszferikus mágneses fluxus 90%-át a fluxuscövekből származónak gondolták. Az egyre jobb felbontású műszereknek köszönhetően azonban a rejtőzködő tér egyre nagyobb részét ki tudjuk már mutatni. Pietarila Graham és mtsai (2009) vezették be az ún. *kioltási függvény* fogalmát, amelyet a következőképpen kaphatunk meg: ábrázoljuk a felbontási elemek méretének függvényében a megfigyelt előjel nélküli, látóirányú fluxussűrűséget. A kioltási függvény – mivel a mágneses tér erősen turbulens és fraktálszerű – jól közelíthető hatványfüggvénnyel, melynek kitevőjére a szerzők 0,26 körüli értéket kaptak.

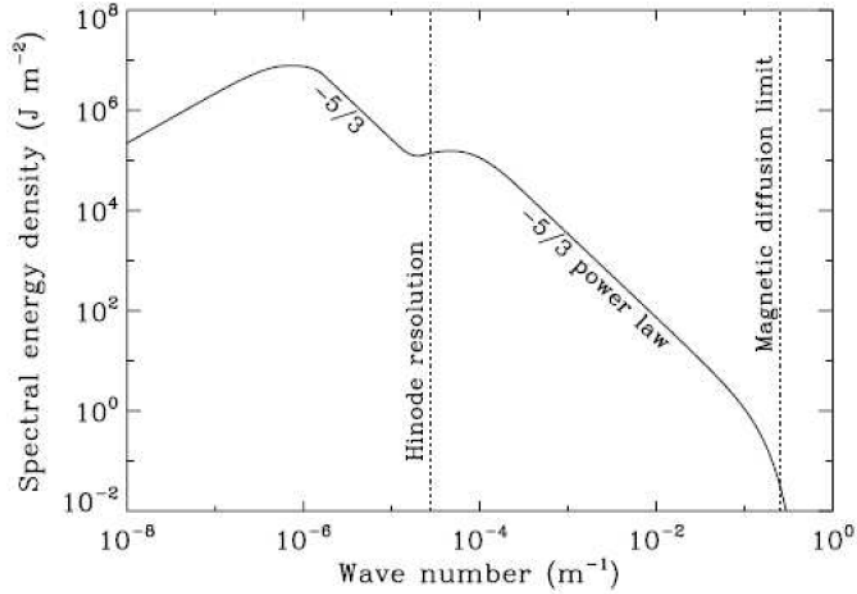
A felbontás növelésével (javításával) a kioltási függvény az eredeti tér spektrumának függvényében különbözőképpen viselkedik. Ha a térerősség a látómezőben mindenhol pozitív, vagy negatív, akkor természetesen nem történik kioltás, vagyis az előjel nélküli, látóirányú mágneses fluxussűrűség nem függ az észlelőműszerek felbontásától, a kioltási függvény kitevője 0 lesz. Ha viszont csak nulla körüli, véletlen fluktuációkról van szó, akkor az előjel nélküli fluxussűrűség Poisson-eloszlást fog követni, így a kioltási függvény kitevője 1 lesz. Stenflo (2011) a fent említett szétválasztásnak köszönhetően pontosítani tudta a kioltási kitevő Pietarila Graham és mtsai (2009) által kapott értékét (18. ábra), amelyet kb. feleakkorára csökkentett (0,127).



18. ábra. A kioltási függvény, vagyis a látóirányban mért előjel nélküli fluxussűrűség a felbontási méret függvényében. Az ábra forrása: Stenflo (2011); folytonos vonal: Jan Stenflo által a Hinode SOT/FG képek alapján meghatározott kioltási függvény, szaggatott vonal: a  $-0,127$  meredekségű illesztett görbe, pontozott vonal: a random zaj következtében adódó görbe

A két populációnak köszönhetően Stenflo (2012) szerint a mágneses tér energispektrumának inerciális tartományában is törés jelentkezik (lásd 19. ábra), ami a konvektív instabilitás miatt bekövetkező spontán kollapszus – a mágneses fluxuscsovek kialakulásához vezető folyamat – következménye. A kollapszust a külső gázyomás hajtja, ami a fluxuscsovek léptékén (10-100 km) igen hatékonyan juttat energiát a mágneses térbe, ami gyengítheti a kioltási függvény és a mágneses spektrum közötti kapcsolatot.

Természetesen a felbontást növelve egy idő után elérjük a disszipációs határt (ami kb. 10-60 km körül van, összehasonlításképpen a Hinode felbontása 200 km), s ezután a kioltási függvény már nem lesz érvényes. Kérdéses azonban, hogy a Hinode-adatok alapján kapott hatványfüggvény szerinti összefüggés egészen addig érvényben marad-e. Ugyancsak eltérések várhatók ettől az összefüggéstől az aktív vidékeket is magukba foglaló mérettartományok esetén (igaz, ez már nem a fent – s általunk is – vizsgált nyugodt Nap esete). Mi azt szeretnénk megvizsgálni, vajon található-e összefüggés a turbulens mágneses energiaspektrum és a kioltási függvény kitevője között, lehet-e a kioltási függvény alapján a nyugodt Nap turbulens mágneses terének spektrumára következtetni?



19. ábra. A kétféle mágneses tér-populáció jelenléte az energia spektrális eloszlásában. Az ábra forrása: Stenflo (2012)

### 3.2. A Nap turbulens mágneses energiaspektrumával és a kioltási függvénnyel kapcsolatos vizsgálataink

Levezettünk egy, a turbulens mágneses energiaspektrum és a kioltási függvény kapcsolataira vonatkozó analitikus összefüggést, melyet Monte Carlo-szimulációkkal kívántunk igazolni, illetve érvényességi körét megállapítani. Vizsgálatainkat egy-, illetve kétdimenziós magnetogramokon végeztük.

E kutatási eredményeinket bemutató szakaszban a következő felépítést követem: először felvázolom a kiindulópontként használt analitikus összefüggés felírásához vezető utat (3.2.1.), majd ezt követően tárgyalom a Monte Carlo-szimulációk segítségével kapott egy- és kétdimenziós futtatások eredményeit (3.2.2.), végül pedig összefoglalom, milyen következtetések vonhatók le ezekből (3.2.3.).

#### 3.2.1. A vizsgált analitikus összefüggés

A vizsgált analitikus összefüggés levezetéséhez gondoljunk el egy nulla átlagérték körül fluktuáló kétdimenziós teret, amelyet úgy kapunk, hogy a Nap fotoszferikus mágneses teréről készített térképből (magnetogramból) levonjuk a tér nagy léptékeken vett átlagát. Az így visszamaradt (longitudinális) mágneses tér legyen  $B_0(x, y)$ . Természetesen ezt a mágneses teret nem tudjuk tetszőlegesen nagy felbontással megfigyelni, ezért az  $l_0$  véges felbontású műszereink által észlelt mágneses tér legyen:

$$B(x, y) = \iint B_0(x, y) \text{PSF}(x - x', y - y') dx' dy', \quad (48)$$

ahol PSF az adott  $l_0$  felbontáshoz tartozó pontforrás-függvény. Ennek Fourier-transzformáltja:

$$\hat{B}(k_x, k_y) = \hat{B}_0(k_x, k_y) \cdot \text{MTF}(k_x, k_y; k_0), \quad (49)$$

ahol MTF a modulációs transzfer-függvény, a fenti pontforrás-függvény Fourier-transzformáltja,  $k_0$  pedig a műszer felbontásának ( $l_0$ ) megfelelő hullámszám ( $k_0 = \pi/l_0$ ).

A Nap felszínének síkjában (mivel a Nap sugara sokszorosa a fotoszféra mélységének, ezért nyugodtan beszélhetünk síkról) MTF egyedül a  $k$  hullámszámtól függ. A legegyszerűbb (bár fizikailag nem valós) esetben a modulációs transzfer-függvény a következőképpen néz ki:

$$\text{MTF}(k; k_0) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k \leq k_0 \\ 0 & \text{ha } k > k_0. \end{cases} \quad (50)$$

Sokkal valóságosabb elgondolás, ha a kisebb struktúrák is – igaz, egyre kisebb mértékben – hozzájárulnak a megfigyelt magnetogramhoz:

$$\text{MTF}(k; k_0) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k \leq k_0 \\ ik_0/k & \text{ha } k > k_0. \end{cases} \quad (51)$$

Az elsőt (50) nevezzük A, a másodikat (51) pedig B esetnek. (Meg kell jegyeznünk, hogy a valóságban a műszerek PSF profilja folytonos – például Gauss-eloszlással leírható –, ezért szigorúan véve sem az A, sem a B eset nem teljesül.) Amint látni fogjuk, az egyre jobb felbontásnak ( $l_0$  egyre kisebb, s így  $k_0$  egyre nagyobb értékei esetén) köszönhetően láthatóvá váló mágneses energia mértéke a B esetben (de analógia segítségével az is könnyen belátható, tetszőleges MTF-et használva is) csak egy konstans faktoriall tér el az A esettől.

Jelöljük a mágneses energia látóirányú komponensének spektrumát  $E_k$ -val (a jelöléseket tekintve most is a 0 indexű mennyiségek a valódi spektrumra, míg az anélküli mennyiségek a (véges felbontású) műszerekkel megfigyelt spektrumra vonatkoznak):

$$E_k = \frac{1}{2} \hat{B}(k) \hat{B}^*(k). \quad (52)$$

Az  $l_0$  felbontású műszerrel megfigyelt teljes mágneses energia a modulációs transzfer-függvény ismeretében a következő módon számítható ki:



$$\begin{aligned}
E(k_0) &= \int_0^\infty E_k dk = \int_0^\infty E_{0,k} |\text{MTF}(k_x, k_y)|^2 dk \\
&= \int_0^{k_0} E_{0,k} dk + \int_{k_0}^\infty E_{0,k} \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 dk,
\end{aligned} \tag{53}$$

ahol a legutolsó tag egyedül a B esetben jelenik meg.

Tegyük fel, hogy a turbulens mágneses energia spektruma hatványfüggvény alakú. Ezzel nem teszünk különösebben nagy megszorítást, hiszen az 1.1.2. szakaszban is láttuk, hogy a turbulens áramlások spektrumát (legalábbis az inerciális tartományban) hatványfüggvénnyel lehet közelíteni. Ez a nyugodt Nap mágneses spektrumára is igaz – bár az aktív vidékek jelenléte esetén azonban már koncentrált erővonalkötegekkel is találkozunk, ezért ott már nem rendelhető egy egyértelmű hatványkitevő a teljes mérettartományhoz: Goode és mtsai (2010) például cikkükben a 2. ábrán bemutatják a kinetikus és a mágneses energia spektrumát, amelyen jól látszik, hogy a görbék meredeksége a különböző mérettartományokban változik. Mivel mi a nyugodt Nap mágneses spektruma és a kioltási függvény kapcsolatát vizsgáljuk, ezért nyugodtan használhatunk egy kifejezett hatványfüggvényt a teljes vizsgált tartományra:

$$E_{0,k} = E_{0,k_0} \left(\frac{k}{k_0}\right)^\alpha. \tag{54}$$

Ha  $\alpha > -1$ , akkor az (53) egyenletben az utolsó tag a következő formában írható fel:

$$\int_{k_0}^\infty E_{0,k} \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 = C(\alpha) k_0 E_{0,k_0}, \tag{55}$$

ahol

$$C(\alpha) = \int_1^\infty u^{\alpha-2} du. \tag{56}$$

Végül deriváljuk az (53) egyenletet  $k_0$  szerint:

$$\begin{aligned}
E'(k_0) &= E_{0,k_0} + C(\alpha) (1 + \alpha) E_{0,k_0} = \\
&[1 + C(\alpha) (1 + \alpha)] E_{0,k_0}
\end{aligned} \tag{57}$$

Ebből jól látszik, hogy az A és B eset közötti különbség csak a  $[1 + C(\alpha) (1 + \alpha)]$  tényezőben tér el egymástól, amelynek értéke az A esetben 1.

Az  $l_0$  felbontású észlelőműszer szerepét teljesen általánosan is megadhatjuk. Hogy a fenti két példától ne távolodjunk el túlságosan, feltesszük, hogy a felbontási határhoz

csak egy karakterisztikus lépték rendelhető ( $k_0$ ), ebben az esetben a modulációs transzferfüggvény egyedül a  $k/k_0$  értéktől függ. Ekkor az (53) egyenlet a következő alakot veszi fel ( $\tilde{k} = k/k_0$ ):

$$\begin{aligned} E(k_0) &= \int_0^\infty E_k dk = \int_0^\infty E_{0,k} |\text{MTF}(k/k_0)|^2 dk \\ &= k_0 E_{0,k_0} \int_0^\infty \tilde{k}^\alpha |\text{MTF}(\tilde{k})|^2 d\tilde{k} \end{aligned} \quad (58)$$

Ennek megfelelően az (57) összefüggés általános alakja pedig:

$$E'(k_0) = E_{0,k_0} \int_0^\infty \tilde{k}^\alpha |\text{MTF}(\tilde{k})|^2 d\tilde{k} \quad (59)$$

Ebből pedig az látszik, hogy a megfigyelhető mágneses energiának a felbontás javulása következtében fellépő növekedése – a mérőműszerre jellemző modulációs transzferfüggvény alakjától függetlenül – a mágneses energia spektrumának az  $l_0$  felbontáshoz rendelhető  $k_0$  hullámszámnál vett értékével ( $E_{0,k_0}$ ) arányos.

E növekedési arány – és így a turbulens mágneses energia spektruma – és a kioltási függvény közötti kapcsolat megállapításához néhány feltételezést kell tennünk. Az egyik az, hogy az eredeti magnetogram –  $B_0(x, y)$  – önhasonló (vagyis fraktálszerű). Ez a feltételezés hatványfüggvény alakú spektrum esetén természetesen megtehető. Jelöljük  $F$ -vel a mágneses tér négyzetének átlaga és a mágneses tér abszolút értéke átlagának négyzete révén képzett hányadost:

$$F = \langle B^2 \rangle / \langle |B| \rangle^2. \quad (60)$$

$F$  értékét  $|B|$  eloszlása (sűrűségfüggvénye) határozza meg, de lépték-invariáns (fraktálszerű) tér esetén  $F$ -nek függetlennek kell lennie a felbontástól. Ez pedig csakis úgy teljesülhet, ha mind  $\langle B^2 \rangle$ , mind pedig  $\langle |B| \rangle$  hatványfüggvény szerint skálázódik:

$$\langle B^2 \rangle \sim k_0^{2\kappa}, \text{ ha } \langle |B| \rangle \sim k_0^\kappa. \quad (61)$$

E hatványfüggvények kitevőjében szereplő  $\kappa$  pedig éppen a 3.1.2. szakaszban bemutatott kioltási függvény kitevője. A (61) kifejezés deriváltját felhasználva (s figyelembe véve a mágneses tér erősségének és energiájának kapcsolatát kifejező (52) összefüggést) az (57) egyenlet alapján azt kapjuk, hogy:

$$E_{0,k} \sim k^{2\kappa-1}. \quad (62)$$

Így pedig a turbulens mágneses energiaspektrum kitevője ( $\alpha$ ) és a kioltási függvény kitevője

( $\kappa$ ) között adódik a következő összefüggés:

$$\alpha = 2\kappa - 1. \quad (63)$$

A referálási folyamat során derült ki, hogy összefüggésünk egy általánosabb kapcsolat speciális esete (Vainshtein és mtsai, 1994). Levezetésünkben nem vettük figyelembe ugyanis az intermittenciát (a Nap fotoszférájában található áramlások ugyanis intermitensek), ellenben a megfigyelésekhez használt műszerek véges felbontását – szemben a fenti szerzőkkel – igen. Nyilván a (63) összefüggés korlátozottan lesz érvényes; az általam végzett Monta Carlo-szimulációk legfontosabb szerepe éppen az volt, hogy megnézzük, milyen korlátok között alkalmazható a fenti reláció.

Az egyik legfontosabb megkötés már egyből a (63) relációra pillantva felismerhető:  $\alpha$  értékének mínusz egynél nagyobboknak kell lennie:

$$\alpha > -1. \quad (64)$$

Az  $\alpha < -1$  esetben ugyanis a (63) összefüggés negatív  $\kappa$  értékeket eredményez, ami pedig a kioltási függvényről elmondottak értelmében nyilván nem lehetséges, hiszen egyre jobb felbontás esetén nem csökkenhet a mért előjel nélküli mágneses fluxussűrűség. Ez az (53) összefüggésre pillantva is jól látszik: az egyenlet jobb oldalának első integrálja az  $\alpha < -1$  esetekben – az (54) összefüggést behelyettesítve  $E_{0,k}$  helyére – divergál. Ebben az esetben ugyanis figyelembe kell venni, hogy a spektrum inerciális tartománya – vagyis ahol a spektrum hatványfüggvénnyel írható le – korlátozott kiterjedésű, s így az (53) összefüggésben az integrálási tartomány alsó határa 0 helyett valamely  $k_1$  érték lesz, s az integrál értékét is a  $k_1$  körüli tartományok fogják uralni. Ennek következményeként pedig  $E(k_0)$  és a kioltási függvény ( $\chi$ ) független lesz  $k_0$ -tól.

Azt várjuk tehát, hogy a kioltási függvény kitevője nullához fog tartani, ha a turbulens mágneses energia spektrumának kitevője egyre nagyobb negatív értékeket vesz fel ( $\kappa \rightarrow 0$ , ha  $\alpha \rightarrow -\infty$ ). Mivel ebben az esetben a domináns léptékek az  $1/k_1$  érték felbontási értékek körül helyezkednek el, a kioltási függvény alakja ebben a tartományban várhatóan eltér majd a hatványfüggvénytől.

Azt is meg kell jegyeznünk, hogy az (56) integrál is divergál, ha az energiaspektrum kitevője egynél nagyobb ( $\alpha > 1$ ), ami viszont egy felső határt állít fel a levezetett (63) összefüggés érvényességére – valamint a kioltási függvény ( $\chi$ ) hatványfüggvény alakjára – vonatkozóan a B esetben. Mivel ez a határ a modulációs transzfer-függvény (MTF) aktuális alakjától is függ, ezért ebben az esetben nem tudunk olyan általános érvényű felső érvényességi határt megadni formulánk számára, mint az  $\alpha < -1$  fentebb tárgyalt esetében tettük.

### 3.2.2. Monte Carlo-szimulációkkal kapott eredmények és azok értelmezése

A (63) összefüggés igazolására, valamint az érvényességi tartományán kívüli ( $\alpha \lesssim -1$ )  $\alpha - \kappa$  kapcsolat meghatározása érdekében Monte Carlo-szimulációkat végeztem. A lényegesen gyorsabb futási idők miatt az első benyomások megszerzése érdekében először egy dimenzióban vizsgáltam meg a problémát, majd a biztató eredmények után a kétdimenziós futtatásokat is elvégeztem. A mágneses teret spektruma alapján a Fourier-térben építettem fel, majd visszatranszformáltam a valós térbe, ahol maszkolás segítségével a kioltási függvényt, illetve a kioltási kitevőt is meghatároztam.

A mágneses tér felépítéséhez használt spektrum  $n$  diszkrét módusból állt, a módusokhoz rendelt hullámszámok kettő hatványai szerint követték egymást (ez teljesen analóg az 1.1.2. szakaszban, a Kolmogorov-spektrumnál bemutatott gondolatmenettel, csak ott dekádok szerepeltek). Minden  $k_0$  és  $2k_0$  közötti tartományhoz hozzárendeltük a benne található összenergiát ( $E(k_0)$ ):

$$\int_{k_0}^{2k_0} E_k dk = \int_{\log_2(k_0)}^{\log_2(k_0)+1} k E_k d \log_2 k. \quad (65)$$

Mivel  $E_k \sim \alpha$ , ezért  $k E_k \sim 1 + \alpha$ , így az (52) összefüggést felhasználva megadhatjuk a mágneses teret:  $B_k \sim k^{(1+\alpha)/2}$ . Ennek segítségével a Fourier-módusok amplitudójára a következő összefüggést kapjuk:

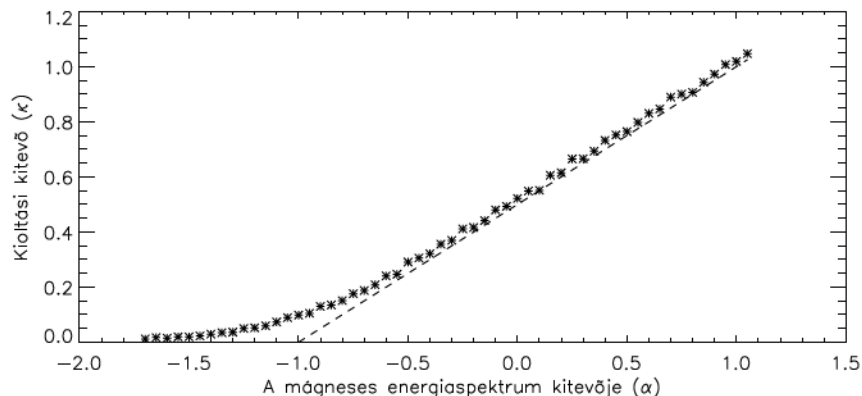
$$\hat{B}_j = \hat{B}_{j,0} e^{i\phi_j} \text{ ahol } \hat{B}_{j,0} \sim k^{(1+\alpha)/2}. \quad (66)$$

Itt  $j = 1..n$ , a  $\phi_j$  fázisok pedig véletlenszerűek. Az egydimenziós esetben maximálisan  $n = 14$  módust vettem figyelembe, a számításokat pedig  $N = 2^n$  méretű rácson végeztem. Mivel (65) alapján a vizsgált módusok 2 hatványai szerint növekednek, ezért a fenti rácsméretválasztással az összes módust egyaránt figyelembe tudtuk venni. A módusokhoz tartozó hullámszámok a következőképpen határozhatók meg:  $k_j = 2\pi/2^j$  ( $j = 1..n$ ), a mágneses teret pedig a módusokból az inverz diszkrét Fourier-transzformáció segítségével a következő módon kapjuk meg:

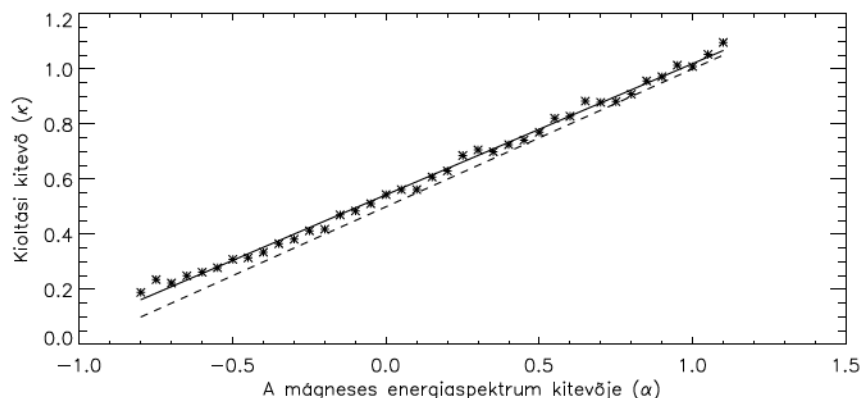
$$B = \sum_{j=1}^n \hat{B}_j e^{ik_j x} + \sum_{j=1}^n \hat{B}_j^* e^{-ik_j x}. \quad (67)$$

Miután az egydimenziós mágneses térképet a fenti módon létrehoztam, már csak a kioltási függvényt – illetve a kioltási kitevőt – kellett meghatároznom. Ehhez a mesterséges magnetogramot különböző – a műszerek felbontási határát jelképező – méretű maszkokkal kellett lefedni, s előjelesen összedni a maszkokon belüli rácpontokhoz tartozó mágneses térerősségeket. Az így nyert érték adta meg azt a térerősséget, amelyet a maszkhoz kapcsolódó felbontással jellemezhető műszerrel a szimulált mágneses térből mérni tudnánk.





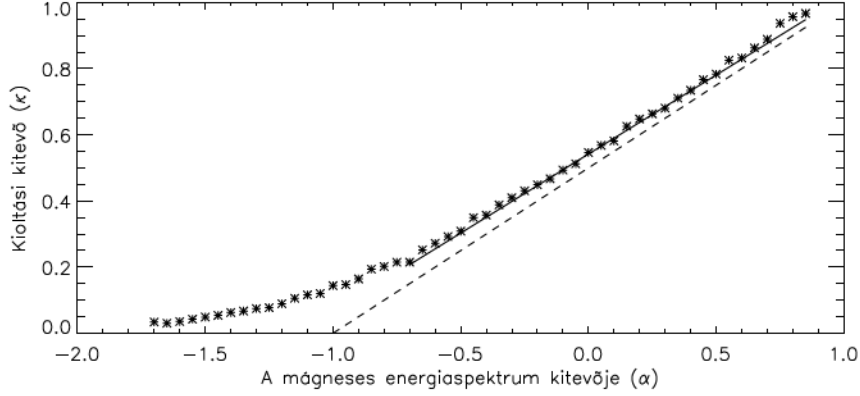
20. ábra. Az  $\alpha - \kappa$  összefüggés ábrázolása az egydimenziós Monte Carlo-szimulációk alapján. A szaggatott vonal a levezetett (63) elméleti relációt jelzi.



21. ábra. Az  $\alpha - \kappa$  összefüggés ábrázolása az egydimenziós Monte Carlo-szimulációk alapján az analitikusan levezetett összefüggés (szaggatott vonallal ábrázolva) alapján viselkedő tartományban. A folytonos vonal az ábrázolt pontokra legjobban illeszkedő egyenes (amelynek egyenlete:  $\alpha = 2,1017\kappa - 1,1417$ ).

Adott felbontás esetén a megfelelő maszkokkal a teljes rácsot lefedtem, s az egyes maszkokon belül „mért” mágneses térerősségek abszolút értékét ( $|B|$ ) figyelembe véve meg tudtam határozni a kívánt előjel nélküli fluxussűrűséget  $\langle |B| \rangle$ . A rácsot az adott méretű maszkokkal az összes lehetséges módon lefedtem, hogy minél átlagosabb értéket kapjak. Ezt az értéket végül hozzárendeltem az adott felbontáshoz.

Ezt az eljárást különböző maszk-méretekre (a maszkok  $2^j$  rácspontot fedtek le, ahol  $j = 1..n$ ) megismételve megkaptam a keresett kioltási függvényt, melyet logaritmikus skálán ábrázolva rögtön látszott, hogy az adott energiaspektrum ( $\alpha$ ) esetén hatványfüggvényt követ-e, avagy sem. A kioltási kitevő ( $\kappa$ ) meghatározásához ezután már csupán egy egyszerű lineáris illesztésre volt szükség. Az illesztésből a teljes rácsot lefedő maszkhoz tartozó értékeket kihagytam, mivel ezek szórása a többi értékhez képest sokkal nagyobb volt.



22. ábra. Az  $\alpha - \kappa$  összefüggés ábrázolása a kétdimenziós Monte Carlo-szimulációk alapján. A szaggatott vonal a levezetett (63) elméleti relációt jelzi. A folytonos vonal az ábrázolt pontokra az analitikus összefüggés érvényességi tartományán belül legjobban illeszkedő egyenest ábrázolja (amelynek egyenlete:  $\alpha = 2,0928\kappa - 1,1341$ ).

A minél átlagosabb kioltási kitevők meghatározása érdekében minden egyes esetet többször lefuttattam (az egydimenziós számítások során százszor, a nagyobb, kétdimenziós rácsok esetében az egyre növekvő számítási igények miatt már csak harmincszor, az egyes módusok ( $j$ ) esetében mindig más véletlenszerű  $\phi_j$  fázisokkal számolva), s az így kapott értékek átlagát vettem az adott  $\alpha$  érték párjának. A számításokat a turbulens mágneses energia spektrumainak igen széles tartományára elvégeztem ( $\alpha \in [-3; 1]$ ). A legrészletebben az  $\alpha \in [-0,9; 0]$  tartományt vizsgáltam.

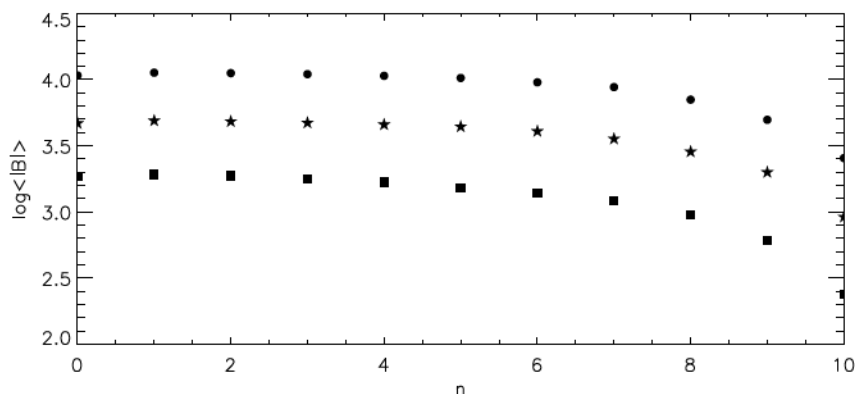
A számítások menete a kétdimenziós esetben is ugyanezt az eljárást követte, mindössze azzal a különbséggel, hogy a fokozatosan növekvő számítási igények miatt kevesebb ( $n = 12$ ) módust vettem figyelembe – s így a kétdimenziós rács lineáris mérete is kisebb lett az egydimenziós esetnél használnál –, valamint az egyes  $\alpha$  értékek esetén is kevesebbszer végeztem el a számítást, mint az egydimenziós változatban. Természetesen a mágneses tér meghatározását is általánosítani kellett a kétdimenziós esetre:

$$B = \sum_{j=1}^n \hat{B}_{(j_x, j_y)} e^{i(k_{j_x}x + k_{j_y}y)} + \sum_{j=1}^n \hat{B}_{(j_x, j_y)}^* e^{-i(k_{j_x}x + k_{j_y}y)}, \quad (68)$$

ahol:

$$\hat{B}_{(j_x, j_y)} = \hat{B}_{(j_x, j_y), 0} e^{i\phi_j} \text{ és } \hat{B}_{(j_x, j_y), 0} \sim (k_x^2 + k_y^2)^{(1+\alpha)/4}. \quad (69)$$

Az egydimenziós számítások során kapott  $\alpha - \kappa$  párok a 20. ábrán láthatók. A szaggatott vonal a levezetett analitikus összefüggést (63) reprezentálja. Jól látható, hogy a turbulens mágneses energia nagyobb kitevőjű spektrumainak esetén a szimulációban kapott kioltási kitevők jól követik az analitikusan levezetett összefüggést (ezt a részt a 21.

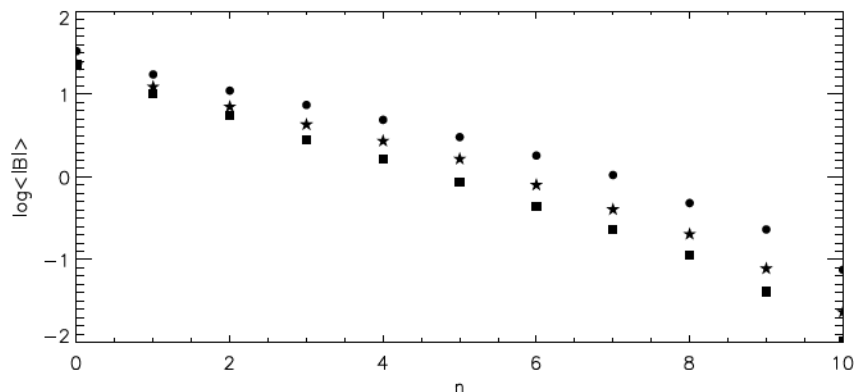


23. ábra. A turbulens mágneses energia különböző spektrumai esetén kapott kioltási függvény. A különböző szimbólumok különböző  $\alpha$  értékekhez tartoznak. Körök:  $\alpha = -1, 7$ ; csillagok:  $\alpha = -1, 6$ ; négyzetek:  $\alpha = -1, 5$

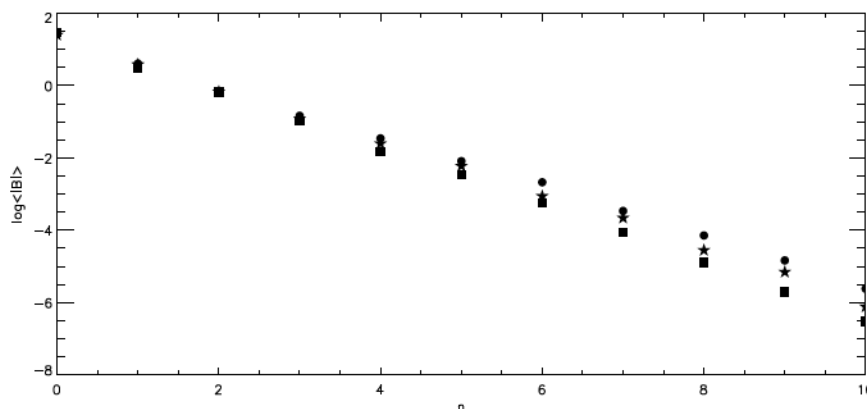
ábrán ki is nagyítottam, szaggatott vonal jelzi az analitikus relációt, míg folytonos vonal az adott szakaszra legjobban illeszkedő egyenest), de az érvényességi határként fentebb említett  $\alpha = -1$  elérése előtt már eltér attól. Ez nem is olyan meglepő, hiszen a negatív kioltási kitevőknek nincs értelme, s az  $\alpha < -1$  kitevőjű spektrumok esetén is pozitív  $\kappa$  értékeket várunk, az  $\alpha - \kappa$  függvényről pedig azt gondoljuk, hogy folytonosan változva, aszimptotikusan tart a nullához.

Az egydimenziós szimulációkban kapott összefüggés pedig éppen így viselkedik: egy darabig követi az analitikusan levezetett (63) összefüggést, majd nagyjából  $\alpha = -0, 7$  környékén egyre jobban elkezdi attól eltérni, s a tovább csökkenő  $\alpha$  értékek esetén  $\kappa$  nullához tart (amint azt az elméleti megfontolások alapján vártuk is). A kétdimenziós esetben is hasonló a helyzet. A 22. ábrán is folytonos vonallal jelöltem a (63) összefüggést követő szakaszra a legjobban illeszkedő egyenest.  $\kappa$  értéke ebben az esetben is nullához tart, ha  $\alpha \rightarrow -\infty$ .

A 23, 24. és 25. ábrák különböző  $\alpha$  értékek esetén számolt átlagos kioltási függvényeket mutatnak. Az ábrák vízszintes tengelyén a „műszerek” felbontási határát jelképező maszkok ( $2^j, j = 1..n$ ) lineáris méretének logaritmus ( $n$ ) szerepel. Az ábrákra tekintve néhány dolog rögtön a szemünkbe ötlök. Míg a 24. és 25. ábrán a kioltási függvény jól láthatóan hatványfüggvény alakot vesz fel, addig a 23. ábrán látható görbék eltérnek az egyenestől, vagyis egyre csökkenő negatív  $\alpha$  értékek esetén – ahogy azt a 3.2.1. szakaszban mondtak alapján vártuk is – a kioltási függvény már nem tekinthető tisztán hatványfüggvénynek, ezért az itt meghatározott (és az 1 táblázatban bemutatott) kioltási kitevők esetén ezt szem előtt kell tartani (a megadott kitevők a még egyenesnek tekinthető szakaszokra illeszkednek). A kioltási függvény alakja ott kezd a hatványfüggvénytől eltérni, ahol a szimulált eredmények is távolodni kezdenek az analitikus összefüggéstől.



24. ábra. A turbulens mágneses energia különböző spektrumai esetén kapott kioltási függvény. A különböző szimbólumok különböző  $\alpha$  értékekhez tartoznak. Körök:  $\alpha = -0,7$ ; csillagok:  $\alpha = -0,6$ ; négyzetek:  $\alpha = -0,5$

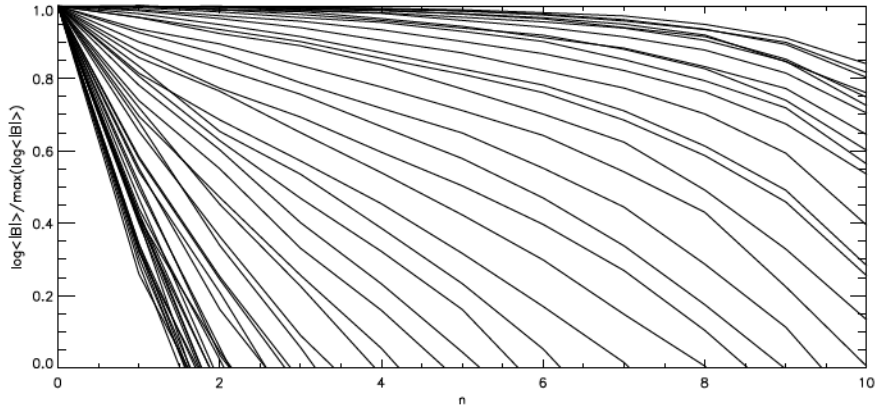


25. ábra. A turbulens mágneses energia különböző spektrumai esetén kapott kioltási függvény. A különböző szimbólumok különböző  $\alpha$  értékekhez tartoznak. Körök:  $\alpha = 0,3$ ; csillagok:  $\alpha = 0,4$ ; négyzetek:  $\alpha = 0,5$

A 26. ábrán egyre normáltan ábrázoltam az  $-1,7 \leq \alpha \leq 0,85$  értékek esetén számolt összes kioltási függvényt. A felső, legkisebb meredekségű, az egyenestől leginkább eltérő görbék a legkisebb  $\alpha$  értékekhez tartoznak, míg az ábrán balra lefelé haladva az egyre meredekebb egyeneseket egyre nagyobb  $\alpha$  értékek esetén kaptam.

Numerikus eredményeink Pietarila és Pietarila Graham (2012) által a kioltási kitevőre talált felső korlát tényével ( $\kappa < 0,38$ ) – ami analitikus összefüggésünk alapján az  $\alpha < -0,24$  korlátnak felel meg – is összhangban vannak. Másfelől azonban a Hinode adatok alapján Stenflo (2011) által meghatározott kioltási kitevő értéke a numerikus számítások alapján a fotoszferikus turbulens mágneses energia spektrumára a következő értéket eredményezi:  $\alpha \simeq -0,95$  (míg az analitikusan levezetett (63) összefüggés alapján  $\alpha = -0,746$  adódna). Ezt a következő szakaszban diszkutálom.



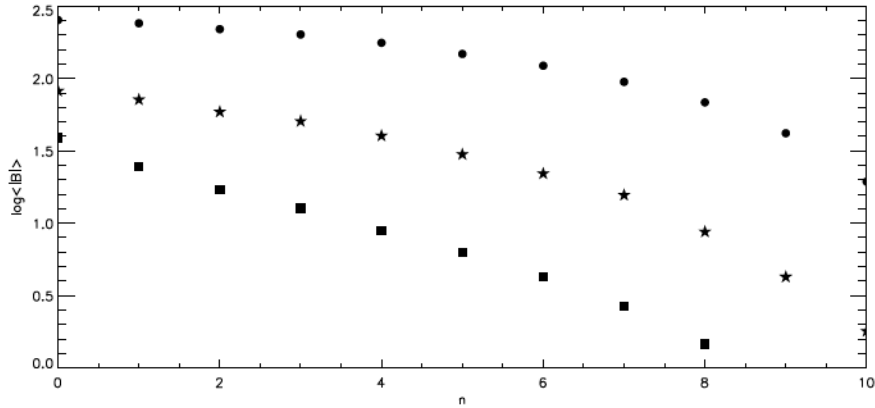


26. ábra. A turbulens mágneses energia különböző spektrumai esetén kapott normált kioltási függvények ( $-1,7 \leq \alpha \leq 0,85$ ). Az egyes görbékhez tartozó  $\alpha$  értékek a jobb felső saroktól a bal alsó sarok felé tartva növekednek.

### 3.2.3. Az eredmények összefoglalása

A  $\kappa$  és  $\alpha$  között kapcsolatot teremtő egyszerű (63) összefüggés levezetéséhez kihasználtuk, hogy a fotoszferikus mágneses tér önhasonló (fraktálszerű) szerkezetet mutat. A kioltási függvény természetéből következően nyilvánvaló volt, hogy összefüggésünk csak az  $\alpha > -1$  kitevőjű mágneses spektrumok esetén lehet érvényes, hiszen a negatív kioltási kitevőknek nincs fizikai jelentése. A (63) összefüggés érvényességét, illetve az összefüggés érvényességi tartományon kívüli alakját Monte Carlo-szimulációk segítségével vizsgáltuk. A kioltási függvények meghatározásához szükséges mesterséges egy- és kétdimenziós mágneses térképeket (magnetogramokat) az adott rács méretéhez illeszkedő mennyiségű diszkrét Fourier-módusok segítségével építettük fel. Az egyes módusok amplitúdóját a különböző mágneses spektrumok  $\alpha$  kitevője alapján, az egyes módusok fázisait pedig véletlenszerűen határoztuk meg. A kioltási függvény alakjának és kitevőjének meghatározásához az elkészült mesterséges magnetogramokat a műszerek felbontási határát jelképező maszkokkal fedtük le. A számítások eredményei a várt érvényességi tartomány nagy részében igazolták az analitikus reláció helyességét, míg azon kívül ( $\alpha < -1$ ) a kioltási kitevők a várt viselkedést mutatták ( $\kappa \rightarrow 0$ , ha  $\alpha \rightarrow -\infty$ ). De vajon milyen, a Nap mágneses terére vonatkozó következtetéseket vonhatunk le szimulációink eredményeiből?

A Nap fotoszferikus mágneses terére jellemző kioltási kitevő felső hataraként Pietarila és Pietarila Graham (2012) által meghatározott érték ( $\kappa = 0,38$ ) munkánk alapján az  $\alpha < -0,24$  megkötést jelenti a turbulens mágneses energia spektrumának kitevője számára. Ez az érték tökéletes összhangban van a ma felmerülő értékekkel. A legalacsonyabb  $\kappa$  érték, amelyet Stenflo (2011) mutatott ki Hinode magnetogramok alapján, a kétféle populáció – a fényes granulákban, illetve az intergranuláris vonalakban található mágneses terek – szétválasztásának segítségével az  $\alpha \simeq -0,95$ ,  $\alpha \simeq -1$  körüli spektrumokat részesíti



27. ábra. A turbulens mágneses energia különböző spektrumi esetén kapott kioltási függvény. A különböző szimbólumok különböző  $\alpha$  értékekhez tartoznak. Körök:  $\alpha = -1,2$ ; csillagok:  $\alpha = -1,0$ ; négyzetek:  $\alpha = -0,8$ .

előnyben.

Ezek alapján annyi biztosan állítható, hogy a mágneses energia spektrális eloszlása a hullámszám csökkenő függvénye a granuláris szerkezetre jellemző mérettartományban (0,2 - 20 Mm), ami szemben áll a kisléptékű, lokális dinamó-szimulációkban alkalmazott  $\alpha > 0$  feltevésekkel (Schekochihin és mtsai, 2007, Pietarila Graham és mtsai, 2010). Goode és mtsai (2010) ugyanakkor szintén negatív kitevőjű mágneses spektrumokat mutatnak be cikkükben, valamint Abramenko és mtsai (2001) eredményeivel – a nyugodt Napról készült magnetogramok közvetlen vizsgálata révén az  $\alpha \simeq -1,3$  összefüggést vezették le – is összhangban vannak az általunk kapott eredmények. Amint az 1. táblázatból is látható – s figyelembe véve, hogy a kioltási függvények ebben a tartományban kezdenek eltérni a hatványfüggvény alaktól (lásd: 27. ábra) –, egyáltalán nem zárható ki az  $\alpha = -1$  kitevőjű spektrum lehetősége, ami pedig annak a jele, hogy a turbulens mozgások a nagyobb léptékű tereket passzív módon szállítják, ezáltal erősítve azokat. Igaz, ebben az esetben azt kellene látnunk, hogy az előjel nélküli mágneses tér átlaga és a mágneses tér átlagának abszolút értéke azonos nagyságrendbe esik ( $\langle |B| \rangle \sim |\langle B \rangle|$ ), ezt azonban eddig nem figyelték meg (Lites, 2011).

Mindez pedig azt veti fel, hogy a fotoszferikus turbulens mágneses tér dinamómechanizmus révén keletkezik, de ez a dinamómechanizmus nem az inerciális tartományban működik, ahogy azt a jelenlegi szimulációkban feltételezik, hanem a betáplálási tartomány léptékein, vagy afölött. Ez talán annak a következménye, hogy a szoláris plazmára jellemző mágneses Prandtl-szám ( $P_m$ ) sokkal kisebb, mint amelyeket a mai szimulációkban – numerikus megkötések miatt – alkalmaznak. Vannak arra utaló jelek is, hogy az ilyen alacsony Prandtl-számoknál a dinamó kialakulásához szükséges kritikus mágneses Reynolds-szám ( $Re_m$ ) sokkal magasabb, mint  $P_m \simeq 1$  esetén, ami megakadályozhatja a dinamó kialakulá-

sát az inerciális tartományban. Nagyobb léptékeken azonban a mágneses Reynolds-szám értéke elég magas lehet a dinamó létrejöttéhez. Ugyanakkor az is lehetséges, hogy a kis léptékű dinamót egy alapvetően más jellegű fizikai folyamat hozza létre.

Túl messzire menő következtetéseket azért nem szabad levonni, ugyanis a jelen vizsgálatok még egy jelentős egyszerűsítéssel bírtak: a mágneses tér felépítése során véletlenszerű fázisokat alkalmaztunk. A valóságban azonban a különböző módusokhoz tartozó fázisok nem véletlenszerűek. A fotoszferikus turbulens mágneses tér közismerten igen jellegzetes struktúrájú, amint azt a 3.1.2. szakaszban is bemutattam. A véletlen fázisokkal létrehozott magnetogramok „amorf” szerkezete azonban eltér a valódi mágneses térképeken található hálózatközi térkoncentrációkba, intregranuláris vonalakba szerveződő mágneses tértől. Jelenleg nem tudjuk pontosan meghatározni, mennyiben adnak más eredményeket a véletlenszerű fázisokkal számolt szimulációk, mint adnának a valós magnetogramokra jellemző fraktálszerkezetet (Lawrence, Cavidad és Ruzmaikin, 1996; Criscuoli és mtsai, 2007) tükröző fázisok.

Bár a meghatározott fázisszerkezetű magnetogramok elkészítése további terveink között van, a véletlenszerű fázisokkal készített mágneses térképek vizsgálata révén is igen hasznos információkat szereztünk a kioltási függvény és a turbulens mágneses energia spektrumának kapcsolatáról. Egyrészt igazoltuk az analitikusan levezetett (63) összefüggést, valamint megismertük az érvényességi tartományán kívüli  $\alpha - \kappa$  értékpárokat is. Ezt a képet pontosíthatja a konkrét fázisokkal felépített magnetogramok vizsgálata, de a mostanitól teljesen eltérő eredményeket biztosan nem kapnánk.

$\alpha$	$\kappa$		$\alpha$	$\kappa$
-1.70	-0.0339		-0.40	-0.3571
-1.65	-0.0303		-0.35	-0.3881
-1.60	-0.0354		-0.30	-0.4097
-1.55	-0.0426		-0.25	-0.4309
-1.50	-0.0488		-0.20	-0.4490
-1.45	-0.0540		-0.15	-0.4672
-1.40	-0.0627		-0.10	-0.4934
-1.35	-0.0672		-0.05	-0.5124
-1.30	-0.0748		0.00	-0.5467
-1.25	-0.0774		0.05	-0.5680
-1.20	-0.0894		0.10	-0.5815
-1.15	-0.1058		0.15	-0.6258
-1.10	-0.1160		0.20	-0.6480
-1.05	-0.1201		0.25	-0.6636
-1.00	-0.1441		0.30	-0.6803
-0.95	-0.1469		0.35	-0.7110
-0.90	-0.1642		0.40	-0.7344
-0.85	-0.1935		0.45	-0.7668
-0.80	-0.2020		0.50	-0.7835
-0.75	-0.2148		0.55	-0.8256
-0.70	-0.2149		0.60	-0.8324
-0.65	-0.2520		0.65	-0.8627
-0.60	-0.2721		0.70	-0.8889
-0.55	-0.2926		0.75	-0.9369
-0.50	-0.3087		0.80	-0.9571
-0.45	-0.3495		0.85	-0.9670

1. táblázat. A kétdimenziós szimulációk során kapott  $\alpha$  és  $\kappa$  értékpárok



## 4. Összegzés

Doktori értekezésemben két különböző, turbulenciával kapcsolatos, léptékfüggő asztrofizikai problémát vizsgáltam meg a Fourier-analízis eszköztárának igénybevételével. Az első téma a szuperdiffúzió hideg felhőmagokban kialakuló relatív elemgyakoriságokra gyakorolt hatásával foglalkozik. A felhő egy adott pontjában valamely elem mennyisége több okból is változhat, melyek közül a diffúzió és a kémiai reakciók a legfontosabbak. Míg ez utóbbiak szerepét igen részletes vizsgálatoknak vetették alá (Herbst és Klemperer, 1973; Xie és mtsai, 1995; Yate és Millar, 2003), a diffúziót csak igen egyszerű modellekkel vették figyelembe. A csillagközi anyagban jelen levő turbulencia következtében azonban a molekulafelhőkben zajló folyamatok leírására nem elégséges a hagyományos diffúzió, mivel a jellemzően többléptékű turbulens áramlások esetén kézenfekvő az anomális diffúzió használata. Vizsgálataink során a kémiai reakciós hálót a diffúziómentes egyensúlyi megoldás alapján felírt forrásfüggvénnyel helyettesítettük, konstans diffuzivitás helyett pedig léptékfüggő diffúziós együtthatót használtunk. Ez utóbbi miatt egyenleteinket csak a Fourier-térben tudtuk megoldani. Az általam IDL-ben megírt numerikus kód tesztelésére először analitikusan is megoldható kezdeti eloszlásokat vizsgáltam, majd egyre reálisabb eseteket is megnéztem. A kapott eredmények azt mutatják, hogy a hideg felhőmagokban uralkodó viszonyokat reálisabban leíró anomális diffúziót használva a kapott eredmények szignifikánsan eltérnek a hagyományos diffúzióval számolt eloszlásoktól. Az oxigénmolekula relatív gyakoriságának alakulását megnézve pedig azt találtuk, hogy anomális diffúzióval számolva a felhő magjában található  $O_2$  mennyisége kisebb lett, ami a felhő centrumában a megfigyelhez képest több oxigént eredményező korábbi modellek segítségével lehet.

Értekezésem második felében a nyugodt Nap fotoszferikus mágneses terét vizsgáltam. Műszereink elégtelen felbontása következtében a gyenge, erősen csavarodott, mikroturbulens mágneses tér egy része rejtve marad előlünk. Ezt a jelenséget számszerűsíti az úgynevezett kioltási függvény, mely a megfigyelt előjel nélküli, látóirányú mágneses fluxussűrűséget ábrázolja a megfigyeléshez használt műszer felbontásának függvényében. A megfigyelt mágneses tér erősségének a felbontás javulása folytán bekövetkező növekedésének mértéke szoros kapcsolatban van a mágneses tér energiaspektrumával. Mi a kioltási függvény és a turbulens mágneses energiaspektrum kitévője között állítottunk fel egy egyszerű analitikus összefüggést, melynek érvényességi tartományát Monte Carlo-szimulációk során készített mesterséges magnetogramok segítségével meghatároztam, e tartományon belül érvényességét igazoltam, valamint az érvényességi tartományon kívüli összefüggést is felvázoltam. Ez lehetővé teszi, hogy a nyugodt Napról készített mágneses térképek alapján meghatározott kioltási kitévők révén a megfigyelt terület turbulens mágneses energiaspektrumára vonatkozó kijelentéseket tegyünk.



## 5. Summary

In my PhD thesis I examined two different scale dependent astrophysical problems related to turbulence using Fourier analysis. The first one discusses the effect of superdiffusion on fractional abundances of interstellar dark clouds. The number density of an element can vary in a given part of the cloud for several different reasons. Amongst them the most important ones are the chemical reactions and diffusion. As long as the role of the chemical processes were investigated very thoroughly (Herbst & Klemperer, 1973; Xie et al., 1995; Yate & Millar, 2003), diffusion was taken into account in a very simple way. Due to the interstellar turbulence normal Fickian diffusion is inadequate for modelling the diffusive processes in a molecular cloud, since in the case of multiscale turbulent flows is more convenient the use of anomalous diffusion. In our work we substituted the chemical network with a special source term based on the diffusionless equilibrium solution and replaced constant diffusivity with scale dependent diffusivity. Because of the last one we could only work in Fourier space. For testing the IDL code developed by myself first I studied distributions that could be also solved analytically, and only after that I solved the more realistic cases. The results show that using superdiffusion which describes more realistically the physical processes in molecular cloud cores cause significantly different equilibrium distributions than calculations with Fickian diffusion. Solving the fractional abundances of oxygen molecule we found that using anomalous diffusion there is less oxygen in the centre of the cloud than calculating with normal diffusion. It is very appropriate, because the previous models resulted in more oxygen in the cloud centre than the observations.

In the second part of my thesis I studied the photospheric magnetic field of the quiet Sun. Due to the insufficient resolution of our instruments some part of the weak, firmly tangled microturbulent magnetic field is undetectable. The cancellation function is the quantitative description of this phenomenon: this is defined as the unsigned line of sight flux density seen at a finite resolution in a longitudinal magnetogram. The growing rate of the observed magnetic field strength is tightly related to the turbulent magnetic energy spectra. We derived a simple analytical relationship between the exponent of the cancellation function ( $\kappa$ ) and of the turbulent magnetic energy spectra ( $\alpha$ ). I determined the scope of this relationship based on artificial magnetograms made by Monte Carlo simulations and validated it inside this scope. Outside the scope of the analytically derived relationship based on the same Monte Carlo simulations I studied in which extent differs the  $\kappa - \alpha$  relationship from the analytically derived one. The results enable us to get information about the turbulent magnetic energy spectra of the solar photosphere based only the cancellation function calculated from the magnetogram of the quiet Sun.





## Hivatkozások

- Abramenko, V., Yurchyshyn, V., Wang, H., Goode, P. R.: 2001, *SoPh* 201, 225
- Avellaneda, M., Majda, A.J.: 1992, *Physical Review Letters* 4, 41
- Balbus SA, Hawley JF. 1991. *ApJ*. 376:214-22
- Boldyrev, S.: 2002, *ApJ* 569, 841
- Bronstejn, J. N., Szemengyajev, K. A., Musiol, G., Mühlig, H. 2000, *Matematikai kézikönyv* (Budapest: Typo $\TeX$  kiadó)
- Brown, P. D., Charnley, S. B., Millar, T. J.: 1988, *MNRAS* 231, 409
- Choudhuri, A. R. 1998, *The Physics of Fluids and Plasmas* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Criscuoli, S., Rast, M. P., Ermolli, I., Centrone, M.: 2007, *A&A* 461, 331
- Crovisier J., Dickey JM. 1983. *A&A* 122:282-96
- de Avillez, M.A., Mac Low, M.-M.: 2002, *ApJ* 581, 1047
- de Wijn, A. G., Stenflo, J. O., Solanki, S. K., Tsuneta, S.: 2009, *Space Sci. Rev.* 144, 275
- Glover, S.C.O., Mac Low, M.-M.: 2007, *ApJ* 659, 1317
- Goode, Ph. R., Yurchysyn, V., Cao, W., Abramenko, V., Andic, A., Ahn, K., Chae, J.: 2010, *ApJ* 714, 31L
- Edmunds M. G. 1975. *Astrophys. Space Sci.* 32, 483
- Herbst, E., Klemperer, W.: 1973, *ApJ* 185, 505
- Herbst, E., Leung, C. M.: 1989, *ApJS* 69, 271
- Hersant, F., Wakelam, V., Dutrey, A., Guilloteau, S., Herbst, E.: 2009, *A&A* 493, 49
- Hincelin, U., Wakelam, V., Hersant, F., Guilloteau, S., Loison, J. C., Honvault, P., Troe, J.: 2011, *A&A* 530, 61
- Isichenko, M. B.: 1992, *Rev. Mod. Phys.* 64, 961
- Lawrence, J. K., Cavidad, A. C., Ruzmaikin, A. A.: 1996, *ApJ* 465, 425
- Leung, C. M., Herbst, E., Huebner, W. F.: 1984, *ApJS* 56, 231

- Leung, C. M., Kutner, M. L., Mead, K. N.: 1982, ApJ 262, 583
- Lites, B. W.: 2011, ApJ 737, 52
- Marik M. (szerk.), 1989, Csillagászat (Akadémiai Kiadó, Budapest)
- Marschalkó, G.: 2006, PADEU 17, 179
- Marschalkó, G.: 2007, IAUS 237, 443
- Marschalkó, G., Forgács-Dajka, E., Petrovay, K.: 2007, Astron. Nachr. 328, 871
- Marschalko, G., Petrovay, K.: 2013, AN, 334, Issue 9, közlésre elfogadva
- Martínez Pillet, V.: 2013, arXiv:1301.6933
- Millar, T. J., Herbst, E.: 1990, A&A 231, 466
- Petrovay, K.: 2001, Space Sci. Rev., 95, 9
- Petrovay K. 2002, Kozmikus fizika (Budapest, ELTE TTK egyetemi jegyzet)
- Petrovay K., Elméleti asztrofizika 1: Az elméleti asztrofizika fizikai alapjai c. előadáshoz kapcsolódó online jegyzet (<http://astro.elte.hu/kris/afizal/afizal.pdf>)
- Pietarila Graham, J., Danilovic, S., Schüssler, M.: 2009, ApJ 693, 1728
- Pietarila Graham, J., Cameron, R., Schüssler, M.: 2010, ApJ 714, 1606
- Pietarila, A., Pietarila Graham, J.: 2012, SoPh, Online First
- Pope, Stephen B. 2000, Turbulent Flows (Cambridge: Cambridge University Press)
- Rawlings, J. M. C., Hartquist, T. W.: 1997, ApJ 487, 672
- Roy J.-R., Kunth D. 1995. A&A 294, 432
- Sagaut, P.: 2002, Large Eddy Simulation for Incompressible Flows (Berlin, Springer-Verlag)
- Scalo, J., Elmegreen, B.G.: 2004, ARA&A 42, 275
- Schekochihin, A. A.; Isakov, A. B.; Cowley, S. C.; McWilliams, J. C.; Proctor, M. R. E.; Yousef, T. A.: 2007, New J. Phys. 9, 300
- Sellwood JA, Balbus SA. 1999. ApJ. 511:660-65
- Sneddon, I.N.: 1951, Fourier Transforms, p. 62 (New York: McGraw-Hill)

- Solomon, T. H., Weeks, Eric R., Swinney, Harry L.: 1994, PhysD, 76, 70
- Spiegel, E. A., Zahn, J.-P.: 1992, A&A, 265, 106
- Stenflo, J. O.: 1982, SoPh 80, 209
- Stenflo, J. O.: 2011, A&A 529, A42
- Trujillo Bueno, J., Shchukina, N., Asensio Ramos, A. 2004, Nature, 430, 326
- Vainshtein S. I., Du, Y., Sreenivasan, K. R. 1994, Phys. Rev. E, 49, R2521
- Vlahos, L., Isliker, H., Kominis, Y., Hizanidis, K.: 2008, Normal and Anomalous Diffusion: A Tutorial ('Order and Chaos', 10th volume, Patras University Press; arXiv:0805.0419)
- von Hoerner S. 1951, Zeitschrift für Astrophysik 30:17-64
- Willacy, K., Langer, W. D., Allen, M.: 2002, ApJ 573L, 119
- Williams, D. A., Hartquist, T. W.: 1984, MNRAS 210, 141
- Williams, D. A., Hartquist, T. W.: 1991, MNRAS 251, 351
- Xie, T., Allen, M., Langer, W.D.: 1995, ApJ 440, 674 (XAL95)
- Yate, C. J., Millar, T. J.: 2003, A&A 399, 553