UNIVERZA V LJUBLJANI
PEDAGOŠKA FAKULTETA
POUČEVANJE: PREDMETNO POUČEVANJE

MITJA HOČEVAR

RAMSEYEVA ŠTEVILA IN NJIHOVE POSPLOŠITVE

MAGISTRSKO DELO

LJUBLJANA, 2018

UNIVERZA V LJUBLJANI
PEDAGOŠKA FAKULTETA
POUČEVANJE: PREDMETNO POUČEVANJE

MITJA HOČEVAR

RAMSEYEVA ŠTEVILA IN NJIHOVE POSPLOŠITVE

MAGISTRSKO DELO

Mentor: doc. dr. PRIMOŽ ŠPARL

LJUBLJANA, 2018

Zahvala gre najprej mentorju doc. dr. Primožu Šparlu za vse nasvete in strokovnost, ki ste jo ponudili pri nastajanju tega magistrskega dela. Predvsem pa hvala, da ste me ponovno sprejeli pod svoje okrilje.

V veliko pomoč so mi bili tudi moji domači, katerim se iz srca zahvaljujem za podporo skozi celoten študij.

Največja hvala pa mojim trem, ki so me velikokrat postavljali na razpotje in mi pokazali, kaj je v življenju res pomembno in da se vse da, če se le hoče. Hvala, da ste me potisnili dalje, kadar se je delo ustavilo.

Iskrena hvala.

Povzetek

Magistrsko delo govori o teoriji, ki v splošnem sodi na področje kombinatorike. Po *Ramseyevem izreku* iz leta 1930 za poljubna tri naravna števila r, μ, n obstaja neko najmanjše naravno število m_0, za katero velja, da lahko vsaki množici moči $m \geq m_0$ najprej njene r-elementne podmnožice poljubno razdelimo v μ disjunktnih razredov, pa bomo v osnovni množici zagotovo našli podmnožico velikosti n, tako da so vse njene r-elementne podmnožice iz istega razreda. Pripadajoča teorija se v primeru, ko je $r = 2$, zelo dobro prevede iz množic na polne grafe. Pri tem nam osnovno množico predstavlja množica vozlišč polnega grafa, 2-elementne podmnožice pa so povezave med vozlišči. Število razredov μ predstavlja število barv, s katerimi barvamo povezave grafa. V celotnem grafu tedaj iščemo poln podgraf določenega reda n, v katerem so vse povezave iste barve oziroma pripadajo istemu razredu. Pripadajoča števila m_0 so *klasična Ramseyeva števila.*

Klasična Ramseyeva števila za polne grafe so sicer še vedno zelo živa in zanimiva tema, vendar so mnogi avtorji osnovni koncept posplošili, iz česar se je rodilo mnogo različnih izpeljank in posplošitev Ramseyevih števil. Kot rečeno obravnavamo pri klasičnih Ramseyevih številih barvanja povezav polnih grafov, prav tako pa v njih iščemo polne podgrafe s povezavami iste barve. Prva smiselna posplošitev je torej iskanje drugih standardnih podgrafov v barvanjih povezav polnega grafa in v barvanjih povezav drugih standardnih grafov.

V magistrskem delu najprej zapišemo osnovne pojme teorije grafov, potrebne za razumevanje nadaljevanja dela. Na kratko povzamemo in pregledamo osnove Ramseyeve teorije, obravnavane v avtorjevem diplomskem delu. Nato opravimo naiven poskus iskanja klasičnih Ramseyevih števil s pomočjo računalniškega algoritma, brez posebnega ozira na optimizacijo ali matematično ozadje problema. Glavni del magistrskega dela predstavlja kronološki pregled raziskovanja in odkrivanja klasičnih Ramseyevih števil za dve barvi, kjer so predstavljene tudi različne metode, ki so se pri tem uporabljale. V zadnjem delu magistrskega dela navedemo še nekaj rezultatov za klasična Ramseyeva števila za več barv in predstavimo nekaj zanimivih posplošitev Ramseyevih števil.

Ključne besede: teorija grafov, Ramseyeva teorija, Ramseyevo število, posplošena Ramseyeva števila

MSC (2010) klasifikacija: 05C15, 05C55, 05C65, 05D10

Abstract

This MSc thesis deals with a theory, which comes from combinatorics. According to *Ramsey's theorem* from 1930 for any natural numbers r, μ, n there is a smallest natural number m_0 such that for every set of size $m \geq m_0$ no matter how we partition its r-element subsets into μ disjoint classes, we can always find a subset of size n in the original set such that all its r-element subsets belong to the same class. In the case of $r = 2$ this theory naturally translates from set theory to graph theory. Here the original set is represented by the set of vertices of a complete graph and the 2-element subsets are the edges of the graph. The number of classes μ is the number of colours with which we colour the edges of the complete graph. In this complete graph we then search for complete subgraphs of defined size n, in which all edges have the same colour or belong to the same class. The numbers m_0 are called *classic Ramsey numbers*.

Determining classic Ramsey numbers for complete graphs is still a very intersting topic, but many authors have generalized this basic concept to obtain many different generalizations of Ramsey numbers. As stated, classic Ramsey numbers are sizes of complete graphs in which we colour edges and search for complete subgraphs in one colour. The first reasonable generalization is thus to investigate other standard subgraphs in colourings of edges of complete graphs and in colourings of edges of other standard graphs.

In the MSc thesis we begin by introducing the terminology and writing down basics of graph theory needed for the understanding the rest of the thesis. We briefly summarize the basics of Ramsey theory discussed in the authors BSc thesis. We attempt to make our own computer assisted algorithm for discovering Ramsey numbers, with no real attention to optimization and mathematical background of the problem. The main part of the thesis consists of a chronological overview of the investigation and determination of classic Ramsey numbers for two colours, where the different methods that the authors used are also presented. In the last part of thesis we take a look at some results for the classical Ramsey numbers for more colours and present some of the interesting generalizations of Ramsey numbers.

Keywords: graph theory, Ramsey theory, Ramsey number, Generalized Ramsey numbers

MSC (2010) classification: 05C15, 05C55, 05C65, 05D10,

Kazalo

Slike

Tabele

Poglavje 1

Uvod in osnovni pojmi

1.1 Uvod

Teorija grafov, kamor sodi to magistrsko delo, je relativno mlado matematično področje, ki pa kljub temu uživa precejšnjo pozornost različnih avtorjev. To zanimanje je predvsem posledica njene uporabnosti. Ta izvira iz enostavnosti modeliranja najrazličnejših problemov z grafi. Zaradi raznolikosti problemov, ki jih obravnava teorija grafov, danes to široko področje delimo na več različnih podpodročij in teorij. Ena izmed njih je tudi glavna tematika tega magistrskega dela, to je Ramseyeva teorija.

Za začetnika te teorije, po katerem nosi tudi ime, velja Frank Plumpton Ramsey, ki je njene temelje postavil v članku *On a problem of formal logic* [29], objavljenem leta 1930. Ramsey je sicer svojo teorijo zasnoval v okviru teorije množic, kar pa se je hitro prevedlo na grafe, kjer je teorija tudi obstala in doživela velik razcvet. Na samem začetku je bil napredek dokaj počasen in sama teorija morda ni bila tako vznemirljiva, da bi pritegnila veliko matematikov. Peščica tistih, ki so se z njo ukvarjali, pa jo je razvijala in peljala dalje vse do možnosti uporabe računalniškega preračunavanja in preverjanja z algoritmi. Z njihovo uporabo se je odkrivanje Ramseyevih števil šele dobro začelo. Še večji pomen in širino uporabnosti je teorija dobila po vpeljavi številnih posplošitev Ramseyevih števil. S tem se je odprlo veliko novih vprašanj in možnosti raziskovanja, hkrati pa omogočilo reševanje novih vrst problemov z uporabo Ramseyeve teorije.

Mnogi avtorji so se ukvarjali z raziskovanjem Ramseyeve teorije. Kot prva, ki sta teorijo poskusila prevesti na drugo vejo matematike, sta bila Erdős in Szekeres [10], ki sta že leta 1935 Ramseyeve trditve in izreke uporabila v geometriji, kjer sta raziskovala problem določitve minimalnega števila točk v ravnini, izmed katerih zagotovo lahko izberemo v naprej dano število točk, ki napenjajo konveksen geometrijski lik. Erdős [9] je teorijo prenesel tudi na grafe, vendar sta največji preskok v tej smeri naredila Greenwood in Gleason [13], ki sta teorijo konkretno prenesla na grafe, postavila temelje Ramseyeve teorije na grafih in sprožila mnoga nova raziskovanja. Sledili so jima mnogi matematiki, eden bolj odmevnih avtorjev tistega časa pa je bil Kalbfleish [17, 18, 19, 20], ki se je poleg študija klasičnih Ramseyevih števil, kjer je med prvimi določil nekaj novih meja in vrednosti, posvetil tudi nekaterim posplošitvam Ramseyevih števil. V zadnjem času je avtorjev, ki se ukvarjajo z Ramseyevo teorijo, vedno več. Številnim novim odkritjem in prispevkom vestno sledi Radziszowski [28], ki že skoraj dvajset let na enem mestu skrbno dokumentira in dodaja nabor novih odkritij in njihovih avtorjev, s katerimi dopolnjuje svoj skupek raziskav.

Magistrsko delo je sestavljeno takole. V naslednjem poglavju se seznanimo z osnovnimi termini teorije grafov ter definicijami nekaterih standardnih družin grafov, katere Ramseyeva teorija obravnava. Sledi pregled osnov Ramseyeve teorije, ki smo jo obravnavali že v diplomskem delu [16]. V tretjem poglavju zapišemo pomembne izreke povezane s klasičnimi Ramseyevimi števili in opišemo Kalbfleischovo metodo konstruiranja regularnega (k, l)-barvanja polnih grafov. V četrtem poglavju poskusimo sami sestaviti računalniški program v programskem jeziku Python, s katerim bi iskali Ramseyeva števila. Programski jezik Python je eden najosnovnejših programskih jezikov, s katerim smo se tudi sami spoznavali tekom študija, zato ga uporabimo v tem delu. Za namen izdelave te kode uporabimo programsko okolje PyCharm, dostopno na [36]. V petem poglavju naredimo kronološki pregled odkrivanja klasičnih Ramseyevih števil za dve barvi. Pri tem uporabimo tujo literaturo različnih avtorjev, v večjo oporo pa nam je skupek raziskav Radziszowskega [28]. Na podlagi tega vira in nekaterih drugih v zadnjem poglavju navedemo nekatere zanimive posplošitve Ramseyevih števil.

Poglavje 2

Teoretična izhodišča

V tem poglavju naredimo ponovitev nekaterih osnovnih pojmov in rezultatov teorije grafov. Na tem mestu zapišemo le definicije in vzpostavimo terminologijo, ki jo med delom uporabljamo. Večino rezultatov povezanih z Ramseyevo teorijo zapišemo v poglavju 3. V tem poglavju deloma povzamemo diplomsko delo [16], sicer pa je prvi razdelek povzet po [8], [31] in [32], drugi pa po [2], [8] in [35].

2.1 Teorija grafov

Večina definicij tega razdelka je v celoti povzetih iz [32].

Definicija. *(Enostaven neusmerjen) graf* $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ je urejeni par množic $V(\Gamma)$ in $E(\Gamma)$, kjer je $V(\Gamma)$ neprazna množica *vozlišč* in $E(\Gamma)$ podmnožica množice neurejenih parov različnih vozlišč iz $V(\Gamma)$, imenovana množica *povezav*. Povezavo $\{u, v\}$ običajno zapišemo kar z uv. Kadar je graf Γ razviden iz konteksta, namesto $V(\Gamma)$ in $E(\Gamma)$ pišemo kar V in E.

Opomba. V nadaljevanju bomo obravnavali le enostavne neusmerjene grafe, zato se na tem mestu dogovorimo, da bo od tu dalje izraz *graf* pomenil enostaven neusmerjen graf.

Definicija. Naj bo Γ graf. Če sta $u, v \in V(\Gamma)$ taki vozlišči, da je $uv \in E(\Gamma)$, potem sta u in v *sosednji* vozlišči grafa Γ, kar označimo z $u \sim_\Gamma v$ ali kar z $u \sim v$, kadar ni bojazni za nesporazum. Rečemo tudi, da sta u in v *krajišči* povezave uv in da je povezava uv *incidenčna* z vozlišči u in v. Kardinalnosti množice $V(\Gamma)$ pravimo *red* grafa Γ.

Grafi so dokaj abstrakten matematičen koncept, zato jih običajno zaradi lažje predstave upodobimo s sliko (vsaj grafe nižjih redov). Na upodobitvi vozlišča grafa predstavimo s točkami in povezave med vozlišči s črtami med točkami. Pri tem dve točki povežemo s črto natanko tedaj, ko sta pripadajoči vozlišči sosednji.

Definicija. Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf. Tedaj je njegov *komplement* Γ^c graf z množico vozlišč V, pri čemer sta različni vozlišči u in v sosednji v Γ^c natanko tedaj, ko nista sosednji v Γ.

Definicija. Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf in naj bo $v \in V$. Tedaj množici $N_\Gamma(v) = \{u \in V : u \sim_\Gamma v\}$ pravimo *okolica* (tudi *soseščina*) vozlišča v v grafu Γ. Če je jasno za kateri graf gre, namesto $N_\Gamma(v)$ pišemo kar $N(v)$. Kardinalnosti okolice $|N(v)|$ rečemo *stopnja* (tudi *valenca*) vozlišča v. Slednjo običajno označimo z $\deg_\Gamma(v)$ (oziroma z $\deg(v)$, če je jasno, za kateri graf gre). *Minimalno stopnjo* vozlišč v grafu Γ označimo z $\delta(\Gamma)$, *maksimalno stopnjo* pa z $\Delta(\Gamma)$. Če imajo vsa vozlišča grafa Γ isto stopnjo (torej, če je $\delta(\Gamma) = \Delta(\Gamma)$), je graf Γ *regularen*. Tedaj govorimo kar o *stopnji grafa* Γ.

Opomba. Regularnemu grafu s stopnjo vozlišč k, rečemo tudi *k-regularen* graf. Običajno 3-regularnim grafom rečemo *kubični* grafi.

Pri obravnavi Ramseyeve teorije v tem magistrskem delu bomo obravnavali pripadnike nekaterih znanih družin grafov, zato se spomnimo njihovih definicij.

Definicija. Naj bo $n \geq 1$ poljubno naravno število. Tedaj je *polni graf* reda n, ki ga označimo s K_n, graf z množico vozlišč, sestavljeno iz prvih n nenegativnih celih števil, torej $V(K_n) = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, v katerem so vsi pari različnih vozlišč sosednji.

Definicija. Naj bo $n \geq 1$ poljubno naravno število. Tedaj graf na n vozliščih, ki ne premore nobene povezave, imenujemo *prazen graf*.

Opomba. V nekaterih virih prazen graf imenujejo tudi *neodvisna množica vozlišč*.

Definicija. Naj bosta $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ in $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ grafa. Tedaj je Γ_1 *podgraf* grafa Γ_2, če je $V_1 \subseteq V_2$ in $E_1 \subseteq E_2$. Če je Γ_1 polni podgraf grafa Γ_2, pravimo, da je Γ_1 *klika* grafa Γ_2

Definicija. Naj bo $n \geq 3$ poljubno naravno število. Tedaj je *cikel* reda n, ki ga označimo s C_n, graf z množico vozlišč $\mathbb{Z}_n$[1], povezave grafa pa so oblike $\{i, i+1\}$, $i \in \mathbb{Z}_n$, pri čemer seštevamo po modulu n.

Definicija. Naj bo $n \geq 1$ poljubno naravno število. Tedaj je *pot* P_n graf z množico vozlišč $V(P_n) = \mathbb{Z}_n$ in množico povezav $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} : 0 \leq i < n-1\}$.

Definicija. Povezan graf, ki ne premore nobenega cikla, je *drevo*.

Definicija. Naj bo $n \geq 4$ poljubno naravno število. Tedaj je *kolo* reda n, ki

[1] Množica $\mathbb{Z}_n$ vsebuje vsa cela števila od 0 do $n-1$;
$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

ga označimo z W_n, graf s ciklom na $n-1$ vozliščih, kjer je vsako vozlišče tega cikla povezano z edinim preostalim vozliščem grafa W_n.

Definicija. Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf. Tedaj je graf Γ *dvodelen*, če lahko množico vozlišč V razbijemo na dve neprazni množici V_1 in V_2 tako, da ima vsaka povezava grafa Γ po eno krajišče v V_1 in drugo v V_2.

Definicija. Naj bosta $n_1, n_2 \geq 1$ poljubni naravni števili. Tedaj je *polni dvodelen* graf K_{n_1,n_2} graf reda $n_1 + n_2$ z množico vozlišč $V(K_{n_1,n_2})$, ki jo lahko razdelimo na podmnožici V_1 z n_1 vozlišči in V_2 z n_2 vozlišči, vsako vozlišče iz ene podmnožice pa je povezano samo z vsemi vozlišči iz druge podmnožice ter z nobenim iz iste podmnožice.

Definicija. Naj bosta d in q poljubni naravni števili. *Hammingov graf* $H(d,q)$ je tedaj graf, katerega množica vozlišč sestoji iz vseh d-teric elementov iz $\mathbb{Z}_q$, pri tem pa sta dve d-terici (torej dve vozlišči) sosednji natanko tedaj, ko se razlikujeta v natanko eni komponenti. Hammingovim grafom $H(d,2)$ običajno rečemo tudi *hiperkocke* in jih označimo s $Q(d)$ ali Q_d.

Ob koncu razdelka si oglejmo še definicijo hipergrafov, ki so na nek način posplošitev grafov, katere smo obravnavali do sedaj.

Definicija. *Hipergraf* $\Gamma = (V, E)$ je urejeni par množic $V(\Gamma)$ in $E(\Gamma)$, kjer je $V(\Gamma)$ neprazna množica vozlišč in $E(\Gamma)$ množica nepraznih podmnožic množice $V(\Gamma)$ poljubne moči.

Opomba. Enostavni grafi so posebni hipergrafi, kjer so vsi elementi E podmnožice množice V moči 2.

Ramseyeva števila iščemo s pomočjo različnih *barvanj povezav* v grafih, zato definiramo še ta pojem.

Definicija. Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf in k neko naravno število. Tedaj definiramo *k-barvanje* povezav grafa Γ kot funkcijo $c : E(\Gamma) \to \{1, 2, 3, \ldots, k\}$.

2.2 Osnove Ramseyeve teorije

Frank Plumpton Ramsey, po katerem je teorija dobila ime se pravzaprav sploh ni ukvarjal z grafi, ampak je svoj problem obravnaval na množicah. Dokazal je, da za poljubna naravna števila r, n in μ obstaja tako naravno število m_0, da če vse r-elementne podmnožice poljubne množice Γ_m velikosti $m \geq m_0$ na poljuben način razdelimo na μ disjunktnih razredov (označimo jih s C_i), zagotovo v množici Γ_m najdemo podmnožico Δ_n velikosti n, tako da vse r-elementne podmnožice v Δ_n pripadajo isti množici C_i (izrek B v [29]). Torej, ukvarjal se je z določitvijo najmanjše velikosti množice, da lahko pri poljubni razdelitvi vseh njenih podmnožic dane kardinalnosti na v naprej določeno število razredov v množici najdemo podmnožico ustrezne velikosti, katere vse podmnožice tiste kardinalnosti so v istem razredu.

V tem delu se posvetimo najprej posebnim primerom teh "Ramseyevih problemov", pri katerih je $r = 2$ in $\mu = 2$. Tako si lahko predstavljamo, da so elementi začetne množice vozlišča polnega grafa. Podmnožice množice vozlišč, ki vsebujejo dva elementa, tako predstavljajo povezave grafa. Nato polnim grafom 2-barvamo povezave. Torej jih delimo v dva razreda, kar predstavljata dve barvi ($\mu = 2$). Tedaj pa iščemo polni podgraf, ki ima vse povezave pobarvane z isto barvo. To so klasična Ramseyeva števila za dve barvi. Pri tem nas torej zanima, če v poljubnem 2-barvanju povezav polnega grafa lahko najdemo kliko željenega reda, ki ima vse povezave iste barve.

V nekaterih zgodnejših delih so avtorji klasična Ramseyeva števila iskali malo drugače. Namesto, da so v poljubnem 2-barvanju povezav polnega grafa iskali monokromatične klike, so v poljubnih grafih na določenem številu vozlišč iskali polni ali prazen podgraf željenega reda.

Naslednji osnovni izrek Ramseyeve teorije se nanaša na klasična Ramseyeva števila, torej za dve barvi.

Izrek 2.1 (Osnovni Ramseyev izrek za grafe)**.** *Naj bosta k in l dve naravni števili. Potem obstaja najmanjše tako naravno število $R(k,l)$, da za vsak $n \geq R(k,l)$ in za poljubno 2-barvanje povezav polnega grafa K_n v njem obstaja klika velikosti k z vsemi povezavami prve barve ali klika velikosti l z vsemi povezavami druge barve.*

Dogovor. Dogovorimo se, da bomo v nadaljevanju prvi barvi vedno rekli rdeča, drugi pa modra. Pri posplošitvi Ramseyevih števil za tri barve bomo tretji barvi rekli zelena.

Natančen dokaz izreka 2.1 si lahko bralec prebere v diplomskem delu [16], na tem mestu pa predstavimo le glavno idejo dokaza. Opisana ideja je namreč pomembna tudi pri našem nadaljnjem delu, saj jo vsaj implicitno uporabimo pri dejanskem določevanju konkretnih vrednosti Ramseyevih števil $R(k,l)$. Dokaz gre po principu indukcije na k in l. Dokaj očitno je, da za poljubna $k, l \in \mathbb{N}$ velja $R(k,1) = R(1,l) = 1$. V naslednjem koraku pokažemo, da obstajata $R(k,2)$ in $R(2,l)$, saj se ni težko prepričati, da velja $R(k,2) = k$ in $R(2,l) = l$. Nato predpostavimo, da za dana $k, l \geq 2$ obstajata števili $R(k-1,l)$ in $R(k,l-1)$, ter dokažemo obstoj $R(k,l)$. To storimo tako, da dokažemo naslednjo neenakost:

$$R(k,l) \leq R(k,l-1) + R(k-1,l). \tag{2.1}$$

V poljubnem 2-barvanju polnega grafa reda $R(k,l-1) + R(k-1,l)$ izberemo poljubno vozlišče u, s katerim je zagotovo incidenčnih vsaj $R(k,l-1)$ modrih povezav ali pa vsaj $R(k-1,l)$ rdečih povezav. V prvem primeru podgraf vseh sosedov vozlišča u po modrih povezavah premore rdečo kliko reda k ali modro kliko reda $l-1$. To modro kliko dopolnimo z vozliščem u do modre klike reda l, kar smo želeli. Po podobnem razmisleku pokažemo, da tudi v drugem primeru dobimo modro kliko reda l ali rdečo kliko reda $k-1$, ki jo dopolnimo do reda

k z vozliščem u. S tem dokažemo neenakost (2.1), torej dokažemo indukcijski korak, s tem pa je tudi izrek dokazan.

V nadaljevanju dela bomo pogosto uporabljali naslednji pojem.

Definicija. Naj bosta $k, l \in \mathbb{N}$ in $n < R(k, l)$. Tedaj vsako 2-barvanje povezav v polnem grafu K_n, v katerem ne najdemo niti rdeče monokromatične klike reda k niti modre monokromatične klike reda l, imenujemo (k, l)*-barvanje*.

Opomba. Po izreku 2.1 o Ramseyevih številih za $n \geq R(k, l)$ v polnem grafu K_n ne obstaja nobeno (k, l)-barvanje.

Poglavje 3

Klasična Ramseyeva števila

Raziskovanju Ramseyeve teorije, katere temelje je postavil Ramsey v svojem članku [29] iz leta 1930, sta se po petindvajsetih letih konkretneje lotila Greenwood in Gleason [13], ki sta navedla in dokazala nekaj splošnih meja za klasična Ramseyeva števila in tudi za Ramseyeva števila z več barvami. Poleg tega sta določila nekaj konkretnih vrednosti klasičnih Ramseyevih števil. Pred njima sta Ramseyevo teorijo uporabila Erdős in Szekeres [10], vendar sta pri tem obravnavala drugo vejo matematike, zaradi česar so tudi njuni rezultati nekoliko drugačne narave kot pri kasnejših avtorjih. Erdős [9] je sicer njune ugotovitve prenesel tudi na teorijo grafov, vendar sta Greenwood in Gleason objavila skupek svojih in njunih ugotovitev ter s tem Ramseyevo teorijo dokončno vpeljala v teorijo grafov. Skupaj z Ramseyevim člankom [29], lahko torej članke [9], [10] in [13] smatramo za prve doprinose, na osnovi katerih se je teorija kasneje razvijala in gradila.

3.1 Osnovne lastnosti klasičnih Ramseyevih števil

Greenwood in Gleason se kot rečeno med prvimi dotakneta Ramseyeve teorije in klasičnih Ramseyevih števil. Začneta z obravnavo števila $R(3,3)$, ki se mu bomo posvetili v naslednjem razdelku tega poglavja. Medtem, ko sta Erdős in Szekeres sicer uporabila in nadaljevala Ramseyevo teorijo [29], sta šele Greenwood in Gleason zapisala in objavila glavne osnovne lastnosti Ramseyevih števil, s katerimi bomo na tem mestu začeli.

Med drugim Greenwood in Gleason določita tudi osnovne vrednosti klasičnih Ramseyevih števil. Tako zapišeta, da za vse $k, l \geq 1$ velja

$$R(1,l) = R(k,1) = 1,$$

$$R(2,l) = l,$$

$$R(k,2) = k \text{ in}$$

$$R(k,l) = R(l,k).$$

Teh dejstev ne dokazujeta, saj so trditve precej očitne, bralec pa lahko obrazložitve najde v dokazih trditve 2.1 in trditve 2.2 v diplomskem delu [16].

Kot omenjeno navedeta nekaj splošnih meja, katere smo že med izdelovanjem diplomskega dela zasledili tudi v novejši literaturi. Prva meja, ki jo zasledimo v mnogih člankih povezanih z Ramseyevimi klasičnimi števili, temelji na predhodnih vrednostih.

Izrek 3.1. *Za poljubni naravni števili $k, l \geq 2$ velja*

$$R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1).$$

Kadar sta obe predhodni vrednosti $R(k-1,l)$ in $R(k,l-1)$ sodi, je zgornja neenakost stroga.

Kot smo že omenili, dokaz same neenakosti temelji na dejstvu, da ima poljubno vozlišče v enem primeru vsaj $R(k,l-1)$ sosedov, s katerimi je povezano z modro povezavo, v drugem primeru pa vsaj $R(k-1,l)$ sosedov, s katerimi je povezano z rdečo povezavo. V prvem primeru na tej množici sosedov obstaja rdeča monokromatična klika reda k ali pa modra monokromatična klika reda $l-1$, katero z izhodiščnim vozliščem dopolnimo do modre klike reda l. Podobno v drugem primeru velja, da obstaja modra klika reda l ali pa rdeča klika reda $k-1$, ki jo z izhodiščnim vozliščem dopolnimo do rdeče klike reda k.

Iz tega argumenta sledi tudi naslednja trditev, ki jo zapiše in v svojem delu uporabi tudi Kalbfleisch [18]. Ker je argument v dokazu te trditve povsem enak zgornjemu razmisleku, njen dokaz izpustimo.

Trditev 3.2. *Naj bosta $k, l \geq 3$ naravni števili in naj bo $n < R(k,l)$. Tedaj je v poljubnem (k,l)-barvanju polnega grafa K_n z vsakim vozliščem incidenčnih največ $R(k-1,l)-1$ rdečih povezav in največ $R(k,l-1)-1$ modrih povezav.*

Mejo iz izreka 3.1 in njen dokaz zasledimo že v delu Erdősa in Szekeresa [10]. V njem obravnavata geometrijski problem določitve minimalnega števila $N(n)$, da za poljubnih $N(n)$ točk na ravnini med njimi zagotovo najdemo n točk, ki napenjajo konveksen poligon. Obravnavan problem tako sodi na področje geometrije. Ker to magistrsko delo sodi na drugo področje matematike, ta dokaz izpustimo, bralec pa si ga lahko ogleda v literaturi. Dokaz temelji na drugačnih argumentih in geometrijskih lastnostih, osnovni princip pa je podoben kot pri dokazu na grafih Greenwooda in Gleasona.

Greenwood in Gleason za dokaz stroge neenakosti za mejo iz izreka 3.1 v primeru, da sta števili $R(k-1,l)$ in $R(k,l-1)$ obe sodi, vzameta poljubno 2-barvanje povezav polnega grafa z $R(k-1,l) + R(k,l-1) - 1$ vozlišči. Poljubno vozlišče ima valenco $R(k-1,l) + R(k,l-1) - 2$. Nato obravnavata tri možnosti:

(a) izbrano vozlišče je incidenčno z vsaj $R(k-1,l)$ rdečimi povezavami,

(b) izbrano vozlišče je incidenčno z vsaj $R(k,l-1)$ modrimi povezavami,

(c) izbrano vozlišče je incidenčno z $R(k-1,l)-1$ rdečimi povezavami in $R(k,l-1)-1$ modrimi povezavami.

Argumenti v dokazu možnosti **(a)** in **(b)** so podobni kot v dokazu osnovne neenakosti iz izreka 3.1. Možnost **(c)** ne more veljati za vsa vozlišča, saj bi to pomenilo, da je vsako izmed $R(k-1,l)+R(k,l-1)-1$ vozlišč incidenčnih z $R(k-1,l)-1$ rdečimi povezavami, torej bi bilo skupaj $\frac{1}{2}\cdot(R(k-1,l)+R(k,l-1)-1)(R(k-1,l)-1)$ rdečih povezav, kar pa ni mogoče, saj je število v števcu liho. Posledično mora obstajati vsaj eno vozlišče, za katero drži možnost **(a)** ali **(b)**. V teh dveh primerih pa potem kot rečeno znamo utemeljiti obstoj željene monokromatične klike.

Dokaz: Imejmo polni graf K_n in zanj neko (k,l)-barvanje. Recimo, da obstaja vozlišče v, s katerim je incidenčnih vsaj $R(k-1,l)$ rdečih povezav. Označimo z Γ podgraf induciran na vseh sosedih u vozliščav, za katere je povezava uv rdeče barve. Ker je Γ reda vsaj $R(k-1,l)$, v Γ zagotovo obstaja rdeča monokromatična klika K_{k-1} ali pa modra monokromatična klika K_l. Ker je to (k,l)-barvanje, modra klika K_l ne obstaja, torej obstaja rdeča klika K_{k-1}. Ker je ta rdeča klika podgraf grafa Γ, so vsa njena vozlišča z rdečimi povezavami povezana z vozliščem v, kar skupaj tvori rdečo monokromatično kliko K_k. To pa je v protislovju s predpostavko, da imamo (k,l)-barvanje polnega grafa K_n. Podobno se dokaže, da je s poljubnim vozliščem incidenčnih največ $R(k,l-1)$ modrih povezav. ■

Kot posledico izreka 3.1 navedeta tudi zgornjo mejo, izraženo z binomskim koeficientom.

Izrek 3.3. *Za poljubni naravni števili $k,l\geq 2$ velja*

$$R(k,l)\leq\binom{k+l-2}{k-1}.$$

Te meje ne dokazujeta, saj se jo dokaj enostavno dokaže z indukcijo na k in l ter z uporabo izreka 3.1. Bralec lahko ustrezen dokaz najde v diplomskem delu [16].

Vredno je omeniti, da mejo iz izreka 3.3 pripisujejo Erdősu in Szekeresu, vendar sta se v članku [10] kot rečeno ukvarjala z mejo na področju geometrije.

Mejo iz izreka 3.3 Erdős [9] dopolni z novo mejo za Ramseyeva števila z enakima k in l, vse skupaj pa sedaj zapišimo v naslednji izrek.

Izrek 3.4. *Za poljubni naravni števili $k\geq 3$ velja*

$$2^{k/2} \;<\; R(k,k) \;\leq\; \binom{2k-2}{k-1} \;<\; 4^{k-1}.$$

Dokaz: Druga neenakost sledi direktno iz izreka 3.3. Zadnjo neenakost lahko dokaj enostavno izpeljemo s poračunanjem binomskega koeficienta in kratko indukcijo na k, kar bralec najde v diplomskem delu [16], zato ta del dokaza izpustimo.
Preverimo legitimnost prve neenakosti. Naj bo $n \leq 2^{k/2}$ in pokažimo, da tedaj v polnem grafu K_n obstaja (k,k)-barvanje torej 2-barvanje povezav brez monokromatične klike velikosti k. To dejstvo očitno velja za vse primere, ko je $n < k$, zato lahko privzamemo, da je $n \geq k$. Polni graf K_n ima $\frac{n(n-1)}{2}$ povezav, torej je število različnih 2-barvanj povezav polnega grafa K_n enako $2^{n(n-1)/2}$. Upoštevajmo sedaj, da monokromatične klike reda k v K_n ni natanko tedaj, ko bo v njem vsaka klika reda k pobarvana z obema barvama oziroma ne bo monokromatična. Podobno kot za K_n je število vseh možnih 2-barvanj klike K_k enako $2^{k(k-1)/2}$. Sledi, da je število 2-barvanj povezav polnega grafa K_n, v katerih najdemo rdečo kliko reda k na neki izbrani k-elementni podmnožici vozlišč, potem enako številu možnih 2-barvanj preostalih povezav oziroma povezav polnega grafa K_n brez povezav K_k, kar je enako

$$\frac{2^{n(n-1)/2}}{2^{k(k-1)/2}}.$$

Za vsako možno izbrano k-elementno podmnožico imamo točno toliko možnosti, da je ta podmnožica rdeča klika. Možnih načinov izbire podmnožice k vozlišč je $\binom{n}{k}$.
Upoštevajmo še, da za $k \leq n \leq 2^{k/2}$, $k \geq 3$, velja $\binom{n}{k} < \frac{n^k}{k!}$ in $2n^k < k! 2^{k(k-1)/2}$. Druga neenakost morda ni povsem očitna, zato naredimo kratko utemeljitev. Ker je funkcija $x \mapsto x^k$ naraščajoča na intervalu $(0, \infty)$, je za $x_1 < x_2$ tudi $x_1^k < x_2^k$. Ker je po predpostavki $n \leq 2^{k/2}$, je tudi

$$n^k \leq (2^{\frac{k}{2}})^k = 2^{\frac{k^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2n^k \leq 2 \cdot 2^{\frac{k^2}{2}} = 2^{\frac{k^2+2}{2}} = 2^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot 2^{\frac{k+2}{2}}.$$

Torej je dovolj pokazati, da je $2^{\frac{k+2}{2}} < k!$. Za $k = 3$ neenakost velja, saj

$$2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2} \cdot 4 < 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3,$$

$$2 \cdot \sqrt{2} < 3,$$

$$\sqrt{2} < 1,5.$$

Razmislimo še za večje vrednosti k, torej $k \geq 4$. Potenca $2^{\frac{k+2}{2}} = 2^{\frac{k}{2}+1}$ je produkt $\frac{k}{2} + 1$ mnogo dvojk, kar bo zagotovo manjše od $k!$, kadar bo v tem produktu več kot $\frac{k}{2} + 1$ faktorjev večjih ali enakih 2. Torej

$$2^{\frac{k}{2}+1} < k! = 1 \cdot (\overbrace{2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k}^{k-1}) \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \frac{k}{2} + 1 \leq k - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k + 2 \leq 2k - 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k \geq 4.$$

Vemo torej, da je število 2-barvanj povezav polnega grafa K_n, ki vsebujejo vsaj eno rdečo kliko reda k največ

$$\binom{n}{k} \frac{2^{n(n-1)/2}}{2^{k(k-1)/2}}.$$

Upoštevamo še, da lahko dobimo tudi modro kliko reda k in za $k \leq n \leq 2^{k/2}$ dobimo zgornjo mejo za število 2-barvanj povezav polnega grafa K_n, ki vsebujejo vsaj eno monokromatično kliko reda k:

$$2 \cdot \binom{n}{k} \frac{2^{n(n-1)/2}}{2^{k(k-1)/2}} < 2 \cdot \frac{n^k}{k!} \frac{2^{n(n-1)/2}}{2^{k(k-1)/2}} < \frac{k! \cdot 2^{k(k-1)/2} \cdot 2^{n(n-1)/2}}{k! \cdot 2^{k(k-1)/2}} = 2^{n(n-1)/2}.$$

Vidimo, da je število 2-barvanj povezav polnega grafa K_n, ki vsebujejo vsaj eno monokromatično kliko reda k, strogo manjše od števila vseh različnih 2-barvanj povezav polnega grafa K_n. Torej za K_n obstaja 2-barvanje povezav, v katerem ni monokromatične klike reda k, torej gre za (k, k)-barvanje. Sledi, da je res $R(k, k) > 2^{k/2}$. Ob upoštevanju, da veljata tudi drugi dve neenakosti, smo potrdili, da velja izrek 3.4. ■

Ngo [25] je Erdősov izrek 3.4 zapisal in dokazal nekoliko drugače.

Izrek 3.5. *Za poljubno naravno število $k \geq 3$ velja sledeče. Če je n takšno naravno število, da je $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, potem je $R(k, k) > n$. Posledično velja $R(k, k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$.*

S preoblikovanjem neenakosti iz dokaza izreka 3.4 enostavno pridemo ravno do pogoja v izreku 3.5. Če v neenakosti

$$2 \cdot \binom{n}{k} \frac{2^{n(n-1)/2}}{2^{k(k-1)/2}} < 2^{n(n-1)/2}$$

zapis $n(n-1)/2$ zamenjamo z binomskim simbolom $\binom{n}{2}$ ter desno stran nesemo čez neenačaj, dobimo

$$2 \cdot \binom{n}{k} \frac{2^{\binom{n}{2}}}{2^{\binom{k}{2}}} \cdot \frac{1}{2^{\binom{n}{2}}} < 1,$$
$$\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1 - \binom{n}{2}} < 1,$$
$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1,$$

kar je ravno pogoj iz izreka 3.5.

Ngo izrek dokaže s pomočjo nekaj osnov verjetnosti. Posledično je dokaz na prvi pogled nekoliko drugačen, kot pri izreku 3.4. Vendar pa je razmislek in princip enak, saj v njegovem dokazu prešteva možna 2-barvanja povezav z monokromatičnimi klikami, zato pravega dokaza ne zapišemo. Ideja pa je, da z razmislekom pridemo do verjetnosti dogodka, da v naključno izbranem 2-barvanju povezav grafa K_n obstaja monokromatična klika K_k. Ta verjetnost je navzgor omejena z $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$. Ker torej ta dogodek ni gotov, oziroma je vrejetnost zanj manj od 1, obstaja 2-barvanje povezav polnega grafa K_n brez monokromatične klike K_k.

Naslednjo mejo je odkril in dokazal Walker [33]. Tudi ta meja se nanaša na Ramseyeva števila, pri katerih sta k in l enaka, torej števila $R(k,k)$. Pred nadaljevanjem bomo najprej definirali njegov zapis števila rdečih ali modrih povezav v (k,l)-barvanju, ki ga uporabljajo tudi drugi avtorji.

Definicija. Za naravni števili k in l ter $n < R(k,l)$ definiramo $r(n,k,l)$ kot največje možno število rdečih povezav v kakšnem (k,l)-barvanju K_n in $m(n,k,l)$ kot največje možno število modrih povezav v kakšnem (k,l)-barvanju K_n. Za $n \geq R(k,l)$ privzemimo, da sta $r(n,k,l)$ in $m(n,k,l)$ enaka 0, saj (k,l)-barvanje polnega grafa K_n ne obstaja.

Izrek 3.6. *Za poljubno naravno število $k \geq 3$ velja*

$$R(k,k) \leq 4R(k,k-2) + 2.$$

Pred samim dokazom Walker vpelje še nekatere dodatne oznake in pojme ter analizira določene zakonitosti med njimi. Te v samem dokazu uporabi tako, da preveri, če je tem zakonitostim zadoščeno. Predpostavi, da je Ramseyevo število $R(k,k)$ lahko večje od meje, navedene v izreku 3.6, ter nato utemelji, da omenjenim zakonitostim ni zadoščeno. Sami bomo sledili njegovemu zgledu in najprej vpeljali te oznake in pojme, ter nato zapisali dokaz.

Najprej vpeljimo število Δ, ki predstavlja število monokromatičnih trikotnikov (klike reda 3, K_3) v danem (k,l)-barvanju polnega grafa K_n. Od števila vseh trikotnikov odštejmo tiste, ki niso monokromatični. Z vsakim vozliščem i je incidenčnih r_i rdečih povezav in $(n - r_i - 1)$ modrih povezav. Vsak par različno pobarvanih povezav v vozlišču predstavlja natanko en nemonokromatičen trikotnik, v vsakem nemonokromatičnem trikotniku pa sta natanko dve taki vozlišči. Sledi, da je takih trikotnikov

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i(n - r_i - 1).$$

Vseh trikotnikov v K_n je $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$, torej je število monokromatičnih trikotnikov

$$\Delta = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i(n - r_i - 1).$$

Predpostavimo, da za neki števili k in l ter za nek $n < R(k-1,l) + R(k,l-1)$ v grafu K_n obstaja (k,l)-barvanje, v katerem je za vsak $0 \leq j \leq n-1$ po p_j vozlišč, s katerimi je incidenčnih j rdečih povezav in $(n - j - 1)$ modrih povezav. Po

argumentih Greenwooda in Gleasona [13] iz dokaza izreka 3.1 torej po trditvi 3.2 je lahko $p_j > 0$ le za $n - R(k, l-1) \leq j < R(k-1, l)$, sicer je $p_j = 0$, saj v nasprotnem primeru to ne bi bilo več (k, l)-barvanje.
Vozlišče z j rdečimi povezavami je po rdečih povezavah povezano s kliko reda j, torej je izbrano 2-barvanje povezav na tej kliki $(k-1, l)$-barvanje in ima posledično največ $r(j, k-1, l)$ rdečih povezav. Torej je takšno vozlišče v največ $r(j, k-1, l)$ rdečih trikotnikih. Podobno je takšno vozlišče v največ $m(n-j-1, k, l-1)$ modrih trikotnikih. Po vozliščih seštejemo vse monokromatične trikotnike (vsakega torej trikrat) in dobimo

$$\frac{1}{3} \sum_{j=n-R(k,l-1)}^{R(k-1,l)-1} \Big[r(j, k-1, l) + m(n-j-1, k, l-1) \Big] p_j \ \geq \ \Delta$$

kamor nato vstavimo Δ, preoblikujemo in dobimo

$$\sum_{j=n-R(k,l-1)}^{R(k-1,l)-1} \Big[2r(j,k-1,l) + 2m(n-j-1,k,l-1) + 3j(n-j-1) \Big] p_j \ \geq \ n(n-1)(n-2). \tag{3.1}$$

Poleg tega mora biti vsota vseh p_j očitno enaka n. Kot smo že omenili, je lahko v (k, l)-barvanju z vsakim vozliščem incidenčnih največ $R(k-1, l) - 1$ rdečih povezav. Ker na ta način vsako povezavo štejemo po dvakrat, na ta način dobimo zgornjo mejo za število vseh rdečih povezav, to je

$$r(n, k, l) \leq \tfrac{1}{2} n (R(k-1, l) - 1) \tag{3.2}$$

in podobno še za število modrih povezav

$$m(n, k, l) \leq \tfrac{1}{2} n (R(k, l-1) - 1). \tag{3.3}$$

Sedaj le še preverimo, če lahko s temi omejitvami zadostimo (3.1).

Dokaz: (izreka 3.6) Predpostavimo, da je $n \geq 4R(k, k-2) + 2$ in da v K_n obstaja (k, k)-barvanje. Potem za vsak j velja

$$\begin{aligned} 2r(j, k-1, k) + 2m(n-j-1, k, k-1) + 3j(n-j-1) \leq \\ \leq 2 \cdot \tfrac{1}{2} j (R(k-2, k) - 1) + 2 \cdot \tfrac{1}{2}(n-j-1)(R(k, k-2) - 1) + 3j(n-j-1) = \\ = (j + n - j - 1)(R(k, k-2) - 1) + 3j(n-j-1) = \\ = (n-1)(R(k, k-2) - 1) + 3j(n-j-1), \end{aligned}$$

kjer smo v drugi vrstici upoštevali največji možni števili rdečih (3.2) in modrih (3.3) povezav.
Število $j(n-j-1)$ je za $0 \leq j \leq n$ največje pri $j = \frac{n-1}{2}$, torej je $j(n-j-1) \leq (\frac{n-1}{2})^2$. Po predpostavkah je $n \geq 4R(k, k-2) + 2$, kar je ekvivalentno $R(k, k-2) \leq \frac{n-2}{4}$. Torej po zgornjem dobimo

$$
\begin{aligned}
2r(j,k-1,k) + 2m(n-j-1,k,k-1) + 3j(n-j-1) &\leq \\
\leq (n-1)\left(\frac{n-2}{4} - 1 + \frac{3(n-1)}{4}\right) &= \\
= (n-1)(n - \tfrac{9}{4}) &< \\
< (n-1)(n-2).
\end{aligned}
$$

Posledično iz neenakosti (3.1) sledi

$$
\begin{aligned}
n(n-1)(n-2) &\leq \\
\leq \sum_{j=n-R(k,l-1)}^{R(k-1,l)-1} \Big[2r(j,k-1,l) + 2m(n-j-1,k,l-1) + 3j(n-j-1)\Big] p_j &< \\
< \sum_{j=n-R(k,l-1)}^{R(k-1,l)-1} (n-1)(n-2) \cdot p_j &= \\
= (n-1)(n-2) \sum_{j=n-R(k,l-1)}^{R(k-1,l)-1} p_j &\leq \\
\leq (n-1)(n-2) \cdot n,
\end{aligned}
$$

kar je nemogoče. S tem protislovjem je izrek 3.6 dokazan. ∎

Kakšne meje z uporabo tega izreka dobimo in ali so dobre, preverimo na koncu 5. poglavja.

3.2 Konstrukcija regularnega (k,l)-barvanja

Spodnje meje klasičnih Ramseyevih števil so zaenkrat v splošnem po večini še neznane ali pa so precej nizke. Ramseyeva števila so definirana tako, da v vsakem polnem grafu K_n, kjer je $n \geq R(k,l)$, za vsako 2-barvanje povezav zagotovo obstaja rdeča monokromatična klika reda k ali pa modra monokromatična klika reda l. Torej je lahko eden od načinov določanja spodnjih mej za Ramseyeva števila iskanje ustreznih (k,l)-barvanj polnega grafa K_m za $m < R(k,l)$. Na ta način Greenwood in Gleason določita števila $R(3,3)$, $R(3,4)$, $R(3,5)$ in $R(4,4)$, katere obravnavamo v razdelku 5.1. S pomočjo lastnosti algebrskih struktur, ki jim pravimo končna polja, sta za omenjena števila našla ustrezna (k,l)-barvanja določenih polnih grafov in s tem dokazala, da je iskano Ramseyevo število večje od reda polnega grafa, ki sta ga 2-barvala. Za dokončno določitev vrednosti Ramseyevih števil pa sta seveda uporabila še izreke za zgornje meje, katere smo opisali v razdelku 3.1. Žal pa te metode ne moremo direktno prenesti na Ramseyeva števila za večje vrednosti k in l. Novo metodo za iskanje in konstruiranje (k,l)-barvanj ter tudi ustrezna c-barvanja za $c > 2$ opiše v svojem članku Kalbfleisch [18]. S to metodo odkrije (natančne) spodnje meje za števila $R(3,6)$, $R(3,7)$, $R(3,8)$ in $R(4,5)$. Zdi se, da bi se s to metodo dalo poiskati tudi kakšno še neznano spodnjo mejo za ostala klasična Ramseyeva števila. V članku avtor vpeljuje svojo, kot jo imenuje, metodo *regularnega barvanja* tudi za več kot dve barvi, vendar bomo v tem poglavju metodo obravnavali le za iskanje 2-barvanj.

Poleg osnovnih lastnosti in meje, ki smo jo omenjali že v izreku 3.1, ter njene posplošitve na več barv, avtor zapiše že omenjeno zanimivo lastnost (k, l)-barvanj polnih grafov, ki smo jo zapisali v trditvi 3.2. Zaradi lažje predstave grafov se dogovorimo še naslednje.

Dogovor. Kadar obravnavamo regularna barvanja, ki jih definiramo v naslednji definiciji, so vozlišča polnega grafa reda n označena z elementi $\mathbb{Z}_n$. Povezave so torej oblike $\{i, j\}$, $i, j \in \mathbb{Z}_n$, $i \neq j$. Tedaj bomo glede na razliko s med vozliščema i in j, kjer je s manjše od števil $(j - i)(\text{mod } n)$ in $(i - j)(\text{mod } n)$, povezave imenovali s-povezave ali povezave dolžine s. Možne vrednosti za s so torej očitno $s \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$.

Kadar iščemo (k, l)-barvanja polnega grafa K_n, se zdi smiselno najprej iskati 2-barvanja povezav čim bolj simetričnega ali regularnega tipa. S tem mislimo taka 2-barvanja povezav, da je v vsakem vozlišču isto število povezav vsake od obeh barv. Regularne grafe smo omenili v uvodni ponovitvi pojmov, od tod pa pojem regularnosti prenesemo še na (k, l)-barvanja.

Definicija. Naj bosta k in l naravni števili in $n < R(k, l)$. Regularno (k, l)-barvanje polnega grafa K_n je tako njegovo (k, l)-barvanje, da so v njem za vsak $s \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ vse s-povezave, oziroma povezave dolžine s, iste barve.

Kot pokaže naslednja trditev, iz Ramseyevega izreka 2.1 dobimo zagotovilo za obstoj največjega reda polnega grafa, za katerega še obstaja regularno (k, l)-barvanje, kjer je $k, l \geq 2$.

Trditev 3.7. *Naj bosta $k, l \geq 2$ naravni števili in $R(k, l)$ pripadajoče Ramseyevo število. Tedaj za vsaj eno naravno število $n < R(k, l)$ obstaja vsaj eno regularno (k, l)-barvanje polnega grafa K_n. Posledično obstaja tudi največje naravno število n, da obstaja vsaj eno regularno (k, l)-barvanje polnega grafa K_n.*

Dokaz: Za poljubno Ramseyevo število $R(k, l)$ in $n < R(k, l)$ zagotovo obstaja (k, l)-barvanje polnega grafa K_n. Ni pa nujno, da je vsako (k, l)-barvanje tudi regularno. Za vsaka $k, l \geq 2$ zagotovo obstaja (sicer trivialno) regularno (k, l)-barvanje polnega grafa K_1.
Torej regularno (k, l)-barvanje za vsaj en K_n, $n \in \mathbb{N}$, zagotovo vedno obstaja. Da obstaja največji n, da lahko K_n še regularno (k, l)-barvamo, pa je očitno iz dejstva, da za $n \geq R(k, l)$ v polnem grafu K_n sploh ne obstaja nobeno (k, l)-barvanje, torej tudi regularno (k, l)-barvanje ne obstaja. Sledi, da obstaja nek največji možni $n < R(k, l)$, da v polnem grafu K_n najdemo regularno (k, l)-barvanje. ∎

Oznako največjega števila n iz zgornje trditve vpeljemo v naslednji definiciji.

Definicija. Naj bosta $k, l \geq 2$ naravni števili. Največje celo število n, da na polnem grafu K_n obstaja regularno (k, l)-barvanje, označimo z $L(k, l)$.

Naslednje tri leme sledijo neposredno iz definicije števila $L(k, l)$ in povezave z Ramseyevimi števili $R(k, l)$, zato zanje zapišemo le kratke utemeljitve.

Lema 3.8. *Za poljubni naravni števili $k, l \geq 2$ velja $L(k, l) = L(l, k)$*

Lahko si predstavljamo, da če lahko polni graf na $L(k, l)$ vozliščih regularno (k, l)-barvamo z rdečo in modro barvo, le zamenjamo barvi povezav, pa dobimo regularno (l, k)-barvanje istega polnega grafa.

Lema 3.9. *Za poljubno naravno število $l \geq 2$ velja $L(2, l) = l - 1$*

Če želimo $(2, l)$-barvanje polnega grafa, moramo vse povezave pobarvati z modro barvo, sicer dobimo rdečo kliko reda 2. Če se želimo izogniti modri kliki reda l, pa lahko z modro pobarvamo največ kliko reda $l - 1$. Torej imamo regularno $(2, l)$-barvanje polnega grafa K_l z vsemi povezavami modre barve.

Lema 3.10. *Za poljubni naravni števili $k, l \geq 2$ velja $L(k, l) \leq R(k, l) - 1$*

Ta lema sledi naravnost iz definicije števil $L(k, l)$. Za $n = R(k, l)$ ne obstaja (k, l)-barvanje polnega grafa K_n. Torej lahko regularno (k, l)-barvanje obstaja največ v polnem grafu reda $R(k, l) - 1$.

Vredno je razmisliti in omeniti, ali obstajajo neke bistvene razlike med "navadnimi" in regularnimi (k, l)-barvanji polnih grafov. Za katerokoli (k, l)-barvanje polnega grafa K_n velja, da, če odstranimo poljubno vozlišče grafa K_n in vse povezave iz tega vozlišča, dobimo (k, l)-barvanje za polni graf K_{n-1}. To pa ne velja za regularna (k, l)-barvanja. Lahko se celo zgodi, da obstaja regularno (k, l)-barvanje grafa K_n, vendar v K_{n-1} nobeno (k, l)-barvanje ni regularno. Primer takšne situacije dobimo, če opazimo, da obstaja regularno $(4, 4)$-barvanje grafa K_{17} podano v 5. poglavju, v polnem grafu K_{16} pa regularnega $(4, 4)$-barvanja ni, kar se da utemeljiti po enakem postopku, kot ga prikažemo in uporabimo v razdelku 5.2, vendar v tem magistrskem delu točno utemeljitev izpustimo.

Kalbfleisch [18] metodo regularnega barvanja ilustrira na primeru določanja števila $R(3, 5)$ oziroma $L(3, 5)$, kar podrobno izvedemo v razdelku 5.2, na tem mestu pa opišimo potek določanja števil $L(k, l)$.

Izhajamo iz že znanih vrednosti Ramseyevih števil za manjša k in l, torej $R(k - 1, l)$ in $R(k, l - 1)$. Po izreku 3.1 dobimo na podlagi $R(k - 1, l)$ in $R(k, l - 1)$ zgornjo mejo za $R(k, l)$ in po lemi 3.10 iz $R(k, l)$ zgornjo mejo za $L(k, l)$. S pomočjo predhodnih vrednosti $R(k - 1, l)$ in $R(k, l - 1)$ nato po trditvi 3.2 dobimo največje možno število rdečih in modrih povezav iz vsakega vozlišča. Sledi kratek razmislek, koliko možnosti imamo za število rdečih in modrih povezav iz vsakega vozlišča glede na stopnje vozlišč polnega grafa, ki ga obravnavamo. Kasneje vidimo na primeru za $L(3,5)$, da je v K_{13}, kjer je stopnja vozlišč 12, le ena možnost, to je 4 rdeče povezave in 8 modrih povezav iz vsakega vozlišča, v splošnem pa imamo lahko več možnosti, kar se bo pokazalo pri katerem od ostalih primerov. S tem tudi določimo število "tipov" rdečih povezav oziroma število možnih dolžin s za rdeče s-povezave. Za primer $L(3,5)$, kjer imamo 4 rdeče povezave iz vsakega vozlišča, sta to lahko le dva tipa. Sedaj izpišemo in preverimo vse možne kombinacije za tipe rdečih povezav. Pri $L(3,5)$ so to kombinacije dveh dolžin povezav s_1 in s_2, kjer sta $s_1, s_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Sedaj mora za vsaj eno kombinacijo veljati, da v nobeni kliki K_3 ni samih rdečih povezav, torej povezav dolžin s_1 ali s_2, in vsaka klika K_5 vsebuje vsaj eno rdečo povezavo, torej povezavo dolžine s_1 ali s_2. Z izpisovanjem vseh možnih klik določenih redov podanih z dolžinami zunanjih povezav in preverjanjem njihove ustreznosti s kombinacijami tipov rdečih povezav pridemo do ene ali večih kombinacij, ki ustrezajo pogojem, s čimer odkrijemo ustrezno regularno (k,l)-barvanje. V nasprotnem primeru dokažemo, da regularno (k,l)-barvanje polnega grafa ne obstaja.

Poglavje 4

Iskanje Ramseyevih števil z računalnikom

V tem poglavju poskušamo določiti nekatera Ramseyeva števila z uporabo dokaj naivnega računalniškega programa. Algoritem pišemo v programskem jeziku Python v okolju PyCharm[36]. Najprej poskusimo z lastnim povsem naivnim programom, nato pa si na kratko ogledamo še poskus drugega avtorja.

4.1 Naivni algoritem

Najprej naredimo kratek razmislek. Ramseyeva števila iščemo v polnih grafih. Pri tem moramo preverjati različna možna 2-barvanja povezav in ob tem iščemo tista, ki so ustrezna (preverjamo vsebovanost oziroma nevsebovanost monokromatičnih klik danih velikosti). Tako lahko predstavimo grafe v obliki dvodimenzionalnih tabel, kjer nam stolpci in vrstice tabele predstavljajo vozlišča grafa. Vsako vozlišče je povezano z vsemi ostalimi, povezava pa je lahko pobarvana z rdečo ali modro barvo. Torej imamo za vsako povezavo dve možnosti in lahko 2-barvanja povezav predstavimo z binarnimi tabelami. Odločimo se, da bo `1` predstavljala rdečo barvo, `0` pa modro barvo. Brez potrebe bi v tabelo zapisovali povezave med vozlišči dvakrat (v_1 povezano z v_2 in v_2 povezano z v_1), zato lahko uporabimo le zgornje trikotno tabelo brez diagonale, saj vozlišča niso povezana sama s seboj. Tako zapisano tabelo si lahko predstavljamo kot zgornji trikotnik sosednostne matrike "rdečega" podgrafa.

Preiskati moramo vsa možna 2-barvanja povezav. Torej moramo najprej sestaviti program, ki nam na sistematičen način omogoči konstrukcijo vsakega možnega 2-barvanja povezav, ter sestavimo podprogram, ki dano 2-barvanje povezav preveri.

Konstrukcijo vseh možnih 2-barvanj povezav omogočimo s spodnjo funkcijo `povecaj()`. Funkcija spremeni tabelo, ki jo dobi kot argument. Vse možnosti pregledamo tako, da vrednosti v tabeli spreminjamo po principu binarnega štetja. S tem mislimo, da so v tabeli natanko enkrat zapisana vsa možna binarna števila prelomljena po vrsticah, dolžina števil pa je odvisna od dimenzije tabele oziroma od reda polnega grafa, ki ga preverjamo. Zaradi enostavnejše implementacije izvajamo binarno štetje zrcalno, kar pomeni, da prva števka predstavlja enice, druga desetice, itd. Za predstavo, če binarno štejemo od nič do sedem imamo `000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111`, s programom pa bomo šteli zrcalno, torej `000`, `100`, `010`, `110`, `001`, `101`, `011`, `111`. Štetje funkcija omogoča takole. Rekurzivno v tabeli poišče mesto z vrednostjo `0` in jo postavi na `1`, sproti pa vse enice `1` pred njo postavi na `0`. Po vsaki izvedbi funkcija vrne `True`, če še nismo preverili vseh vrednosti oziroma, če še nismo prišli do samih enic `1`. Ko funkcija popravi vse vrednosti `1` na `0` in pride do konca tabele, vrne vrednost `False`. Rekurzijo torej kličemo dokler ta ne vrne vrednosti `False`. V tem primeru smo pregledali vsa možna barvanja. Če do tedaj ne odkrijemo ustreznega 2-barvanja povezav, lahko s tem zaključimo, da imamo opravka s številom n, za katerega je $n \geq R(k,l)$.

```
def povecaj(tab: object, i: object, j: object, n: object) -> object:
 if tab[i][j] == 1:
  tab[i][j] = 0
  if (j+1) < n:
   return povecaj(tab,i,j+1,n)
  elif i+2 < n:
   return povecaj(tab,i+1,i+2,n)
  else:
   return False
 else:
  tab[i][j] = 1
  return True
```

Za vsako od dobljenih možnosti, torej vsako možno 2-barvanje povezav, naredimo preverjanje s funkcijo `preverjanje_grafa_3()`. Ta preverja obstoj monokromatične klike velikosti 3. V funkciji uporabimo števce vozlišč oziroma indeksov tabele `prvo_v, drugo_v, tretje_v` za preverjanje vsakega izmed vozlišč, pri čemer šteje števec za prvo vozlišče od `0` do `n`, vsak naslednji števec pa šteje od prejšnjega vozlišča do `n`, s čimer ne preverjamo istega vozlišča večkrat. Funkcija najprej preveri, če obstaja povezava med dvema vozliščema v iskani barvi. Če jo najde, preveri preostala vozlišča, če je katero povezano z obema vozliščema s povezavo v iskani barvi.

```
def preverjanje_grafa_3(graf: object, n: object, barva: object) -> object:
 for prvo_v in range(0,n):
  for drugo_v in range((prvo_v+1),n):
   if graf[prvo_v][drugo_v]==barva:
    for tretje_v in range((drugo_v+1),n):
     if graf[drugo_v][tretje_v]==barva and graf[prvo_v][tretje_v]==barva:
      return True
 return False
```

Podoben princip uporabimo tudi za iskanje monokromatičnih klik višjega reda. Za vsako naslednjo kliko v funkciji dodamo novo vgnezdeno zanko `for` in preverjanje, če obstaja vozlišče, ki je s povezavami iste barve povezano z vsemi predhodno najdenimi vozlišči.

```
for cetrto_v in range((tretje_v+1), n):
 if graf[prvo_v][cetrto_v] == barva and
 graf[drugo_v][cetrto_v] == barva and
 graf[tretje_v][cetrto_v] == barva:
```

V glavnem podprogramu uporabimo obe funkciji. Spodaj prikazujemo primer za iskanje Ramseyevega števila $R(3,3)$. Najprej generiramo dvodimenzionalno tabelo s samimi ničlami `0`. Nato izvajamo preverjanja, s spremenljivkama `izvajanje` in `iscem` pa upravljamo izvajanje. Če sta obe nastavljeni na `True`, potem se preverjanje 2-barvanja izvede. V primeru, da smo naleteli na 2-barvanje povezav brez ustrezne monokromatične klike, funkcija `preverjanje_grafa_3()` vrne v spremenljivko `iscem` vrednost `False`, s čimer se ustavi izvajanje zanke in podprogram vrne ustrezno sporočilo. V primeru, da smo preiskali vsa možna 2-barvanja povezav, pridemo do zadnje možnosti vrednosti v tabeli in dobimo kot rezultat funkcije `povecaj()` v spremenljivko `izvajanje` vrednost `False`. S tem smo preiskali vsa možna 2-barvanja povezav, vendar nismo našli takega, ki nima željenih monokromatičnih klik. Posledično se podprogram prav tako preneha izvajati in izpiše ustrezno sporočilo.

```
def binarno_stetje_tabele_vsi_mozni_grafi(st_vozlisc) -> object:
  izvajanje = True
  iscem = True
  graf = []
  for i in range(st_vozlisc):
    graf.append([])
    for j in range(st_vozlisc):
      graf[i].append(0)
  while izvajanje:
    while izvajanje and iscem:
      izvajanje = povecaj(graf, 0, 1, st_vozlisc)
      iscem = preverjanje_grafa_3(graf, st_vozlisc, 1) or
      preverjanje_grafa_3(graf, st_vozlisc, 0)
    if not iscem:
      print('V grafu:\n',graf,'\n ne najdemo monokromaticne klike reda 3.')
      return False
  if iscem:
    print('V vsakem 2-barvanju najdemo monokromaticno kliko reda 3.')
    return True
```

Program preizkusimo za Ramseyevo število $R(3,3) = 6$, ki ga program hitro in pravilno odkrije. S tem mislimo, da v glavi programa pokličemo funkcijo z vsemi možnostmi za argument `st_vozlisc` torej števili od 1 do 6. Pri vrednostih do 5 vrne program ustrezno sporočilo in protiprimer, za 6 vozlišč pa preveri vsa možna 2-barvanja povezav polnega grafa K_6 in ugotovi, da v vsakem izmed njih obstaja monokromatična klika reda 3. Programu dodamo enostavno merjenje časa in ugotovimo, da vsa preverjanja do vključno števila 6 in s tem potrditev Ramseyevega števila $R(3,3)$ opravi v približno 0,2 sekunde. To nas navda z optimizmom, vendar se program izkaže za prepočasnega že pri naslednjem številu. Za število $R(3,4)$ program v manj kot 0,4 sekunde najde ustrezno 2-barvanje povezav polnega grafa K_7 brez rdeče klike reda 3 in modre klike reda 4 in s tem pokaže, da je $R(3,4) > 7$. Podobno v skoraj 35 sekundah pokaže, da je $R(3,4) > 8$. Torej program ugotovi, da je $R(3,4) \geq 9$. Žal pa program v smiselnem času ne zmore preveriti ali je res $R(3,4) = 9$, saj tudi po skoraj petih urah izvajanja še ne zaključi s preverjanjem vseh 2-barvanj v kliki reda 9. Lahko pa si malenkost pomagamo z osnovnimi izreki in mejami za Ramseyeva števila. Po izreku 3.1 vemo, da je $R(3,4) \leq 9$, kar nam skupaj s preverjanjem z računalnikom že dokaže, da je vrednost točno $R(3,4) = 9$. Upoštevajmo, da mora program za potrditev vrednosti $R(3,4) = 9$ preveriti prav vsa 2-barvanja povezav polnega grafa K_9. Za naslednjo vrednost mora program za to, da ugotovi $R(3,5) > 9$ le najti ustrezno $(3,5)$-barvanje grafa K_9, kar bi mu lahko uspelo v smiselnem času. Poskusimo torej s programom doseči vsaj kakšno spodnjo mejo za $R(3,5)$. Program najde ustrezna $(3,5)$-barvanja v polnih grafih od K_2 do K_8 v podobnih časih kot za $R(3,4)$. Žal pa so 2-barvanja v K_9 za program ponovno prevelik zalogaj.

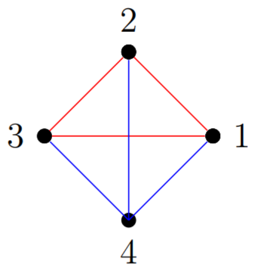
S tem ugotovimo, da se Ramseyevih števil ne da tako enostavno iskati z nekim preprostim računalniškim programom. Vrednosti, ki nam jih da program, smo že v diplomskem delu [16] sami dokaj enostavno odkrili in dokazali. Nekaj izboljšav bi lahko dodali. Lahko bi upoštevali simetrije grafov ali katere druge lastnosti. V naslednjem razdelku si pogledamo primer podobnega podviga študenta z ameriške univerze, ki pa je, tako kot naš poskus, v praksi neuporaben.

4.2 Drugi naivni algoritem - Barton

Glavni koncept direktnega preverjanja vseh možnih 2-barvanj povezav polnih grafov je v svojem algoritmu uporabil tudi Barton [1]. Uporabi nekoliko drugačno predstavitev 2-barvanj grafa ter drugačen način preverjanja barvanj.

Prva razlika med njegovim in našim programom je v računalniški predstavitvi grafa. Mi prikažemo 2-barvanja grafa kot tabelo ničel in enic v zgornje trikotni tabeli. Barton ponazori 2-barvanja v neki obliki sosednostne matrike, ki jo prav tako zapiše v tabeli. V teh matrikah pradstavljajo `1` rdeče pobarvane povezave, `-1` predstavljajo modre povezave in `0` po diagonali dopolnijo matriko, da graf ne vsebuje zank. Do teh matrik pride po ideji, da lahko vsakemu barvanju dodelimo natanko določeno število, to število lahko pretvorimo v binarni zapis, kjer vsako mesto binarnega zapisa predstavlja eno povezavo, ta binarni zapis pa prepišemo v tabelo oziroma zgoraj opisano matriko.

Razlog za tako predstavitev 2-barvanj grafov leži v tem, da za preverjanje vsebovanosti monokromatičnih klik uporabi množenje matrik. Za vsako 2-barvanje povezav v obliki zgoraj opisane matrike vsebovanost polnega podgrafa preveri z množenjem te matrike z matriko, ki predstavlja monokromatično kliko določenega reda. Na primer, da za rezultat množenja z matriko za neko kliko velikosti 3 dobimo matriko, kjer najdemo po diagonali tri 2 ali -2, je potem ta klika velikosti 3 v tem 2-barvanju monokromatična. Primer takega preverjanja za graf na sliki 4.1 je predstavljen na sliki 4.2.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Slika 4.1: Dve predstavitvi 2-barvanja povezav grafa K_4. Grafična predstavitev in predstavitev z matriko [1].

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Slika 4.2: Primer preverjanja, če 2-barvanje povezav vsebuje monokromatično kliko reda 3, s pomočjo množenja matrik [1].

V splošnem to pomeni, da pri množenju matrik 2-barvanje povezav grafa K_n vsebuje monokromatično kliko K_k na izbranih vozliščih natanko tedaj, ko je pripadajočih k diagonalnih elementov matrike, torej elementov (i,i), enakih $\pm(k-1)$.

Opisan algoritem ter programska koda sta bolj podrobno zapisana v [1], zato programa sami ne implementiramo, ker bi s tem le prepisali in preizkušali delo avtorja. Po tej metodi, ki je v principu podobna naši, bi lahko iskali monokromatične klike v 2-barvanjih povezav polnih grafov in s tem nove vrednosti Ramseyevih števil. Vendar pa tudi sam avtor priznava, da je ta metoda za pravo določanje neodkritih Ramseyevih števil prepočasna. Avtor v komentarjih razglablja o tem, da bi lahko s programom na primer preverjal 2-barvanja povezav v K_{45} za določitev Ramseyevega števila $R(5,5)$ (kot bomo namreč kasneje zapisali trenutno vemo le to, da velja $43 \leq R(5,5) \leq 49$). Ta podvig pa je preveč optimističen. Mnogo bolj smiselno bi bilo preveriti moč programa in hitrost izvajanja najprej na manjših vrednostih. Na primer, preverjanje za prva tri znana Ramseyeva števila $R(3,3)$, $R(3,4)$ in $R(3,5)$. Če bi se čas izvajanja pri teh vrednostih izkazal za dovolj kratkega, bi bilo smiselno iskati nove neodkrite vrednosti Ramseyevih števil. Vendar bi se najverjetneje zgodilo, da bi bil čas izvajanja prevelik, saj avtor za preverjanje uporablja množenje sosednostnih matrik, kar pa je algoritmično gledano precej časovno kompleksna funkcija. Če to primerjamo z našim naivnim poskusom iskanja, je program morda še počasnejši. Za samo generiranje vseh možnih 2-barvanj povezav porabita oba programa nekaj operacij, vendar oba naivno preverjata prav vse možnosti, čeprav so zagotovo nekatere med njimi do simetrije natančno enake.

Pri samem preverjanju naš program preveri vsa vozlišča in nato vsa preostala, če so med seboj ustrezno povezana. Drugi algoritem pa izvaja množenje matrik, kjer mora za vsako možno 2-barvanje povezav matriko pomnožiti z vsemi matrikami, ki predstavljajo monokromatično kliko znotraj danega polnega grafa, kar bi verjetno trajalo dlje od našega algoritma.

Naredimo kratek razmislek. Množenje dveh matrik dimenzije $n \times n$ zahteva po najbolj naivni metodi od računalnika vsaj n^3 operacij. Seveda obstajajo optimizirani algoritmi. Zato optimistično privzemimo, da lahko z nekim algoritmom računalnik množenje dveh matrik dimenzije 45×45 opravi v 45^2 operacijah. Za preverjanje mora algoritem zmnožiti matriko vsakega 2-barvanja povezav z ustreznimi matrikami za vse možne podgrafe reda 3 v K_{45}, torej s $\binom{45}{3}$ matrikami. V K_{45} imamo 990 povezav, torej 2^{990} možnih 2-barvanj povezav. V primeru, da obstaja 2-barvanje povezav grafa K_{45} brez monokromatične klike reda 5, ga mora računalnik le odkriti, čeprav tudi to zahteva svoj čas. Če pa takega 2-barvanja ni, mora računalnik preveriti prav vsa možna 2-barvanja povezav. Potem bi računalnik s 3 GHz procesorjem za preverjanje 2-barvanj povezav v polnem grafu K_{45} s tem programom porabil več kot $3 \cdot 10^{288}$ let.

Če sklenemo, se lahko strinjamo, da direktno iskanje vrednosti s preverjanjem vseh možnih 2-barvanj povezav polnega grafa ni primerno in je zato potrebno računalniškim algoritmom dodati matematično podlago za kompleksnejše in bolj učinkovite algoritme.

Poglavje 5

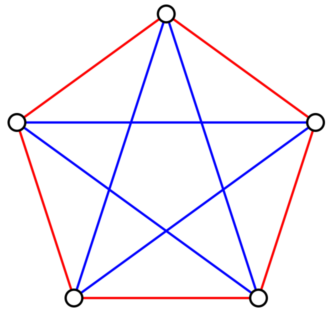
Zgodovinski pregled klasičnih Ram. števil

V tem poglavju najprej povzamemo rezultate, ki sta jih kot pionirja raziskovanja Ramseyeve teorije v [13] že leta 1955 dokazala Greenwood in Gleason. Sledijo rezultati in izboljšave, ki jih omogoči Kalbfleischova metoda. Tem rezultatom pa v zadnjem delu poglavja sledijo še rezultati različnih avtorjev, ki so jim sledili v razkrivanju novih vrednosti klasičnih Ramseyevih števil.

5.1 Rezultati Greenwooda in Gleasona

Greenwood in Gleason se v začetku svojega članka [13] navezujeta na problem z matematičnega tekmovanja iz marca leta 1953, ki se v prevodu glasi takole: "Šest točk je razporejenih po prostoru (nobene tri niso na isti premici, nobene štiri niso v isti ravnini). Narisanih je petnajst daljic, ki povezujejo pare točk, in pobarvanih z rdečo ali modro barvo. Dokažite, da obstaja trikotnik z vsemi stranicami enake barve."[3] Opazimo lahko povezavo tega problema z Ramseyevim številom $R(3,3)$.
Pristop njunega dokaza je ekvivalenten pristopu dokaza, ki smo ga zapisali v diplomskem delu [16]. Njun dokaz sicer dokazuje, da je vrednost Ramseyevega števila $R(3,3)$ res enaka 6, vendar zgornja naloga zahteva le dokaz, da v poljubnem 2-barvanju povezav polnega grafa K_6 zagotovo obstaja monokromatična klika reda 3. Najprej pokažeta, da v K_5 obstaja 2-barvanje povezav, v katerem ni monokromatične klike reda 3 in ga prikažeta. Nato utemeljita, zakaj v vsakem 2-barvanju povezav K_6 zagotovo najdemo monokromatično kliko reda 3.
Najprej torej predstavita ustrezno 2-barvanje povezav polnega grafa K_5 in sicer z rdeče pobarvanimi povezavami med vozlišči v_i in $v_{i+1}, 0 \leq i \leq 4$, ter modro pobarvanimi povezavami med vozlišči v_i in $v_{i+2}, 0 \leq i \leq 4$, kjer indekse računamo po modulu 5. Opisano 2-barvanje povezav je očitno celo regularno $(3,3)$-barvanje polnega grafa K_5, prikazano pa je na sliki 5.1.

Da je 6 res zadostno število vozlišč, pokažeta z naslednjo predstavitvijo.



Slika 5.1: $(3,3)$-barvanje povezav grafa K_5.

Vsako vozlišče je povezano z vsaj tremi sosednimi vozlišči s povezavami iste barve. Če sta katerikoli dve izmed teh vsaj treh sosednjih vozlišč med seboj povezani z isto barvo kot s prvim vozliščem, imamo monokromatičen trikotnik prve barve. Sicer so vse povezave med temi vozlišči druge barve in imamo monokromatičen trikotnik druge barve.

Poleg tega najbolj znanega osnovnega primera Ramseyevega števila sta določila še nekaj drugih vrednosti. Najprej direktno iz izreka 3.1 in dejstva, da sta že znani vrednosti $R(2,4) = 4$ in $R(3,3) = 6$, sledi, da velja $R(3,4) < 10$. Nato še pred samo določitvijo $R(3,4)$ z opisom konkretnega $(3,5)$-barvanja grafa K_{13} utemeljita $R(3,5) > 13$. Vozliščem dodelimo števila od 0 do 12. Kubirane vrednosti neničelnih vozlišč so enake 1, 5, 8 in 12 $(\mathrm{mod}\ 13)$. Povezave med vozlišči, med katerimi je razlika enaka kateri izmed teh vrednosti, so pobarvane rdeče, ostale pa modro. Omeniti velja, da je opisano 2-barvanje povezav ekvivalentno 2-barvanju iz diplomskega dela [16]. V tem 2-barvanju povezav ni rdeče klike reda 3 niti modre klike reda 5. Da ni rdeče klike reda 3 sledi iz dejstva, da so rdeče samo povezave med vozlišči, katerih razlika je 1, 5, 8 ali 12. Če bi naj obstajala rdeča klika K_3, bi bila razlika med dvema izmed teh štirih vrednosti prav tako ena izmed teh štirih vrednosti, pa temu ni tako. Če naj bi obstajala modra klika K_5, bi morali biti štirje sosedje nekega vozlišča po modrih povezavah vsi povezani z modrimi povezavami. Modri sosedje so od nekega vozlišča "različni" za 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10 ali 11. Katerekoli štiri sosede bomo sedaj vzeli, bo zagotovo obstajal vsaj en par, da bo razlika med njima enaka 1, 5, 8 ali 12.
Nato ponovno uporabita izrek 3.1. Ker je $R(3,4) \leq 9$, $R(2,5) = 5$ in $R(3,5) \geq 14$, po izreku pa velja $R(3,5) \leq R(2,5) + R(3,4)$, sledi $R(3,5) = 14$, posledično pa potem še $R(3,4) = 9$.

Sledi določitev števila $R(4,4)$. Najprej na podoben način kot sta utemeljila, da je $R(3,5) > 13$, pokažeta $R(4,4) > 17$. Poiščeta torej ustrezno $(4,4)$-barvanje grafa K_{17}. Najprej dodelimo vozliščem števila od 0 do 16. Med pari vozlišč, med katerimi so razlike enake ostanku kvadrata pri deljenju s 17, so povezave pobarvane rdeče, ostale povezave pa modro. Da je to res ustrezno 2-barvanje povezav grafa, potrdita z naslednjo utemeljitvijo.

Predpostavimo, da v tem barvanju obstajajo štiri vozlišča, ki so vsa med seboj povezana s povezavami iste barve. Zaradi rotacijske simetričnosti grafa lahko brez izgube splošnosti privzamemo, da je eno izmed teh štirih vozlišč označeno z 0, ostala tri pa z a, b in c. Tedaj so elementi a, b, c, $a-b$, $a-c$ in $b-c$ bodisi vsi kvadratni ostanki pri deljenju s 17 ali pa nobeden izmed teh elementov ni kvadratni ostanek pri deljenju s 17. Opazimo, da je množica neničelnih kvadratnih ostankov ravno podgrupa multiplikativne grupe $\mathbb{Z}_{17}^*$, generirana z 2, to je $<2> = \{2,4,8,-1,-2,-4,-8,1\}$. Ker $a \neq 0$, obstaja a^{-1}, s čimer mislimo na enolično določeno število $x \in \{1,2,\ldots,16\}$, da je $ax \equiv 1 \pmod{17}$. Če množimo tudi preostale elemente z a^{-1}, dobimo sedaj $B = ba^{-1}$ in $C = ca^{-1}$ in imamo novih šest elementov v $\mathbb{Z}_{17}$: 1, B, C, $1-B$, $1-C$ in $B-C$. Ker je število $aa^{-1} = 1$ kvadratni ostanek pri deljenju s 17 množenje z a^{-1} pa po zgornjem bodisi ohranja barvo vseh povezav (če je $a^{-1} \in <2>$ je $a^{-1}<2> = <2>$) ali pa zamenja barvo vseh povezav (če $a^{-1} \notin <2>$, je $a^{-1}<2>$ ravno drugi odsek grupe $\mathbb{Z}_{17}^*$), morajo biti vsi preostali elementi tudi kvadratni ostanki pri deljenju s 17 in nobeno ne sme biti ničla. Ker pa so vsi kvadratni ostanki v $\mathbb{Z}_{17}$ ravno 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15 in 16, ne more biti vseh zgornjih šest števil kvadratni ostanek. Namreč, če naj bi bili kvadratni ostanki B, C, $1-B$, $1-C$ in $B-C$, potem morata obstajati dva para zaporednih kvadratnih ostankov, razlika med večjima ostankoma pa mora biti prav tako kvadratni ostanek. Edini možni kandidati za B in C so torej 2, 9 in 16. Vendar nobena od razlik med temi tremi vrednostmi ni kvadratni ostanek. Zato ne more biti vsak izmed šest zgornjih elementov $\mathbb{Z}_{17}$ kvadratni ostanek. Torej v tem 2-barvanju zagotovo ni monokromatične klike reda 4. Iz tega 2-barvanja skupaj z $R(4,4) \leq 18$ iz izreka 3.1 sledi $R(4,4) = 18$.

Na podlagi zapisov Greenwooda in Gleasona dobimo te konkretne vrednosti Ramseyevih števil in nekaj zgornjih meja, ki so zapisane v tabeli 5.1. Ne podata pa instrumentov, s katerimi bi v splošnem lahko določili spodnjo mejo. Posledično na tem mestu niti ne vemo ali so njune zgornje meje blizu pravim vrednostim ali ne.

l / k	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2		2	3	4	5	6	7
3			6	9	14	≤ 19	≤ 26
4				18	≤ 31	≤ 50	≤ 75

Tabela 5.1: Znane vrednosti in meje Ramseyevih števil po Greenwoodu in Gleasonu [13].

5.2 Kalbfleischova regularna barvanja

Za določanje spodnjih meja nam pride prav metoda regularnega (k,l)-barvanja grafa iz razdelka 3.2. Preverimo, kakšne rezultate dobimo pri iskanju spodnjih meja Ramseyevih števil z metodo regularnega (k,l)-barvanja. Za število $R(3,3)$ že poznamo $(3,3)$-barvanje klike K_5, ki je pravzaprav regularno. Precej očitno je tudi, da sta taki 2-barvanji dve, čeprav lahko eno dobimo iz drugega zgolj z zamenjavo barv. Namreč grafu K_5, lahko pobarvamo rdeče zunanje povezave kot na sliki 5.1 ali pa rdeče pobarvamo notranje povezave. Zaradi enostavnosti in poznanosti tega primera prvi poskus uporabe metode regularnegaa (k,l)-barvanja raje prikažemo na naslednjem Ramseyevem številu.

Vrednost Ramseyevega števila $R(3,4)$ sicer že tudi poznamo. Kljub temu bomo metodo določanja števila $L(k,l)$ prikazali na primeru $L(3,4)$, posledično pa bomo tudi potrdili že znano vrednost števila $R(3,4)$.

Pred določanjem števila $L(3,4)$ sklenimo naslednji dogovor, ki se ga držimo skozi celoten razdelek.

Dogovor. Imejmo neko kliko velikosti k v polnem grafu K_n, pri čemer je eno od vozlišč klike vozlišče 0 (če ni nobeno, lahko zaradi rotacijske simetrije vozlišča spremenimo in postavimo vozlišče z najmanjšo oznako na 0, ostale pa ustrezno popravimo). Če ostalih $k-1$ vozlišč uredimo po velikosti, imamo torej kliko na vozliščih $0, i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$, kjer je $0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-1} < n$. Tedaj bomo to kliko označili z *zapisom* s_1–s_2–s_3– $\cdots$ –s_k, kjer so $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_k$ po velikosti urejena števila $\min\{i_1, n-i_1\}$, $\min\{i_2-i_1, n-(i_2-i_1)\}$, $\min\{i_3-i_2, n-(i_3-i_2)\}$,..., $\min\{i_{k-1}-i_{k-2}, n-(i_{k-1}-i_{k-2})\}$, $\min\{i_k, n-i_k\}$. Tako bo na primer kliki K_4 v polnem grafu K_8 na vozliščih $0,5,6,7$ utrezal zapis 1–1–1–3.

Trditev 5.1. *Velja* $L(3,4) = 8$ *in posledično* $R(3,4) = 9$.

Dokaz: Po izreku 3.1 na podlagi $R(2,4) = 4$ in $R(3,3) = 6$ dobimo $R(3,4) < 10$, torej $R(3,4) \leq 9$, po lemi 3.10 pa od tod sledi $L(3,4) \leq 8$. Torej nas zanima, če obstaja regularno $(3,4)$-barvanje polnega grafa K_8. Denimo, da obstaja. Tedaj po trditvi 3.2 vemo, da je za vsako takšno $(3,4)$-barvanje polnega grafa K_8 v vsakem vozlišču rdečih povezav največ $R(2,4)-1 = 3$ in modrih povezav največ $R(3,3)-1 = 5$. Vsa vozlišča v K_8 so stopnje 7, torej so lahko zaradi regularnosti barvanja iz vsakega vozlišča po 3 rdeče in 4 modre povezave ali pa iz vsakega po 2 rdeči in 5 modrih povezav. V drugem primeru, torej ko sta iz vsakega vozlišča po 2 rdeči povezavi, sta obe povezavi enake dolžine in imamo le en "tip" rdečih povezav. Torej so vse rdeče povezave dolžine s za nek $s \in \{1,2,3\}$. Če pa so v vsakem vozlišču po 3 rdeče povezave, imamo dve različni dolžini rdečih povezav, torej imamo dva "tipa" rdečih povezav, kjer sta dve povezavi enake dolžine $s_1 \in \{1,2,3\}$, tretja, ki je drugega tipa, pa povezuje vozlišče z nasprotnim vozliščem in je dolžine $s_2 = 4$. Zapišimo sedaj vse možne kombinacije dolžin rdečih povezav, kjer kombinacija $[s]$ predstavlja možnost, ko imamo rdeče povezave le enega možnega tipa, kombinacija $[s_1, s_2]$ pa možnost, ko imamo rdeče povezave za dva možna tipa. Upoštevamo, da so na primer povezave dolžin 7, 6 ali 5 ekvivalentne povezavam dolžin 1, 2 ali 3, in je posledično v K_8 dolžina povezave največ 4. Torej imamo možnosti

$$[1],\ [2],\ [3],\ [1,4],\ [2,4],\ [3,4].$$

Sedaj poglejmo vse možne kombinacije dolžin treh povezav, ki predstavljajo različne klike K_3 v grafu K_8, glede na dolžine povezav. Možnosti zapišemo v skladu z zgornjim dogovorom. Zapis s_1–s_2–s_3 torej predstavlja kombinacijo treh dolžin povezav, ki tvorijo kliko K_3. Ta zapis predstavlja vse klike K_3, ki vsebuje vozlišče 0 in jih sestavljajo povezave teh dolžin, v kakršnem koli vrstnem redu. To pomeni, da so s tem zapisom mišljene vse klike K_3, v katerih je natanko ena izmed povezav dolžine s_1, natanko ena dolžine s_2 in natanko ena dolžine s_3.

Vsi možni zapisi za klike K_3 so torej

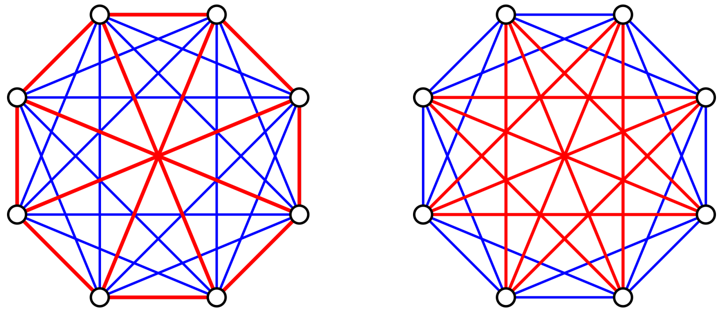
1–1–2; 1–2–3; 1–3–4; 2–2–4; 2–3–3.

Opazimo, da imamo pri barvanju kombinacije $[2,4]$ rdeče monokromatične K_3 s povezavami 2–2–4, zato kombinacija $[2,4]$ odpade. Pri preostalih kombinacijah ne dobimo rdečih K_3. Zapišimo sedaj podobno še vse možne zapise za klike K_4 v grafu K_8.

1–1–1–3; 1–1–2–4; 1–1–3–3; 1–2–2–3; 2–2–2–2.

Sedaj zaradi klik K_4 z zapisom 2–2–2–2 odpadeta tudi barvanji kombinacij $[1]$ in $[3]$, saj pri teh barvanjih v omenjenih klikah K_4 ni nobene rdeče povezave. Podobno odpade barvanje kombinacije $[2]$ zaradi klik s povezavami dolžin 1–1–3–3, vendar v določenem zaporedju, torej 1–3–1–3.
Ostaneta nam torej le barvanji kombinacij $[1,4]$ in $[3,4]$. V vsakem izmed zgornjih zapisov nastopata 1 ali 4 razen v zapisu 2–2–2–2. Prav tako v vsakem zapisu nastopa 3 ali 4 razen v 2–2–2–2. To pomeni, da imajo klike z zapisom 2–2–2–2 vse zunanje povezave modre barve. Vendar pa sta v teh klikah po dve notranji povezavi dolžine 4, saj sta vedno dve zaporedni zunanji povezavi dolžine 2. Povezave dolžine 4 pa so po kombinaciji rdeče barve. Torej tudi te klike niso monokromatične. Zato sta barvanji kombinacij $[1,4]$ in $[3,4]$ res regularni $(3,4)$-barvanji, kateri sta tudi upodobljeni na sliki 5.2. Posledično je res $L(3,4) = 8$. Ker smo našli regularno $(3,4)$-barvanje polnega grafa K_8 sledi, da je $R(3,4) \geq 9$. S tem in z rezultatom izreka 3.1 smo dokazali, da velja $R(3,4) = 9$. ∎

Pred nadaljevanjem si olajšajmo preverjanje barvanj kombinacij, ki so na nek način enake, in vpeljimo pojem izomorfizma kombinacij. Tako bomo preverili le tiste kombinacije, ki so resnično različne.



Slika 5.2: Regularni $(3, 4)$-barvanji povezav grafa K_8.

Definicija. Naj bosta $[s_1, s_2, \ldots, s_m]$ in $[s'_1, s'_2, \ldots, s'_m]$ kombinaciji dolžin povezav za neko regularno barvanje polnega grafa K_n za poljuben $n \geq 3$. Tedaj sta kombinaciji *izomorfni*, kar označimo z $[s_1, s_2, \ldots, s_m] \cong [s'_1, s'_2, \ldots, s'_m]$, če obstaja tako število $q \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$, da je $D(n, q) = 1$ in po morebitni permutaciji vrstnega reda števil s'_i za vsak $1 \leq i \leq m$ velja $s'_i \in \{q \cdot s_i, -q \cdot s_i\}$.

Po tej definiciji je torej zadosti preveriti le neizomorfne kombinacije. Prepričajmo se le, kdaj sta dve kombinaciji res izomorfni. Enostavno vidimo, da je preslikava vozlišč za q, ki je tuj n injektivna. Če predpostavimo, da se dve vozlišči preslikata v isto vozlišče, dobimo

$$\begin{aligned} qi &= qi' && (\text{v } \mathbb{Z}_n) \\ q(i - i') &= 0 && (\text{v } \mathbb{Z}_n) \quad / \cdot q^{-1} \\ i - i' &= 0 && (\text{v } \mathbb{Z}_n) \\ i &= i'. \end{aligned}$$

Ker je preslikava injektivna in preslika 2-barvanje povezav polnega graf samo vase, je tudi bijektivna, torej gre res za izomorfizem. Poglejmo, kaj preslikava stori s povezavami. Za poljuben $0 \leq i \leq n-1$ se povezava $i \sim i + s$ preslika v povezavo $qi \sim qi + qs$, kjer je $qs = s'$. Torej se povezava preslika v neko povezavo v grafu, vendar se vse dolžine povezav s_i preslikajo v neko dolžino povezave s'_j. Zato so tudi preslikane dolžine povezav v drugačnem vrstnem redu. Ta razmislek utemelji, da je res dovolj preverjati le kombinacije različne do izomorfizma natančno.

Kot smo videli, sta tudi Ramseyevo število $R(3, 5)$ določila že Greenwood in Gleason. Na tem mestu pa si oglejmo, kako ga lahko določimo s pomočjo določitve števila $L(3, 5)$.

Trditev 5.2. *Velja* $L(3, 5) = 13$ *in posledično* $R(3, 5) = 14$.

Dokaz: Sedaj, ko že poznamo število $R(3, 4) = 9$, za število $R(3, 5)$ po izreku 3.1 dobimo zgornjo mejo $R(3, 5) \leq 14$, od koder po lemi 3.10 sledi $L(3, 5) \leq 13$. Torej bomo skušali ugotoviti, ali obstaja regularno $(3, 5)$-barvanje polnega grafa K_{13}. Po trditvi 3.2 dobimo, da je v takem 2-barvanju povezav število rdečih povezav v vsakem vozlišču $R(2,5) - 1 = 4$ ali manj, število modrih povezav pa $R(3,4) - 1 = 8$ ali manj. Z vsakim vozliščem je v K_{13} incidenčnih 12 povezav, torej so ravno 4 izmed njih rdeče, 8 pa je modrih. Sledi, da so rdeče povezave dveh različnih tipov. Zapišimo vse možnosti kombinacij dolžin povezav za dva tipa, kjer upoštevamo, da je v K_{13} največja možna dolžina povezave 6.

$$[1,2],\ [1,3],\ [1,4],\ [1,5],\ [1,6],\ [2,3],\ [2,4],\ [2,5],\ [2,6],$$

$$[3,4],\ [3,5],\ [3,6],\ [4,5],\ [4,6],\ [5,6]$$

Ker vemo, da so nekatere med temi kombinacijami izomorfne, ni potrebe po preverjanju vseh. Ker je red polnega grafa K_{13} praštevilski, je tuj vsakemu naravnemu število do 13. Torej je vsaka kombinacija, kjer sta števili s_1 in s_2 obe različni od 1, izomorfna eni izmed kombinacij $[1,s]$. Poleg tega so izomorfne tudi kombinacije $[1,2] \cong [1,6]$ in $[1,3] \cong [1,4]$. Torej moramo v resnici preveriti le kombinacije $[1,2]$, $[1,3]$ in $[1,5]$. Ponovno bomo iskali kombinacijo dolžin rdečih povezav, da ni rdečega K_3 niti modrega K_5. Zapišimo podobno kot prej zapise za vse možne K_3 znotraj K_{13} glede na dolžine povezav.

1–1–2;	1–2–3;	1–3–4;	1–4–5;	1–5–6;
1–6–6;	2–2–4;	2–3–5;	2–4–6;	2–5–6;
3–3–6;	3–4–6;	3–5–5;	4–4–5.	

Vidimo, da torej kombinacija $[1,2]$ ni ustrezna, saj dobimo rdeče klike K_3, ki ustrezajo zapisu 1–1–2. Pri kombinacijah $[1,3]$ in $[1,5]$ rdečih klik K_3 ni. Če sledimo poteku iz prejšnjega dokaza, bi sedaj zapisali po dolžinah povezav še vse možne klike reda 5 v grafu K_{13}, za kar pa bi po nepotrebnem porabili preveč časa. Preveriti namreč želimo le, če obstaja modra klika reda 5. Vsaka klika K_5 z vsaj eno povezavo dolžine 1 ima zagotovo to povezavo rdečo. Zato zapišimo le možnosti, kjer so vse povezave dolžine več kot 1. Dobimo zapise

2–2–2–2–5;	2–2–2–3–4;	2–2–3–3–3.

Preverimo sedaj preostali dve možni barvni kombinaciji. V primeru barvanja povezav po kombinaciji dolžin $[1,3]$ se nam pojavi klika K_5 z dolžinami povezav 2–2–2–2–5 (na primer na vozliščih 0,2,4,6 in 8), v kateri ni nobene povezave dolžine 1 ali 3, torej imamo modro monokromatično kliko in zato kombinacija $[1,3]$ odpade. Ostane torej le kombinacija dolžin $[1,5]$.

Ker je ena izmed zunanjih povezav zagotovo dolžine 5 odpadejo klike z dolžinami povezav 2–2–2–2–5. Torej so kandidati za modre monokromatične klike samo klike z dolžinami povezav 2–2–2–3–4 in 2–2–3–3–3. Vendar pa bo pri obeh teh tipih klik ne glede na razporeditev povezav vedno vsaj ena zunanja povezava dolžine 2 imela skupno vozlišče z vsaj eno zunanjo povezavo dolžine 3. Torej bo vedno obstajala notranja povezava dolžine 5, ki pa je obarvana rdeče. Torej ne obstaja modra monokromatična klika reda 5. Sledi, da z barvanjem povezav dolžine 1 in 5 z rdečo barvo dobimo ustrezno regularno $(3,5)$-barvanje. Zaradi izomorfizmov sta taki barvanji tudi kombinaciji $[2,3]$

in [4, 6]. Torej je $L(3,5) = 13$ in $R(3,5) = 14$. ∎

Sledi prvo Ramseyevo število, ki ga Greenwood in Gleason s svojimi metodami nista določila. Prav tako pa se je tudi nam v [16] pri tem številu ustavilo. Gre za število $R(3,6)$.

Izrek 5.3. *Velja* $L(3,6) = 16$ *in posledično* $R(3,6) \geq 17$.

Dokaz: Za vrednosti $k = 3$ in $l = 6$ dobimo na podlagi že določenih vrednosti za $R(3,5)$ in $R(2,6)$ po izreku 3.1 mejo $R(3,6) \leq 19$, po lemi 3.10 pa od tod sledi $L(3,6) \leq 18$. Ugotoviti želimo torej, ali v K_{18} obstaja kakšno regularno $(3,6)$-barvanje. Izkaže se, da niti v K_{18} niti v K_{17} [18] ne obstaja regularno $(3,6)$-barvanje. Pokažimo, da v K_{17} res ne dobimo regularnega $(3,6)$-barvanja, precej podoben dokaz za K_{18} pa izpustimo.

Denimo torej, da obstaja neko regularno $(3,6)$-barvanje polnega grafa K_{17}. Z vsakim vozliščem v K_{17} je incidenčnih 16 povezav. Ker je po trditvi 3.2 v vsakem vozlišču po največ $R(2,6)-1 = 5$ rdečih in največ $R(3,5)-1 = 13$ modrih povezav, imamo lahko po 3 rdeče in 13 modrih povezav, 4 rdeče in 12 modrih povezav, ali pa po 5 rdečih in 11 modrih povezav. Ker je barvanje regularno in je 17 liho število, je v vsakem vozlišču sodo mnogo povezav posamezne barve. Od tod sledi, da so z vsakim vozliščem incidenčne natanko 4 rdeče povezave in natanko 12 modrih povezav. Torej imamo rdeče povezave dveh tipov. Možnih kombinacij za dva tipa je kar 28, vendar so ponovno kombinacije brez dolžine povezave 1 izomorfne eni od kombinacij $[1,s]$, saj je red K_{17} praštevilski. Izmed kombinacij $[1,s]$ pa imamo tudi nekaj izomorfnih med seboj. Ostanejo nam le kombinacije

$$[1,2] \cong [1,8], \quad [1,3] \cong [1,6], \quad [1,4], \quad [1,5] \cong [1,7].$$

Prva kombinacija, ki očitno odpade, je $[1,2]$, saj s takim barvanjem dobimo rdeče klike K_3 z dolžinami povezav 1–1–2. Ostanejo nam torej tri kombinacije, za katere pa ni težko preveriti, da ne dajo nobene rdeče klike K_3. Zapišimo sedaj zapise za klike reda 6 z dolžinami povezav več kot 1, saj bo v vseh ostalih vsaj ena povezava (dolžine 1) rdeče barve.

2–2–2–2–2–7;	2–2–2–2–3–6;	2–2–2–2–4–5;	2–2–2–3–3–5;
2–2–2–3–4–4;	2–2–3–3–3–4;	2–3–3–3–3–3.	

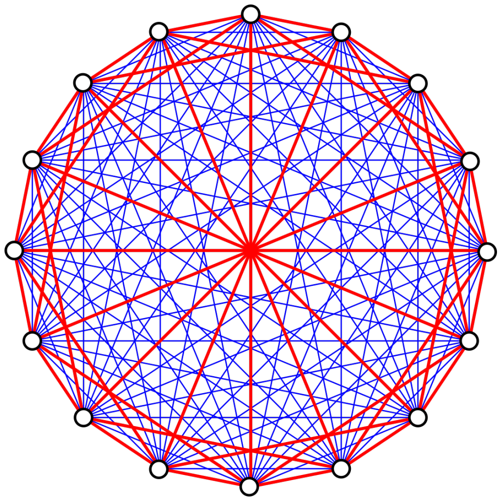
Sedaj ugotovimo, da barvanji kombinacij $[1,3]$ in $[1,5]$ odpadeta, ker bi sicer imeli modre klike s povezavami dolžin 2–2–2–2–2–7 (na primer na vozliščih 0,2,4,6,8,10). Prav tako pa odpade tudi barvanje kombinacije $[1,4]$ v izogib modrim klikam s povezavami dolžin 2–3–3–3–3–3. Torej smo izločili vsa možna barvanja.

S tem smo pokazali, da v K_{17} ne obstaja regularno $(3,6)$-barvanje. To seveda ne pomeni, da v K_{17} ne obstaja nobeno $(3,6)$-barvanje. Vendar če obstaja, zagotovo ni regularno. Prav tako to še ne pomeni, da ne obstaja regularno $(3,6)$-barvanje polnega grafa K_{18}, vendar kot že rečeno dokaz, da je temu res tako, izpustimo.

Preverimo, če lahko najdemo regularno $(3,6)$-barvanje polnega grafa K_{16} in ga določimo. Z vsakim vozliščem je po trditvi 3.2 incidenčnih največ 5 rdečih povezav in največ 13 modrih povezav, vozlišča pa so stopnje 15. Torej je rdečih povezav med 2 in 5, modrih pa med 10 in 13. Imamo tri možnosti: rdeče povezave so enega tipa, dveh tipov ali pa treh tipov. Prva možnost sta po dve rdeči povezavi, kjer imamo barvanja kombinacij $[s]$ za $1 \leq s \leq 7$. Če imamo po tri rdeče povezave, dodamo tem barvanjem še povezavo dolžine 8, torej imamo kombinacije $[s, 8]$ za $1 \leq s \leq 7$. Naslednja možnost so po štiri rdeče povezave, kjer imamo barvanja kombinacij $[s_1, s_2]$ za $s_1, s_2 \in \{1, 2, \ldots, 7\}, s_1 \neq s_2$. Če tem barvanjem dodamo še povezavo dolžine 8, dobimo zadnjo možnost, kjer imamo po pet rdečih povezav. Vseh možnosti je torej kar 56. Preverjanje vseh možnih kombinacij bi bila precejšnja izguba časa. Upoštevati moramo namreč, da tokrat red polnega grafa ni praštevilski, je pa res, da je nekaj števil manjših od 16 tudi tujih 16. Torej je zagotovo nekaj kombinacij med seboj izomorfnih in bi si malce lahko skrajšali delo. Vendar ne želimo dokazati, da v K_{16} ni regularnega $(3,6)$-barvanja, ampak da tako barvanje obstaja. Zadošča torej le utemeljitev, da je neka kombinacija res ustrezna.

Barvanje kombinacije $[1, 3, 8]$ nam zagotovo ne ustvari rdečih klik reda 3, v kar se lahko bralec prepriča sam. Če preverimo še klike reda 6, ugotovimo, da sta edini kliki, v katerih ni dolžine povezav 1, 3 ali 8, kliki s povezavami dolžin 2–2–2–2–2–6 in 2–2–2–2–4–4. Vendar pa bo v teh klikah zagotovo vedno vsaj ena notranja povezava dolžine 8, ki je pa rdeče barve.

Torej smo našli ustrezno barvanje s kombinacijo $[1, 3, 8]$, ki nam da regularno $(3,6)$-barvanje polnega grafa K_{16}. Opisano regularno $(3,6)$-barvanje je upodobljeno na sliki 5.3. Sledi, da je $L(3,6) = 16$ in $R(3,6) \geq 17$. ∎



Slika 5.3: Regularno $(3,6)$-barvanje povezav grafa K_{16}.

Zagotovo to ni edino ustrezno barvanje, vendar za dokaz $L(3,6) = 16$ zadošča, da najdemo eno. S tem je poleg zgornje meje iz izreka 3.1 tudi določena spodnja meja za $R(3,6)$, torej je $17 \leq R(3,6) \leq 19$.

To spodnjo mejo sta določila že tudi Greenwod in Gleason v [13]. V delu članka, kjer obravnavata Ramseyeva števila za več barv, navedeta spodnjo mejo za $R(3,6)$. Ob koncu dokaza za $R(3,3,3) = 17$, kjer je prvi korak dokaza $R(3,3,3) > 16$, opomnita, da lahko iz tega trdimo, da je prav tako $R(3,6) > 16$. Z omenjenim dokazom se ukvarjamo v naslednjem poglavju Ramseyevih števil z več barvami, obrazložitev izpeljave spodnje meje za $R(3,6)$ pa naredimo na tem mestu.
V dokazu uporabimo tri barve za barvanje povezav grafa K_{16}, recimo rdečo, modro in zeleno. Če sedaj predpostavimo, da ne razlikujemo rdeče in zelene barve, potem obravnavamo primer dveh barv, torej modre in rdeče-zelene. Vemo, da ni modrega K_3. Če bi obstajal K_6, ki bi bil pobarvan z rdeče-zeleno barvo, bi le-ta zagotovo dal rdeč ali zelen K_3, saj je $R(3,3) = 6$. Ker takšne monokromatične klike ni, to pokaže, da je to barvanje $(3,6)$-barvanje polnega grafa K_{16}.

Z metodo iskanja regularnih (k,l)- barvanj bi sedaj lahko nadaljevali, vendar bi s tem le ponovili rezultate Kalbfleischa, argumenti v dokazih pa so precej podobni, kot pri zgornjih primerih. Zato le zapišimo rezultate, ki jih poda v članku [18].

Trditev 5.4. *$L(4,4) = 17$, $R(4,4) = 18$.*

Dokaz: Iz izreka 3.1 dobimo $R(4,4) \leq R(3,4) + R(4,3) = 18$ in po lemi 3.10 $L(4,4) \leq 17$. Če grafu K_{17} pobarvamo z rdečo povezave dolžin 1, 2, 4 in 8, ostale pa z modro, dobimo regularno $(4,4)$-barvanje. Sledi $L(4,4) = 17$ in $R(4,4) = 18$. ∎

V naslednjem izreku in dokazu avtor uporabi vrednost $R(3,6) = 18$, katero dokažemo v nadaljevanju.

Trditev 5.5. *$L(3,7) = 21$, $R(3,7) \geq 22$.*

Dokaz: Iz izreka 3.1 dobimo $R(3,7) \leq R(2,7) + R(3,6) = 25$ in po lemi 3.10 sledi $L(3,7) \leq 24$. V polnem grafu K_{21} lahko konstruiramo regularno $(3,7)$-barvanje, če pobarvamo povezave dolžin 1, 3 in 8 z rdečo, ostale pa z modro. Z dolgotrajnim preverjanjem vseh možnosti se pokaže, da v polnih grafih K_{22}, K_{23} in K_{24} ne obstaja regularno $(3,7)$-barvanje. Torej je $L(3,7) = 21$ in sledi $R(3,7) \geq 22$. ∎

Trditev 5.6. *$L(3,8) = 26$, $R(3,8) \geq 27$.*

Dokaz: Avtor uporabi rezultat iz svojega drugega dela, ki ga ne navede natančno. Upošteva rezultat $R(3,7) \leq 24$. Po izreku 3.1 dobimo $R(3,8) \leq R(2,8) + R(3,7) \leq 32$, ker pa sta predhodni vrednosti sodi je torej $R(3,8) < 32$ oziroma $R(3,8) \leq 31$. Po lemi 3.10 je $L(3,8) \leq 30$. S preverjanjem vseh možnosti pokažemo, da ni regularnih $(3,8)$-barvanj v grafih K_{27}, K_{28}, K_{29} in K_{30}. Regularno $(3,8)$-barvanje polnega grafa K_{26} dobimo, če rdeče pobarvamo povezave dolžin 1, 3, 8 in 13. Torej je $L(3,8) = 26$ in sledi $R(3,8) \geq 27$. ∎

Trditev 5.7. *$L(4,5) = 24$, $R(4,5) \geq 25$.*

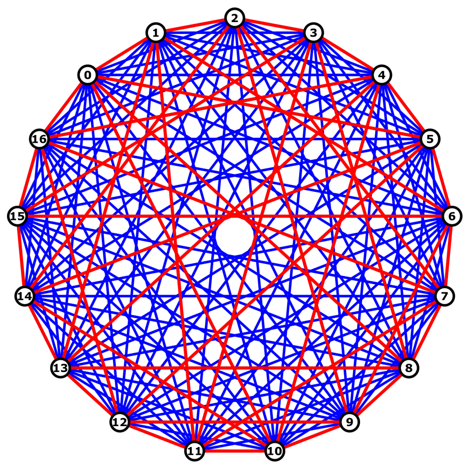
Dokaz: Iz izreka 3.1 dobimo $R(4,5) \leq R(3,5) + R(4,4) = 14 + 18 = 32$, torej je zaradi sodosti obeh števil v resnici $R(4,5) \leq 31$. Po lemi 3.10 sledi $L(4,5) \leq 30$. V polnem grafu K_{24} dobimo regularno $(4,5)$-barvanje, če z rdečo pobarvamo povezave dolžin 1, 2, 4, 8 in 9. S preverjanjem vseh možnosti se pokaže, da ni regularnih $(4,5)$-barvanj v polnih grafih K_{25}, K_{26}, K_{27}, K_{28}, K_{29} in K_{30}. Torej je $L(4,5) = 24$ in sledi $R(4,5) \geq 25$. ∎

Preverjanje v dokazu $L(4,5)$ je Kalbfleisch izvedel z uporabo računalniškega programa napisanega v Fortran IV na računalniku IBM 7040 na Univerzi v Waterlooju, ki je rezultat vrnil v 20 minutah.

5.3 Nadaljnje delo in dela drugih avtorjev

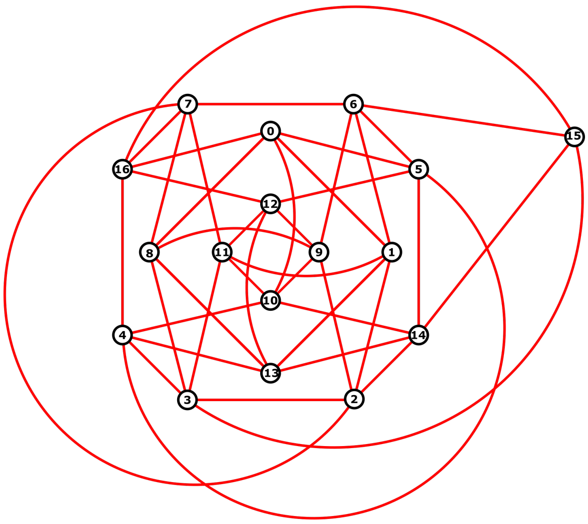
Vrnimo se sedaj k iskanju točne vrednosti števila $R(3,6)$. To sta kasneje odkrila in dokazala dva različna avtorja Kéry [21] in Kalbfleish [17], katerih deli sta žal nedostopni, poleg tega pa je prvo le v madžarščini. V precej novejšem članku Cariolara [5], v katerem uporabi predvsem svoje lastno predhodno delo iz študijskih časov [4], lahko najdemo dokaz, da je $R(3,6) = 18$.

Prvi korak pri določanju števila $R(3,6)$ je utemeljitev $R(3,6) > 17$. Upodobitev 2-barvanja povezav grafa K_{17} na sliki 5.4 sta sestavila Graver in Yackel [12]. Izkaže se, da gre za $(3,6)$-barvanje grafa K_{17}.



Slika 5.4: $(3,6)$-barvanje povezav grafa K_{17}.

Iz te upodobitve sicer težko razberemo, da gre res za ustrezno barvanje, zato se osredotočimo raje na sliko 5.5, kjer je podgraf rdečih povezav 2-barvanja preoblikovan tako, kot ga lahko zasledimo v omenjenem članku. Na obeh slikah so zaradi lažje predstave preoblikovanja označena vozlišča s števili od 0 do 16. Dokaj enostavno opazimo, da v tem 2-barvanju ni rdeče klike K_3, z nekaj truda pa tudi potrdimo, da ni modre klike K_6. Natančen razmislek lahko bralec najde v [12].



Slika 5.5: Preoblikovan rdeči podgraf (3, 6)-barvanja povezav grafa K_{17}.

Sedaj je potrebno dokazati še, da je $R(3,6) \leq 18$. Dokaz je nekoliko daljši in temelji na iskanju klike reda 3 in praznega grafa reda 6 v poljubnem grafu. Kljub temu je dovolj razumljiv, da ga lahko prevedemo na 2-barvanja povezav polnega grafa.

V vseh naslednjih lemah se držimo naslednjih predhodnih določil in predpostavk. Najprej predpostavimo, da obstaja 2-barvanje povezav grafa K_{18} brez rdeče klike reda 3 in brez modre klike reda 6 in izberemo neko tako barvanje. S pomočjo lem bomo s protislovjem pokazali, da v vsakem 2-barvanju povezav polnega grafa K_{18} brez rdeče klike K_3 obstaja modra klika K_6. Dogovorimo se, da bomo rdeče polne podgrafe reda i označili z R_i in podobno modre z M_i. Dogovorimo se tudi, da bomo sosede vozlišč po barvnih povezavah poimenovali po barvah, torej sosedu po rdeči povezavi rečemo *rdeči sosed* in sosedu po modri povezavi rečemo *modri sosed*.

Lema 5.8. *Z vsakim vozliščem $v \in V(K_{18})$ je incidenčnih natanko 5 rdečih povezav.*

Dokaz: Ker gre za (3, 6)-barvanje polnega grafa K_{18}, po trditvi 3.2 sledi, da je v vsakem vozlišču največ $R(2,6) - 1 = 5$ rdečih in največ $R(3,5) - 1 = 13$ modrih povezav. Ker je stopnja vozlišč 17, ima torej vsako vozlišče bodisi 4 bodisi 5 rdečih sosedov.

Recimo sedaj, da ima neko vozlišče v le 4 rdeče sosede. Posledično je podgraf H grafa K_{18} brez v in njegovih rdečih sosedov reda 13 in je brez klik R_3 in M_5. Zato je to 2-barvanje povezav H ravno $(3,5)$-barvanje za H. Ker je $H \cong K_{13}$, ima po dokazu trditve 5.2 vsako vozlišče v H natanko 4 rdeče sosede. Vzemimo sedaj vozlišče w kot enega izmed rdečih sosedov vozlišča v, ostale tri pa označimo z v_1, v_2, v_3. Ker v K_{18} ni nobenega R_3 in ima w vsaj še tri rdeče sosede poleg v, označimo jih z w_1, w_2, w_3, so vsa ta tri vozlišča v H. Med njimi so same modre povezave in vsako ima 4 rdeče sosede znotraj H, vključno z vozliščem w pa jih ima tako vsako že 5 znotraj K_{18}. Ker jih ne morejo imeti več kot 5, zagotovo niso povezana z rdečimi povezavami z nobenim izmed ostalih rdečih sosedov v, torej v_1, v_2, v_3. Med temi tremi vozlišči pa so tudi vse povezave modre. Torej obstaja M_6 na vozliščih v_1, v_2, v_3, w_1, w_2 in w_3, kar je v nasprotju s predpostavkami. Torej nobeno vozlišče nima le 4 rdečih sosedov. Sledi, da ima vsako vozlišče natanko 5 rdečih sosedov. ∎

Lema 5.9. *Za vsak par vozlišč $u, v \in V(K_{18})$, ki sta povezani z modro povezavo, velja, da imata enega ali dva skupna rdeča soseda.*

Dokaz: Naj bosta $u, v \in V(K_{18})$ povezani z modro povezavo. Če nimata nobenega skupnega rdečega soseda, potem je vozlišče v z vsemi rdečimi sosedi vozlišča u, označimo jih z u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, povezano z modro povezavo. Vse povezave med vozlišči u_i so prav tako modre (ker ni nobenega R_3), torej vozlišče v skupaj z u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 tvori M_6, kar ni mogoče. Torej imata u in v vsaj enega skupnega rdečega soseda.

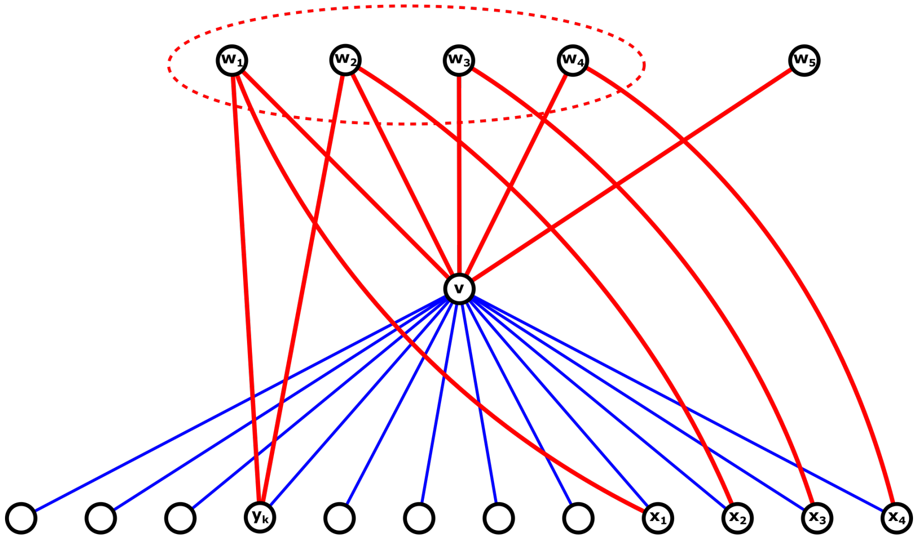
Sedaj recimo, da imata vsaj tri skupne rdeče sosede. Naj bo tokrat H podgraf grafa K_{18} brez u, v in njunih rdečih sosedov. Torej ima H vsaj $18 - (2 + 3 + 2 \cdot 2) = 9$ vozlišč. Ker velja $R(3,4) = 9$ in vemo, da v H ni nobene klike R_3, obstaja v H klika M_4, kar pa skupaj z u in v tvori M_6. Torej imata u in v res največ dva skupna soseda po rdečih povezavah. ∎

Lema 5.10. *Naj bo $v \in V(K_{18})$. Potem ima v natanko 4 modre sosede $x_i, 1 \leq i \leq 4$, s katerimi ima enega skupnega rdečega soseda in v ima natanko 8 modrih sosedov $y_i, 1 \leq i \leq 8$, s katerimi ima natanko dva skupna rdeča soseda. Poleg tega si v deli z vozlišči x_i različne skupne rdeče sosede in z vozlišči y_i različne pare skupnih rdečih sosedov.*

Dokaz: Naj bo $v \in V(K_{18})$ in naj bo H podgraf grafa K_{18} brez v in njegovih rdečih sosedov. Potem je po lemi 5.8 red podgrafa H enak $18 - (1 + 5) = 12$. Vsak izmed rdečih sosedov w_i, $1 \leq i \leq 5$, vozlišča v ima še po 4 rdeče povezave do vozlišč iz H (ker ni klik R_3). Torej je med vozlišči iz $\{w_1, w_2, \ldots, w_5\}$ in vozlišči iz H natanko $20 = 5 \cdot 4$ rdečih povezav. Po lemi 5.9 ima vsako izmed 12 vozlišč iz H enega ali dva skupna rdeča soseda z v, torej do vsakega vozlišča iz H poteka ena ali dve rdeči povezavi do vozlišč iz $\{w_1, w_2, \ldots, w_5\}$. Od tod očitno sledi, da ima 8 vozlišč iz H po dva rdeča soseda iz $\{w_1, w_2, \ldots, w_5\}$, preostala 4 pa po enega.

Recimo, da imata dve vozlišči x_1, x_2 istega skupnega rdečega soseda, recimo w_1, z vozliščem v. Potem vozlišča x_1, x_2, w_2, w_3, w_4, w_5 tvorijo kliko M_6. Torej ima vsako izmed vozlišč x_1, x_2, x_3, x_4 različnega skupnega rdečega soseda z v. Recimo nazadnje, da imata dve vozlišči y_1, y_2 isti par skupnih rdečih sosedov, recimo w_1, w_2, z vozliščem v. To je v nasprotju z lemo 5.9, saj imata potem vozlišči w_1, w_2 vsaj tri skupne rdeče sosede, to so v, y_1, y_2. S tem je lema dokazana. ■

Lema 5.11. *Naj bodo vozlišča v, x_1, x_2, x_3, x_4 definirana kot v lemi 5.10. Tedaj vozlišča x_1, x_2, x_3, x_4 tvorijo rdeč monokromatičen cikel reda 4.*



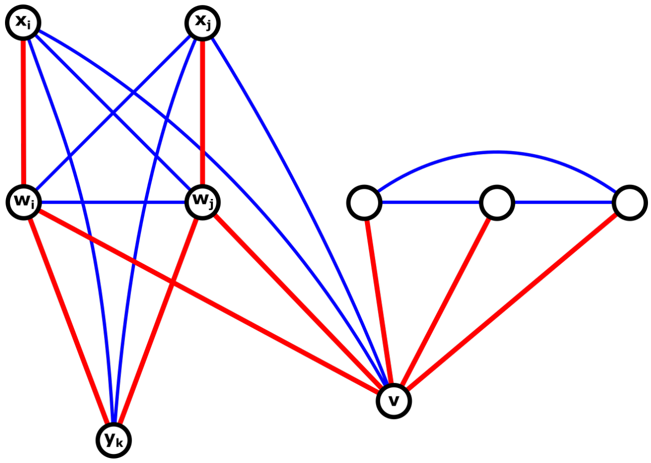
Slika 5.6: 2-barvanje povezav grafa iz dokaza leme 5.11.

Dokaz: Naj bodo vozlišča w_1, w_2, w_3 in w_4 štirje različni skupni rdeči sosedi med vozliščem v ter vozlišči x_1, x_2, x_3 in x_4, kjer so z rdečimi povezavami povezani pari vozlišč $\{w_i, x_i\}$. Peti rdeči sosed vozlišča v naj bo w_5. Vsako izmed vozlišč y_i, $1 \leq i \leq 8$, ima po lemi 5.10 svoj par rdečih sosedov v $\{w_1, w_2, \ldots, w_5\}$, torej od desetih parov vozlišč $\{w_i, w_j\}$, $1 \leq i < j \leq 5$, le dva nimata skupnega rdečega soseda v $\{y_1, y_2, \ldots, y_8\}$. Sledi, da imajo rdečega skupnega soseda v $\{y_1, y_2, \ldots, y_8\}$ vsaj štirje pari $\{w_i, w_j\}$, $1 \leq i < j \leq 4$.

Vzemimo poljuben tak par vozlišč $\{w_i, w_j\}$ (na sliki 5.6 w_1 in w_2) in naj bo y_k njun skupni rdeči sosed. Imamo situacijo, upodobljeno še drugače na sliki 5.7, saj ni nobenega R_3.

Ker sta w_i in w_j edina rdeča soseda vozlišča x_i oziroma x_j izmed vozlišč $\{w_1, w_2, \ldots, w_5\}$, so med vozliščema x_i, x_j in $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_5\} \setminus \{w_i, w_j\}$ le modre povezave. Prav tako so med y_k in W le modre povezave, sicer bi imela y_k in v vsaj tri skupne rdeče sosede, kar je v nasprotju z lemo 5.9. Torej morata biti vozlišči x_i in x_j povezani z rdečo povezavo, sicer imamo M_6 na $\{x_i, x_j, y_k\} \cup W$. Na ta način so med vozlišči $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ vsaj 4 rdeče povezave. Zaradi dejstva, da med njimi ni R_3, vozlišča $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ tvorijo ravno rdeči C_4. ■

Trditev 5.12. *Vsako 2-barvanje povezav polnega grafa K_{18} vsebuje rdečo kliko R_3 ali modro kliko M_6. Torej je $R(3, 6) = 18$.*

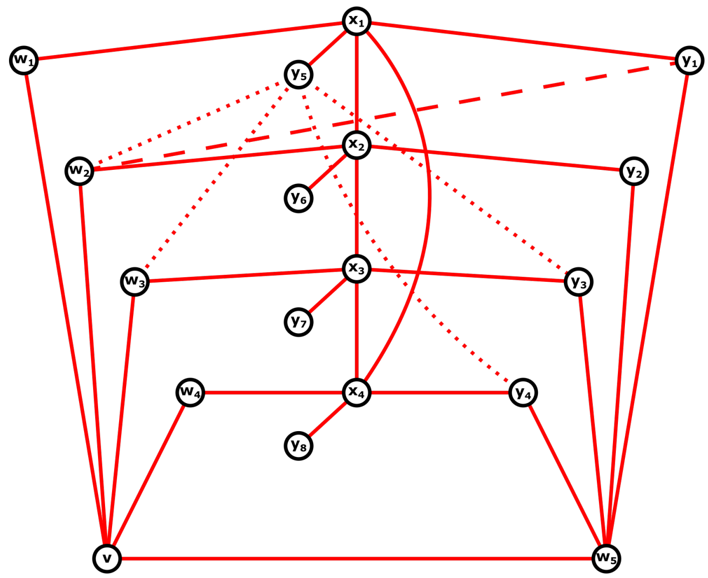


Slika 5.7: Preoblikovana situacija iz dokaza leme 5.11.

Dokaz: Za lažjo predstavo lahko dokaz spremljamo na sliki 5.8 [4]. Ohranimo oznake iz leme 5.11, kjer vozlišča x_1, x_2, x_3, x_4 tvorijo rdeč monokromatičen cikel C_4 tako, da so rdeče povezave $\{x_i, x_{i+1}\}$, $1 \leq i \leq 3$ in $\{x_1, x_4\}$. Vsako izmed štirih vozlišč $x_i \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ima z vozliščem v enega skupnega rdečega soseda, namreč w_i, torej so z w_5 povezana z modrimi povezavami. Po lemi 5.9 imajo vozlišča x_i, $1 \leq i \leq 4$, vsaj po enega skupnega rdečega soseda z vozliščem w_5. Noben par zaporednih vozlišč na rdečem C_4, ki ga napenjajo x_i, $1 \leq i \leq 4$, nima skupnega rdečega soseda (ker ni R_3), prav tako pa izven cikla C_4 nimata skupnega rdečega soseda para vozlišč $\{x_1, x_3\}$ in $\{x_2, x_4\}$, saj bi sicer imela vsaj 3 skupne rdeče sosede, kar je v protislovju z lemo 5.9. Ker ima vozlišče w_5 v $\{y_1, y_2, \ldots, y_8\}$ natanko 4 rdeče sosede, ima tako vsak od x_i, $1 \leq i \leq 4$, po natanko enega skupnega soseda z w_5, po lemi 5.10 celo vsak drugega, torej lahko privzamemo, da so z rdečo povezavo povezani pari vozlišč $\{x_i, y_i\}$ in $\{w_5, y_i\}$, $1 \leq i \leq 4$. Po lemi 5.8 imajo vozlišča x_i, $1 \leq i \leq 4$, še po enega rdečega soseda, po zgornjem pa so paroma različni, prav tako pa so različni od y_i, $1 \leq i \leq 4$. Označimo jih z y_i, $5 \leq i \leq 8$, pri čemer so z rdečimi povezavami povezani pari vozlišč $\{x_i, y_{i+4}\}$, $1 \leq i \leq 4$. S tem smo vsem vozliščem dodelili oznake, kar lahko vidimo tudi na sliki 5.8.

Osredotočimo se sedaj na vozlišče y_5. Po lemi 5.8 ima vozlišče y_5 poleg x_1 še štiri rdeče sosede, hkrati pa ima po lemi 5.10 z vozliščem v dva skupna rdeča soseda, kjer so kandidati w_2, w_3, w_4, ne more pa biti skupni rdeči sosed w_1, saj bi tedaj imeli rdeč trikotnik $w_1 y_5 x_1$. Podobno imata po lemi 5.10 in dejstvu, da ima vozlišče w_5 po enega skupnega rdečega soseda že z vozlišči x_i, $1 \leq i \leq 4$, vozlišči w_5 in y_5 dva skupna rdeča soseda, kjer so kandidati y_2, y_3, y_4, ponovno pa odpade y_1, ker bi dobili rdeč trikotnik $y_1 y_5 x_1$. Vozlišče y_5 zagotovo ne more biti hkrati povezano z rdečo povezavo z y_i in w_i, za $i \in \{2, 4\}$, saj bi v tem primeru imelo y_5 tri skupne rdeče sosede z x_2 (to so w_2, y_2, x_1), oziroma z x_4 (to so w_4, y_4, x_1). Zato mora biti y_5 z rdečo povezavo hkrati povezan z w_3 in y_3, preostala rdeča soseda pa sta w_2 in y_4 ali pa w_4 in y_2. Zaradi simetričnosti lahko brez izgube splošnosti trdimo, da je y_5 z rdečimi povezavami povezan z

w_2 in y_4.
Posvetimo sedaj pozornost vozlišču w_2. Vozlišče w_2 ima po lemi 5.10 zagotovo dva skupna rdeča soseda z vozliščem w_5, saj ima w_5 po enega skupnega rdečega soseda že z vozlišči x_i, $1 \leq i \leq 4$. Prvi skupni rdeči sosed je v, torej je w_2 z rdečo povezavo povezan z natanko enim izmed vozlišč y_i, $1 \leq i \leq 4$. To ne more biti vozlišče y_2, sicer dobimo rdeč trikotnik $w_2x_2y_2$. Podobno to ne more biti vozlišče y_3, sicer dobimo rdeč trikotnik $w_2y_3y_5$, ter ne more biti niti vozlišče y_4, sicer dobimo rdeč trikotnik $w_2y_4y_5$. Torej ostane vozlišče y_1 in sledi, da je rdeča povezava $\{w_2, y_1\}$. Toda sedaj imata vozlišči w_2 in x_1 tri skupne rdeče sosede, to so x_2, y_1, y_5, kar je v protislovju z lemo 5.9. S tem protislovjem smo pokazali, da 2-barvanje povezav polnega grafa K_{18} brez rdeče klike R_3 in modre klike M_6 ne obstaja, s tem pa smo zaradi $R(3,6) > 17$ utemeljili tudi $R(3,6) = 18$. ∎



Slika 5.8: Graf iz dokaza trditve 5.12, kjer so predpostavljene rdeče povezave iz y_5 pikčaste in povezava protislovja iz w_2 črtkana.

Za nekaj klasičnih Ramseyevih števil smo do tu že dobili konkretne vrednosti z ustreznimi dokazi. Za večja števila pa sedaj le preglejmo potek njihovega odkrivanja, zaradi dolžine in zahtevnosti pa pripadajoče dokaze izpustimo. Te si bralec lahko ogleda v navedeni literaturi.

Za število $R(3,7)$ smo doslej dobili meje $22 \leq R(3,7) \leq 25$. Kalbfleish v [20] pokaže, da v K_{24} ne more obstajati $(3,7)$-barvanje in zato je $R(3,7) \leq 24$, v [19] pa skonstruira in opiše $(3,7)$-barvanje polnega grafa K_{22}, s čimer dokaže, da je $R(3,7) \geq 23$. V istem članku postavi tudi domnevo, da je $R(3,7) = 23$. Da je temu res tako, sta kmalu dokazala Graver in Yackel, ki sta v [12] z medoto izčrpavanja možnosti v skoraj deset strani dolgem dokazu pokazala, da v polnem grafu K_{23} ne obstaja $(3,7)$-barvanje.

Številu $R(3,8)$ smo nekaj pozornosti že posvetili in našli meje $27 \leq R(3,8) \leq 31$. Zgornjo mejo izboljša Kalbfleisch, ki dokaže, da ne obstaja $(3,8)$-barvanje grafa K_{30} in s tem $R(3,8) \leq 30$ [20]. Po petnajstih letih obe meji izboljšata Grinstead in Roberts ter pokažeta, da v K_{29} ne obstaja $(3,8)$-barvanje in podata ustrezno $(3,8)$-barvanje polnega grafa K_{27} ter s tem $28 \leq R(3,8) \leq 29$ [14]. Točno vrednost še deset let kasneje dokažeta McKay in Zhang, ki s pomočjo računalnikov končno določita vrednost $R(3,8) = 28$ [24]. Računalniško preračunavanje je potekalo na več računalnikih v SUN omrežju v času nekaj mesecev, pri čemer so računalniki opravili skoraj 10^{14} strojnih ukazov.

Mej za število $R(3,9)$ zaenkrat še nismo obravnavali. Prvo možno zgornjo mejo dobimo po izreku 3.1. Če upoštevamo našo najboljšo mejo za $R(3,8)$, to je $R(3,8) \leq 31$ (brez upoštevanja kasnejših rezultatov iz prejšnjega odstavka), dobimo mejo $R(3,9) \leq 40$. Spodnjo mejo in boljšo zgornjo mejo $36 \leq R(3,9) \leq 38$ zasledimo v [18], čeprav ju avtor ne dokazuje, vendar navaja, da naj bi ju dokazal v nekem drugem članku, le-tega pa ne navede. Za spodnjo mejo opis konstrukcije $(3,9)$-barvanja grafa K_{35} najdemo v [12], kjer Graver in Yackel odkritje tega barvanja pripisujeta Kalbfleischu [17]. Za izboljšavo zgornje meje $R(3,9) \leq 37$ sta povsem zaslužna avtorja sama. S preiskovanjem možnih $(3,8)$-barvanj in $(3,9)$-barvanj na polnih grafih pokažeta omenjeno mejo. Poleg tega postavita hipotezo, da bi z izključitvijo obstoja $(3,8)$-barvanja grafa K_{27} z 80 rdečimi povezavami in s tem tudi obstoja $(3,9)$-barvanja grafa K_{36} dokončno potrdili $R(3,9) = 36$. Tega preverjanja se ne lotita. Njuno delo nadaljujeta Grinstead in Roberts [14], ki sta z uporabo računalniških algoritmov dokazala omenjeno hipotezo in s tem pokazala $R(3,9) = 36$.

Z uporabo izreka 3.1, kjer upoštevamo vrednosti $R(3,5) = 14$ in $R(4,4) = 18$, ter z regularnim $(4,5)$-barvanjem iz trditve 5.7 dobimo meji $25 \leq R(4,5) \leq 31$. V istem članku, kjer Kalbfleisch opiše regularno barvanje za spodnjo mejo $R(4,5) \geq 25$, avtor tudi trdi, da je $R(4,5) \leq 30$ [18]. Zgornjo mejo izboljša Walker. Najprej pokaže, da je $R(4,5) \leq 29$ [33], kasneje pa $R(4,5) \leq 28$ [34]. Ta meja je ostala 20 let, dokler je nista McKay in Radziszowski izboljšala najprej na $R(4,5) \leq 27$ [22] in nato na $R(4,5) \leq 26$, česar pa nista objavila, ker je bila meja rezultat zgolj izboljšanih algoritmov po podobni metodi kot pri predhodniku. Točno vrednost sta leto kasneje ista avtorja odkrila, ponovno s pomočjo računalniških algoritmov in pokazala $R(4,5) = 25$ [23]. Poleg tega sta v članku navedla tabelo števila vseh $(4,5)$-barvanj polnih grafov K_n za $1 \leq n \leq 24$.

Spomnimo se še Walkerjevega izreka 3.6 in preverimo, kakšne meje dobimo z njegovo pomočjo. Po izreku za $k = 3$ dobimo zgornjo mejo $R(3,3) \leq 4R(3,1)+2 = 6$, kar je po tabeli 5.2 natančna meja oziroma točna vrednost. Za $k = 4$ dobimo zgornjo mejo $R(4,4) \leq 4R(4,2)+2 = 18$, kar je prav tako kar točna vrednost. Že pri $k = 5$ pa dobimo zgornjo mejo $R(5,5) \leq 4R(5,3)+2 = 58$, kar je bistveno slabše od trenutno najboljše znane zgornje meje. Za $k = 6$ je dobljena zgornja meja blizu do danes najboljše meje $R(6,6) \leq 166$. S povečevanjem k

pa se izračunana zgornja meja oddaljuje od danes znanih zgornjih mej.

Pregledali smo vse točne vrednosti klasičnih Ramseyevih števil $R(k, l)$, ki so do danes znane. Večina navedenih člankov in mnogo drugih navaja tudi nove meje, katere odkrijejo kot posledico svojih rezultatov. Ker pa so to vsa znana točna števila, se na tem mestu ustavimo, bralca pa povabimo k ogledu [28], kjer so vsa števila navedena z njihovimi avtorji, zapisana pa so tudi v tabeli 5.2.

l k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36	40 42	47 50	52 59	59 68	66 77	73 87
4		18	25	36 41	49 61	58 84	73 115	92 149	98 191	128 238	133 291	141 349	153 417
5			43 49	58 87	80 143	101 216	126 316	144 442	171 633	191 848	213 1138	239 1461	265 1878
6				102 165	113 298	132 495	169 780	179 1171	253 1804	263 2566	317 3703	5033	401 6911
7					205 540	217 1031	241 1713	289 2826	405 4553	417 6954	511 10578	15263	22112
8						282 1870	317 3583	6090	10630	16944	817 27485	41525	861 63609
9							565 6588	581 12677	22325	38832	64864		
10								798 23556	45881	81123			1265

Tabela 5.2: Tabela do danes znanih vrednosti in mej klasičnih Ramseyevih števil [28].

Poglavje 6

Posplošitve Ramseyeve teorije

Kot smo se lahko prepričali, raziskovanje in odkrivanje klasičnih Ramseyevih števil za dve barvi hitro postane prezahteven matematičen problem. Zato so matematiki Ramseyevo teorijo vpeljali še v drugačnih oblikah. Raziskovanje se razvije na Ramseyeva števila za tri ali več barv $R(k_1, k_2, k_3, \ldots)$, Ramseyeva števila za grafe $R(G, H)$, splošna Ramseyeva števila za posebne družine grafov (poti, kolesa, drevesa, zvezde), Ramseyeva števila za hipergrafe in še kakšna druga nova neraziskana veja oziroma izpeljanka Ramseyeve teorije. Poglejmo si osnove nekaterih izmed teh izpeljank ter glavne odkrite lastnosti in vrednosti.

6.1 Ramseyeva števila za več barv

Preden se lotimo raziskovanja Ramseyevih števil za več barv, je smiselno ta števila sploh definirati oziroma povedati, da ta števila sploh obstajajo.

Izrek 6.1. *Naj bo c poljubno naravno število in naj bodo $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_c$ prav tako naravna števila. Tedaj obstaja najmanjše tako naravno število n, da za vsak $m \geq n$ v poljubnem c-barvanju povezav polnega grafa K_m za nek $1 \leq i \leq c$ obstaja monokromatična klika K_{k_i} z vsemi povezavami barve i.*

Definicija. Najmanjše naravno število n iz zgornjega izreka 6.1 označimo z $R(k_1, k_2, k_3, \ldots k_c)$ in ga imenujemo *Ramseyevo število za c barv.*

Ta izrek lahko dokažemo po zelo podobnem principu, kot osnovni izrek za klasična Ramseyeva števila. Podobno idejo smo uporabili tudi pri dokazovanju nekaterih vrednosti klasičnih Ramseyevih števil. Zapišimo pa najprej izrek, po katerem vsakemu Ramseyevemu številu za več barv lahko določimo zgornjo mejo na podlagi predhodnih vrednosti. To mejo, ki jo lahko izpeljemo iz meje iz izreka 3.1, zasledimo v [28]. Nato oba izreka dokažemo v enem dokazu.

Izrek 6.2. *Za $c \geq 2$ in vse $k_i \geq 3, 1 \leq i \leq c$, velja*

$$R(k_1, k_2, \ldots, k_c) \leq 2 - c + \sum_{i=1}^{c} R(k_1, k_2, \ldots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, k_{i+2}, \ldots, k_c).$$

Dokaz: Dokaz gre z indukcijo za vrednosti k_i. Če je vsaj eno izmed števil k_i enako 1, očitno velja $R(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_c) = 1$. Nato predpostavimo, da je $k_i \geq 2$ za vse $1 \leq i \leq c$. Predpostavimo sedaj, da za vsak $1 \leq i \leq c$ obstaja Ramseyevo število $R(k_1, k_2, \ldots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, k_{i+2}, \ldots, k_c)$ in označimo $n_i = R(k_1, k_2, \ldots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, k_{i+2}, \ldots, k_c) - 1$. Vzemimo poln graf K_m na $m = n_1 + n_2 + \cdots + n_c + 2$ vozliščih. Ker je stopnja vozlišč v K_m enaka $m - 1 = n_1 + n_2 + \cdots + n_c + 1$, bo po principu golobnjaka za vsako c-barvanje povezav polnega grafa K_m za vsako vozlišče v obstajal i, $1 \leq i \leq c$, da je v incidenčno z vsaj $n_i + 1 = R(k_1, k_2, \ldots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1} k_{i+2}, \ldots, k_c)$ povezavami barve i. Torej v tem barvanju za vsaj en $1 \leq j \leq c$, $j \neq i$, obstaja monokromatična klika K_{k_j} v barvi j ali pa obstaja monokromatična klika $K_{k_i - 1}$. Če pa kliko $K_{k_i - 1}$ dopolnimo z vozliščem v, dobimo monokromatično kliko K_{k_i}. Sledi, da v vsakem c-barvanju povezav polnega grafa K_m res vedno obstaja monokromatična klika v vsaj eni barvi. S tem je dokazan izrek 6.1.

Sedaj opazimo, da je število m pravzaprav

$$\begin{aligned} m &= 2 + \sum_{i=1}^{c} n_i = \\ &= 2 + \sum_{i=1}^{c} \big[R(k_1, k_2, \ldots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, k_{i+2}, \ldots, k_c) - 1 \big] = \\ &= 2 - c + \sum_{i=1}^{c} \big[R(k_1, k_2, \ldots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, k_{i+2}, \ldots, k_c) \big], \end{aligned}$$

kar je ravno izraz iz izreka 6.2. S tem je tudi ta izrek dokazan. ∎

Kot preizkus lahko zapišemo mejo za primer dveh barv. Dobimo

$$R(k_1, k_2) \leq 2 - 2 + R(k_1 - 1, k_2) + R(k_1, k_2 - 1),$$

kar povsem sovpada z izrekom 3.1.

Omeniti je vredno še začetne vrednosti za Ramseyeva števila za več barv in simetričnost oziroma dejstvo, da so števila enaka neodvisno od vrstnega reda k_i. Kot smo omenili že zgoraj, je vrednost Ramseyevega števila 1, kadar je vsaj en od $k_i = 1$, zato tega ne bomo posebej zapisali kot trditev. Zapišimo pa za primer, ko je vsaj en $k_i = 2$.

Trditev 6.3. *Za poljubne naravne k_i, $1 \leq i \leq c$, kjer je c poljubno naravno število, velja*

$$R(k_1, k_2, \ldots, k_c, 2) = R(k_1, k_2, \ldots, k_c).$$

Zapišimo le kratko utemeljitev. Uporabimo podobno logiko kot za dve barvi. Če imamo poln graf K_n, kjer je $n = R(k_1, k_2, \ldots, k_c)$, mu lahko povezave poljubno pobarvamo s c barvami in bo to c-barvanje povezav grafa K_n vsebovalo monokromatično kliko K_{k_i} za nek $1 \leq i \leq c$. Če pa v tej kliki vsaj eno povezavo pobarvamo z novo barvo, morda res ni nobene monokromatične K_{k_i} klike, imamo pa monokromatično kliko K_2 v tej novi barvi.

Trditev 6.4. *Naj bodo k_i, $1 \leq i \leq c$, poljubna naravna števila za neko naravno število $c \geq 2$. Tedaj je vrednost Ramseyevega števila $R(k_1, k_2, \ldots, k_c)$ neodvisna od vrstnega reda števil k_i.*

Tudi tega dejstva ne bomo posebej dokazovali. Vemo namreč, da so klasična Ramseyeva števila simetrična, to je $R(k,l) = R(l,k)$, pri čemer smo že v diplomskem delu v dokazu utemeljili, da lahko zamenjamo barvi. Podobno bi lahko dokazali, da če spremenimo vrstni red k_i, lahko za ustrezno barvanje enostavno spremenimo tudi barve in gre torej res v bistvu za isto vrednost Ramseyevega števila.

Vrnimo se k članku Greenwooda in Gleasona [13]. V prejšnjem poglavju smo že omenili, da sta določila prvo netrivialno Ramseyevo število za tri barve $R(3,3,3)$.

Trditev 6.5. $R(3,3,3) = 17$

Dokaz: Najprej pokažimo, da je $R(3,3,3) > 16$. Ta del dokaza Greenwooda in Gleasona temelji na teoriji končnih polj in je nekoliko težak za razumevanje. Sun in Cohen to polje in pripadajoča vozlišča predstavita z binarnimi števili [30]. Imejmo množico vektorjev s štirimi binarnimi komponentami, torej množico 16 vektorjev $\{(0,0,0,0), (0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,0,1,1), \ldots, (1,1,1,1)\}$, kjer bomo vektorje seštevali po komponentah po modulu 2. Vse elemente, brez identitete $(0,0,0,0)$, razdelimo v tri podmnožice G_1, G_2, G_3 tako, da vsota katerih koli dveh elementov iz podmnožice ni v tej isti podmnožici. Podmnožice razdelimo sledeče:

$$G_1 = \{(1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,0,0,1), (1,1,1,0), (1,0,0,0)\},$$

$$G_2 = \{(1,0,1,0), (0,1,0,1), (0,1,1,0), (1,1,0,1), (0,1,0,0)\},$$

$$G_3 = \{(0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,1,1,1), (1,0,1,1), (1,1,1,1)\}.$$

Sedaj vsakemu vozlišču grafa K_{16} dodelimo en vektor. Povezavo med vozliščema $\overrightarrow{v_1}$ in $\overrightarrow{v_2}$ pobarvamo z barvo i, če je $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \in G_i$, ter za vozlišče z vektorjem $(0,0,0,0)$ povezave do vozlišč $\overrightarrow{u}$ z barvo j, kjer je $\overrightarrow{u} \in G_j$. Opisano 3-barvanje ne vsebuje monokromatične klike reda K_3. Namreč, ker seštevamo binarno, je razlika binarnih vektorjev pravzaprav enaka vsoti $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. Torej, če poljubna dva vektorja, recimo $\overrightarrow{a_1}$ in $\overrightarrow{a_2}$ seštejemo, dobimo nek drug vektor $\overrightarrow{a_3}$. Potem bo $\overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{a_2}$ in $\overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{a_1}$. Ker nobena dva elementa iz ene podmnožice G_i nimata vsote v tej isti podmnožici, zagotovo vse tri vsote $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_3}$ in $\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}$ ne bodo nikoli v isti podmnožici, saj tudi vsi trije vektorji ne morejo biti v isti podmnožici, torej ne bodo nobena tri vozlišča med seboj imela vseh treh povezav iste barve. Zato je $R(3,3,3) > 16$.

V drugem delu dokaza pokažemo, da v polnem grafu na 17 vozliščih ob vsakem 3-barvanju povezav zagotovo vedno dobimo monokromatično kliko reda 3. Povezave polnega grafa K_{17} poljubno pobarvamo s tremi barvami, recimo rdečo, modro in zeleno. Iz vsakega vozlišča je zagotovo vsaj šest povezav iste barve. Če bi bilo namreč največ po pet povezav vsake izmed treh barv, bi bilo povezav iz vozlišča največ 15, v tem polnem grafu pa je z vsakim vozliščem incidenčnih 16 povezav. Brez izgube splošnosti lahko torej trdimo, da je v nekem vozlišču vsaj šest povezav zelene barve. Če sta sedaj katera izmed zelenih sosedov med seboj povezana z zeleno barvo, imamo zelen K_3. V nasprotnem primeru pa imamo šest sosedov, ki so med seboj povezani samo z rdečimi in modrimi povezavami. Iz dejstva, da je $R(3,3) = 6$, pa sedaj sledi, da med temi šestimi sosedi zagotovo najdemo tri, ki tvorijo monokromatičen K_3 s samimi rdečimi ali modrimi povezavami. Torej je res $R(3,3,3) = 17$. ∎

Greenwood in Gleason podata tudi meji za prvo Ramseyevo število za štiri barve z vsemi $k_i > 2$, to je $R(3,3,3,3)$. Princip dokazovanja meje je podoben kot pri $R(3,3,3)$.

Za zgornjo mejo se argument iz prejšnjega dokaza le nadaljuje. V poljubnem 4-barvanju povezav polnega grafa na 66 vozliščih ima vsako vozlišče vsaj 17 povezav ene izmed štirih barv. Če bi jih bilo največ 16 vsake barve, bi imelo vozlišče največ 64 sosedov, ima jih pa 65. Ponovno dobimo monokromatičen K_3, če sta katera izmed sosedov povezana z isto barvo kot s prvim vozliščem. Sicer imamo polni podgraf na 17 vozliščih pobarvan s tremi barvami. Torej imamo zagotovo monokromatično kliko K_3 v eni izmed preostalih treh barv.

Spodnjo mejo ponovno določita z uporabo teorije končnih polj števil. S to metodo določita ustrezno 4-barvanje povezav polnega grafa K_{41}, v katerem ni monokromatične klike K_3. S tem postavita spodnjo mejo $R(3,3,3,3) \geq 42$.

Torej lahko združimo spodnjo in zgornjo mejo, ter dobimo, da velja $42 \leq R(3,3,3,3) \leq 66$.

Mejo na podlagi predhodnikov, ki smo jo predstavili za dve in za tri barve, avtorja posplošita tudi za več barv, vendar le za klike reda 3. Ta posplošena meja je pravzaprav direktna posledica izreka 6.2. Dogovorimo se najprej za drugačen zapis teh Ramseyevih števil. Namesto $R(k,k,k,k,\ldots)$ bomo pisali $R_c(k)$, kjer je c število barv in k red iskane monokromatične klike. Torej je na primer $R(3,3,3) = R_3(3)$ in $R(3,3,3,3) = R_4(3)$.

Posledica 6.6. *Za vsako naravno število $c \geq 2$ velja*

$$R_{c+1}(3) \leq (c+1) \cdot (R_c(3) - 1) + 2.$$

Dokaz: Če v mejo iz izreka 6.2 za vse k_i vstavimo vrednost 3 in upoštevamo, da imamo $c+1$ barv, dobimo

$$R_{c+1}(3) \leq 2 - (c+1) + \sum_{i=1}^{c+1} R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{c},2).$$

Sedaj upoštevamo, da je $R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{c},2) = R_c(3)$, ter dobimo

$$R_{c+1}(3) \leq 2 - (c+1) + (c+1) \cdot R_c(3)$$
$$R_{c+1}(3) \leq (c+1) \cdot (R_c(3) - 1) + 2.$$

∎

Direktno iz posledice 6.6 sledi še naslednja posledica.

Posledica 6.7. *Za vsako naravno število $c \geq 2$ velja*

$$R_c(3) \leq 3 \cdot c!.$$

Dokaz: Za $c = 2$ neenakost (pravzaprav celo enakost) drži, saj je $6 = R_2(3) \leq 3 \cdot 2! = 6$. Prav tako velja neenakost za $c = 3$, saj $17 = R_3(3) \leq 3 \cdot 3! = 18$. Predpostavimo sedaj, da za nek $c \geq 3$ velja $R_c(3) \leq 3 \cdot c!$ in pokažimo, da potem ustrezna neenakost velja tudi za $c+1$. Po posledici 6.6 dobimo

$$R_{c+1}(3) \leq (c+1) \cdot (R_c(3) - 1) + 2.$$

Sedaj pa še upoštevamo indukcijsko predpostavko in dobimo

$$\begin{aligned} R_{c+1}(3) &\leq (c+1) \cdot (3 \cdot c! - 1) + 2 = \\ &= 3 \cdot (c+1)! - c - 1 + 2 = \\ &= 3 \cdot (c+1)! - c + 1 < \\ &< 3 \cdot (c+1)!. \end{aligned}$$

Vidimo torej, da za $c = 2$ velja enakost, za $c \geq 3$ pa je neenakost celo stroga. ∎

Vrnimo se k številu $R_4(3)$. Do danes najboljšo spodnjo mejo najdemo v [6], najboljšo zgornjo mejo pa v [11]. V drugem omenjenem članku najdemo tudi pregled, kako je napredovalo iskanje števila $R_4(3)$ in izboljševanje njenih meja. Zadnja zgornja meja, ki jo v članku avtorji dokažejo, je 62. S pomočjo moči računalnikov so preverjali in iskali ustrezna barvanja grafov, kjer jim program ni vrnil nobenega protiprimera. S tem so pokazali, da v K_{62} ne obstaja ustrezno 4-barvanje, in posledično so obravnavano Ramseyevo število omejili na $R_4(3) \leq 62$. Spodnjo mejo avtor v članku [6] dokaže s konstrukcijo ustreznega 4-barvanja povezav grafa K_{50} brez monokromatičnih klik K_3, ki ga opiše v obliki incidenčne matrike. S tem postavi spodnjo mejo na $R_4(3) \geq 51$. V istem članku dobljeno mejo posploši na poljubno število barv, vendar splošne meje ne dokazuje, ampak navaja, da je dokaz zelo podoben dokazu meje za število $R_4(3)$. Zato ta dokaz tudi mi izpustimo. V spodnjem izreku, ki povzema ta rezultat, se za $c = 4$ pojavi Ramseyevo število $R_1(3)$, o čemer še nismo govorili. Predstavljajmo si, da želimo graf pobarvati z eno barvo in zahtevamo, da v poljubnem 1-barvanju povezav polnega grafa obstaja monokromatična klika K_k. Očitno je za to dovolj velik K_k. Torej bo $R_1(k) = k$.

Izrek 6.8. *Za $c \geq 4$ velja*

$$R_c(3) \geq 3R_{c-1}(3) + R_{c-3}(3) - 3.$$

Za večino Ramseyevih števil $R_c(k)$ so še danes najboljše znane zgornje meje določene po izreku 6.2. Različni avtorji pa so dokazali tudi nekatere splošne meje za $R_c(k)$ za posebne vrednosti c in k, ki si jih lahko bralec pogleda v [28].

Navedimo do danes znane meje in vrednosti Ramseyevih števil $R_c(k)$ v tabeli 6.1, kakor jih zasledimo v [28], kjer so zabeleženi tudi avtorji.

k c	3	4	5	6	7	8	9
3	17	128 230	417	1070	3214	6079	13761
4	51 62	634 6306	3049	15202	62017		
5	162 307	3416	26912				
6	538 1838						
7	1682 12861						

Tabela 6.1: Tabela do danes znanih vrednosti in meja Ramseyevih števil $R_c(k)$ [28].

Poglejmo si sedaj meje za posebna Ramseyeva števila za tri barve $R(3, k, l)$ za $k, l > 3$. Prvi naslednik znanega števila $R(3, 3, 3) = 17$ je torej število $R(3, 3, 4)$. Z njim se v [17] ukvarja že Kalbfleisch. V svoji doktorski disertaciji je pokazal spodnjo mejo $R(3, 3, 4) \geq 30$. Z zgornjo mejo za omenjeno število pa se ukvarjata Piwakowski in Radziszowski v [26] in [27]. V omenjenih člankih sta avtorja najprej določila mejo $R(3, 3, 4) \leq 31$. Nato postavita domnevo, da bi lahko določili točno vrednost za obravnavano Ramseyevo število, če bi našli ustrezno 3-barvanje povezav grafa K_{30}. To 3-barvanje povezav pa bi zagotovo imelo naslednje lastnosti. Veljati mora, da vsak podgraf K_3 vsebuje vozlišče, ki ima natanko 13 sosedov prve barve, v celotnem grafu pa je vsaj 14 vozlišč, s po 13 sosedi prve barve, 8 sosedi druge barve in 8 sosedi tretje barve. V prvem članku namigujeta in poskušata dokazati, da je $R(3, 3, 4) = 30$, v drugem pa, da je $R(3, 3, 4) = 31$, kar se kasneje izkaže za napačno domnevo. Kljub trudu jima ni uspelo povsem dokazati, da velja eno ali drugo. To je nedavno uspelo avtorjem članka [7]. Najprej so določili vseh 78 892 ustreznih 3-barvanj povezav polnega grafa K_{13}, v katerih ni monokromatične klike reda 3. Skupaj z nekaterimi drugimi trditvami jim je to omogočilo, da so lahko v smiselnem času preverili 3-barvanja povezav polnega grafa K_{30} in s tem, ko so pokazali da ustrezno 3-barvanje ne obstaja, skupaj s predhodnimi mejami dokazali, da je točna vrednost $R(3, 3, 4) = 30$.

Razen števil $R(3, 3, 3)$ in $(R(3, 3, 4))$ trenutno na področju Ramseyevih števil za tri barve ni velikega napredka. Za zadnje število $R(3, 3, 4)$ so si matematiki zaradi ozkih mej še obetali, da se ga v kratkem določi, za večino ostalih števil pa niso tako optimistični. V tabeli 6.2 zapišemo še nekaj do danes znanih meja po [28]. Večino zgornjih meja lahko dobimo le po neenakosti Greenwooda in Gleasona iz izreka 6.2 in jih zato izpustimo.

l / k	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3	30	45 57	61	85	103	129	150	174	194	217	242	269	291
4	55 77	89 158	117	152	193	242							
5	89 158	139	181	241									

Tabela 6.2: Tabela do danes znanih meja Ramseyevih števil za tri barve $R(3,k,l)$ [28].

Na kratko se sedaj spomnimo še števila $L(k,l)$ za dve barvi. Predstavlja maksimalno število vozlišč v katerem obstaja regularno (k,l)-barvanje povezav polnega grafa. Podobno število bi lahko vpeljali tudi za Ramseyeva števila za več barv v obliki $L(k_1,k_2,\ldots,k_c)$. Kalbfleisch v svojem članku [18] navaja, da z uporabo regularnih barvanj polnih grafov dokaže števili $L(3,3,3) = 14$ in $L(3,3,4) = 29$, vendar naj bi ju dokazal v drugem delu, ki ga pa ne navede. Poleg tega navaja, da je v času nastajanja članka preiskoval tudi števila $L(4,6)$, $L(5,5)$ in $L(3,3,3,3)$, za katera pa v omenjenem članku še ne more govoriti o konkretnih vrednostih.

S tem smo izčrpali klasična Ramseyeva števila in posplošitve na več barv za naš zahtevnostni nivo.

6.2 Ramseyeva števila za grafe

V tem razdelku si le ogledamo različne možne izpeljanke klasičnih Ramseyevih števil, da dobimo občutek, kako na široko se je Ramseyeva teorija resnično razvila.

Prva najbolj očitna posplošitev je, da v 2-barvanjih povezav polnih grafov iščemo monokromatične grafe drugih standardnih družin. Med njimi so največ pozornosti deležni cikli, raziskujejo pa tudi grafe poti, drevesa, hiperkocke ter različne vsote in produkti med njimi.

Ko zmanjka možnih variant za odkrivanje, lahko seveda iščemo različne grafe tudi v c-barvanjih povezav polnega grafa za $c \geq 2$, pri čemer ponovno lahko iščemo mnoge različne kombinacije grafov iz standardnih družin grafov.

Če nam uspe do potankosti raziskati vsa ta Ramseyeva števila, pa lahko začnemo od začetka, če raziskujemo še 2-barvanja in c-barvanja povezav v drugih grafih. Nekaj več opaznega dela je posvečenega raziskovanju barvanj povezav polnih dvodelnih grafov.

Nazadnje še omenimo, da nam tudi po raziskanih vseh standardnih grafih še ne zmanjka možnosti za raziskovanje. Vendar pa je naslednja posplošitev še težja in kompleksnejša za raziskovanje. Ramseyeva števila namreč lahko iščemo tudi v hipergrafih. Tem številom bi lahko v dobesednem prevodu tudi rekli hipergrafna Ramseyeva števila (ang. hypergraph Ramsey Numbers). Tu je pomembno omeniti, da če smo pri ostalih posplošitvah barvali povezave, pri hipergrafih barvamo r-terice oziroma podmnožice vozlišč moči r. Da je nek podhipergraf monokromatičen, bi rekli takrat, ko obstaja neka podmnožica, ki vsebuje vse r-terice iste barve.

Poglavje 7

Zaključek

V magistrskem delu smo naredili pregled raziskovanja Ramseyevih števil. Po uvodni ponovitvi osnovnega Ramseyevega izreka in osnov Ramseyeve teorije za dve barvi smo naredili enostaven program, s katerim smo potrdili le prvo klasično Ramseyevo število $R(3,3) = 6$ in spodnjo mejo $R(3,4) \geq 9$. Brez bistvenih izboljšav in upoštevanja primernih zakonitosti za grafe nismo prišli prav daleč, s čimer smo pokazali enega od namenov tega dela, da je direktno iskanje števil tudi za računalnike prezahtevna naloga. Prikazali smo tudi poskus iskanja z nekoliko drugačnim algoritmom in logiko v ozadju drugega avtorja, vendar s precej podobnim izidom pri nekoliko večjih vrednostih.

V naslednjem poglavju smo se sprehodili po zgodovini odkrivanja Ramseyevih števil. Poleg osnovnih izrekov Greenwooda in Gleasona smo predstavili tudi zelo elegantno metodo iskanja regularnega barvanja povezav polnega grafa, ki jo je vpeljal Kalbfleisch. Videli smo, da je ta metoda precej uporabna pri manjših vrednostih, vendar bi se pri večjih številih meja, ki jo po tej metodi dobimo, kmalu odmaknila od dejanske vrednosti. Pregledali smo tudi vse do danes znane točne vrednosti klasičnih Ramseyevih števil za dve barvi in za nekatere tudi opisali dokaze.

V šestem poglavju smo pozornost posvetili posplošitvam Ramseyevih števil. Prva najbolj očitna ugotovitev je bila, da je posplošitev toliko, da bi lahko podobno delo napisali za skoraj vsako izmed njih. Pogledali smo najprej Ramseyeva števila za polne grafe za več barv. Začeli smo s tremi, ter nadaljevali z večimi barvami. Zapisali smo nekaj splošnih lastnosti za ta števila in zbrali nekaj meja v tabeli za števila za več barv, kjer smo iskali klike enakih redov, ter tudi nekatere druge kombinacije redov monokromatičnih klik. V zadnjem delu poglavja smo omenili še nekaj drugih posplošitev, najprej za dve in nato za več barv Ramseyevih števil za druge standardne grafe. Omenili smo, da so med standardnimi grafi zanimivejši cikli, dvodelni in večdelni polni grafi, hiperkocke, poti, drevesa in kolesa. Na področjih vseh teh posplošitev je še mnogo neraziskanega in ni nenavadno, da je še vedno mnogim avtorjem raziskovanje zanimivo, vendar je to raziskovanje tudi hitro prezahtevno.

Zaključimo torej lahko, da naivno iskanje Ramseyevih števil s pomočjo računalnika ne obrodi sadov, je pa prihod možnosti uporabe računalnika v namene znanstvenega raziskovanja in predvsem matematike bistveno pripomoglo k napredku in nadaljevanju odkrivanja na mnogih področjih Ramseyeve teorije. Skokovit razvoj in izboljševanje računalniške opreme sicer zelo pripomore k odkrivanju števil, glavni del pa zagotovo še vedno ostaja in bo ostal matematična podlaga in dokazovanje zakonitosti, katere lahko nato z različnimi algoritmi predamo napravam v pregled. Še vedno pa je računalniški program vedno lahko le tako močan in "pameten" kot je pametna logika in programer, ki ga je napravil.

Literatura

[1] Barton, L. (2016). *Ramsey theory.* Walla walla: Whitman College

[2] Bóna, M., 2013: A walk through combinatorics: an introduction to enumeration and graph theory, 3rd ed. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

[3] Bush, L. E., 1953: The William Lowell Putnam Mathematical Competition, *American Mathematical Monthly*. 60. 539-542

[4] Cariolaro, D. (1999). *On the Ramsey number R(3,6)* Raziskovalno poročilo R-99-2012. Aalborg: Aalborg University

[5] Cariolaro, D., 2007: On the Ramsey number R(3,6), *Australasian Journal of Combinatorics*. 37. 301-304

[6] Chung, F. R. K., 1973: On the Ramsey numbers N(3,3,...,3 ; 2), *Discrete Mathematics*. 5. 317-321

[7] Codish, M., Frank, M., Itzhakov, A., Miller, A., 2016: Computing the Ramsey number $R(4,3,3)$ using abstraction and symmetry breaking, *Constraints*. 21. 375-393

[8] Diestel, R., 2010: Graph theory, 4th ed. Heidelberg: Springer-Verlag

[9] Erdős, P., 1947: Some remarks on the theory of graphs, *Bulletin of the American Mathematical Society*. 53. 292-294

[10] Erdős, P., Szekeres, G., 1935: A combinatorial problem in geometry. *Compositio Mathematika*. 2. 463-470

[11] Fettes, S. E., Kramer, R. L., Radziszowski, S. P., 2004: An upper bound of 62 on the classical Ramsey number $R(3,3,3,3)$. *Ars Combinatoria*. 72. 41-63

[12] Graver, J. E., Yackel, J., 1968: Some graph theoretic results associated with Ramsey's Theorem. *Journal of combinatorial theory*. 4. 125-175

[13] Greenwood, R. E., Gleason, A. M., 1955: Combinatorial relations and chromatic graphs. *Canadian Journal of Mathematics*. 7. 1-7 125-175

[14] Grinstead, C. M., Roberts, S. M., 1982: On the Ramsey numbers R(3,8) and R(3,9). *Journal of combinatorial theory*. serija B 33. 27-51

[15] Harris, J. M., Hirst, J. L., Mossinghoff, M. J., 2008: Combinatorics and graph theory, 2nd ed. New York: Springer-Verlag

[16] Hočevar, M. (2015). *Ramseyeva teorija.* Diplomsko delo. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

[17] Kalbfleish, J. G. (1966). *Chromatic graphs and Ramsey's theorem.* Doktorska disertacija. Waterloo: University of Waterloo

[18] Kalbfleish, J. G., 1965: Construction of special edge-chromatic graphs, *Canadian Mathematical Bulletin.* 8. 575-584

[19] Kalbfleish, J. G., 1966: On an unknown Ramsey number, *Michigan mathematical journal.* 13, izdaja 4. 385-392

[20] Kalbfleish, J. G., 1967: Upper bounds for some Ramsey numbers, *Journal of combinatorial theory.* 2. 35-42

[21] Kéry, G., 1964: Ramsey egy graftelmaleti. *Matematikai Lapok.* 15. 204-224

[22] McKay, B. D., Radziszowski, S. P., 1994: Linear programming in some Ramsey problems, *Journal of combinatorial theory.* B 61. 125-132

[23] McKay, B. D., Radziszowski, S. P., 1995: $R(4,5) = 25$, *Journal of graph theory.* 19. 309-322

[24] McKay, B. D., Zhang, K. M., 1992: The value of the Ramsey number R(3,8), *Journal of Graph Theory.* 16. 99-105

[25] Ngo, H. Q., 2005: The probabilistic method - basic ideas. SUNY at Buffalo

[26] Piwakowski, K., Radziszowski, S. P., 1998: $30 \leq R(3,3,4) \leq 31$, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing.* 27. 135-141

[27] Piwakowski, K., Radziszowski, S. P., 2001: Towards the exact value of the Ramsey number $R(3,3,4)$, *Congressus Numerantium.* 148. 161-167

[28] Radziszowski, S. P., 2017: Small Ramsey numbers. *The electronic journal of combinatorics.* revizija 15.

[29] Ramsey, F. P., 1930: On a problem of formal logic. *Proceedings of the London Mathematical Society.* 30. 264-286

[30] Sun, H. S., Cohen, N. E., 1984: An easy proof of the Greenwood-Gleason evaluation of the Ramsey number $R(3,3,3)$. *The Fibonacci Quarterly.* 22. 235-238

[31] Šparl, P., 2013: Diskretna matematika, Zapiski predavanj. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

[32] Šparl, P., 2015: Teorija grafov, Zapiski predavanj. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

[33] Walker, K., 1968: Dichromatic graphs and Ramsey numbers. *Journal of combinatorial theory*. 5. 238-243

[34] Walker, K., 1971: An upper bound for the Ramsey number M(5,4). *Journal of combinatorial theory*. 11. 1-10

[35] Wallis, W. D., George, J. C., 2011: Introduction to combinatorics. Boca Raton, Florida: Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group

[36] PyCharm: Python IDE for professional developers (dostop 12.6.2018): `https://www.jetbrains.com/pycharm/`

Izjava o avtorstvu

Spodaj podpisani Mitja Hočevar, rojen 7.9.1991, študent Pedagoške fakultete v Ljubljani, smer poučevanje: predmetno poučevanje, izjavljam, da je magistrsko delo

RAMSEYEVA ŠTEVILA IN NJIHOVE POSPLOŠITVE

moje samostojno delo, ki sem ga napisal pod mentorstvom doc. dr. Primoža Šparla.

Ljubljana, september 2018 Podpis avtorja: