GEOGEBRA COMO HERRAMIENTA PARA EL APRENDIZAJE DE FUNCIÓN CUADRÁTICA

Enrich, Rosa Susana[*] - Plaza, María Amelia[**] - Creus, Mariano Fabián[*]- Vagge, Mariana[*]
rosa.enrich@fau.unlp.edu.ar –mamelia48@yahoo.com– mariano.creus@fau.unlp.edu.ar
[*]Facultad de Arquitectura y Urbanismo. Universidad Nacional de La Plata. Argentina.
[**] Facultad de Arquitectura y Urbanismo. Universidad Nacional de Tucumán. Argentina.

Eje Temático: Estrategias de Educación y Aprendizaje en Educación Matemática Superior.
Nivel: U.
Modalidad: CB.
Palabras Claves: función cuadrática- efectos de variación de parámetros- Geogebra.

Resumen
Los cursos iniciales de matemática en la carrera de Arquitectura generalmente tropiezan con el inconveniente de la escasa formación previa del estudiante y la pobre valoración que los alumnos hacen de esta disciplina. A diferencia de lo que ocurre en la UNLP, los ingresantes en la carrera de Arquitectura de la UNT inician sus estudios con un curso introductorio de matemática. No obstante, en ambas unidades académicas, nos encontramos con una tendencia generalizada al estudio memorístico. En particular, este comportamiento se puede observar en el estudio del tema función cuadrática consistente en el aprendizaje de fórmulas y no en la comprensión integral del concepto que incluye la capacidad de "visualizar" mentalmente su gráfica.
En este trabajo presentamos una descripción de diferentes actividades didácticas implementadas en Geogebra correspondientes al tema función cuadrática. El principal objetivo es fortalecer el aprendizaje del modo en que los parámetros de la función cuadrática –expresada en su forma polinómica- modifican su gráfica, favoreciéndose con ello, la consolidación de un modelo mental basado en la comprensión.

Introducción.

> El reto de una investigación sobre la enseñanza de las matemáticas
> no es sólo saber cuáles contenidos enseñar y de qué manera introducirlos en clase,
> sino también analizar las razones estructurales de los problemas de comprensión
> con los cuales se enfrenta la mayoría de alumnos de todos los niveles de enseñanza.
> (Duval, 1999, p. 15)

La constante evolución de las tecnologías digitales aplicadas a la educación trae aparejada el surgimiento de lo que se ha dado en llamar "pedagogías emergentes" que propician la consolidación de nuevas teorías del aprendizaje, propias de la era digital que estamos transitando. Como docentes e investigadores en procesos de enseñanza y aprendizaje de matemática y física para estudiantes de arquitectura, el uso de la mediación digital, tanto para la comunicación como para el diseño e implementación de materiales didácticos, se ha convertido en uno de los ejes de nuestro trabajo.

Sin embargo, incorporar herramientas digitales a los procesos de aprendizaje implica analizar -previamente– la potencialidad de la herramienta y la modificación de los procesos de enseñanza y aprendizaje que ella genera. Sumando a la elección la necesaria capacitación de los docentes que estarán en contacto directo con el estudiante y el diseño de materiales didácticos elaborados "a medida" de la situación de aprendizaje propuesta.

Luego de sucesivas experiencias en el uso de diferentes software matemáticos hemos adoptado el Geogebra por tratarse de un software de código abierto, que facilita tanto su instalación en las máquinas de la facultad y en las de los alumnos como sus sucesivas actualizaciones. Permite trabajar con Geometría, Álgebra, Análisis Matemático, etc. Tiene la gran ventaja de ofrecer en pantalla una vista algebraica y otra gráfica, simultáneamente, lo que favorece la conexión de ambas formas de expresión matemática. De un modo sencillo se accede a la implementación de animaciones.
Dado que en el ejercicio de la docencia, es muy difícil conocer de qué modo aprende un estudiante, resulta indispensable (Moreira; 2002, 12), asegurarnos que el modelo mental adquirido se corresponda con el modelo conceptual. El uso de GeoGebra favorece este proceso como lo evidencian las actividades de evaluación propuestas y desarrolladas por los estudiantes.

Fundamentación.

Muchos de los esfuerzos de la comunidad de investigadores en educación matemática, se han dirigido a entender y a promover el aprendizaje y la enseñanza, con y para la comprensión, y en éstos generalmente emergen asuntos relacionados con las representaciones de los conceptos.
Dichos investigadores han tenido en cuenta las representaciones en los procesos de enseñanza – aprendizaje, como herramientas importantes en la construcción de significados. Ello se debe a que juegan un papel fundamental en los procesos de comprensión. Al respecto Duval (2004, p.24) afirma:

> La actividad matemática es un tipo de actividad que, a pesar de su universalidad cultural, a pesar de su carácter puramente intelectual, supone una manera de pensar que no es nada espontánea para la gran mayoría de alumnos y de adultos. Necesita modos de funcionamiento cognitivos que requieren la movilización de sistemas específicos de representación. Estos sistemas constituyen registros de representación semiótica. Su integración a la arquitectura cognitiva de los sujetos es la condición absolutamente necesaria para poder comprender en matemáticas.

En este sentido es que se aborda el estudio de la función cuadrática incorporando Geogebra para producir el nexo entre la representación algebraica y la representación gráfica. Así se favorece la construcción de un modelo mental en el que conviven ambos tipos de representación. Su consolidación depende de los vínculos que se establezcan entre una y otra. Aquí juega una importancia fundamental la característica del software de presentar ventanas duales en las que ambas representaciones están a la vista del estudiante.

Metodología.

En el marco del desarrollo del programa de estudio, una de las unidades temáticas se refiere al estudio de funciones. Los alumnos pertenecen al primer año de sus estudios universitarios y se supone que han efectuado aprendizajes básicos del tema en el nivel medio. Sin embargo, se observa que dichos aprendizajes son fundamentalmente memorísticos, hecho que se evidencia en las clases dedicadas a ejercitaciones en Conocimientos Previos/Curso Introductorio. Esta etapa de nivelación, determina nuestro punto de partida.

Las actividades previas correspondientes a la unidad *Transformaciones en el Plano* nos permite que al iniciar el tema funciones todos los alumnos dominen el uso del GeoGebra. En este sentido cabe mencionar que una buena parte de ellos llega al nivel universitario con conocimientos sobre el mismo adquiridos en la escuela media debido a la distribución de netbooks, en el marco del Programa Nacional Conectar Igualdad que promovió el modelo 1:1(1 alumno, 1 netbook).

Dado el alcance de este trabajo, mostraremos las actividades llevadas a cabo en el aula con respecto al estudio de la función cuadrática expresada de la forma $f(x) = a\,x^2 + bx + c$ y a los efectos que la modificación de sus parámetros -*a,b* y/o *c*- produce sobre su gráfica. Se busca incidir en los procesos de enseñanza y de aprendizaje mediante el uso de GeoGebra.

Se elaboró una Guía de Trabajos Prácticos en el que se describieron las actividades a llevar a cabo en clase. Se eligió, para el análisis, el caso en que b = 0 y c = 0, es decir $f(x) = a\,x^2$. Para luego producir las correspondientes generalizaciones.

Dichas actividades se basaron en tres etapas:

- **Primera etapa:** análisis de los efectos de la variación de *a*.

  Su modificación, si a > 0, produce deformaciones de la gráfica de la función a las que llamaremos, contracción o dilatación, según el caso. A esta consecuencia se agrega la reflexión cuando a < 0.

Sea $a > 0$:

- cuando *a* la gráfica experimenta una dilatación, se aleja de su eje de simetría (Fig.1. a)

- cuando *a* , la gráfica experimenta una contracción que se manifiesta con un acercamiento al eje de simetría (Fig. 1.b)

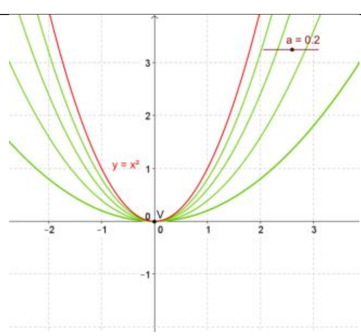


Fig.1.a. Dilatación $a > 0$ y $|a| < 1$.

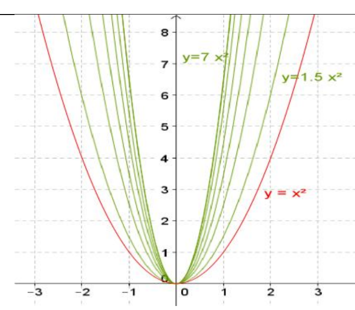


Fig.1.b. Contracción $a > 0$ y $|a| > 1$.

Sea $a < 0$:

- cuando $a = -1$, la gráfica mantiene su forma pero resulta simétrica, con respecto al *eje x*, de la gráfica de $f(x) = 1.\ x^2$
- cuando a la gráfica experimenta una dilatación, es decir, se aleja de su eje de simetría (Fig.2. a).
- cuando a , la gráfica experimenta una contracción que se manifiesta con un acercamiento al eje de simetría (Fig. 1.b).

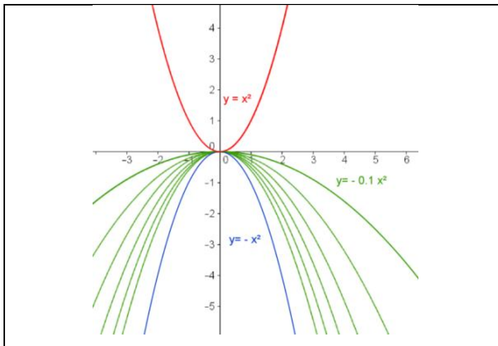


Fig.2.a. Dilatación para $a < 0$ y $|a\ | < 1$.

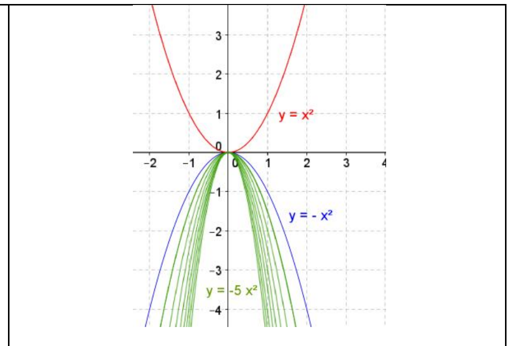


Fig.2.b. Contracción para $a < 0$ y $|a\ | > 1$.

El uso de Geogebra facilitó la visualización de este comportamiento y permitió comprender que la variación de a produce deformación en la que si $|a\ | > 0$, las "ramas" de la gráfica se acercan al eje de simetría (contracción) y que si $|a\ | < 0$, se alejan del eje de simetría (dilatación). Además quedó claro que el cambio de signo de a, produce una reflexión (simetría axial) en la gráfica.

- **Segunda etapa:** análisis de los efectos de la variación de c sobre la gráfica de $F(x) = a\ x^2 + c$
  - Cuando $c = 0$, es decir si c , el vértice pertenece al origen de coordenadas.
  - Cuando $c > 0$, es decir: la gráfica experimenta una traslación en el sentido positivo del eje y cuyo módulo coincide con $|c|$ (Fig 3.a).
  - Cuando $c < 0$, o sea si 0), la gráfica experimenta una traslación en el sentido negativo del eje y cuyo módulo coincide con $|c|$ (fig. 3.b).

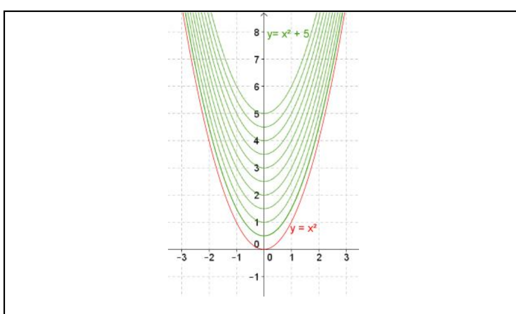


Fig. 3.a Variación de c en $y = ax^2 + c$, $c > 0$

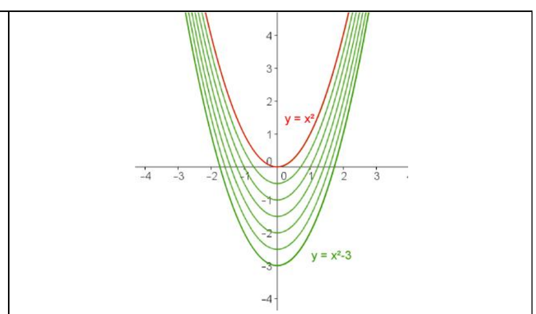


Fig. 3.b Variación de c en $y = ax^2 + c$, $c < 0$

Se visualizó el efecto de traslación que produce la modificación de este parámetro cuando es no nulo. Esta conclusión, relacionada con el efecto del término independiente, ya había sido estudiada al trabajar con función lineal mediante expresiones de la forma: $f(x) = ax$ y $g(x) = ax + b$ con $b \neq 0$. Incluso se generalizó para otro tipo de funciones, cuya representación algebraica y gráfica era conocida por los estudiantes.
La comprensión del efecto que tiene sobre la gráfica de la función la modificación de estos dos parámetros (a y c) no ofreció dificultades. En buen número, los estudiantes tenían un conocimiento previo significativo y para quienes tenían dificultades, la visualización por medio de GeoGebra incidió sensiblemente en la comprensión del concepto.

Sin embargo, no ocurrió lo mismo con el parámetro *b,* cuya incidencia tiene una apariencia aparentemente no determinada. Es muy frecuente encontrar una dificultad para describirlo y por tal motivo es ignorado su tratamiento tanto en el nivel medio como en el nivel universitario. Por ello, al abordar el comportamiento de la función cuadrática para variaciones del coeficiente del término lineal, fue necesario capacitar previamente a los docentes involucrados ya que al ser preguntados sobre el efecto de *b,* la respuesta generalizada fue: "no se puede establecer a priori".
Este trabajo se propone sumar un enfoque a los ya existentes, en términos de propuesta para las instancias superiores del nivel medio y/o los niveles iniciales de la educación superior.

Tercera etapa: análisis del efecto de la variación de *b*.

- Mediante la construcción en GeoGebra, puede verificarse que la variación de *b* produce lo que algunos autores describen como "un efecto de *traslación* caracterizado por el desplazamiento de la familia de parábolas en dos direcciones: *horizontal y vertical*, simultáneamente" (Gutiérrez y otros, 2012, pág 517). Puede demostrarse[1] que para $f(x)= a\,x^2+ b\,x +c$ la modificación del valor de b, produce un desplazamiento, sin deformación, de la gráfica de modo que el vértice de la nueva función cuadrática es un punto de: $f(x) = - a\,x^2+c$.

  A los efectos de estimar el tipo de desplazamiento que experimenta la gráfica de:

  $$f(x)=a\,x^2+bx+c$$

  al modificar el parámetro *b*, llamaremos ***b'*** a los valores posibles que puede tomar este parámetro. Establecida esta nomenclatura, los movimientos horizontales y verticales simultáneos que produce la modificación de *b* pueden agruparse en los siguientes casos:

  - Caso $a > 0$ con

    b' < |***b***|, la gráfica con parámetro *b´* se ubica por encima de la curva original.(Fig. 4.a).

    b' >|***b***|, la gráfica con parámetro *b´* se ubica por debajo de la curva original (Fig.4.b).

[1]Ver demostración en el Anexo, al final de este trabajo.

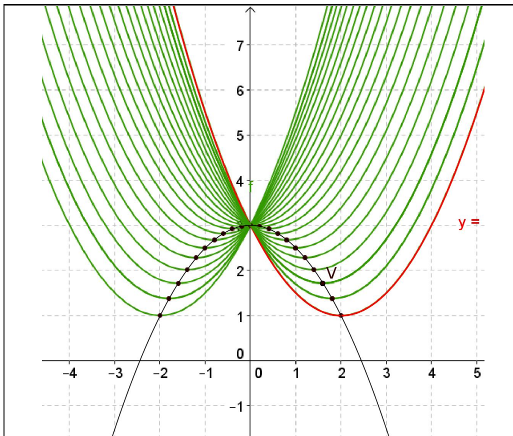
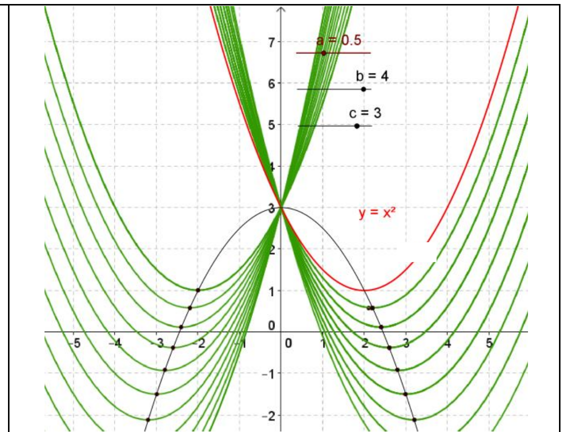
	

Fig.4.a. Siendo *a*>0 y *b*'< | *b* | la gráfica se localiza por encima de la original.	**Fig.4.b.** Siendo *a*> 0 y *b*' > | *b* | la gráfica se localiza por debajo de la original.

Cuando ***b' > b,*** entonces la gráfica de ***f(x)*** se desplaza hacia la izquierda (Fig.5.a).

Cuando ***b' < b,*** la gráfica de ***f(x)*** se desplaza hacia la derecha (Fig. 5.b).

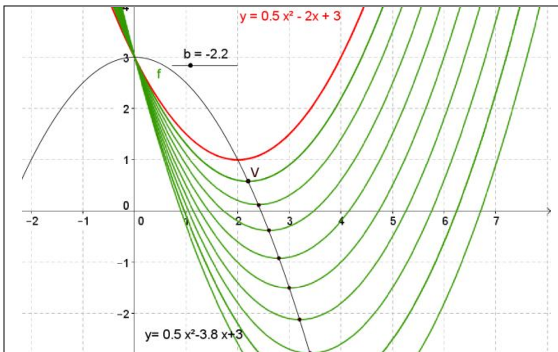
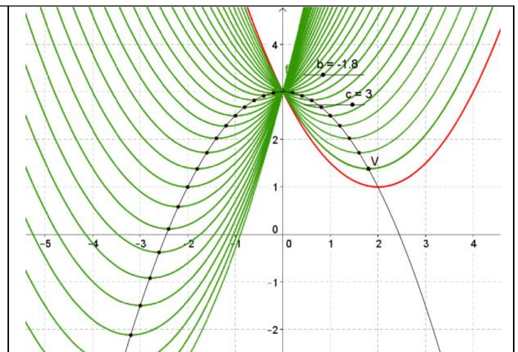
	

Fig.5.a. Con *a*>0 y *b*'<*b* la gráfica se desplaza hacia la derecha.	**Fig.5.b**. Con *a*>0 y *b*' >*b* la gráfica se desplaza a la izquierda.

- Para el caso en que $a < 0$:
  Los resultados del análisis son opuestos a los del caso anterior, por lo que no se efectúa su análisis en este trabajo. Se sugiere su desarrollo al lector.

Conclusiones

El problema de la enseñanza y del aprendizaje de la función cuadrática se dificulta cuando no se consigue efectuar un adecuado pasaje de una forma de representación a otra.Este problema se relaciona con la dificultad de hacer una distinción entre un objeto y su representación. La confusión conduce a una especie de aprisionamiento del objeto por el registro donde se ha producido su representación y difícilmente podrá aplicarse fuera del contexto donde ha sido generado. En matemática esta confusión tienes consecuencias complejas ya que la fuerza de la disciplina reside, precisamente, en la amplia aplicabilidad de sus conocimientos. Ello determina la necesidad de descontextualizar el concepto, al aplicarlo.

El enfoque dado a este estudio sobre los parámetros de la función cuadrática se relaciona con esta necesidad. La capacidad desarrollada de pasar de un tipo de registro de representación a otro acerca al alumno a efectuar modelizaciones adecuadas en el marco de la resolución de problemas concretos de su especialidad.

La experiencia realizada permite verificar que la utilización de GeoGebra favoreció la comprensión de los efectos que se producen sobre la gráfica ante la modificación de dichos parámetros, valorándose su incidencia sobre la capacidad para pasar de un registro a otro. Esta cuestión no es de menor importancia por cuanto la función cuadrática permite modelizar muchas situaciones concretas que se le presentan al estudiante en su carrera.

Anexo.

Demostración citada en pág. 6 de este trabajo.

Se considera funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

La forma canónica de f se obtiene de la siguiente manera: $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$.

De modo que el vértice de la parábola gráfica de f tiene vértice $V = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$

Sea α la abscisa y β la ordenada del vértice, entonces: $\alpha = -\frac{b}{2a}$ y $\beta = c - \frac{b^2}{4a}$

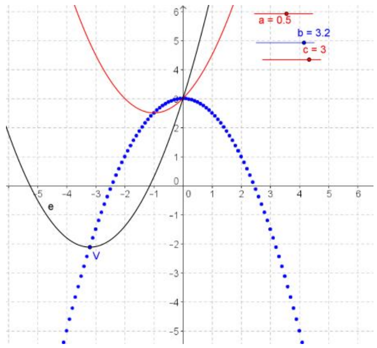
Así, $\alpha^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ o sea: $a\,\alpha^2 = \frac{b^2}{4a}$ restan de c esta expresión resulta: $c - a\,\alpha^2 = c - \frac{b^2}{4a} = \beta$

De modo que: $\beta = c - a\,\alpha^2$

Esta última ecuación indica que si se consideran parábolas que son gráficas de funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, es decir parábolas con coeficiente principal α y ordenada al origen c, entonces los vértices (α, β) de todas estas parábolas pertenecen a una parábola de ecuación $\beta = c - a\,\alpha^2$. Es decir, estos vértices se encuentran sobre una parábola cuyo coeficiente principal es opuesto al de f, cuya ordenada al origen es igual a la de f y cuyo eje de simetría es el eje y. Esto implica que su ecuación es:

$$y = -a\,x^2 + c$$

En la figura que sigue se muestran las gráficas de las funciones en cuestión.



Al modificar b, la gráfica de la función cuadrática:

$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ (en **rojo** en la figura),

cualesquiera sean los valores de sus parámetros, experimenta desplazamientos vertical y horizontal simultáneos, de modo que el vértice V de la función desplazada (en **negro**) es un punto de:

$f(x) = -\,a\,x^2 + c$. (trazo cortado en **azul**).

Bibliografía

Duval, R. (1999) *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.* Traducción: Myriam Vega Restrepo, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, Cali. Primera Edición al castellano, 2004

____________ (2006). "Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación". *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 9(1) 143-168. Disponible en http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546&zw=233844 Consultado 15/7/13.

_________ (1992), Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros. En E. Sanchez (Ed.), *Antología en Educación Matemática*, (pp. 125-139). México: Sección de Matemáticas Educativa del CINVESTAV-IPN.

García Valcarcel, A. (2009) "Herramientas tecnológicas para la docencia universitaria" en *La incorporación de las TIC en la docencia universitaria: recursos para la formación del profesorado.* Barcelona. Colección Redes. Da Vinci.

Gutiérrez, R.y ot. (2012) "Una secuencia para analizar los efectos geométricos relacionados con la función cuadrática utilizando Geogebra" en *Actas de la Conferencia Internacional de Geogebra. Uruguay 2012* (511-522). Montevideo. IG Uruguay.

Moreira, M. A. (2002). Aprendizaje significativo: teoría y práctica. Madrid: Visor. 100p.