View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Servicio de Difusión de la Creación Intelectual

Capítulo 3:

Arquitas y la geometría

Rosa Nina Enrich

Introducción.

Ningún tema pierde tanto cuando
se le divorcia de su historia como las Matemáticas
Bell[1]

Analizar los procesos históricos en el desarrollo de la Matemática permite conocer la forma en que surgen, se sistematizan y se desarrollan los métodos, las ideas, los conceptos y las teorías de esta disciplina. Puede ser sumamente útil explorar los inicios de un concepto, las dificultades con las que tuvieron que enfrentarse los matemáticos y las ideas que surgieron al abordar situaciones nuevas, los problemas que resolvían, el ámbito en que se aplicaban, los métodos y técnicas que desarrollaban, cómo fraguaban definiciones, teoremas y demostraciones, la ilación entre ellos para forjar teorías, los fenómenos físicos o sociales que explicaban, el marco espacial y temporal en que aparecían, cómo fueron evolucionando hasta su estado actual, con qué temas culturales se vinculaban, las necesidades cotidianas que solventaban. En suma, conocer, en sentido kantiano, el tránsito de las intuiciones a las ideas y de éstas a los conceptos.
.

Si bien este capítulo está dirigido al análisis de la obra de Arquitas como matemático de la antigua Grecia, nos parece sumamente importante darle un marco histórico describiendo brevemente tres problemas clásicos de la Geometría cuyo planteo marcó la vida los matemáticos antiguos, algunos contemporáneos, otros posteriores a Arquitas, y cuya búsqueda de solución generó múltiples discusiones entre matemáticos a lo largo de la historia.
Son ellos: la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo

El primero se refería a hallar la medida de un lado de un cuadrado en función de la medida del radio de un círculo de modo que su área fuera la misma que la del círculo. Este problema aún no ha sido resuelto

El segundo, pretendía encontrar el modo de dividir un ángulo en tres partes iguales utilizando sólo regla y compás. Al igual que el primero, aún no ha sido resuelto.

El tercero, tenía por objetivo encontrar la medida de la arista de un cubo de modo que su volumen duplicara al de otro de arista conocida. De los tres éste es el único para el cual se obtuvo cierto tipo de solución. Son varias las soluciones planteadas por matemáticos de la Grecia Clásica y de ellas la más sobresaliente, formalmente hablando, es la propuesta por Arquitas.

Los tres problemas clásicos de la geometría griega tenían un punto en común: no podían resolverse con regla y compás y esa fue la gran dificultad que determinó la necesidad de recurrir a otros medios que iban más allá de los utilizados hasta ese momento. De hecho, en la actualidad los tres problemas carecen de solución utilizando regla y compás.

A las soluciones halladas que requirieron de instrumentos graduados se las llamó soluciones mecánicas[1]. Platón decía que procediendo de forma mecánica se perdía irremediablemente lo más sensible de la Geometría, opinión que compartimos plenamente. Ello se debe a que es preciso resolver un problema por un medio que implique una demostración de su solución para garantizar que pueda

---

[1] Ejemplo de solución mecánica es la división de un segmento en partes iguales con una regla graduada. En cambio si se hace por aplicación del Teorema previo al de Thales es perfecta, geométricamente hablando.

afirmarse “Ésta es la solución” ya que, de lo contrario sólo estaríamos hablando de verificaciones[2]. Sabemos que en el siglo V aC, Hipócrates de Quío hizo la primera contribución de importancia a los problemas de cuadrar el círculo y duplicar el cubo, pero también estudió el problema de trisectar un ángulo y, si bien encontró una forma directa de hacerlo, no es aplicable a cualquier ángulo y por lo tanto no tiene valor como solución general ya que no sólo es particular sino además mecánica.
No hay que dejar de considerar que la diferencia entre la perfección de un objeto ideal obtenido por una solución geométrica y el objeto real construido a partir de ella, está dada por las aproximaciones tanto de sus medidas como de algunas de sus propiedades consecuencia tanto del tipo de material utilizado como de las técnicas constructivas.

De los tres problemas a los que hemos hecho referencia nos interesa aquí trabajar con el tercero: la duplicación del cubo, analizando particularmente el trabajo realizado por Arquitas y que fuera rescatado por Eutocio en el siglo II dC

Donde la historia se mezcla con la leyenda en cuanto al surgimiento del problema.

Se cuenta que el origen del tercer problema, el de la duplicación del cubo, se dió cuando los habitantes de Delos recurrieron al oráculo de Delfos para saber cómo contener la plaga que invadía su ciudad, a mediados del Siglo IV aC. El oráculo respondió que debían duplicar el altar de Apolo, cuya forma era la de un cubo. Esta respuesta del oráculo no resulta extraña por cuanto se registran problemas acerca del tamaño y forma de los altares ya en las primeras manifestaciones de la literatura hindú, llegadas a Grecia probablemente de la mano de Pitágoras.

El hecho de que este problema haya sido abordado previamente, tal vez tenga su origen en leyenda acerca del rey Minos quien al visitar la construcción de una tumba para su hijo Glauco advierte que era pequeña según sus expectativas y manifiesta: “*Escaso espacio en verdad concedéis a un sepulcro real; duplicadlo, conservando siempre la forma cúbica*”. Se cuenta que inmediatamente pensaron en construir un cubo cuyo lado duplicara al del primero. Esta idea contiene un error, puesto que duplicando los lados de un cubo, su volumen se octuplica. Así fue como se convirtió en un problema para los matemáticos, a partir de esa época.

La leyenda sobre Minos ubicaría el planteo del problema en el período de esplendor de la era minoica, aproximadamente 1600 años aC.

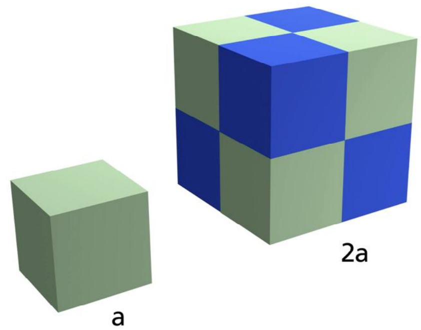


Figura 1: La solución intuitiva de duplicar el lado del cubo muestra como el volumen se octuplica.

---

[2] Recuérdese que en Matemática una demostración es un proceso por el cual, mediante una serie de razonamientos lógicos, se llega a establecer la verdad de una proposición o teorema a partir de cierta hipótesis. En cambio una verificación es la comprobación de que cierta hipótesis es verdadera para los casos en que se verifica y no puede asegurarse que lo sea para cualquier caso.

De la Grecia antigua, elegimos señalar tres importantes intentos de solución:

- La de Hipócrates reportada por Arquímedes en su libro *Sobre la esfera y el cilindro.* Se basó en la determinación de dos medias proporcionales entre una medida y otra. Aunque nunca logró formalizar la solución.
- La de Menecmo que no sólo habría descubierto las cónicas sino que habría estudiado una serie de propiedades de éstas, por lo menos las suficientes como para dar dos sencillas soluciones al problema de Delos mediante la intersección de dos de esas curvas.
- La de Arquitas que había encontrado ya las dos medias proporcionales al resolver el problema con tres superficies de revolución.

Si Hipócrates redujo el problema espacial de la duplicación del cubo a un problema en el plano, Arquitas lo recondujo al espacio(No se ha encontrado, en la bibliografía consultada, una referencia a por qué Arquitas optó por este tipo de planteo en su búsqueda para hallar una solución al problema).A ellos les sucedieron otros, intentando perfeccionar las soluciones propuestas.

Aún cuando se inventaron muchos métodos para duplicar el cubo y se hicieron numerosos descubrimientos notables en el intento, los antiguos griegos nunca iban a encontrar la solución que realmente buscaban: *una que pudiera hacerse con regla y compás*. Nunca encontrarían tal construcción porque dicha construcción no puede hacerse, tal como justificaremos más adelante. Sin embargo, no había forma de que pudieran alguna vez probar tal resultado, puesto que se requerían conceptos matemáticos que iban mucho más allá de lo que ellos habían alcanzado a desarrollar. Es justo decir, sin embargo, que aun cuando ellos no pudieron probar que una construcción con regla y compás era imposible, algunos de los mejores antiguos matemáticos griegos supieron, intuitivamente, que en verdad era imposible.

Para comprender la imposibilidad de la solución, recurramos al Álgebra moderna el problema puede describirse así: para que el volumen de un cubo de arista "a" sea el doble del de otro cubo de arista "b" debe verificarse que:

	$V_a = 2. V_b$
Como	$V_a = a^3$ y $V_b = b^3$
Por lo tanto	$a^3 = 2. b^3$
Es decir	$a = \sqrt[3]{2}\ .b$

La inexistencia de un método para construir esta raíz cúbica con regla y compás es lo que vuelve imposible la solución que buscaban.

Sin embargo, desde la época de Hipócrates ya se sabía que la solución del problema pasaba por encontrar dos medias proporcionales entre "a" y "b" de modo los volúmenes de los cubos de lados "a" y "b", estuvieran en relación 2 a 1. Su objetivo era, primero determinarlas y luego demostrar que era posible construirlas con regla y compás.

Hoy, álgebra moderna mediante, sabemos que esas medias proporcionales son $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[3]{4}$ por lo que la propuesta de Hipócrates tomada por Arquitas en su búsqueda por demostrar su existencia quedaría expresada así:

$1: \sqrt[3]{2} :: \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{4} :: \sqrt[3]{4} : 2$ que es lo mismo que:

$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ y la relación entre los volúmenes sería:

1: 2 ::2 : 4 :: 4 : 8 que es lo mismo que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ tal como se ve en la Figura 2

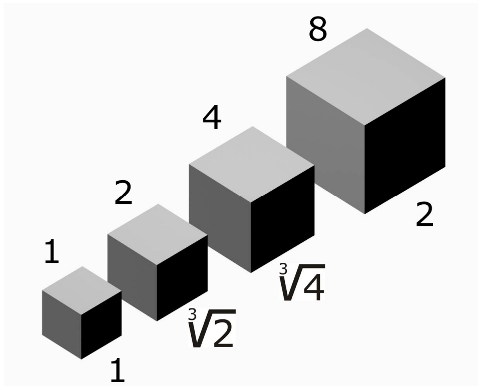


Figura 2. Construcción aproximada de cubos de aristas 1, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$ y 2, cuyos volúmenes son 1, 2 4 y 8 respectivamente

En la segunda mitad del Siglo XVII y comienzos del XVIII, muchos matemáticos se dedicaron al problema de duplicar el cubo Entre ellos figuran Descartes, Fermat, Huygens, Viviani y Newton.

Descartes consideró no solamente el problema de encontrar dos medias proporcionales, de acuerdo con lo que se requería para resolver el problema, sino también llegó a considerar cuatro. Fermat fue más lejos al considerar ciertas clases que involucran *n* medias proporcionales. Viviani resolvió el problema con la ayuda de una hipérbola de segundo orden. Huygens, en 1654, propuso tres métodos de solución. Newton, en 1707, sugirió varios métodos pero prefirió uno en el cual se hace uso del caracol (*limaçon)* de Pascal (la cardioide es la más conocida de esta familia de curvas).

Este breve marco histórico dado al problema, nos permite comprender la complejidad de ciertos problemas de la Matemática que aparentan tener sencillas soluciones. He aquí una de las claves para quienes se entusiasman con los alcances de esta disciplina:

En términos matemáticos, la intuición puede ser un buen punto de partida.. Pero no debe olvidarse que la Matemática es la disciplina de las demostraciones. Sólo aquello que puede demostrarse se constituye en un escalón que permite plantearse subir al siguiente.

Puesta de manifiesto esta importante cuestión, podemos dedicarnos al análisis de la *solución* de Arquitas al problema de la duplicación del cubo.

Arquitas y la duplicación del cubo.

Acerca de Arquitas

Arquitas de Tarento (aproximadamente 428 – 350 aC) fue un matemático, filósofo y político que desarrolló sus actividades en la primera mitad del siglo IV aC, es decir, en tiempos de Platón. Fue la última de las figuras célebres de la era temprana de los pitagóricos. Fue el primero en identificar a la Lógica (muy asociada con la Aritmética), la Geometría, la Astronomía y la Música como las ciencias canónicas, que fueron conocidas como Cuadrivium, en la Edad Media. Estas ciencias unidas al Trivium de Zenon (Gramática, Retórica y Dialéctica) formaban las siete artes liberales (Boyer, 1986).

Decimos esto como para señalar la importancia de su trayectoria, no muy conocida fuera del ámbito de los matemáticos. Sus investigaciones no llegan a las aulas con la asiduidad de las de otros matemáticos griegos tales como Pitágoras, Arquímedes, etc. El problema reside en que son muy pocos los originales de sus trabajos, con visos de autenticidad, que han sido recuperados. Entre ellos destacamos dos: los reportes sobre su *solución* a la duplicación del cubo, que da como resultado el descubrimiento de una curva notable conocida como *Curva de Arquitas* (Ferreol, R.), y su trabajo sobre armonía musical (Hufman, C.), que significó una importante contribución para los músicos de su época.

Acerca de su propuesta para duplicar el cubo.

Arquitas de Tarento, brindó una solución con su famosa construcción, que involucra a un cilindro, un toro y un cono, de revolución (ver **Figura 4 b**).

Recuérdese, tal como se señaló anteriormente al relatar la anécdota de Delos, que la solución intuitiva para duplicar el cubo fue duplicar su lado. Sin embargo, si se procede así se obtiene un cubo cuyo volumen es 8/ veces el volumen del primer cubo. Esto permite comprender que la medida del lado que duplica al volumen de un cubo de lado 1 de tener una medida comprendida entre 1 y 2.De ahí que su trabajo parte de la convicción de que la solución de duplicar el volumen del cubo significa encontrar dos medias proporcionales entre b = 1 y a = 2 que fueran construibles con regla y compás y de modo tal que la menor de dichas medias sirviera de arista de un cubo cuyo volumen fuera 2. Cabe preguntarse ¿por qué dos medias proporcionales? Porque si consideramos que los volúmenes para los cubos de aristas 1 y 2 son 1 y 8, entonces es posible encontrar entre ellos dos medias proporcionales que nos permitan construir la secuencia 1, 2, 4 y 8 que forma una proporción geométrica en la 2 y 4 son medias proporcionales entre 1 y 8. Éste es el caso de los volúmenes. Para las aristas, el problema se reduce (¿se reduce?) a encontrar dos medias proporcionales entre 1 y 2 de las cuales la menor corresponde a la arista del cubo cuyo volumen es 2. Siendo ésta, la solución buscada.

Lo notable se su razonamiento es que lo basó en una construcción hecha en el dominio, entonces considerado superior, de las superficies curvas. El resultado de Arquitas es consistente con el descubrimiento de los pitagóricos, de Teetetes y de Platón de la construcción de los cinco sólidos regulares a partir de la esfera. Eran tiempos de esplendor para la Geometría en esa época. Por primera vez se reportaban construcciones tridimensionales representadas en el plano a las que se les adjudicaba un inmenso valor. Tal vez sea éste el motivo por el cual Arquitas buscó una solución al problema en este terreno.

El análisis lo comenzamos describiendo las características de las tres superficies de revolución intervinientes. Y destacamos que la base de la solución consiste en asignar a un diámetro y a una cuerda de una misma circunferencia, medidas cuya relación sea 2:1. Esto se refleja en las figuras 3 y 4 conformadas por

1. Un toro generado por una circunferencia de diámetro AC, de longitud 2,que gira alrededor de una recta coplanar y tangente a ella en A. Por lo tanto, el toro así generado tiene diámetro interno nulo, es decir, no tiene caladura.
2. Un cilindro recto de diámetro AC, con eje paralelo al eje del toro y desplazado una distancia AC/2 respecto de éste. Nótese que la circunferencia generatriz del toro tiene el mismo diámetro que la directriz del cilindro y están en planos perpendiculares.

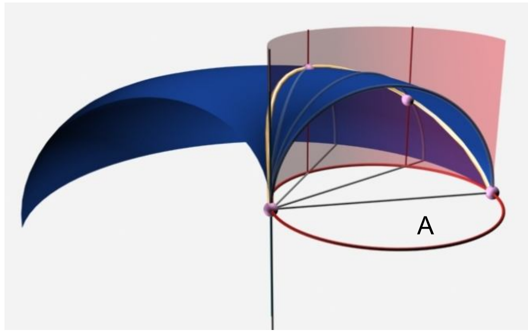


Figura 3. Intersección del toro y el cilindro. Se visualiza parte de la Curva de Arquitas, resultado de la intersección de ambas superficies.

3. Un sector de cono recto cuyo eje pasa por el centro del toro y es perpendicular al eje del cilindro. Este segmento es una cuerda de la circunferencia directriz del cilindro y tienen *longitud* 1. La prolongación del segmentoAB corta a la Tangente en C de la circunferencia ABC en el punto D. Se determina así el triángulo ACD que al rotar alrededor de su lado AC genera al sector de cono recto que interviene en la construcción (Figuras 4ª y 4b).

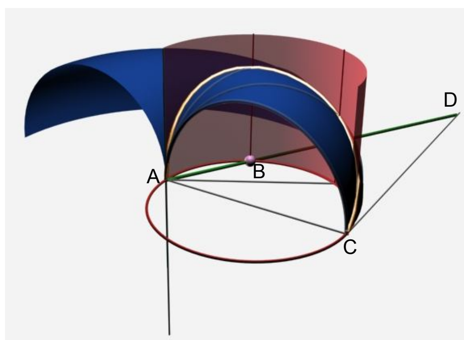


Figura 4 a. Intersección del toro y el cilindro. Detalles sobre la generación del cono.

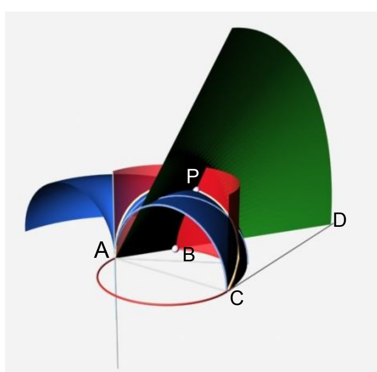


Figura 4 b. Intersección del toro, el cilindro y el cono

La superficie del cono tiene 4 puntos de intersección con la curva de Arquitas determinada por la intersección del toro y el cilindro. En la Figura 4 b puede observarse el punto P, que es uno de esos cuatro puntos, correspondiente al cuadrante representado.

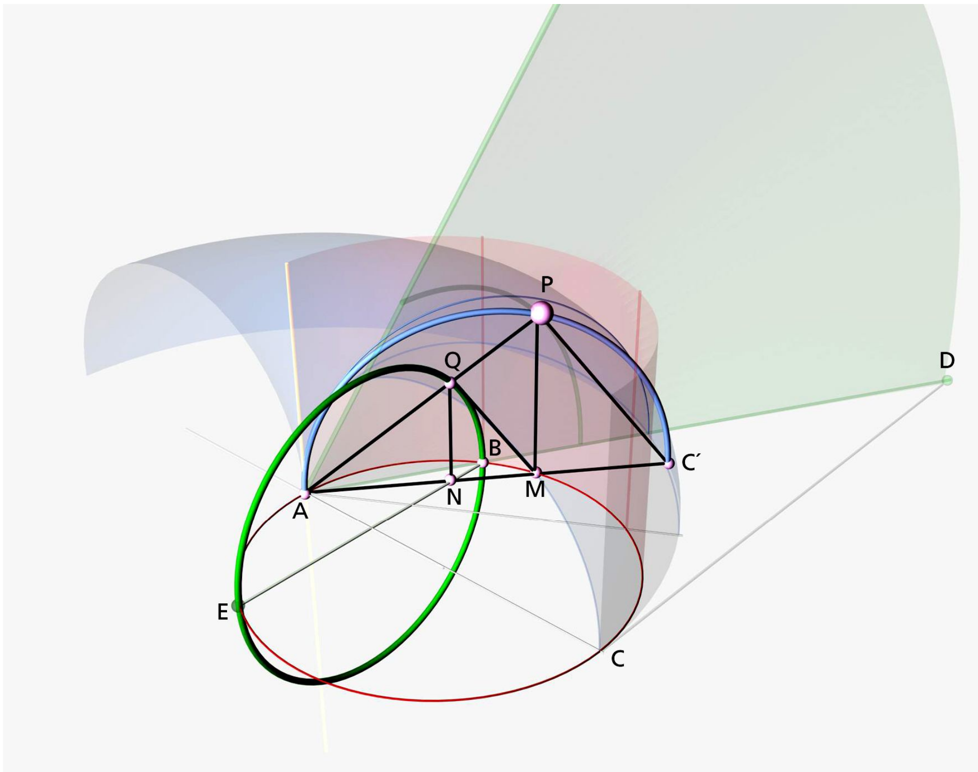


FIGURA 5. El Punto P, se convierte en el punto de partida para la construcción de una serie de triángulos rectángulos, semejantes entre sí y que permiten hallar las dos medias proporcionales buscadas.

Pasos de la Construcción. Determinación de las medias proporcionales.

-

- Sea $\widehat{APC}$´una posición de la semicircunferencia generatriz del toro, siendo APC´ un triángulo inscripto en ella que, por lo tanto, es rectángulo en P.
- Llamemos M al punto en el que la generatriz recta del cilindro que pasa por P corta a la circunferencia ABC.
- Tracemos la sección del cono con un plano perpendicular a su eje y que contiene al punto B. Se obtiene la circunferencia BQE. El punto Q es la intersección del segmento AP con dicha circunferencia.
- Los puntos M y N son la proyección perpendicular de los puntos P y Q sobre el plano ABC.

Entonces:

QN.QN = BN.NE = AN.NM (Euclides III.35 [5]),

De donde resulta que AQM es un ángulo recto. Pero APC´ también es un ángulo recto, de ahí que MQ es paralelo a C´P.

De la Figura 5 extraigamos el triángulo rectángulo APC´.

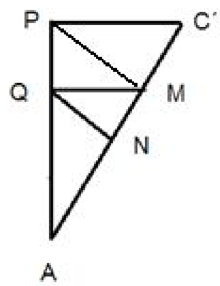


Figura 6.

Como todos los triángulos rectángulos de la figura son semejantes ya que sus ángulos son respectivamente iguales, resulta que:

$$\frac{AQ}{AM} = \frac{AM}{AP} = \frac{AP}{AC'}$$

Pero AQ= AB   y   AC´= AC de donde resulta:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{AP} = \frac{AP}{AC}$$

Esto significa que AB, AM, AP, AC están en proporción continua por lo que AM y AP son las dos medias proporcionales buscadas. En particular, la medida de AM coincide con la medida del lado del cubo cuyo volumen duplica al del cubo de arista AB.

Esto demuestra que la solución existe si no se impone la restricción de que AM sea construible sólo con regla y compás.

Breve cierre

A lo largo de la Historia, la solución se buscó respetando las condiciones impuestas por la Geometría de la Grecia Clásica. Por ello, la solución de Arquitas no satisface dichas condiciones, pero no puede negarse el mérito de la misma que implica una asombrosa capacidad creadora e imaginativa como para producir una solución, matemáticamente correcta en una época en que no se disponía de los medios tecnológicos apropiados para su resolución.

Así son los genios. . .¡están por encima de su época! Nosotros, los comunes, debemos conformarnos con comprender sus razonamientos e incorporarlos como nuevos conocimientos a nuestro acervo.

Notas

[1] Las construcciones con regla y compás se realizan por medio de un número restringido de pasos. Se basan en el uso de un compás ideal y una regla no graduada. Fueron la base de la construcción de formas en la Geometría Griega.

[2] Ejemplo de solución mecánica es la división de un segmento en partes iguales con una regla graduada. En cambio si se hace con regla y compás es perfecta, geométricamente hablando.

[4] Recuérdese que en Matemática una demostración es un proceso por el cual, mediante una serie de razonamientos lógicos, se llega a establecer la verdad de una proposición o teorema a partir de cierta hipótesis. En cambio una verificación es la comprobación de que cierta hipótesis es verdadera para los casos en que se verifica y no puede asegurarse que lo sea para cualquier caso.

[4] Ver Anexo 1. Medias proporcionales entre dos números.

[5] En el Anexo 1 se transcribe la Proposición XI.35 de Euclides, extraida de: http://www.claymath.org/library/historical/euclid/, visitada el 16/04/10. http://rarebookroom.org/ visitada 12/04/2010.

Referencias

Bell, E.T. (1985): *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica. México. Pag. 54

Boyer C. (1986): *Historia de las Matemáticas*. Alianza. Madrid.

Ferreol, R. *Curva de Arquitas en* Encyclopédie dês formes mathematiques remarquables en http://www.mathcurve.com/courbes3d/archytas/archytas.shtml visitado el 22/04/10

Gómez Urgellès, J. (2002): *De la enseñanza al aprendizaje de las Matemáticas*. Paidós (Papeles de Pedagogía). Barcelona.

Huffman, C. (2008) "Archytas", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2008 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/archytas/

ANEXOS

Anexo 1. Medias proporcionales entre dos números

Dados dos números a y b, puede encontrarse un tercer número x, llamado media proporcional entre a y b si se verifica que:
a : x :: x : b (se lee "**a** es a **x** como **x** es a **b"**)
Esto es una proporción continua que en lenguaje algebraico se expresa así:
a/x = x/b

Si entre dos números a y b pueden encontrarse otros dos x e y tales que:
a: x :: x : y :: y : b
que algebraicamente se expresa:
a/x = x/y = y/b
Entonces x e y son dos medias proporcionales entre a y b.

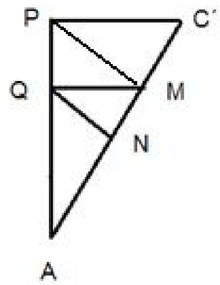
Ejemplo: **1 : 2 :: 2 : 4 :: 4 : 8** escrito algebraicamente: 1/2 = 2/4 = 4/8. Entonces 2 y 4 son "medias proporcionales" entre 1 y 8.

Anexo 2. Proposición de Euclides utilizada en el desarrollo del trabajo.

Proposición III.35 Si dos cuerdas de una circunferencia se cortan en un punto, entonces el rectángulo que puede formarse con los segmentos en que una de ellas queda dividida es igual al formado por los segmentos de la otra.

Anexo 3. Sobre la semejanza de triángulos rectángulos

Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando sus dos ángulos agudos son iguales.
Recuérdese que la proporcionalidad entre los lados se determina a partir de que sean opuestos a ángulos iguales



En el caso que nos ocupa QM // PC´ y PM // QN, tal como se demostró.
Esto significa que todos los triángulos rectángulos que se observan en la figura adjunta son semejantes y por lo tanto sus lados son proporcionales.

Anexo 4. Demostración de la imposibilidad de duplicar el cubo con regla y compás.

En el siglo XIX, Gauss concluyó que en realidad se trata de un problema sin solución, pero no lo demostró. Tal como ya mencionamos, la imposibilidad de solución surge de la tesis del problema que exige resolverlo usando sólo regla no graduada y compás.
Fue el francés Pierre Wantzel quien en 1837 hiciera finalmente público el correspondiente teorema, en un artículo titulado *Investigaciones acerca del modo de reconocer si un problema geométrico puede ser resuelto con regla y compás. Se* publicó en el reconocido Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.
Allí demuestra que la imposibilidad de duplicar el cubo con regla y compás deriva de otra imposibilidad: la de construir con esos instrumentos de la geometría clásica griega, la raíz cúbica de cualquier número racional.
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Gauss.pdf. Págs 14 y 15. Visitada el 24/04/2010