Morfismos diferenciables topológicamente lisos. Caracterizaciones y aplicaciones

Joaquín Mª Ortega Aramburu

MORFISMOS DIFERENCIABLES TOPOLOGICAMENTE LISOS CARACTERIZACIONES Y APLICACIONES

Memoria presentada por Joaquín Ma Ortega Aramburu para aspirar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

INTRODUCCION

Esta memoria recoge algunos de los puntos fundamentales e inéditos que han aparecido al iniciar un estudio sobre los métodos espectrales en Análisis y, en particular, sobre los anillos y estructuras diferenciables Dicho estudio se ha realizado bajo la dirección del profesor Dr J Sancho Guimerá y en colaboración con J Muñoz El camino recorrido puede seguirse a través del artículo "Sobre las álgebras localmente convexas" de J Muñoz y J Ortega (Coll Math 1969), la memoria "caracterización de las álgebras diferenciables y síntesis espectral para módulos sobre tales álgebras", tesis doctoral de J Muñoz y la presente memoria

Para centrar debidamente el tema, resumamos el problema que resuelve el teorema de extensión de Whitney Sea K un compacto de R^n Si a cada función de $C^\infty(R^n)$ le asignamos el desarrollo de Taylor de dicha función en cada uno de los puntos de K obtenemos una aplicación continua de K en el anillo de las series formales en n variables $C[[\xi]]$ Esta asignación es un morfismo de $C^\infty(R^n)$ en $C^0(K,C[[\xi]])$ cuyo núcleo ρ_K es el cierre del ideal de nulidades de K El teorema de extensión de Whitney da una condición sobre una función de $C^0(K,C[[\xi]])$ para que provenga de una función de $C^\infty(R^n)$ En este sentido este teorema constituye una caracterización de $C^\infty(R^n)/\rho_K = W(K)$, "álgebra de Whitney en K", pero es una caracterización, elemento a elemento, para una particular representación del anillo es una caracterización no intrínseca Despues de {11} disponemos ya de una caracterización intrínseca de este anillo que puede formularse así

En la clase de álgebras que se precisa (0 4) la condición necesaria y suficiente para que un álgebra A sea el álgebra de

Whitney de un compacto de R^n es que se verifique

1 A está generado topológicamente por n elementos autoconjugados

2 D_A, diagonal de A, es un ideal finito generado de $A\otimes_C A$ y

3 Para cada m, D_A^m es cerrado en $A\otimes_C A$ y $\mathrm{Grad}_{D_A}(A\otimes_C A)$ es el anillo de polinomios en n variables

Por otra parte, paralelamente a la noción algebraica de Grothendieck de morfismo diferenciablemente liso podemos dar la siguiente definición Diremos que el morfismo de C en A, A un álgebra de Fréchet, es diferenciable topológicamente liso (para abreviar en toda la teoría hablaremos de morfismo topológicamente liso ó t liso) si se verifica

1 D_A es un ideal finito generado de $A\otimes_C A$

2 Para cada m, D_A^m es cerrado en $A\otimes_C A$, $\Omega_A=D_A/D_A^2$ es un A-módulo proyectivo y $\mathrm{Grad}_{D_A}(A\hat{\otimes}_C A) = \mathrm{Simetr}_A(\Omega_A)$

Tendremos entonces que para un álgebra de Whitney sobre un compacto de R^n, el morfismo $C \to W(K)$ es t liso El teorema recíproco no es cierto El capítulo II está dedicado a demostrar que en la clase de álgebras que allí se precisa el morfismo $C \to A$ es t liso si y solamente si A es el cociente del anillo de las funciones infinitamente diferenciables en una variedad módulo el cierre del ideal de nulidades de un compacto de la misma

El método, ya consagrado, del estudio sistemático de los morfismos morfismo finito, morfismo plano, morfismo liso, tiene su desarrollo natural en nuestro contexto así, en el apartado segundo del capítulo III se aborda el estudio del mor fismo t liso entre dos álgebras Si el álgebra $\mathcal{A}$ es una extensión trivial finita de A, siempre en la clase de álgebras que se precisarán, es decir, si $\mathcal{A}=B\otimes_C A$ con B topológicamente finito generado el morfismo $A \longrightarrow \mathcal{A}$ es t liso si y solo si $\mathcal{A}$ es cociente de las funciones infinitamente diferenciables en una variedad con valores en A, módulo el cierre del ideal de nulidades de un compacto de la misma Puede caracterizarse tambien el caso particular en que la variedad sea R^n El problema que se resuelve es pues del tipo del de la "extensión de Whitney ,pero por medio de una caracterización 'a lo Gelfand", para variedades y con coeficientes en un anillo Se demuestra tambien que la noción de t liso es de caracter local, con lo que se caracteriza un anillo que sea localmente del tipo anterior

Puesto que los módulos de diferenciales Ω_A que nos aparecían eran módulos de Fréchet libres en entornos estudiamos los módulos de Fréchet finito generados sobre L-álgebras ó sobre F^*-álgebras y obtuvimos la equivalencia entre éstos, los localmente libres, los proyectivos y los planos (apartado 3 capítulo I)

El capítulo I y la primera parte del capítulo III son, básicamente, de preparación para los teoremas de caracterización anteriormente citados

El problema de la caracterización del anillo cociente del de las funciones infinitamente diferenciables en una variedad por el ideal de nulidades de un compacto, a partir del conocido para un compacto de R^n, es un problema, en parte, de localización El primer paso que había que realizar era el de construir una teoría de la localización para un tipo de álgebras (L-álgebras) que, como las que intentábamos caracterizar, podían tener radical Esta teoría junto con la de localización para módulos de Fréchet sobre tales álgebras se da en los apartados 1 y 2 del capítulo I Se estudia en ellos la teoría general de la localización, la localización de un producto tensorial de álgebras, la localización de la diagonal y la del graduado de $A \otimes_C A$ por este ideal. El lector excusará la aridez de algunas demostraciones, que el gran número de puntos a justificar ha hecho inevitable. En la segunda parte del capítulo III se vuelve al problema de la localización para productos tensoriales de A-álgebras y módulos sobre las mismas.

En el primer apartado del capítulo III se estudian las derivaciones y diferenciales para A-álgebras de Fréchet y se dan para ellas propiedades análogas a las algebraicas de las diferenciales de Kalher.

En el capítulo IV se describen diversos ejemplos de morfismos t lisos que tienen interes en Análisis. Se definen los morfismos t lisos asociados a un fibrado trivial de base Spec(A) y fibra R^n ó una variedad, así como el asociado a un módulo proyectivo que son las A-secciones de un fibrado localmente trivial de fibra P^n. De esta forma la estructura diferenciable de las fibras se transporta a una "estructura A-diferenciable" en las A-secciones de dichos fibrados. Se demuestra que la A-variedad de las A-secciones del fibrado trivial de fibra una variedad es localmente isomorfo a un módulo proyectivo de los citados anteriormente. Como resultado marginal y como muestra de las posibilidades de estos planteamientos se observa como la demostración del teorema de existencia de soluciones en ecuaciones diferenciales ordinarias da directamente el teorema de dependencia diferenciable de las soluciones respecto a las condiciones iniciales y respecto a una familia de parámetros de las que depende la propia ecuación diferencial.

Es una obligación y al tiempo una gran satisfacción acabar estas líneas con un recuerdo a todos los que hicieron posible el trabajo, en particular estoy en deuda con todos los profesores de licenciatura que me dieron la formación básica matemática, con los componentes del Departamento de Algebra y Fundamentos que aportaron cuantas aclaraciones y ayuda les fué requerida en forma especialísima agradezco a J Muñoz, compañero de estudios, toda la colaboración prestada

Al profesor Dr J Sancho Guimerá le debo, además de todas las directrices básicas del trabajo, gran parte de mi formación de postgraduado Mi agradecimiento y el deseo de que esta memoria sea fiel reflejo de las enseñanzas recibidas

CAPITULO CERO

REFERENCIAS

En este capítulo se da un resumen de algunos de los resultados y definiciones en que se basa la memoria Haremos uso en ella, sin ulterior referencia a cuestiones generales sobre espacios vectoriales topológicos , topología, álgebra y análisis en general No obstante hemos creído de utilidad hacer una breve alusión a resultados previos directamente vinculados con el contenido del trabajo Las demostraciones y una mayor información sobre todos ellos pueden encontrarse en la bibliografía que se cita específicamente

0 1 Referencias a la teoría de productos tensoriales en espacios vectoriales topológicos

0 1 1 Topología π del producto tensorial de dos espacios vectoriales localmente convexos

Dados dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos (e l c) E y F sobre un cuerpo K (cuerpo de los números reales ó complejos) el dual de $E \otimes F$ puede identificarse a las aplicaciones bilineales de $E \times F$ en K De esta forma se puede dotar a $E \otimes F$ de una topología de e l c la topología de la convergencia uniforme sobre las partes equicontínuas de las aplicaciones bilineales continuas de $E \times F$ en K Dicha topología se llama topología π y es la más fina que hace la aplicación bilineal canónica $E \times F \longrightarrow E \otimes_\pi F$ continua Esta topología puede caracterizarse por la siguiente propiedad universal

En $E \otimes F$ existe una única topología de e l c $E \otimes_\pi F$ tal que para todo espacio G, los espacios de las aplicaciones bilineales continuas de $E \times F$ en G y de las aplicaciones lineales continuas de $E \otimes_\pi F$ en G son canónicamente isomorfas y en el isomorfismo se corresponden las partes equicontinuas de estos espacios

Si $E_1 \xrightarrow{\phi} E_2$ y $F_1 \xrightarrow{\psi} F_2$ son aplicaciones continuas entre e l c (respectivamente epimorfismos) la aplicación canónica $\phi\otimes\psi \quad E_1 \otimes_\pi F_1 \longrightarrow E_2 \otimes_\pi F_2$ es continua (respectivamente epimorfismo)

La completación de $E\otimes_\pi F$ se escribe $E \hat{\otimes}_\pi F$ o simplemente $E \hat{\otimes} F$

Dados un sistema fundamental de seminormas $\{p_\lambda\}$ en E y $\{q_\mu\}$en F un sistema fundamental de seminormas en $E \otimes_\pi F$ es

$$p_\lambda \otimes q_\mu (u) = \inf \{\Sigma\, p_\lambda (x_\kappa) q_\mu (y_\kappa) \quad u = \Sigma\, x_\kappa \otimes y_\kappa\}$$

A partir de aquí es fácil probar que si $F = \varprojlim E_i$ y $F = \varprojlim F_j$ límites proyectivos estrictos, $E \hat{\otimes} F = \varprojlim (E_i \hat{\otimes} F_j)$

Si E y F son e l c metrizables cada elemento de $E \hat{\otimes} F$ es de la forma $\Sigma \lambda_i x_i \otimes y_i$ con $\Sigma |\lambda_i| < +\infty$, $x_i \longrightarrow 0$ en E e $y_i \longrightarrow 0$ en F

0 1 2 <u>Topología ε en el producto tensorial</u>

Dados E y F dos e l c podemos dotar a $E \otimes F$ de la topología de la convergencia uniforme sobre los productos de partes equicontinuas de E' y F' A dicha topología le llamaremos ε y es menos fina o coincide con la topología π $E \otimes F$ con esta topología lo escribiremos $E \otimes_\varepsilon F$

Si $E_1 \longrightarrow E_2$ y $F_1 \longrightarrow F_2$ son monomorfismos topológicos de e l c la aplicación natural $E_1 \otimes_\varepsilon F_1 \rightarrow E_2 \otimes_\varepsilon F_2$ es un monomorfismo topológico

0 1 3 Espacios nucleares

Un e l c F se dice nuclear si para todo e l c F , $E\otimes_{\pi}F$ es isomorfo topológicamente a $E\otimes_{\varepsilon}F$

Dada una sucesión exacta de espacios y morfismos topológicos (que llamaremos sucesión topológicamente exacta para abreviar)

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_3 \longrightarrow 0$$

si F es nuclear, se tiene una sucesión topológicamente exacta

$$0 \longrightarrow E_1 \otimes F \longrightarrow E_2 \otimes F \longrightarrow E_3 \otimes F \longrightarrow 0$$

Si E_1, E_2, E_3, y F son espacios metrizables se deduce, como consecuencia del teorema del gráfico cerrado, la exactitud topológica de la sucesión

$$0 \longrightarrow E_1 \hat{\otimes} F \longrightarrow E_2 \hat{\otimes} F \longrightarrow E_3 \hat{\otimes} F \longrightarrow 0$$

Los espacios nucleares verifican las siguientes propiedades ~~de~~ conservación

Todo subespacio de un espacio nuclear es nuclear
Todo cociente de un nuclear es nuclear
Todo limite proyectivo de nucleares es nuclear
Todo limite inductivo numerable de nucleares es nuclear
El completado de un espacio nuclear es nuclear
El dual fuerte de un espacio de Fréchet nuclear es nuclear

Necesitaremos el siguiente teorema general de los núcleos

Si E y F son e l c de Fréchet y E es nuclear se tiene la siguiente identidad

$$(E \hat{\otimes} F)' = E' \hat{\otimes} F'$$

donde los duales estan dotados de sus respectivas topologías fuertes

Un ejemplo de espacio nuclear que usaremos repetidamente es el anillo de las funciones infinitamente diferenciables sobre una variedad diferenciable con su topología habitual

Las demostraciones de estos resultados y un estudio detallado de las mismas pueden verse en {6} , en {15} o en manuales completos sobre espacios vectoriales topológicos

0 2 Referencias a algebra conmutativa

Todos los anillos que manejaremos serán conmutativos

0 2 1 Anillo graduado de un anillo por un ideal

Dado un anillo $\mathfrak{a}$ y un ideal D consideremos el anillo cociente $A = \mathfrak{a}/D$ Se define el A-módulo graduado de $\mathfrak{a}$ por D como la suma directa

$$A \oplus D/D^2 \oplus D^2/D^3 \oplus$$

que escribiremos brevemente $Grad_D(\mathfrak{a})$ Este A-módulo se puede dotar de un producto que hace de él una A-álgebra mediante las aplicaciones producto naturales

$$D^m/D^{m+1} \times D^n/D^{n+1} \longrightarrow D^{n+m}/D^{n+m+1}$$

Si D/D^2 es finito generado por $e_1, \quad ,e_k$, $Grad_D(\mathfrak{a})$ es un cociente del anillo de polinomios $A[X_1, \quad ,x_k]$ Si coincide con él, D^m/D^{m+1} son módulos libres de base el conjunto de las clases de representantes $e_1^{\alpha}, \quad ,e_k^{\alpha}$ con $\alpha_1 + \quad + \alpha_k = m$

0 2 2 Simetrizado de un módulo

Dado un A-módulo M, consideremos el álgebra tensorial sobre M

$$A \oplus M \oplus (M \otimes_A M) \oplus (M \otimes_A M \otimes_A M) \oplus$$

El cociente de esta álgebra por el ideal engendrado por los elementos $m_i \otimes m_j - m_j \otimes m_i$ se llama álgebra simetrizada sobre M y lo escribiremos $\mathrm{Simetr}_A(M)$ Si M es libre de dimensión n, $\mathrm{Simetr}_A(M)$ es isomorfo al álgebra de los polinomios en n variables a coeficientes en A

Se puede verificar que si S es un sistema multiplicativo en el anillo A es cierta la igualdad

$$(\mathrm{Simetr}_A(M))_S = \mathrm{Simetr}_{A_S}(M_S)$$

Si B es un cociente de A se tiene el isomorfismo de B-módulos

$$B \otimes_A (\mathrm{Simetr}_A(M)) = \mathrm{Simetr}_B(B \otimes_A M)$$

0 2 3 Módulos proyectivos y planos

Un A-módulo M se llama proyectivo si para toda sucesión exacta de A-módulos

$$N \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

la sucesión correspondiente

$$\mathrm{Hom}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,T) \longrightarrow 0$$

es exacta Para que un A-módulo sea proyectivo es necesario y suficiente que sea factor directo de un módulo libre

Un A-módulo M es plano si para cada sucesión exacta de A-módulos

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\phi} T$$

la sucesión

$$0 \longrightarrow N \otimes_A M \xrightarrow{\phi \otimes 1} T \otimes_A M$$

es exacta

Todo A-módulo proyectivo es plano

Si el anillo es local y para módulos finito generados existe eq-uivalencia entre módulos libres, proyectivos y planos

Sea M un módulo finito generado M es proyectivo si y solamente sí cada punto del espectro primo de A admite un entorno U (puntos $\mathfrak{p}$ tales que para un f de A, $f \notin \mathfrak{p}$) en el que la localización de M, M_f es un A_f-módulo libre

Para módulos finito generados un módulo M es plano si y solamente sí para cada punto $\mathfrak{p}$ del espectro primo de A, $M_{\mathfrak{p}}$ (localización de M en $\mathfrak{p}$) es un $A_{\mathfrak{p}}$ -módulo libre En estas dos ultimas caracterizaciones puede sustituirse el espectro primo por el máximo

Un A-módulo M es de <u>presentación finita</u> si existen dos A-módulos libres L y R de bases finitas y una sucesión exacta

$$R \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Si M es de presentación finita y N es un A-módulo, para cada sistema multiplicativo S de A

$$(\mathrm{Hom}_A(M,N))_S = \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S, N_S)$$

De aquí y de las caracterizaciones anteriores puede deducirse que para módulos de presentación finita coinciden los conceptos de plano y proyectivo

La mayor parte de las demostraciones pueden verse en [8]

0 3 <u>Referencias a la teoría espectral para álgebras localmente convexas y para módulos sobre tales álgebras</u>

0 3 1 <u>Definiciones y representación espectral para álgebras localmente convexas</u>

Todas las álgebras que consideremos serán álgebras sobre el cuerpo complejo, conmutativas y con elemento unidad Se sobreentenderán estas condiciones al hablar simplemente de álgebras

Un álgebra A se dice localmente convexa (a l c) si está dotada de una topología que hace de A un espacio localmente convexo y de tal forma que exista una familia fundamental de seminormas p_λ , $\lambda \in I$ que verifiquen $p_\lambda(a\ b) \leq p_\lambda(a)\ p_\lambda(b)$ para cada $\lambda \in I$, $a \in A$ $b \in A$ Si dos seminormas p_λ, p_μ cumplen la condición anterior, tambien la verifica $\sup(p_\lambda, p_\mu)$, de donde puede suponerse que el conjunto de índices es filtrante creciente

Sea N_λ el anulador de la seminorma p_λ (conjunto de elementos de A anulados por p_λ), es un ideal cerrado de A Sea $A_\lambda = A/N_\lambda$ y π_λ $A \longrightarrow A_\lambda$ la proyección canónica, podemos dotar a esta álgebra de la norma $|\pi_\lambda a| = p_\lambda(a)$ Si $\bar{A}_\lambda$ es la completación de A_λ puede definirse en forma natural $\varprojlim \bar{A}_\lambda$ y comprobar que si A es completa, $A = \varprojlim \bar{A}_\lambda$

En el caso en que A sea completa y la familia de seminormas definidora de la topología pueda tomarse numerable diremos que el álgebra A es de Fréchet

En toda a l c completa todo ideal maximal cerrado x es un hiperplano, es decir, la aplicación canónica $A \xrightarrow{x} A/x = C$, $a \longrightarrow x(a)$ es un funcional lineal multiplicativo y continuo

Llamaremos espectro de un a l c completa A al conjunto de los ideales maximales cerrados de A a cada uno de tales ideales le llamaremos punto

Como el espectro de A (Spec(A)) está sumergido en el dual topológico A' de A , se le puede dotar de la topología débil inducida por A' A esta topología se le llama topología de Gelfand de Spec(A) y los elementos de A se representan como funciones continuas en el Spec(A) $a(x) = x(a)$, considerando x en el segundo miembro como el funcional lineal correspondiente a dicho ideal maximal. Si denotamos con C(Spec(A)) el álgebra de las C-funciones continuas en Spec(A) obtenemos así una representación $A \longrightarrow C(\mathrm{Spec}(A))$ que llamaremos representación espectral del álgebra El núcleo de esta representación coincide con el radical de Jacobson de A y si esta representación es fiel se dice que A es semisimple

La condición necesaria y suficiente para que un elemento de A sea invertible es que representado como función continua no tenga ceros en Spec(A)

El espectro de A puede dotarse de otra topología natural, la topología inducida por la topología de Zariski definida en el espectro primo de A, a esta topología la llamamos topología de Zariski del Spec(A) La topología de Gelfand es más fina que la de Zariski en general Un a l c se dice regular cuando ambas topologías coinciden

Una $*$-álgebra es un álgebra dotada de una involución $a \longrightarrow a^*$ tal que $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$, $(a\, b)^* = b^*\; a^*$

Una $*$-álgebra localmente convexa completa se dice simétrica cuando se cumple una de las tres condiciones siguientes, que son equivalentes

1 para cada $a \in A$, $1 + a\, a^*$ es invertible
2 todo ideal maximal cerrado x es invariante por la involución
3 para cada $a \in A$ y $x \in \mathrm{Spec}(A)$, $a^*(x) = \overline{a(x)}$

Dada un álgebra simétrica llamaremos elementos hermíticos o autoconjugados a los invariantes por la involución Si denotamos por H al conjunto de dichos elementos se tiene $A = H \oplus iH$ donde el producto en $H \oplus iH$ es el natural de polinomios en i, con $i^2=-1$ H es entonces un álgebra real Los elementos de H se representan sobre el Spec(A) como funciones valoradas en los números reales De esta forma, para este tipo de álgebras reales, partes hermíticas de álgebras simétricas puede darse un teorema de representación espectral

Para las álgebras de Fréchet simétricas toda funcional lineal multiplicativa es ya continua De aquí se deduce, mediante el teorema de los homomorfismos, que si A es un álgebra simétrica y semisimple, dos topologías que hagan de esta un álgebra de Fréchet son idénticas

0 3 2 <u>Un lema del tipo de Urysohn para álgebras regulares</u>

Sea A un álgebra de Fréchet, I y J dos ideales cerrados tales que $I+J$ es denso en A, entonces $I+J = A$ Dicho de otra forma, si I y J son tales que no tienen ceros comunes, $I+J=A$

De aquí que para álgebras de Fréchet regulares existen particiones de la unidad correspondientes a recubrimientos finitos Tambien puede deducirse de aquí que si A es un álgebra de Fréchet regular y semisimple y F es un cerrado del Spec(A), existe un ideal N_F contenido en todos los ideales cerrados cuyos ceros sean F N_F consta de todas las funciones a de A que se anulan en algún entorno de F N_F se llamará <u>ideal de nulidades</u> de F

Una información detallada de estas cuestiones puede verse en {10}

0 3 3 <u>Relaciones del espectro de un a l c A con su espectro de ideales maximales y su espectro de ideales primos</u>

Dada un a l c denotaremos Spec primo(A) al conjunto de ideales primos de A y Specmáx(A) al conjunto de ideales maximales de A Ambos espacios los supondremos dotados de la topología de Zariski

En el estudio de las a l c una diferencia básica que se encuentr respecto a las álgebras de Banach es que en las primeras el espectro no tiene por qué ser compacto Si el espectro es compacto no hay ideles densos, y por tanto Spec max(A) = Spec(A), en este caso las cuestiones del apartado 0 3 2 son triviales Parece, pues, natural procurar reducir el estudio de a l c al estudio de a l c pero con espectro compacto Un lema fundamental para ello es el siguiente, que tiene interes además por sí mismo

Si A es un a l c completa semisimple regular y de espectro compacto (Spec(A)= Spec max(A)), todo ideal primo de A está contenido en un solo ideal maximal y la aplicación que asigna a cada ideal primo el ideal maximal que lo contiene es una retracción continua del Spec primo(A) sobre Spec(A)

A toda álgebra simétrica A se le puede asignar otra B de espectro compacto sin más que tomar los elementos acotados de A en la representación espectral y dotar a B de la topología reunión de la dada y la inducida por la norma de la convergencia uniforme sobre el Spec(A)

La inyección B$\longrightarrow$A da una aplicación Spec primo(A)$\rightarrow$Spec-primo(B) que compuesta con la retracción anterior y con la inyección Spec max(A)$\longrightarrow$Spec primo(A) da una aplicación continua

Spec max(A)$\longrightarrow$Spec(B)

De esta forma se demuestra el siguiente teorema

Sea A una $*$-álgebra completa semisimple y simétrica, B la subálgebra de los elementos acotados de A Si B es regular, A es regular y Spec max (A) es homeomorfo a Spec(B)

Así, el Spec(B) es una compactización natural del Spec(A)

Bajo las mismas hipótesis la condición necesaria y suficiente para que Spec(A) sea localmente compacto es que entre los ideales densos de A exista uno mínimo, este ideal es el de las funciones a soporte compacto y es el ideal de nulidades en B del cerrado " zona del infinito" Spec(B)-Spec(A)

Las demostraciones pueden verse en {10}

Puede adoptarse otro punto de vista sobre las compactizaciones del espectro de una a l c {3} Consideremos en Spec(A) y Spec max(A) los ceros de los ideales finito generados, la condición necesaria y suficiente para que estos retículos sean formalmente el mismo es que en A no existan ideales finito generados densos Esto ocurre así en las álgebras de Fréchet {2} En estas condiciones Spec max(A) es la compactización Wallman del Spec(A)

Si, además, A es regular, Spec(A) es normal (0 3 2) y las compactización Wallman coincide con la compactización Čech

Observemos, en particular, que para álgebras de Fréchet regulares, el espectro maximal es el mismo para dos álgebras que tengan en mismo espectro (topológico)

0 3 4 Localización para a l c semisimples

Un problema natural que se presenta en el estudio de las álgebras regulares semisimples A es si existen particiones de la unidad para recubrimientos generales y si dada una función sobre el espectro que coincida localmente con funciones de A, es de A La respuesta es afirmativa y la demostración puede encontrarse en {10} para álgebras de Fréchet que, además, verifiquen la siguiente condición suplementaria para toda seminorma multiplicativa p de A, existe un compacto Q del espectro tal que si a es nula en Q, es p(a)=0 (diremos que las seminormas están <u>localizadas en compactos</u>) en particular, si el espectro es localmente compacto se verifica dicha condición R M Brooks {4} demuestra por otros métodos que el resultado es válido para toda álgebra de Fréchet regular

Sea A un álgebra de Fréchet regular y semisimple Si asignamos a cada abierto del espectro, el anillo de las funciones del abierto que localmente coinciden con funciones de A obtenemos un haz cuyas secciones globales son A Una cuestión de interes básico para el manejo de este haz es verificar si la localización en este sentido en un abierto U coincide con la localización algebraica en U, A_U anillo de los cocientes a/b, b no nulo en U, módulo la relación de equivalencia habitual, es decir $a/b \sim a'/b'$ si existe un c de A no nulo en U con $c(ab' - a'b) = 0$ Se llega {10} al siguiente teorema

Sea A un *-álgebra de Fréchet simétrica regular y separable El álgebra de las funciones sobre un abierto U de Spec(A) que coinciden localmente con elementos de A es isomorfo a la localización algebraica A_U Esta álgebra puede dotarse de una topología que hace de ella una $*$-álgebra de Fréchet simétrica, regular y separable, de espectro U

0 3 5 Localización para módulos de Fréchet sobre F^*-álgebras

Llamaremos F^*-álgebra a toda $*$-álgebra de Fréchet separable, regular, simétrica, semisimple y de espectro localmente compacto

Dado un a l c A, llamaremos A-módulo topológico M a todo A-módulo M con topología de e l c separado y tal que la aplicación bilineal $A \times M \longrightarrow M$ sea continua Si M es de Fréchet el módulo se dirá que es de Fréchet

Dado un A-módulo M de Fréchet sobre una F^*-álgebra podemos definir un prehaz sobre el Spec(A) asociando a cada abierto U el A_U-módulo $A_U \otimes_A M = M_U$ Este prehaz es un haz {11} El A_U-módulo localizado M_U admite una topología natural de A_U-módulo de Fréchet tal que el functor $M \longmapsto M_U$ de la categoría de los A-módulos de Fréchet en la de los A_U-módulos de Fréchet es exacto en sentido no sólo algebraico sino tambien topológico, es decir, si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de A-módulos de Fréchet con morfismos continuos, la sucesión

$$0 \longrightarrow M'_U \longrightarrow M_U \longrightarrow M''_U \longrightarrow 0$$

es de A_U-módulos de Fréchet exacta y de morfismos continuos {11}.

0 3 6 Producto tensorial topológico de A-módulos topológicos

Sea A un álgebra, llamaremos diagonal algebraica de A, Δ_A, al núcleo del morfismo producto $A \otimes_C A \longrightarrow A$ Es el ideal engendrado por los elementos de la forma $a \otimes 1 - 1 \otimes a$? Si M y N son A-módulos se puede dotar en forma natural a $M \otimes_C N$ de estructura de $A \otimes_C A$-mó dulo y podemos escribir la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Delta_A(M \otimes_C N) \longrightarrow M \otimes_C N \longrightarrow M \otimes_A N \longrightarrow 0$$

que puede servir de definición de $M \otimes_A N$

En el caso en que A sea un a l c y M y N sean A-módulos topológicos, tendremos que $M \otimes_\pi N$ tiene estructura de $A \otimes_\pi A$-módulo topológico, de donde la adherencia de $\Delta_A(M \otimes_\pi N)$ en $M \otimes_\pi N$ es un submódulo cerrado de éste, lo que permite construir un A-módulo topológico

$$M \otimes_{\pi A} N = (M \otimes_\pi N) / \overline{\Delta_A(M \otimes_\pi N)}$$

que llamaremos producto tensorial topológico sobre A de M y N Este producto coincide con el producto algebraico $M \otimes_A N$ si y solo sí el submódulo de las A-relaciones $\Delta_A(M \otimes_\pi N)$ es cerrado en $M \otimes_\pi N$

La topología producto tensorial topológico sobre A está caracterizada por la siguiente propiedad universal

Dados dos A-módulos topológicos M y N, existe un A-módulo topológico $M \otimes_{\pi A} N$ y una aplicación A-bilineal continua y canónica

$$M \times N \xrightarrow{\tau} M \otimes_{\pi A} N$$

tal que para todo A-módulo topológico R y toda aplicación A-bilineal continua ϕ $M \times N \longrightarrow R$ existe un único morfismo continuo

$$\bar{\phi} \quad M \otimes_{\pi A} N \longrightarrow R$$

tal que $\phi = \bar{\phi}\ \tau$

Si I es un ideal cerrado de A y M es un A-módulo topológico, entonces $(A/I) \otimes_{\pi A} M = M/\overline{IM}$

Este producto tensorial no es exacto a la derecha como el algebraico, no obstante vale la siguiente proposición

Sea $M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de A-módulos topológicos y morfismos continuos Supondremos además que ψ es abierta Sea R un A-módulo topológico Entonces en la sucesión

$$M' \otimes_{\pi A} R \xrightarrow{\phi \otimes 1} M \otimes_{\pi A} R \xrightarrow{\psi \otimes 1} M'' \otimes_{\pi A} R \longrightarrow 0$$

$\psi \otimes 1$ es un epimorfismo topológico y la imagen de $\phi \otimes 1$ es densa en el núcleo de $\psi \otimes 1$

El completado de $M \otimes_{\pi A} N$ lo escribiremos $M \hat{\otimes}_A N$ Si son espacios de Fréchet $M \hat{\otimes}_A N$ es el cociente de $M \hat{\otimes} N$ por el cierre de $\Delta_A(M \otimes_C N)$ en $M \hat{\otimes} N$

Pueden verse las demostraciones en {11}

0 3 7 Algebras diferenciablemente completas

Un a l c A simétrica diremos que es diferenciablemente completa cuando para cada elemento autoconjugado $a \in A$, existe un morfismo continuo $C^{\infty}(R) \longrightarrow A$ que aplica la función identidad t $R \longrightarrow R$ en el elemento $a \in A$ Si el álgebra es sin radical el morfismo es la composición de la función diferenciable f con la función $a \in A$ Para estas álgebras es válido el siguiente teorema de caracterización

Sea A una $*$-álgebra de Fréchet simétrica semisimple La condición necesaria y suficiente para que sea diferenciablemente completa es que para cada elemento autoconjugado $a \in A$ y cada seminorma p de A (puede suponerse que la seminorma es simétrica, es decir $p(a) = p(a^*)$) existen numeros α y β tales que para todo numero real σ

$$p(e^{i\sigma a}) \leq \beta(|\sigma|^{\alpha}+ 1)$$

De aquí que para el tipo de álgebras anteriores toda subálgebra cerrada, todo cociente y todo límite proyectivo numerable de algebras diferenciablemente completas es un álgebra diferenciablemente completa

Tambien se verifica que para una $*$-álgebra de Fréchet simétrica (con o sin radical) de espectro compacto y tal que $\bigcap_m (\mathrm{rad}A)^m = 0$ la condición necesaria y suficiente para que A sea diferenciablemente completa es que para cada seminorma simétrica p de A y cada a hermítico de A, existan constantes α y β tales que

$$p(e^{i\sigma a}) \leq \beta(|\sigma|^{\alpha}+ 1)$$

para todo σ perteneciente a R

Pueden verse las demostraciones en {11}

0 4 Referencias a las álgebras diferenciables de un compacto de R^n

Sea $A = C^{\infty}(R^n)$ el anillo de las funciones infinitamente diferenciables en R^n con la topología ordinaria Se trata de una F^*-álgebra Sea F un cerrado de R^n, el cierre del ideal de nulidades $\mathfrak{p}_F$ consiste en las funciones cuyos desarrollos de Taylor son nulos en todos los puntos de F Puede demostrarse que $\mathfrak{p}_F$ es un A-módulo plano También se verifica que si $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de A-módulos topológicos y morfismos no necesariamente continuos, la sucesión

$$0 \longrightarrow (A/\mathfrak{p}_F)\otimes_A M' \longrightarrow (A/\mathfrak{p}_F)\otimes_A M \longrightarrow (A/\mathfrak{p}_F)\otimes_A M'' \longrightarrow 0$$

es exacta

Al anillo cociente $C^{\infty}(R^n)/\mathfrak{p}_F$ le llamaremos <u>álgebra de Whitney</u> del cerrado F en R^n

Un problema de interes básico es dar una caracterización de un álgebra A en términos topológicos y algebraicos (sobre A) para que sea el álgebra de Whitney de un cerrado en R^n

Una primera aproximación a este resultado es el "teorema de extensión de Whitney" {7} que seguidamente enunciamos

El álgebra de Whitney de un punto x de R^n es el anillo $C[[\xi]]$ de las series formales en n variables, donde cada elemento viene representado por su desarrollo de Taylor en x De esta forma, asignando a cada función f de $C^{\infty}(R^n)$ su desarrollo de Taylor en cada punto de R^n, se puede pensar f como una sección continua del fibrado $R^n \times C[[\xi]]$ El probèema resuelto por el teorema de extensión de Whitney es el de caracterizar las secciones del fibrado anterior sobre un cerrado Q de R^n para que provengan de una función de $C^{\infty}(R^n)$

Una función F de Q en $C[[\xi]]$ contínua, es un conjunto de funciones continuas $F = \{f^{(k)}\}$ donde $k=(k_1, \quad ,k_n)$, $(k_i \in N)$ En el conjunto de estas funciones se puede definir unas 'derivaciones formales"

$$(D^h F)^{(k)} = f^{(k+h)}$$

Puede entonces hablarse del desarrollo de Taylor de F en un punto a de Q hasta el orden n como el polinomio

$$T_a^m F = \sum_{|k|\leq m} (f^{(k)}(a)/k!)(z-a)^k$$

o bien la función de Q en $C[[\xi]]$ definida por dicha funcion El resto de Taylor m-simo en A es la sección de Q en $C[[\xi]]$

$$R_a^m F = F - T_a^m F$$

El teorema de Whitney puede entonces enunciarse así

La condición necesaria y suficiente para que una función definida en un cerrado Q de R^n en el anillo de las series formales en n variables $C[[\xi]]$ provenga de una función $C^\infty(R^n)$ es que para todo numero natural m, para todo compacto K de Q y toda n-pla de enteros k, $|k|\leq m$ es que

$$(R_x^m F)^{(k)}(y) = o(|x-y|^{m-|k|}) \quad x,y \text{ de } K$$

Este teorema es una "caracterización" del anillo $C^\infty(R^n)/\mathfrak{p}_Q$ como subanillo del de las funciones continuas de Q en $C[[\xi]]$, pero es una caracterización en términos de propiedades de una representación particular de cada elemento del anillo

Una caracterización intrínseca del anillo es la siguiente {11}

Sea A una Q-álgebra de Fréchet con involución simétrica, generada topologicamente por n elementos autoconjugados y de espectro X (identificable a una parte compacta de R^n) La condición necesaria y suficiente para que A sea $C^\infty(R^n)/\mathfrak{p}_X$ es que tenga las siguientes propiedades

1 Para cada m, D_A^m es cerrada en $A \hat{\otimes}_c A$ y D_A es finito generado (*)

2 El graduado de $A \hat{\otimes}_c A$ por D_A es el anillo de polinomios en n variables con coeficientes en A

(*) Llamaremos diagonal de un algebra de Frechet A, D_A, al nucleo del morfismo producto $A \hat{\otimes}_c A \longrightarrow A$

3 $\bigcap_{\substack{x \in X \\ h \in N}} m_x^h = 0$ (m_x ideal maximal de A en x)

4 A es diferenciablemente completa

La demostración puede verse en {11} y se hace uso en ella esencialmente de la "caracterización" de Whitney

CAPITULO UNO

LOCALIZACION PARA CIERTAS ALGEBRAS CON RADICAL Y PARA MODULOS DE FRECHET SOBRE TALES ALGEBRAS

El propósito de este capítulo es dar una teoría de la localización para álgebras que en general tengan radical de Jacobson no nulo La condición de semisimplicidad se sustituye por una más débil que juega un papel similar a aquella y la condición de regularidad por una más fuerte pero del mismo tipo Un ejemplo de álgebras que cumplen estas condiciones son las álgebras de Whitney (O 4) La motivación inicial de la teoría es poder localizar álgebras de este tipo y llegar a una caracterización del álgebra de Whitney correspondiente a un compacto de una variedad diferenciable

En un primer apartado se da la teoría general de la localización para L-álgebras y la relación de la localización con el producto tensorial de álgebras

En el segundo apartado se extiende la teoría a la localización de módulos de Fréchet sobre L-álgebras y se aplica al caso particular de la localización de la diagonal del álgebra y de los módulos de diferenciales de un álgebra Se estudia tambien la localización en A-álgebras

En el tercer apartado se da una caracterización de los módulos de Fréchet proyectivos de tipo finito sobre L-álgebras en términos de sus localizaciones sobre el espectro del álgebra y se demuestra la identidad de los módulos proyectivos y planos en la categoria de los módulos de Fréchet de tipo finito sobre L-álgebras

La teoría del capítulo es válida para álgebras sobre los numeros complejos y tambien para álgebras reales que sean la parte hermítica de un álgebra compleja simétrica

1 LOCALIZACION PARA CIERTAS ALGEBRAS CON RADICAL

Definición I 1 1

Llamaremos L-álgebra a toda álgebra de Fréchet simétrica separable, de espectro localmente compacto y que verifique las dos condiciones siguientes

a) condición de subsemisimplicidad

Si m_x es el ideal maximal de A correspondiente a un punto x del Spec(A)

$$\bigcap_{\substack{x \in \mathrm{Spec}(A) \\ h \in N}} \overline{m_x^h} = 0$$

b) condición de superregularidad

Para cada cerrado F en la topología de Gelfand de Spec(A) y cada y de Spec(A) que no sea de F, existe un elemento perteneciente a $\bigcap_{\substack{x \in F \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$ y no perteneciente a m_y

La condición a) es más débil que la de semisimplicidad la condición b) implica la de regularidad del álgebra

Las álgebras de Whitney (0 4) constituyen un ejemplo de L-álgebra ya que $\bigcap_{\substack{x \in F \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$ no es sino el conjunto de las clases de funciones diferenciables de representante una función de desarrollo de Taylor nulo para todo x de F

En este apartado supondremos que las álgebras son L-álgebras

Sea U un abierto del espectro de A, $Q_1 \subset Q_2 \subset$ una sucesión exhaustiva de compactos en U que son adherencia de abiertos con $\bigcup_i Q_i = U$ y $Q_n \subset \mathring{Q}_{n+1}$ Sea $I_n = \bigcap_{\substack{x \in Q_n \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$, se verifica que $I_1 \supset I_2 \supset$ y podemos construir $\varprojlim A/I_n$

Por otra parte sea S el sistema multiplicativamente cerrado de los elementos de A que se representan como funciones no nulas en U

Lema I 1 1

En las condiciones anteriores $A_S = \lim\limits_{\leftarrow} A/I_n$

Demostración

Sea $a/b \in A_S$, la clase de b en A/I_n tiene inverso puesto que el espectro de A/I_n son los ideales maximales cerrados que contienen a I_n y según la condición de "superregularidad" son los puntos de Q_n Si llamamos π_n a la aplicación canónica π_n $A \to A/I_n$ tiene sentido el elemento $\pi_n a(\pi_n b)^{-1}$ en A/I_n Por otra parte en los morfismos que definen el límite proyectivo $A/I_n \to A/I_{n-1}$ la imagen de $\pi_n b$ es $\pi_{n-1} b$ y por lo tanto la imagen del inverso del primero es el inverso del segundo, de donde $((\pi_n a)(\pi_n b)^{-1})$ es un elemento del limite proyectivo que tomaremos como imagen de a/b en el morfismo de A_S en $\lim\limits_{\leftarrow} A/I_n$ La aplicación está bien definida puesto que si $a/b=a_1/b_1$ en A_S, existe un c de A no nulo en U con $c(ab_1-a_1b)=0$, de donde en A/I_n $\pi_n c(\pi_n a \pi_n b_1 - \pi_n a_1 \pi_n b) = 0$ y como $\pi_n c$ tiene inverso en A/I_n se sigue que $(\pi_n a \pi_n b_1 - \pi_n a_1 \pi_n b) = 0$ y por lo tanto la independencia en la definición de la aplicación del representante del elemento de A_S

Veamos que el morfismo es inyectivo

Si a/b tiene por imagen 0, $a \in \bigcap\limits_{\substack{x \in U \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$ Sea I_n como antes

$I_n = \bigcap\limits_{\substack{x \in Q_n \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$ y $J = \bigcap\limits_{\substack{y \in \complement U \\ h \in N}} \overline{m_y^h}$, $I_n + J$ es denso en A, luego

$I_n + J = A$ (0 3 2) De aquí que existen d_n y c_n con $d_n + c_n = 1$

con c_n de J que es no nulo en Q_n multiplicando por su conjugado puede suponerse que c_n es como función positiva o nula y dividiendo c_n por numeros convenientes puede suponerse que las series $\sum\limits_{n \geq 1} c_n$

y $\sum_{n\geq 1} c_n a$ son convergentes (por ejemplo basta sustituir c_n por

$$\frac{c_n c_n^*}{2^n(1+p_n(c_n c_n^*))(1+p_n(c_n c_n^* a))}$$

donde $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq$ es un sistema fundamental de seminormas en A) Se tiene $c_n a \in \bigcap_{\substack{x\in \mathrm{Spec}(A)\\ h\in N}} \overline{m_x^h}$, luego $c_n a=0$, de donde $(\sum_{n\geq 1} c_n)a=0$ con $\sum_{n\geq 1} c_n$ no nulo en U, luego a/b=0 en A_S

Veamos que el morfismo es exhaustivo

Sea $\{\bar f_i\}$perteneciente a $\varprojlim A/I_n$, f_i representantes en A de $\bar f_i$ Sean $a_n \in \bigcap_{\substack{x\in \complement Q_n\\ h\in N}} \overline{m_x^h}$ con a_n positivo en Q_{n-1}, que existe según el razonamiento anterior (hemos tomado los Q_n de forma que $Q_{n-1}\cap \overline{\complement Q_n}=\phi$) Consederemos el elemento $\{\overline{a_n f_i}\}\in \varprojlim A/I_i$, veamos que es imagen de $a_n f_n \in A$ considerado como elemento de A_S En efecto, si $i>n$, en A/I_i

$$a_n f_n - a_n f_i = a_n(f_n - f_i) = 0, \qquad \text{pues } f_n - f_i \in I_n$$

Podemos tomar la sucesión de los a_n de forma que las series $\sum_{n\geq 1} a_n f_n$ y $\sum_{n\geq 1} a_n$ sean convergentes, $\sum_{n\geq 1} a_n$ da un elemento que se representa en una función no nula en U

$\sum_{n\geq 1} a_n f_n / \sum_{n\geq 1} a_n$ es un elemento de A_S cuya imagen en el límite proyectivo es $\{\bar f_i\}$ En efecto, veamos que la imagen en A/I_i da $\bar f_i$ Se trata de ver si en A/I_i , $\sum \overline{a_n f_n} = \sum \overline{a_n f_i}$, esto es cierto puesto que para $n>i$, $a_n(f_n-f_i)\in I_i$ y no afecta a la clase en A/I_i y si $n<i$, $a_n(f_n-f_i)=0$ pues $f_n-f_i\in I_n$ Esto acaba de demostrar el lema

Es inmediato comprobar que dos sucesiones exhaustivas de compactos de U del tipo tomado inducen mediante los correspondientes límites proyectivos la misma topología en A_S Tenemos entonces el siguiente teorema

Teorema I 1 1

Sea A una L-álgebra Para cada abierto U de Spec(A), podemos dotar a A_U(localización por el sistema multiplicativo de los elementos no nulos en U) de una topología en forma canónica que hace de A_U una L-álgebra El espectro de A_U es U

Demostración

Tras lo dicho lo único que hay que probar son las condiciones de "subsemisimplicidad" y de "superregularidad" de A_U Veamos la primera

Sea $x \in U$ y $m_{x,U}$ el ideal maximal correspondiente a x en A_U, $m_{x,U}$ está formado por los elementos del tipo $a/b \in A_U$, $a \in m_x$ Queremos ver que $\bigcap_{\substack{x \in U \\ h \in N}} \overline{m_{x,U}^h} = 0$ en A_U

Observemos en primer lugar que $\overline{m_{x,U}^h} = \overline{(m_x^h)}_U$, localización como módulo por el sistema multiplicativo de los elementos no nulos en U En efecto $m_{x,U}^h$ son los elementos de la forma a/b con $a \in m_x^h$, b no nulo en U y se trata de ver que su cierre en A_U es $\overline{(m_x^h)}_U$ Esto se sigue sin mas que tener en cuenta que $\overline{(m_x^h)}_U$ como subespacio de $A_U = \varprojlim A/I_n$ se expresa $\varprojlim \overline{m_x^h}/I_n$, cocientes que tienen sentido de un n en adelante Es pues cerrado en A_U y $m_{x,U}^h$ es denso en este espacio

El problema queda reducido a comprobar que $\bigcap_{\substack{x \in U \\ h \in N}} \overline{(m_x^h)}_U = 0$ Sea $a/b \in \bigcap_{\substack{x \in U \\ h \in N}} \overline{(m_x^h)}_U$, a/b es tal que a pertenece a m_x

Comprobemos que si $a/b = c/d$, c de $\overline{m_x^2}$/ [a de m_x, y b y d son no nulos en U, se verifica que $a \in \overline{m_x^2}$

En efecto, existe un $e \in A$ no nulo en U con $e(ad-cb)=0$, de donde existe un d_1 con $ad_1 \in \overline{m_x^2}$, d_1 no nulo en U y puede suponerse además positivo

Sea $f \in m_x$ y no nulo en un entorno del complementario de U, existe y podemos tambien suponerlo positivo De aquí que $af + ad_1 \in \overline{m_x^2}$, $a(f+d_1) \in \overline{m_x^2}$ y como $f+d_1$ es invertible (0 3 1), $a \in \overline{m_x^2}$

Análogamente, si $a/b = c/d$, $a \in \overline{m_x^n}$ y $c \in \overline{m_x^{n+1}}$ se sigue $ad_1 \in \overline{m_x^n}$ con d_1 no nulo en U y siguiendo el mismo razonamiento se llega a que $a \in \overline{m_x^{n+1}}$

De aquí que si $a/b \in \bigcap_{\substack{x \in U \\ h \in N}} \overline{(m_x^h)_U}$ se deduce que $a \in \bigcap_{\substack{x \in U \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$ Multiplicando a por un elemento t no nulo en U y que sea de $\bigcap_{\substack{x \in \complement U \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$, $ta = 0$, de donde $a/b=0$ en A_U

La condición de "superregularidad" se cumple por verificarse en A y teniendo en cuenta el morfismo $A \longrightarrow A_U$

Teorema I 1 2

Sea A una L-álgebra, $V \subset U$ dos abiertos de su espectro, se verifica que

$$(A_V) \simeq (A_U)_V$$

La demostración del isomorfismo algebraico, una vez visto que A_U es una L-álgebra es trivial teniendo en cuenta las expresiones como cocientes de los elementos de A_V y de $(A_U)_V$

Veamos la igualdad topológica Sea

$$A_V = \varprojlim A/I_n , \quad A_U = \varprojlim A/J_n ,$$

$$(A_U)_V = \varprojlim A_n/I_n^U$$

donde $I_n = \bigcap_{\substack{x \in Q_n \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$, $J_n = \bigcap_{\substack{x \in K_n \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$, $I_n^U = \bigcap_{\substack{x \in Q_n \\ h \in N}} \overline{m_{x,U}^h}$

Q_n es una sucesión de compactos definidora de la topología en A_V y K_n lo análogo para A_U Reiterando los razonamientos del teorema I 1 1

$$I_n^U = (I_n)_U = \varprojlim I_n/J_n$$

cocientes que tienen sentido pues siempre podemos suponer que $Q_n \subset K_n$ De aquí y teniendo en cuenta que los límites proyectivos son estrictos, la topología $\varprojlim A_U/I_n^U$ coincide con la $\varprojlim A/I_n$ Tambien podría deducirse por una aplicación del teorema de homomorfismo

Para la caracterización de las álgebras de Whitney sobre un compacto de una variedad necesitamos algunas relaciones de la localización con el producto tensorial Veámoslas

Teorema I 1 3

Sean A y B dos L-álgebras nucleares El álgebra $A\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}B$ es del mismo tipo

En efecto, en primer lugar observemos que A y B pueden expresarse como limites proyectivos estrictos

$$A = \varprojlim A/J_n \; , \qquad B = \varprojlim B/I_n \; , \qquad \text{con}$$

$J_n = \bigcap\limits_{\substack{x \in Q_n \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$, $I_n = \bigcap\limits_{\substack{y \in K_n \\ h \in N}} \overline{m_y^h}$, donde Q_n y K_n son sucesiones exhaustivas de compactos del espectro de A y de B respectivamente La igualdad topológica se sigue del teorema de homomorfismo

Tendremos

$$A\hat{\otimes}_c B = (\varprojlim A/J_n) \hat{\otimes}_c (\varprojlim B/I_n) = \varprojlim (A/J_n \hat{\otimes}_c B/I_n) \quad (0\ 1\_1\ )$$

Se trata de verificar que $\mathrm{Spec}(A\hat{\otimes}_c B) = \mathrm{Spec}(A) \times \mathrm{Spec}(B)$

Desde luego $\mathrm{Spec}(A \otimes_c B) = \mathrm{Spec}(A) \times \mathrm{Spec}(B)$ Por otra parte las topologías de $\mathrm{Spec}(A\hat{\otimes}_c B)$ y $\mathrm{Spec}(A\otimes_c B)$ coinciden sobre las partes que sean producto de un equicontinuo de A por un equicontinuo de B, por ejemplo sobre $Q_n \times K_n$ La topología $\varprojlim \, (A/J_n \hat{\otimes}_\varepsilon B/I_n)'_{\text{débil}}$ es más fina que la topología $(\varprojlim \, (A/J_n \hat{\otimes}_\varepsilon B/I_n))'_{\text{débil}}$, que es la que induce la topología espectral, que a su vez es más fina que $\mathrm{Spec}(A) \times \mathrm{Spec}(B)$ Ahora bien, este ultimo espacio es localmente compacto y Haussdorf, luego un conjunto de $\mathrm{Spec}(A) \times \mathrm{Spec}(B)$ es cerrado si lo son las intersecciones con los compactos $Q_n \times K_n$ Como en el espacio $\mathrm{Spec}(A) \times \mathrm{Spec}(B)$ con la topología inducida por $\varprojlim \, (A/J_n \hat{\otimes}_\varepsilon B/I_n)'_{\text{débil}}$ no puede haber mas cerrados que estos, queda verificada la identidad de las topologías

Veamos que se verifica la condición de "subsemisimplicidad"

Observemos en primer lugar que A y B por ser de Fréchet nucleares son reflexivos y que $(A \hat{\otimes}_\varepsilon B)' = A' \otimes_\varepsilon B'$, todos los espacios con la topología fuerte (0 1 3) Se trata de ver si

$$\bigcap_{\substack{(x,y) \in \mathrm{Spec}(A \hat{\otimes}_\varepsilon B) \\ h \in N}} \overline{m^h_{(x,y)}} = 0$$

Es inmediato verificar que el ideal $m_{(x,y)}$ de $A \hat{\otimes}_\varepsilon B$ correspondiente al punto (x,y) es $\overline{m_x \otimes B + A \otimes m_y}$

De la relación $\bigcap_{\substack{x \in \mathrm{Spec}(A) \\ h \in N}} \overline{m_x^h} = 0$ se deduce que $\sum_{\substack{x \in \mathrm{Spec}(A) \\ h \in N}} m_x^{h\perp}$ es débilmente denso en A' puesto que su polar en la dualidad $\langle A, A' \rangle$ es $\bigcap_{\substack{x \in \mathrm{Spec}(A) \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$ Puesto que A es reflexivo $\sum_{\substack{x \in \mathrm{Spec}(A) \\ h \in N}} m_x^{h\perp}$ es fuertemente denso en A' y haciendo lo propio con B tendremos que $\Big(\sum_{\substack{x \in \mathrm{Spec}(A) \\ h \in N}} m_x^{h\perp} \Big) \otimes \Big(\sum_{\substack{x \in \mathrm{Spec}(B) \\ h \in N}} m_y^{h\perp} \Big)$ es denso en $A' \hat{\otimes}_\varepsilon B'$ y su polar será cero en $A \hat{\otimes}_\varepsilon B$

La "subsemisimplicidad"se deduce entonces de las relaciones

$$v = \Big[\Big(\sum_{\substack{x \in \mathrm{Spec}(A) \\ h \in N}} m_x^{h\perp} \Big) \otimes \Big(\sum_{\substack{y \in \mathrm{Spec}(B) \\ h \in N}} m_y^{h\perp} \Big) \Big]^{\perp} = \Big[\sum_{\substack{(x,y) \in \mathrm{Spec}(A \hat{\otimes}_\varepsilon B) \\ h,k \in N}} m_x^{h\perp} \otimes m_y^{k\perp} \Big]^{\perp} \supset$$

$$\supset \bigcap_{\substack{(x,y)\in \mathrm{Spec}(A\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}B)\\ h,k\in N}} \overline{(A\otimes m_x^h + m_y^k\otimes A)} \supset \bigcap_{\substack{(x,y)\in \mathrm{Spec}(A\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}B)\\ p\in N}} \overline{m^p_{(x,y)}}$$

La condición de "superregularidad" y todas las demás son ya triviales

Teorema I 1 4

Sean A y B dos L-álgebras nucleares Sean U y V abiertos respectivamente de Spec(A) y Spec(B) Tenemos la igualdad topológica

$$A_U\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}B_V = (A\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}B)_{U\times V}$$

En efecto, sean $A_U = \varprojlim A/I_{Q_n}$, $B_V = \varprojlim B/I_{K_n}$ donde I_{Q_n} e I_{K_n} son como en el teorema I 1 1 con $\bigcup\limits_n Q_n = U \subset \mathrm{Spec}(A)$, $\bigcup\limits_n K_n = V \subset \mathrm{Spec}(B)$ Tendremos que $Q_n \times K_n$ serán compactos en $\mathrm{Spec}(A\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}B)$ que permitirán definir la localización $(A\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}B)_{U\times V}$

$$A_U\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}B_V = (\varprojlim A/I_{Q_n})\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}(\varprojlim B/I_{K_n}) = \varprojlim (A/I_{Q_n}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}B/I_{K_n}) \quad (0\ 1\ 1.$$

por otra parte $(A\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}B)_{U\times V} = \varprojlim (A\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}B)/I_{Q_n\times K_n}$

Es suficiente demostrar que $A/I_{Q_n}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}} B/I_{K_n} \cong (A\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}B)/I_{Q_n\times K_n}$

Consideremos la aplicación natural de $A/I_{Q_n}\otimes_{\mathbb{C}} B/I_{K_n}$ en $(A\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}B)/I_{Q_n\times K_n}$, $\Sigma\lambda_i\bar{a}_i\otimes\bar{b}_i \longrightarrow \Sigma\,\overline{\lambda_i a_i\otimes b_i}$, (0 1 1), está definida correctamente y proviene de una aplicación bilineal continua, es pues continua y se extiende al producto tensorial completado Es un epimorfismo ya que si $\Sigma\lambda_i a_i\otimes b_i$ es una serie convergente en $A\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}B$, lo es $\Sigma\lambda_i\bar{a}_i\otimes\bar{b}_i$ en $A/I_{Q_n}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}B/I_{K_n}$

Veamos que la aplicación es inyectiva

Si $\Sigma\lambda_i\bar{a}_i\otimes\bar{b}_i$ tiene por imagen $\overline{\Sigma\lambda_i a_i\otimes b_i} = \bar{0}$ donde a_i y b_i son representantes adecuados de $\bar{a}_i$ y $\bar{b}_i$ de tal forma que la serie $\sum \lambda_i a_i \otimes b_i$ sea convergente en $A \hat{\otimes}_C B$ Se tiene entonces que

$$\sum_{i \geq 1} \lambda_i a_i \otimes b_i \in I_{Q_n \times K_n}$$

Queremos probar que $\sum \lambda_i \bar{a}_i \otimes \bar{b}_i$ es nulo en una parte densa del dual de $(A/I_{Q_n}) \hat{\otimes}_C (B/I_{K_n})$ con lo cual será cero Este dual es $I_{Q_n}^{\perp} \hat{\otimes}_C I_{K_n}^{\perp}$ y una parte densa en él es $\left(\sum_{\substack{x \in Q_n \\ h \in N}} m_x^{h\perp}\right) \otimes \left(\sum_{\substack{y \in K_n \\ k \in N}} m_y^{k\perp}\right)$ Es inmediato comprobar que

$$I_{Q_n \times K_n} = \bigcap_{\substack{(x,y) \in \operatorname{Spec}(A \hat{\otimes}_C B) \\ h \in N}} \overline{(m_x \otimes B + A \otimes m_y)^h}$$

es ortogonal a este espacio, lo que acaba la demostración del teorema

Para acabar la sección veamos dos propiedades importantes y de no difícil demostración que verifican las L-álgebras y que necesitaremos posteriormente

Teorema I 1 5

Sea A una L-álgebra, F un cerrado de Spec(A) Existe un ideal mínimo cerrado $\mathfrak{p}_F$ entre los ideales cerrados cuyos ceros sean F

Este teorema es el análogo al de existencia de ideal de nulidades para las álgebras de Banach regulares

Demostración

Sea F un cerrado del Spec(A) Sea J el ideal de los elementos $a \in A$ tales que existe un entorno U de F de tal forma que $a \in \bigcap_{\substack{x \in U \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$

Desde luego que este ideal tiene por cerrado asociado F ya que si $x \notin F$, existe un entorno de F, G, cerrado, que no contiene a x Por la condición de "superregularidad" existe un $a \in A$ tal que $a(x) \neq 0$ y $a \in \bigcap_{\substack{x \in G \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$, es decir a J

Sea ahora I un ideal cerrado cuyos ceros sean F Veamos que $I \supset J$

Sea $a \in J$, $a \in \bigcap_{\substack{x \in U \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$ donde U es un entorno de F Sea $F_1 = \overline{\complement U}$ y llamemos $I_1 = \bigcap_{\substack{x \in F_1 \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$, se verifica que $I_1 + I$ es denso en A, luego

$I_1 + I = A$ (0 3 2) De aquí que existe $\phi \in I_1$, $\psi \in I$ con $\phi + \psi = 1$, de donde multiplicando por a y puesto que $a\phi = 0$, por la condición de "subsemisimplicidad", tendremos que $a = \psi a \in I$ como queríamos demostrar

El cierre de J, P_F es el mínimo ideal cerrado entre los que tienen como ceros F

Por último veamos en qué sentido podemos decir que las seminormas de una L-álgebra estan localizadas en compactos

Teorema I 1 6

Sea A una L-álgebra Para cada seminorma p multiplicativa y continua sobre A existe un compacto K del Spec(A) tal que si $a \in \bigcap_{\substack{x \in K \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$, $p(a) = 0$

Demostración

Si llamemos soporte de un elemento $a \in A$ al cierre del complementario de los puntos $x \in \mathrm{Spec}(A)$ tales que $a \in \bigcap_{h \in N} \overline{m_x^h}$, el conjunto I de los elementos de A a soporte compacto es un ideal denso en A puesto que es un ideal sin ceros en el Spec(A)

Sea p una seminorma continua de A y sea $a \in I$ con $p(1-a) < \varepsilon < 1$ Supongamos que a tenga su soporte en K Si b es un elemento tal que $b \in \bigcap_{\substack{x \in K \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$ se verifica que $ab = 0$ por la condición de "subsemisimplicidad" Tendremos entonces que

$$p(b) = p(b-ab) \leq p(b)p(1-a) \leq p(b)\varepsilon,$$

luego $p(b) = 0$ Es decir la seminorma p está localizada en K

2 LOCALIZACION PARA MODULOS DE FRECHET SOBRE L-ALGEBRAS

Sea A una L-álgebra y M un módulo de Fréchet sobre A Para cada abierto U del Spec(A) escribiremos $M_U = A_U \otimes_A M$ M_U tiene estructura de A_U-módulo y le llamaremos módulo localizado en U Para cada $U \supset V$ tenemos morfismos $M_U \longrightarrow M_V$ que permiten hablar del prehaz de los módulos localizados

Se trata de ver, en primer lugar, que el prehaz $U \longrightarrow M_U$ es un haz y de dotar en forma canónica a M_U de una topología de A_U-módulo de Fréchet En la demostración de esta parte seguimos la pauta marcada en {11} para la teoría análoga para F^*-álgebras (0 3 5)

Teorema I 2 1

Sea A una L-álgebra y M un módulo de Fréchet sobre A El prehaz sobre el espectro de A que asigna a U, $M_U = A_U \otimes_A M$ es un haz

Demostración

Veamos que se verifica la primera condición de haz Sea $U = \cup U_i$ y sea $(\bar{m}/b)_U = \bar{m}_U \in M_U$ Si llamamos $\rho^U_{U_i}$ $M_U \longrightarrow M_{U_i}$ a los morfismos de restricción correspondientes, supongamos que $\rho^U_{U_i} \bar{m}_U = \bar{m}_{U_i} = 0$ para cada i Hemos de demostrar que $\bar{m}_U=0$

Consideremos un subrecubrimiento numerable del anterior, para cada i existe un $a_i \in A$ sin ceros en U_i con $a_i\bar{m}=0$ Sea

$$a = \sum_i \frac{a_i a_i^*}{2^i(1-p_i(a_i a_i^*))}$$

donde $p_1 \leq p_2 < p_3 \leq$ es una familia fundamental de seminormas en A a es un elemento de A sin ceros en U y es trivial que $a\bar{m} = 0$, luego $(\bar{m}/b)_U = 0$

Para verificar la segunda condición de haz (acomplamiento de secciones), enunciemos antes un lema

<u>Lema I 2 1</u>

Sea $U = U_1 \cup U_2$ y sean $\bar{m}_{U_1}$ y $\bar{m}_{U_2}$ elementos de M_{U_1}, M_{U_2} cuyas restricciones a $U_1 \cap U_2$ coincidan Existe un elemento de M_U cuyas restricciones a U_1 y U_2 coinciden con $\bar{m}_{U_1}$ y $\bar{m}_{U_2}$ respectivamente

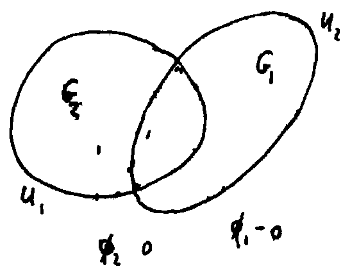
<u>Demostración</u>

Sean $\bar{m}_{U_i} = (\bar{m}_i/a_i)_{U_i}$, a_i sin ceros en U_i y podemos suponerlos no negativos Existe, por otra parte, $b \in A$ sin ceros en $U_1 \cap U_2$ con

$$b(a_1\bar{m}_2 - a_2\bar{m}_1) = 0$$

(b puede suponerse tambien no negativa)

Sea $F_1=U-U_1$, $F_2=U-U_2$, F_1 y F_2 son cerrados disjuntos del espacio U, por tanto existen cerrados en U, G_1 y G_2 con $F_i \subset \mathring{G}_i$ y disjuntos Como A_U es una L-álgebra, podemos encontrar elementos de A_U ϕ_1 y ϕ_2 con $\phi_1+\phi_2= 1$ y $\phi_i \in \bigcap_{\substack{h\in N \\ x \in G_i}} \overline{m_x^h}$



Sea b' un elemento de A_U positivo en el interior de G_2 y perteneciente a $\in \bigcap_{\substack{h\in N \\ x\in \overline{U-G_2}}} \overline{m_x^h}$ de forma que $\phi_2 b' = 0$ Construcción análoga de b' para G_1 De esta forma $a_2+b'= a_2'$ es no nulo en U (lo análogo podemos hacer con a_1) Así tiene sentido hablar del elemento $\bar{m}_U \in M_U$ definido por

$$\bar{m}_U=(\phi_1/a_1')\bar{m}_1+ (\phi_2/a_2)\bar{m}_2$$

Para demostrar el lema lo único que hay que comprobar es que $\bar{m}_U$ coincide sobre U_i con $\bar{m}_{U_1}$ Veámoslo por ejemplo con U_1

$$\bar{m}_U-\bar{m}_{U_1}=(\phi_1/a_1')\bar{m}_1 + (\phi_2/a_2')\bar{m}_2-((\phi_1+\phi_2)/a_1)\bar{m}_1$$

Observemos que la imagen de $(\phi_1/a_1')\bar{m}_1$ en M_{U_1} es $(\phi_1/a_1)\bar{m}_1$ En efecto

$$a_1'\phi_1 = a_1\phi_1+b''\phi_1 = a_1\phi_1$$

tendremos en M_{U_1}

$$\bar{m}_U-\bar{m}_{U_1} = \frac{\phi_2}{a_2'}\bar{m}_2 - \frac{\phi_2}{a_1}\bar{m}_1 = \frac{\phi_2 a_1\bar{m}_2-\phi_2 a_2'\bar{m}_1}{a_1 a_2'}$$

Sea c=b+b', c no tiene ceros en U_1 y teniendo en cuenta que $\phi_2 b'=0$

$$\phi_2 c(a_1\bar{m}_2-a_2'\bar{m}_1) = \phi_2 b(a_1\bar{m}_2-(a_2+b')\bar{m}_1) = \phi_2 b(a_1\bar{m}_2-a_2\bar{m}_1) = 0$$

luego vale el lema

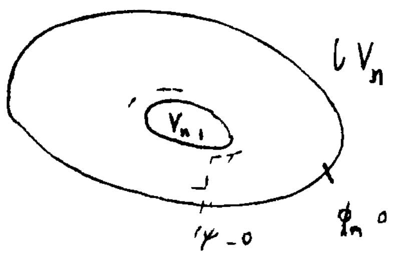
Pasemos a la <u>demostración del teorema</u>

Sea $\{U_\lambda\}$ una familia de abiertos de unión U Sea $\bar{m}_{U_\lambda}\in M_{U_\lambda}$ de forma que en $U_\lambda \cap U_\mu$ coincidan $\bar{m}_{U_\lambda}$ y $\bar{m}_{U_\mu}$ Hemos de probar que existe un $\bar{m}_U\in M_U$ cuya restricción a los U_λ sean los dados

Podemos extraer un recubrimiento numerable y sustituir cada U_n por $U_1 \cup \quad \cup U_n$ (véase lema anterior) de modo que $U_1 \subset U_2 \subset$
Por ser U localmente compacto y σ-compacto puede tomarse una su-

cesión V_n de abiertos relativamente compactos con $\overline{V}_n \subset V_{n+1}$ y definir $\overline{m}_{V_n}$ como la restricción de cualquier $\overline{m}_{U_\lambda}$ con $U_\lambda \supset V_n$

Sean ϕ_n y ψ_n con $\phi_n+\psi_n = 1$, $\phi_n \in \bigcap_{\substack{h\in N \\ x \in \text{entorno cerrado de } \complement V_n}} \overline{m_x^h}$,



$\psi_n \in \bigcap_{\substack{h\in N \\ x \in \text{entorno cerrado de } V_{n-1}}} \overline{m_x^h}$

$\overline{m}_{V_n} = \dfrac{\overline{m}_n}{a_n}$ con a_n sin ceros en V_n y

podemos suponer además que pertenece a $\bigcap_{\substack{h\in N \\ x\in \complement V_n}} \overline{m_x^h}$ y es no negativa

Consideremos un elemento no negativo b' de A sin ceros en $\complement V_n$ y que sea $b'\phi_n = 0$, elemento que puede construirse fácilmente mediante una serie adecuada $\dfrac{\phi_n}{a_n+b'}$ es un elemento de A pues $a_n + b'$ es invertible y es independiente del particular elemento b' tomado con las condiciones prefijadas De esta forma

$$\frac{\phi_n}{a_n+b'}\overline{m}_n$$

es un elemento de M Veamos que su restricción a V_{n-1} coincide con $\overline{m}_{V_{n-1}}$ En efecto

$$\frac{\phi_n}{a_n+b'}\overline{m}_n - \frac{\overline{m}_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{\phi_n a_{n-1}\overline{m}_n - (a_n+b')\overline{m}_{n-1}}{a_{n-1}(a_n+b')}$$

Obsérvese que por ser $\phi_n b'=0$ y ϕ_n no nulo en V_{n-1}, b' en A_{n-1} es cero, luego basta ver que $\phi_n a_{n-1}\overline{m}_n - a_n\overline{m}_{n-1}$ en M_{n-1} es cero Esto se deduce de que $\phi_n a_{n-1} = a_{n-1}$ En efecto, de $\phi_n+\psi_n = 1$, $a_{n-1}\phi_n + a_{n-1}\psi_n = a_{n-1}$ pero $a_{n-1}\psi_n = 0$. En resumen siempre podemos considerar que los elementos de M_n son la restricción de elementos de M Sean estos $\overline{m}_n$ Definamos

$$\phi = \sum_{n>1} \frac{\phi_n}{2^n(1+p_n(\phi_n))(1+q_n(\phi_n\bar{m}_n))} ,$$

$$\bar{m} = \sum_{n\geq 1} \frac{\phi_n\bar{m}_n}{2^n(1+p_n(\phi_n))(1+q_n(\phi_n\bar{m}_n))} ,$$

donde $p_1 < p_2 \leq$ es una familia fundamental de seminormas en A y $q_1 \leq q_2 \leq$ es una familia fundamental de seminormas en M

Veamos que $\bar{m}/\phi$ es la sección buscada Se tiene

$$\bar{m}-\phi\bar{m}_k = \sum_{n\geq 1} \frac{\phi_n\bar{m}_n-\phi_n\bar{m}_k}{2^n(1+p_n(\phi_n))(1+q_n(\phi_n\bar{m}_n))} ,$$

De donde, multiplicando por ϕ_k

$$\phi_k(\bar{m}-\phi\bar{m}_k) = \sum_{n<k} \frac{\phi_n\bar{m}_n-\phi_n\bar{m}_k}{2^n(1+p_n(\phi_n))(1+q_n(\phi_n\bar{m}_n))} - \sum_{n>k} \frac{\phi_k\bar{m}_n-\phi_k\bar{m}_k}{2^n(1+p_n(\phi_n))(1+q_n(\phi_n\bar{m}_n))}$$

ya que $\phi_i\phi_j = \phi_i$ para $i<j$ que se deduce a su vez de la relación $\phi_j+\psi_j = 1$ tras multiplicar por ϕ_i

$$\phi_j\phi_i-\psi_j\phi_i = \phi_i ,$$

teniendo en cuenta que $\psi_j\phi_i = 0$

Ahora bien para $n<k$ es $\phi_n(\bar{m}_n-\bar{m}_k) = 0$ En efecto, existe un b no negativo sin ceros en V_n con $b(\bar{m}_n-\bar{m}_k) = 0$ Puede sumársele a b un elemento b" tal que b+b" sea invertible en A y tal que $\phi_n b" = 0$ De esta forma $\phi_n b = \phi_n(b+b")$ de donde $\phi_n(b+b")(\bar{m}_n-\bar{m}_k) = 0$ y $\phi_n(\bar{m}_n-\bar{m}_k) = 0$ en M De la misma forma se deduce que $\phi_k(\bar{m}_n-\bar{m}_k) = 0$ para $n>k$ De aquí que $\bar{m}-\phi\bar{m}_k = 0$ en V_{k-1}, luego $\bar{m}/\phi$ coincide en V_{k-1} con $\bar{m}_k$ y por lo tanto con $\bar{m}_{k-1}$ Luego vale el teorema

Teorema I 2 2

Sea A una L-álgebra y M un módulo de Fréchet sobre A El A_U-módulo M_U admite una topología de A_U-módulo de Fréchet en forma canónica de tal manera que el functor $M \rightsquigarrow M_U$ es exacto en sentido algebraico y topológico

Recordemos, siguiendo las notaciones del apartado 1 que

$$A_U = \varprojlim A/I_n$$

Veamos que

$$M_U = \varprojlim M/(I_n M) = \varprojlim M/\overline{I_n M}$$

Comprobemos en primer lugar la relación $M_U = \varprojlim M/(I_n M)$ Los morfismos $A_U \longrightarrow A/I_n$ inducen morfismos $M_U \longrightarrow M/(I_n M)$ que dan un morfismo de M_U en $\varprojlim M/(I_n M)$ El morfismo es inyectivo, ya que si la imagen de $\bar{m}/a$ es 0, $\bar{m} \in I_n M$, es decir, existen $b_n \in I_n$, $\bar{m}_n \in M$ con $\bar{m} = b_n \bar{m}_n$ De aquí que tomando ϕ_n que valga 1 en Q_{n-1}, perteneciente a

$\bigcap_{\substack{h \in N \\ x \in \complement Q_n}} \overline{m_x^h}$ y no negativo $\phi_n \bar{m} = 0$ Tomando $\phi = \sum_{n>1} \dfrac{\phi_n}{2^n(1+p_n(\phi_n))}$ anula a $\bar{m}$ y no tiene ceros en U, luego $\bar{m}/a$ es cero en M_U Que el morfismo es exhaustivo se deduce de la condición de haz que verifica M_U

Veamos ahora que

$$\varprojlim M/(I_n M) = \varprojlim M/\overline{I_n M}$$

Esto se deduce de la consideración del siguiente lema

Lema I 2 2

Sea A una L-álgebra y M un A-módulo de Fréchet, Q_1 y Q_2 dos cerrados del espectro de A con $Q_1 \subset \mathring{Q}_2$ Sea $I = \bigcap_{\substack{x \in Q_1 \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$, $J = \bigcap_{\substack{x \in Q_2 \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$, se verifica

$$\overline{JM} \subset IM$$

Sean $a+b= 1$ con $a \in \bigcap_{\substack{x \in \text{entorno cerrado de } \complement Q_2 \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$ y $b \in I$ Sea $m \in \overline{JM}$

dado $\varepsilon>0$ y q una seminorma en M, existirá un $\overline{m}' \in JM$ con $q(m-m')<\varepsilon$ Como $a\overline{m}'= 0$ tendremos

$$q(a\overline{m})= q(a(\overline{m}-\overline{m}'))\leq p(a)\varepsilon$$

donde p es una seminorma en A que depende solo de q Puesto que ε es arbitrario será $q(a\overline{m})= 0$, luego $\overline{m}= (a+b)\overline{m}= b\overline{m}$ y como $b \in I$, hemos acabado

La igualdad entre los dos límites proyectivos es trivial ahora si se tiene en cuenta que $I_n M \subset \overline{I_n M} \subset I_{n+1} M$ De esta forma podemos dotar a M_U de la topología de Fréchet límite proyectivo de $M/\overline{I_n M}$ Es inmediato comprobar que tiene estructura de A_U-módulo de Fréchet

La exactitud algebraica del functor $M \longrightarrow M_U$ se deduce de la platitud de A_U como A-módulo Por otra parte, si $M \rightarrow N$ es un morfismo continuo de A-módulos de Fréchet, la continuidad de los morfismos

$$M/(I_n M) \longrightarrow N/(I_n N)$$

asegura la continuidad de $M_U \longrightarrow N_U$ De aquí que si $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de A-módulos de Fréchet,

$$0 \longrightarrow M_U \longrightarrow N_U \longrightarrow P_U \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de A_U-módulos y con morfismos continuos El teorema del gráfico cerrado asegura que es topológicamente exacta

Una situación que se presenta con naturalidad es la siguiente

Sean $\mathcal{A}$ y A dos L-álgebras, A una subálgebra de $\mathcal{A}$ y la inyección de $A \longrightarrow \mathcal{A}$ continua Diremos brevemente que $\mathcal{A}$ es una A-álgebra Se trata de estudiar la relación entre la localización de $\mathcal{A}$ como álgebra con la localización de $\mathcal{A}$ como A-módulo

Veamos en primer lugar un lema

Lema I 2 3

Sean $\mathcal{A}$ y A dos L-álgebras, $\mathcal{A}$ una A-álgebra, la inyección $A \to \mathcal{A}$ induce una aplicación π $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ La imagen de esta aplicación es densa en Spec(A)

Demostración

Supongamos que $\pi(\mathrm{Spec}(\mathcal{A}))$ no fuese densa en Spec(A) Existiría en éste un abierto U que no tendría elementos de la imagen de π Sea V un abierto con $\bar{V} \subset U$ y sea un elemento a de A con $a \in \bigcap_{\substack{x \in \bar{V} \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$ y que a como función valga 1 en $\complement U$ Este elemento es un divisor de cero en A y, por otra parte, considerado como elemento de $\mathcal{A}$ es invertible pues no se anula en $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ en contradicción con la inclusión de A en $\mathcal{A}$

Obsérvese, en particular, que si los espectros de las álgebras son compactos, π es una aplicación exhaustiva

Estamos ahora en condiciones de enunciar el siguiente teorema

Teorema I 2 3 (Teorema general de localización)

Sean $\mathcal{A}$ y A dos L-álgebras, $\mathcal{A}$ una A-álgebra Sea π la aplicación $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ inducida por la inyección $A \longrightarrow \mathcal{A}$ Sea U un abierto de A, $V = \pi^{-1}(U)$ es un abierto no vacío de $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ Se verifica que la localización de $\mathcal{A}$ en V como álgebra, $\mathcal{A}_V$ coin cide con la localización de $\mathcal{A}$ en U como A-módulo $A_U \otimes_A \mathcal{A}$

Demostración

Desde luego que $A_U \otimes_A \mathcal{A}$ es un A_U-módulo de Fréchet Veamos que $\mathcal{A}_V$ tambien es un A_U-módulo de Fréchet Es suficiente probar que el morfismo $A_U \to \mathcal{A}_V$ es continuo

Sea K_n una sucesión exhaustiva de compactos en U definidora de la localización A_U C_n la sucesión análoga para $\mathcal{A}_V$ Puede siempre suponerse que $\pi C_n \subset K_n$ De esta forma tenemos definidos morfismos continuos de A/I_{K_n} en $\mathcal{A}/I_{C_n}$ de tal forma que establecen un morfismo continuo de $A_U = \varprojlim A/I_{K_n}$ en $\mathcal{A}_V = \varprojlim \mathcal{A}/I_{C_n}$

Podemos establecer un morfismo

$$A_U \otimes_A \mathcal{A} \to \mathcal{A}_V \qquad f/a \to f/a$$

que está bien definido pues si $f/a = f_1/a_1$, existe un c de A no nulo en A con $c(fa_1 - f_1 a) = 0$ en $\mathcal{A}$, luego $f/a = f_1/a_1$ en $\mathcal{A}_V$ pues c como elemento de $\mathcal{A}$ es no nulo en V

Para ver que este morfismo entre módulos de Fréchet es un isomorfismo bastará comprobar que para todo x del Spec(A) existe un entorno $W \subset U$ tal que tenemos un isomorfismo entre $A_W \otimes_{A_U} (A_U \otimes_A \mathcal{A}) = A_W \otimes_A \mathcal{A}$ y $A_W \otimes_{A_U} \mathcal{A}_V$

En efecto, sean $x \in W \subset \bar{W} \subset U_1 \subset \bar{U}_1 \subset U$, podemos definir un morfismo $A_W \otimes_A \mathcal{A} \longrightarrow A_W \otimes_{A_U} \mathcal{A}_V$ por localización de $A_U \otimes_A \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_V$, es decir la imagen de f/a, f de $\mathcal{A}$ y $a \in A$ y no nula en W es f_V/a_U, donde f_V y a_U son las imágenes de f y a en $\mathcal{A}_V$ y A_U respectivamente

Veamos en primer lugar que el morfismo es inyectivo

Sea $f_V/a_U = 0$ en $A_W \otimes_{A_U} \mathcal{A}_V$, existe un b de A_U no nulo en V con $bf_V = 0$ en $\mathcal{A}_V$ Sea t un elemento de A no nulo en W y con $t \in \bigcap_{\substack{x \in \complement \overline{U}_1 \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$ donde m_x es el ideal de x en A Tendremos que $f/a = tf/ta$ De esta forma si bft es cero en $\mathcal{A}_V$, existe un g de $\mathcal{A}$ positivo en V con $b_1 ftg = 0$ en $\mathcal{A}$, donde $b = b_1/a_1$ y t como elemento de $\mathcal{A}$ pertenece a $\bigcap_{\substack{y \in \complement \overline{U}_1 \\ h \in N}} \overline{m_y^h}$, m_y ideal de y en $\mathcal{A}$

Podemos sumar a g un elemento g_1 de $\mathcal{A}$ de tal forma que $tg_1 = 0$ y $g-g_1$ sea invertible en $\mathcal{A}$ De esta forma $b_1 ft = 0$, b_1 de A y no nulo en U, luego la aplicación es inyectiva

Veamos que la aplicación es exhaustiva

Sea un elemento f/a, f de $\mathcal{A}_V$, a de A_U no nulo en W Podemos multiplicar los dos términos de la fracción por un elemento t del tipo anterior $f/a = ft_U/at_U$, t_U imagen de t en A_U

Ahora bien $ft_U \in \mathcal{A}_V$ es imagen de un elemento de $\mathcal{A}$ En efecto, puesto que $f \in \mathcal{A}_V$ f es de la forma f_1/f_2 con f_2 de $\mathcal{A}$ no nulo en V ft_U es igual a $f_1 t_U/f_2$ donde f_2 puede suponerse positivo en V Podemos sumar a f_2 un elemento conveniente $\bar{f}_2$ de tal forma que $f_2+\bar{f}_2$ sea invertible en $\mathcal{A}$ y $\bar{f}_2 t_U = 0$ Tendremos que en $\mathcal{A}_V$, $f_1 t_U/f_2 = f_1 t_U/(f_2+\bar{f}_2)$ que es imagen de un elemento de $\mathcal{A}$ Análogamente at_U es imagen de un elemento de A De aquí que la aplicación es exhaustiva y vale entonces el teorema

Para el estudio de las álgebras de Whitney de un compacto en una variedad diferenciable precisamos relacionar la localización de la diagonal de un álgebra con la diagonal del álgebra localizada y una relación análoga para el graduado de la diagonal Veámoslas

Lema I 2 4

Sea A una L-álgebra nuclear Según el teorema I 1 3 $\mathcal{A} = A \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} A$ es del mismo tipo Si U es un abierto del espectro de A se verifica

$$A \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{A}_{U \times U} \simeq A_U$$

donde A hay que coñsdirerarlo como $\mathcal{A}/D_A$ para dotarlo de estructura de $\mathcal{A}$-módulo

Demostración

$$A \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{A}_{U\times U} = (\mathcal{A}/D_A) \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{A}_{U\times U} = \mathcal{A}_{U\times U}/D_A \mathcal{A}_{U\times U}$$

Teniendo en cuenta el teorema I 1 3 $\mathcal{A}_{U\times U} = A_U \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} A_U$, de donde para demostrar el lema es suficiente verificar que

$$D_A A_U \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} A_U = D_{A_U}$$

D_{A_U} es el núcleo del morfismo canónico $A_U \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} A_U \longrightarrow A_U$ Es trivial comprobar que los elementos de $D_A A_U \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} A_U$ pertenecen a este núcleo y que por tanto $D_A A_U \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} A_U \subset D_{A_U}$ Por otra parte, observemos que $D_A A_U \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} A_U$ es denso en D_{A_U} En efecto, sabemos que la diagonal algebraica Δ_{A_U} es densa en D_{A_U}, es suficiente comprobar que Δ_{A_U} está contenida en $D_A A_U \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} A_U$

En efecto, si $\Sigma (a_i/b_i) \otimes (c_i/d_i)$ pertenece a Δ_{A_U}, reduciendo a común denominador podemos ya suponer que todas las b_i son iguales a b y las d_i iguales a d Se tendrá $\Sigma(a_i/b)\otimes(c_i/d) = (\Sigma a_i \otimes c_i)(1/b \otimes 1/d)$ con $\Sigma a_i c_i = 0$ en A_U existe un n de A no nulo en U con $n(\Sigma a_i c_i) = 0$ Podemos suponerlo en la suma, $\Sigma(na_i/nb)\otimes(c_i/d)$ y tendremos entonces que $\Sigma na_i \otimes c_i$ es de D_A

Para acabar el lema es suficiente verificar que $D_A \mathcal{A}_{U\times U}$ es cerrado Consideremos para ello la sucesión

$$0 \longrightarrow D_A \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/D_A \longrightarrow 0$$

tensorializando por $\mathcal{A}_{U\times U}$ sobre $\mathcal{A}$ obtendremos una sucesión topológicamente exacta

$$0 \longrightarrow D_A \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{U\times U} \longrightarrow \mathcal{A}_{U\times U} \longrightarrow \mathcal{A}_{U\times U}/(D_A \mathcal{A}_{U\times U}) \longrightarrow 0$$

De aquí que $D_A \mathcal{A}_{U\times U} = D_A \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{U\times U}$ es cerrado en $\mathcal{A}_{U\times U}$

Teorema I 2 4

Sea A una L-álgebra nuclear Sea U un abierto del espectro de A Se verifican los isomorfismos

$$D_{A_U} = D_A \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{U\times U} = D_A \mathcal{A}_{U\times U}$$

$$(D_A^m/D_A^{m+1}) \otimes_A A_U = D_{A_U}^m / D_{A_U}^{m+1}$$

Demostración

La afirmación de que $D_A \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{U\times U} = D_A \mathcal{A}_{U\times U}$ la hemos verificado en el lema anterior, por otra parte, en la sucesión

$$0 \longrightarrow D_A \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

al tensorializar por $\mathcal{A}_{U\times U}$ y aplicar dicho lema

$$0 \longrightarrow D_A \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{U\times U} \longrightarrow \mathcal{A}_{U\times U} \longrightarrow A_U \longrightarrow 0$$

de donde $D_{A_U} = D_A \otimes_{\mathcal{a}} \mathcal{a}_{U\times U}$

De aquí que

$$D^m_{A_U} = (D_A \otimes_{\mathcal{a}} \mathcal{a}_{U\times U})^m = D^m_A \otimes_{\mathcal{a}} \mathcal{a}_{U\times U}$$

y por la platitud de $\mathcal{a}_{U\times U}$ sobre $\mathcal{a}$

$$(D^m_A / D^{m+1}_A) \otimes_{\mathcal{a}} \mathcal{a}_{U\times U} = (D^m_A \otimes_{\mathcal{a}} \mathcal{a}_{U\times U}) / (D^{m+1}_A \otimes_{\mathcal{a}} \mathcal{a}_{U\times U}) = D^m_{A_U} / D^{m+1}_{A_U}$$

Lo único oue resta por verificar es que

$$(D^m_A / D^{m+1}_A) \otimes_{\mathcal{a}} \mathcal{a}_{U\times U} = (D^m_A / D^{m-1}_A) \otimes_A A_U$$

Consideremos la sucesión

$$0 \longrightarrow D_{A_U} \longrightarrow \mathcal{a}_{U\times U} \longrightarrow A_U \longrightarrow 0$$

Tensorialicemos por D^m_A / D^{m-1}_A sobre $\mathcal{a}$

$$D_{A_U} \otimes_{\mathcal{a}} (D^m_A / D^{m-1}_A) \longrightarrow \mathcal{a}_{U\times U} \otimes_{\mathcal{a}} (D^m_A / D^{m-1}_A) \longrightarrow A_U \otimes_{\mathcal{a}} (D^m_A / D^{m-1}_A) \longrightarrow 0$$

Puesto que $D_{A_U} = D_A \mathcal{a}_{U\times U}$, la imagen del primer módulo en el segundo es cero y tendremos el isomorfismo buscado sin más que observar que

$$A_U \otimes_{\mathcal{a}} (D^m_A / D^{m-1}_A) \simeq A_U \otimes_A (D^m_A / D^{m-1}_A).$$

3 MODULOS DE FRECHET DE TIPO FINITO PROYECTIVOS Y PLANOS SOBRE L-ALGEBRAS

En esta sección se recuerda en primer lugar un esquema de la caracterización de los módulos finito generados proyectivos y planos sobre un anillo general en términos de sus localizaciones en el espectro primo o máximo A partir de éste (proposiciones I 3 1 , I 3 2 y I 3 3 cuyos resultados son ya conocidos) y de la teoría de la sección 2 se da una caracterización de los módulos de Fréchet proyectivos de tipo finito sobre una L-álgebra o sobre una F^*-álgebra (0 3 5) mediante sus localizaciones en el espectro topológico (de ideales maximales cerrados) Se demuestra para este tipo de módulos su equivalencia con los módulos planos

Proposición I 3 1

Sea A un anillo local y M un A-módulo finito generado Las tres condiciones siguientes son equivalentes

1 M es libre
2 M es proyectivo
3 M es plano

Puede verse la demostración en {8}

Proposición I 3 2

Sea A un anillo y M un A-módulo finito generado M es plano si y solo si la localización en cada punto x del espectro primo o del espectro máximo $M_x = A_x \otimes_A M$ es un A_x-módulo libre

La demostración se reduce a la proposición anterior teniendo en cuenta que todo A-módulo M finito generado es plano sı y solo si sus localizaciones M_x en su espectro primo ó máximo son A_x-módulos planos {2b}

Proposición I 3 3

Sea A un anillo y M un A-módulo finito M es proyectivo sı y solo si para cada punto x del espectro primo (o bien del espectro máximo) existe un entorno en la topología de Zariski tal que la localización de M en él es libre

Demostración

Llamaremos soporte de M en el espectro primo de A al conjunto de ıdeales primos x tales que $M_x \neq 0$ Para todo A-módulo finito generado Soporte(M) coincide con los ceros del ideal anulador de M (llamamos ceros al conjunto de ideales primos que lo contienen) {8}, en particular Soporte(M) es un conjunto cerrado, luego, si un módulo M verifica que $M_x = 0$ existe un f de A tal que M_f, localización de M en el abierto de los puntos en que f no se anula, es cero

Sea entonces M proyectivo, L un módulo libre y ϕ un morfismo ϕ, $L \longrightarrow M$ tal que $L_x \simeq M_x$, pues M_x es proyectivo y por tanto libre De aquí que $(\mathrm{Conuc}\,\phi)_x = 0$, luego en un entorno $(\mathrm{conuc}\,\phi)_f = 0$, de donde $L_f \longrightarrow M_f \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta Tendremos entonces la sucesión exacta $0 \longrightarrow K \longrightarrow L_f \longrightarrow M_f \longrightarrow 0$ y como M_f es proyectivo, K es finito generado y $K_x = 0$ Localizando nuevamente en un abierto K_g es cero de donde $L_g = M_g$ y el módulo es libre en entornos

Recíprocamente, sea M libre en entornos Veamos en primer lugar que M es de presentación finita En efecto, tomemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde L es libre Como M es localmente proyectivo, K verifica la misma condición y por lo tanto es localmente libre en entornos puesto que los espectros con los que trabajamos son compactos se deduce que K es finito generado

Sea entonces una sucesión exacta de A-módulos

$$R \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

$$\mathrm{Hom}(M,R) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,S) \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

para cada x del espectro primo (ó máximo) $C_x = 0$, por ser M de presentación finita (0 2 3), luego C= 0 y M es proyectivo

Se deduce inmediatamente que para módulos de presentación finita coinciden los conceptos de proyectivo y plano y que todo módulo finito generado proyectivo es plano

Tras el anterior esquema puramente algebraico estamos en condiciones de comprender el significado de los teoremas siguientes Demos, para mayor comodidad, las siguientes definiciones

Definiciones I 3 1

Sea A un a l c y M un A-módulo, diremos que M es localmente libre si para cada x del espectro de A (espectro de ideales maximales cerrados), las localizaciones M_x son A_x-módulos libres

Diremos que M es libre en entornos si existe un recubrimiento abierto {U} del espectro de A (nuevamente recordamos que se trata de los ideales maximales cerrados) tales que $M_U = A_U \otimes_A M$ sean A_U-módulos libres

Teorema I 3 1

Sea A una F^*-álgebra (0 3 5) o una L-álgebra Sea M un A-mó-dulo de Fréchet de tipo finito Las siguientes condiciones son equivalentes

1 M es proyectivo
2 M es plano
3 M es localmente libre
4 M es libre en entornos

Demostración

Las implicaciones $1\Rightarrow 2$ y $2\Rightarrow 3$ son generales para todo A-módulo finito generado

En la implicación $3\Rightarrow 4$ juegan las especiales características topólogicas de A y M Veamos la demostración Supondremos por el momento que A es una F^*-álgebra

Sea x un punto del espectro de A, como M_x es libre podemos encontrar una base $\tilde{m}_1, \quad ,\tilde{m}_k$ de M_x sobre A_x Sean $\bar{m}_1, \quad ,\bar{m}_k$ representantes de los anteriores en M Veamos que existe un entorno U de x en el que son A_U-independientes Supongamos que no fuese así Por ser A separable existe una base de entornos del punto x numerable, sean $\{U_n\}$ con $U_n \supset \overline{U}_{n+1}$ En U_1 tendríamos una relación

$$a_1^1\bar{m}_1 + \qquad + a_1^k\bar{m}_k = 0$$

donde podemos suponer que las a_1^i son de A Estos deberán ser cero en un entorno de x Sea éste V_2, contenido en U_2 En V_2 existirá otra relación

$$a_2^1\bar{m}_1 + \qquad + a_2^k\bar{m}_k = 0 \ ,$$

podemos suponer que las a_2^i son cero fuera de V_2 y tambien en un V_3 contenido en U_3

Tendremos así una sucesión de relaciones

$$a_n^1\bar{m}_1 + \quad + a_n^k\bar{m}_k = 0$$

Sean $a^i = \sum_n \dfrac{a_n^i}{2^n(1+p_n(a_n^1)+ \quad +p_n(a_n^k))}$ donde $p_1 \leq p_2 \leq$ es una familia fundamental de seminormas en A En ningun entorno de x se anulan idénticamente las a^i, luego la relación

$$(*) \qquad a^1\bar{m}_1 + \ , \quad + a^k\bar{m}_k = 0$$

pasada a gérmenes es no trivial Luego llegamos a contradicción

Existe, entonces un entorno U en el que $\bar{m}_1, \quad ,\bar{m}_k$ son A_U-independientes Por otra parte sean $t_1, \quad ,t_k$ generadores de M y $\tilde{t}_i$ sus imágenes en M_x, $\tilde{t}_1 = \Sigma(b_i/c_i)\tilde{m}_i$ con c_i no nulos en U La igualdad anterior da una igualdad en M_{W_1} para W_1 entorno conveniente de x Haciendo lo propio con $t_2, \quad ,t_k$ llegamos a encontrar un entorno W de x tal que las imágenes de $\bar{m}_1, \quad ,\bar{m}_k$ en M_W son generadores de éste Si $W \subset U$, estos son libres y por lo tanto forman una base de M_W

En el caso en que A sea una L-álgebra, el proceso es similar Siguiendo la notación anterior los a_1^i son tales que sus imágenes en A_x son cero, luego existen d_i no negativos en un entorno de x con $d_i a_1^i = 0$, esto es $d_i a_1^i \in \bigcap_{\substack{x \in Spec(A) \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$, sumando a d_i un elemento conveniente $\bar{d}_i \in \bigcap_{\substack{x \in V_2 \\ h \in N^2}} \overline{m_x^h}$ con $V_2 \subset U_2$ para que $d_i + \bar{d}_i$ sea invertible se llega a que $a_1^i \in \bigcap_{\substack{x \in V_2 \\ h \in N^2}} \overline{m_x^h}$ En V_2 tendremos otra relación como antes

$$a_2^1\bar{m}_1 + \quad + a_2^k\bar{m}_k = 0,$$

puede suponerse que las $a_2^i \in \bigcap_{\substack{x \in V_2 \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$ y tambien $a_2^i \in \bigcap_{\substack{x \in V_3 \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$ para un

V_3 contenido en U_3

Prosiguiendo como èn el caso semisimple los elementos a^i no son nulos en A_x pues cada entorno de x contiene puntos y en los que todos los elementos de la serie salvo uno pertenecen a $\bigcap_{h\in N} \overline{m_y^h}$, luego la relación (*) es tambien en este caso no trivial en los gérmenes y llegamos a la misma contradicción

Veamos por último que si M es libre en entornos, M es proyectivo

Si observamos la demostración de la proposicion I 3 3 vemos que en el caso estrictamente algebraico el hecho fundamental es que por ser M libre en entornos es de presentación finita, ya que el espectro primo es compacto En nuestro caso si el espectro es compacto puede repetirse el razonamiento, y podremos hacer uso de que $A_U \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M,N) = \mathrm{Hom}_{A_U}(M_U,N_U)$ No obstante esta proposición es cierta para módulos de Fréchet finito generados sobre F^*-álgebras o L-álgebras Veamos, pues, esta proposición que tiene interes por sí misma y regresaremos despues para acabar el teorema I 3 1

Teorema I 3 2

Sean M y N dos A-módulos de Fréchet de tipo finito sobre A A una F^*-álgebra ó una L-álgebra Para cada abierto U del Spec(A) se verifica

$$\mathrm{Hom}_{A_U}(N_U,M_U) = A_U \otimes_A \mathrm{Hom}_A(N,M)$$

Observaciones

- No es preciso distinguir si los homomorfismos son continuos o no porque para M y N A-módulos de Fréchet de tipo finito todo homomomorfismo es automáticamente continuo En efecto, si $M = L/R$, L libre, cada morfismo $M \xrightarrow{\phi} N$ induce un morfismo $L \xrightarrow{\psi} N$ que es continuo por ser L libre Fste morfismo tiene un núcleo que contiene a R Puesto que la topología de L, por ser de Fréchet, es la topología cociente L/R, se deduce inmediatamente que ϕ es un morfismo continuo

Observemos tambien que el que A sea F-álgebra ó L-álgebra implica la existencia para cada cerrado F del Spec(A) de un ideal mínimo p_F cerrado de entre los ideales cerrados cuyos ceros sean F (véase para F^*-álgebras (10) y para L-álgebras teorema I 1 5) Se verifica que p_F^2 es un ideal cuyos ceros son F, de aquí que $\overline{p_F^2} = p_F$

Demostración

La inclusión de $A_U \otimes_A \mathrm{Hom}_A(N,M)$ en $\mathrm{Hom}_{A_U}(N_U,M_U)$ es general

Veamos la inclusión inversa Lo demostraremos mediante una cadena de lemas

Sea una presentación de M

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde L es libre finito y R es cerrado en L

Sea $\bar{R}$ el submódulo de L que consiste en aquellos elementos l de L tales que $p_F l \subset R$, donde $F = \complement U$ Por ser R cerrado, lo es $\bar{R}$ que verifica entonces $p_F \bar{R} \subset R$ Si $l \in L$ verifica que $\overline{p_F l} \subset \bar{R}$ entonces $l \in \bar{R}$ En efecto $p_F\, p_F l \subset p_F \bar{R} \subset R$, de donde $\overline{p_F^2} l \subset R$, esto es $p_F l \subset R$, luego $l \in \bar{R}$

Definamos un cociente de M, $\bar{M}$ mediante la sucesión exacta :

$$0 \longrightarrow \bar{R} \longrightarrow L \longrightarrow \bar{M} \longrightarrow 0$$

De la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow \bar{R} \longrightarrow \bar{R}/R \longrightarrow 0$$

obtenemos la sucesión

$$0 \longrightarrow \rho_F \bar{R} \cap R \longrightarrow \rho_F \bar{R} \longrightarrow \rho_F \bar{R}/R \longrightarrow 0$$

Puesto que $\rho_F \bar{R} \subset R$ se deduce que $\rho_F \bar{R}/R = 0$

De aquí que si consideramos la sucesión

$$0 \longrightarrow \bar{R}/R \longrightarrow M \longrightarrow \bar{M} \longrightarrow 0$$

localizando en U obtenemos la sucesión

$$0 \longrightarrow A_U \otimes_A (\bar{R}/R) \longrightarrow A_U \otimes_A M \longrightarrow A_U \otimes_A \bar{M} \longrightarrow 0$$

Ahora bien $A_U \otimes_A (\bar{R}/R) = 0$ ya que existen elementos de ρ_F no nulos en U y se verifica que $\rho_F (\bar{R}/R) = 0$

De aquí que tenemos la identidad $M_U = \bar{M}_U$

Lema I 3 1

En las condiciones y notaciones del teorema I 3 2 se verifica

$$A_U \otimes_A \mathrm{Hom}(N,M) = A_U \otimes_A \mathrm{Hom}(N,\bar{M})$$

Demostración

Observemos en primer lugar que $\rho_F M = \rho_F \bar{M}$

En efecto, de la sucesión

$$0 \longrightarrow \bar{R}/R \longrightarrow M \longrightarrow \bar{M} \longrightarrow 0$$

obtenemos

$$0 \longrightarrow \rho_F M \cap (\bar{R}/R) \longrightarrow \rho_F M \longrightarrow \rho_F \bar{M} \longrightarrow 0$$

Ahora bien, si $am \in \bar{R}/R$, $m \in M$, $a \in \rho_F$ se verifica que si l es un representante de m en L, $al \in \bar{R}$ de donde $\rho_F al \subset \rho_F l \subset \rho_F \bar{R} \subset R$, luego $l \in \bar{R}$ y si $a \in \rho_F$ $al \in R$, luego $am = 0$ Tendremos entonces que

$\rho_F M \cap (\bar{R}/R) = 0$ Por otra parte, de la misma sucesión

$$0 \longrightarrow \bar{R}/R \longrightarrow M \longrightarrow \bar{M} \longrightarrow 0$$

se deduce

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N,\bar{R}/R) \longrightarrow \mathrm{Hom}(N,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(N,\bar{M})$$

y tensorializando por A_U

$$0 \longrightarrow A_U \otimes_A \mathrm{Hom}(N,\bar{R}/R) \longrightarrow A_U \otimes_A \mathrm{Hom}(N,\bar{M}) \longrightarrow A_U \otimes_A \mathrm{Hom}(N,\bar{M})$$

De la relación ya empleada de que $\rho_F(\bar{R}/R) = 0$ y de que en ρ_F existen elementos sin ceros en U se deduce que $A_U \otimes_A \mathrm{Hom}(N,\bar{R}/R) = 0$

De aquí que tenemos una inyección $A_U \otimes_A \mathrm{Hom}(N,M) \longrightarrow A_U \otimes_A \mathrm{Hom}(N,\bar{M})$ Veamos que la aplicación es exhaustiva Sea ϕ $N \longrightarrow \bar{M}$, $a \in \rho_F$ sin ceros en U, $a\phi$ aplica N en $a\bar{M} \subset \rho_F \bar{M} = \rho_F M$ Luego $a\phi$ factoriza como morfismo de N en $\bar{M}$ en

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "a\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \bar{M} \\ & M \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Entonces la imagen de $\psi/a \in A_U \otimes_A \mathrm{Hom}(N,M)$ en $A_U \otimes_A \mathrm{Hom}(N,\bar{M})$ es $a\phi/a$, que es la ϕ en este último Con ello queda demostrado el lema

Lema I 3 2

Sea P un A-módulo libre, ϕ_U $P \longrightarrow \bar{M}_U$ un morfismo de A-módulos cuya imagen esté contenida en la de la restricción de $\bar{M}$ a $\bar{M}_U$ Entonces puede encontrarse un morfismo ϕ $P \longrightarrow \bar{M}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\phi_U"'] & & \bar{M} \arrow[dl, "\rho_U"] \\ & \bar{M}_U & \end{tikzcd}$$

es conmutativo y $\mathrm{Ker}\phi = \mathrm{Ker}\phi_U$

En efecto, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & P \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "\psi"'] & \bar{M}_U & \\
0 \arrow[r] & \bar{R} \arrow[r] & L \arrow[r, "\pi"'] \arrow[ur, dashed, "t"] & \bar{M} \arrow[r] \arrow[u, "p_U"'] & 0
\end{tikzcd}$$

donde ψ es de tal forma que $t\,\psi = \phi_U$ Definamos $\phi = \bar{\pi}\,\psi$ Veamos que $\mathrm{Nuc}\phi = \mathrm{Nuc}\,\phi_U$ Desde luego $\mathrm{Nuc}\,\phi_U \supset \mathrm{Nuc}\,\phi$

Sea ahora $p \in \mathrm{Nuc}\,\phi_U$ $\phi(p)$ es un elemento de $\bar{M}$ anulado por un elemento a sin ceros en U y que podemos suponer es de $\mathfrak{p}_F$ Por ser $\bar{M}$ A-módulo topológico, el anulador de $\phi(p)$ debe ser un ideal cerrado de A cuyos ceros estarán contenidos en F, luego este ideal contendrá a $\mathfrak{p}_F$ De aquí que $\mathfrak{p}_F\phi(p) = 0$, luego $\mathfrak{p}_F\psi(p) \subset \bar{R}$ de donde $\psi(p) \in \bar{R}$ y $\phi(p) = 0$ Esto acaba la demostración del lema

Lema I 3 3

Con las notaciones anteriores :

$$A_U \otimes_A \mathrm{Hom}(N,\bar{M}) = \mathrm{Hom}_{A_U}(N_U,\bar{M}_U)$$

La inclusión del primer miembro en el segundo es general Sea ahora ψ_U $N_U \longrightarrow \bar{M}_U$, por ser módulos finitamente generados podemos multiplicar ψ_U por un elemento de A sin ceros en U de modo que la imagen de ψ_U por dicho elemento esté contenida en la restricción de $\bar{M}$ a $\bar{M}_U$ Bastará que demostremos que un tal ψ_U es la localización de un morfismo de N en $\bar{M}$

Escribamos N como cociente de un módulo libre P Tendremos un diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\phi_U"] & \bar{M} \arrow[d, "\rho_U"] \\ N \arrow[r, "\psi_U \rho_U"'] & M_U \end{tikzcd}$$

con $\phi_U = \psi_U \cdot \rho_U\ \pi$ y donde ϕ satisface la condición Nucϕ = Nuc ϕ_U (lema I 3 2)

Entonces Nucϕ = Nuc $\phi_U \supset$ Nuc π , por lo cual ϕ factoriza en

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \bar{M} \\ & N \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

y se tiene así un morfismo ψ tal que $\rho_U \circ \psi = \psi_U\ \rho_U$, con lo que ϕ_U es la localización de ψ en U

Podemos ya acabar la demostración del teorema

$A_U \otimes_A \mathrm{Hom}(N,M) = A_U \otimes_A \mathrm{Hom}(N,\bar{M})$, por el lema anterior es igual a $\mathrm{Hom}_{A_U}(N_U,\bar{M}_U)$ y como $\bar{M}_U = M_U$, es a su vez igual a $\mathrm{Hom}_{A_U}(N_U,M_U)$, luego vale el teorema

Volvamos nuevamente a la demostración del teorema I 3 1 , queríamos ver que si M es libre en entornos, M es proyectivo

Sea una presentación de M

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow L \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$$

donde L es libre finito

Sean U_i abiertos del Spec(A) tal que M_{U_i} sean A_{U_i}-módulos libres Tendremos la sucesión

$$0 \longrightarrow R_{U_i} \longrightarrow L_{U_i} \xrightarrow{\psi_{U_i}} M_{U_i} \longrightarrow 0$$

De aquí que existen aplicaciones.

$\gamma_{U_I}\ M_{U_i} \longrightarrow L_{U_i}$ tales que $\psi_{U_i}\gamma_{U_i} = I_{M_{U_i}}$ Según el teorema I 3 2 cada morfismo γ_{U_i} es la localización de un morfismo de M en L, es decir es del tipo γ_i/a_i, donde γ_i es un morfismo de M en L y a_i es un elemento de A no nulo en U_i

Para cada punto del espectro existe un entorno en las condiciones anteriores Podemos seleccionar de este recubrimiento uno localmente finito y numerable $\{V_n\}$ (finito sobre cada compacto) y construir otro $\{U_n\}$ de las mismas características con $\bar{U}_n \subset V_n$ Sea $\Sigma\alpha_n=1$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento, con $\alpha_n \in \bigcap_{\substack{x\in \complement \bar{U}_n \\ h\in N}} \overline{m_x^h}$ si se trata de una L-álgebra o sencillamente con $\alpha_n \in \bigcap_{x\in \complement \bar{U}_n} m_x$ si A es una F^*-álgebra (véase {4})

Tendremos entonces que $\alpha_n\gamma_n/a_n$ da un morfismo de M en L pues $\alpha_n/a_n = \alpha_n/(a_n+b_n)$ con a_n+b_n invertible (tomando previamente a_n no negativo)

La serie $\Sigma(\alpha_n/a_n)\gamma_n$ define un morfismo de M en L puesto que para cada m de M la serie $(\Sigma\alpha_n/a_n)\gamma_n(m)$ es convergente ya que las seminormas en L están localizadas en compactos (véase {11} para F^*-álgebras y teorema I 1 6 para L-álgebras)

Veamos que este morfismo compuesto con ψ es la identidad en M Puesto que $\mathrm{Hom}_A(N,M)$ es un módulo de Fréchet, bastará comprobar que, localmente, esta composición es la identidad Sea W un entorno tal que tenga intersección con sólo un número finito de V_n

$$\psi_W \bullet (\Sigma(\alpha_i/a_i)\gamma_i)_W(m_W) = \psi_W \circ \Sigma\alpha_i(\gamma_i/a_i)_W(m_W) = \Sigma\alpha_i\ \psi_W\ (\gamma_i/a_i)_W(m_W) =$$

$$= \Sigma\alpha_i m_W = m_W$$

donde los sumatorios segundo, tercero y cuarto se refieren a un numero finito de sumandos Esto acaba la demostración

CAPITULO DOS

CARACTERIZACION DEL ALGEBRA DE WHITNEY DE UN COMPACTO EN UNA VARIEDAD

Dada una variedad diferenciable $\mathcal{V}$ (siempre la supondremos numerable al infinito) y X un cerrado de $\mathcal{V}$, llamaremos p_X al ideal de nulidades cerrado de X en $\mathcal{E}(\mathcal{V})$, anillo de las funciones infinitamente diferenciables en la variedad (0 3 2 y 0 4)

Llamaremos álgebra de Whitney del cerrado X en la variedad al anillo $\mathcal{E}(\mathcal{V})/p_X$

El propósito de este capítulo es dar una caracterización en términos algebraicos u topológicos sobre un álgebra A para que exista una variedad diferenciable tal que A sea el álgebra de Whitney de un compacto de la citada variedad

La condición a que llegamos es análoga a la definición de Grothendieck (Eléments de Géométrie Algébrique, Cap IV) de que el morfismo inyección de C en A sea un morfismo diferenciablemente liso (condición de lisitud en términos de diferenciales) La condición de Grothendieck se refiere a diferenciales y diagonales puramente algebraicas y hemos creido natural emplear en nuestro caso el término "lisitud topológica" del morfismo En el capítulo III estudiaremos una situación que engloba a ésta

El método que utilizaremos es, básicamente, el de hacer uso de la teoría del capítulo I para reducir el problema al caso de un álgebra de Whitney de un cerrado no necesariamente compacto de R^n Para este caso seguiremos esencialmente la pauta marcada en {11} para la caracterización del álgebra de Whitney de un compacto de R^n

Un resultado marginal que se obtiene en el curso de la teoría es una demostración del teorema de la función inversa para funciones diferenciables trabajando directamente con los anillos que creemos es de interés por sí misma

Preliminares al teorema de caracterización

Recordemos en primer lugar que se llama Q-álgebra a toda a 1 c que tiene un entorno de la unidad formado por elementos invertibles Para toda a l c completa, tonelada y regular A las tres condiciones siguientes son equivalentes

1 A no tiene ideales densos
2 Spec(A) es compacto
3 Existe un entorno de la unidad formado por elementos invertibles

La demostración puede verse en {10}

Las álgebras de funciones diferenciables las supondremos valoradas en los números complejos, Puede obtenerse una caracterización análoga para el caso real sin más que considerar partes hermíticas de álgebras simétricas

Observemos que si X es un compacto de una variedad diferenciable $\mathcal{V}$ y $A = \mathcal{E}(\mathcal{V})/\mathfrak{p}_X$ es el álgebra de Whitney de X respecto a la variedad $\mathcal{V}$ se trata de una L-álgebra En efecto $\mathcal{E}(\mathcal{V})$ es una $*$-álgebra de Fréchet simétrica, semisimple y separable De aquí que A es una $*$-álgebra de Fréchet simétrica, separable y de espectro compacto X Para comprobar que se verifican las condiciones de "subsemisimplicidad" y de "superregularidad" es suficiente tener en cuenta que en $\mathcal{E}(\mathcal{V})$, para un cerrado F de $\mathcal{V}$,

$\mathfrak{p}_F = \bigcap_{\substack{x \in F \\ h \in N}} \overline{m_x^h}$ consiste en las funciones tales que al aplicarles

h campos sucesivos, la función resultante es nula en F y esto para todo h número natural

Por otra parte, puesto que $\mathcal{E}(\mathcal{V})$ es nuclear tambien lo es A

Un a l c A se dice topológicamente finito generado si existe una subálgebra finito generada y densa en A La finitud generada de $A = \mathcal{E}(\mathcal{V})/\mathfrak{p}_X$ puede deducirse a partir de la finitud generada de $\mathcal{E}(\mathcal{V}_1)$ donde $\mathcal{V}_1$ es una variedad diferenciable contenida en $\mathcal{V}$ con $X \subset \mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_1$ recubrible con un número finito de entornos coordenados y teniendo en cuenta que $\mathcal{E}(\mathcal{V}_1)/\mathfrak{p}_{X,\mathcal{V}_1} =$

$= \mathcal{E}(\mathcal{V})/\mathfrak{p}_X$ ($\mathfrak{p}_{X,\mathcal{V}_1}$ ideal de nulidades de X en $\mathcal{V}_1$)

Resumiendo, el álgebra de Whitney de un compacto en una variedad diferenciable es una L-álgebra nuclear topológicamente finito generada y que es una Q-álgebra Daremos el enunciado del teorema fundamental del capítulo en la clase de las álgebras con las condiciones anteriores y que sean diferenciablemente completas Observemos que esta última condición no presupone apenas limitación en cuanto a los propósitos enunciados, ya que puede darse una condición necesaria y suficiente para que una álgebra sea diferenciablemente completa en términos de seminormas (0 3 7)

Definición II 1 1

Sea A una L-álgebra Diremos que el morfismo inyección $C \longrightarrow A$ es topológicamente liso (t liso) si se verifican las siguientes condiciones

1 La diagonal de A, D_A, es un $A\hat{\otimes}_C A$-módulo finito generado

2 Las potencias D_A^m son ideales cerrados de $A\hat{\otimes}_C A$,

$\Omega_A = D_A/D_A^2$ es un A-módulo de Fréchet proyectivo y

$\mathrm{Grad}_{D_A}(A\hat{\otimes}_C A) = \mathrm{Simetr}_A(\Omega_A)$ (véase 0 2)

Observación

Según el apartado 3 del capítulo I la condición de que las diferenciales de A, Ω_A sean un A-módulo de Fréchet proyectivo, bajo las condiciones 1 de morfismo t liso a que sea un A-módulo de Fréchet plano o bien localmente libre

Estamos ahora en condiciones de dar el enunciado del teorema fundamental

Teorema II 1 1

Sea la clase de las L-álgebras nucleares topológicamente finito generadas por elementos autoconjugados, que sean Q-álgebras de espectro conexo y diferenciablemente completas

La condición necesaria y suficiente para que una álgebra A de la clase anterior sea el álgebra de Whitney de un compacto de una variedad es que el morfismo $C \longrightarrow A$ sea topológicamente liso. La variedad tiene por dimensión la dimensión local de Ω_A

Observaciones

1 La condición de que el espectro sea conexo tiene por único objeto el que la dimensión de las localizaciones de Ω_A sea la misma para todos los puntos del Spec(A) Se puede, si se quiere, sustituir la condición de conexión por esta última condición La dimensión local de Ω_A dará como en el caso del enunciado la dimensión de la variedad

2 Nótese que la diferencia entre las condiciones de este enunciado y las dadas en {11} (0 4) para la caracterización del álgebra de Whitney de un compacto de R^n estriba en que en nuestro caso no se imponen condiciones sobre cuantos deben ser los generadores de A y que la condición de ser Ω_A libre se sustituye por la de proyectivo Se impone por otra parte, que el álgebra sea una L-álgebra nuclear

Necesidad de las condiciones

Señalemos en primer lugar que según las observaciones preliminares al teorema de caracterización el álgebra de Whitney de un compacto en una variedad diferenciable pertenece a la clase de las L-álgebras nucleares topológicamente finito generadas por elementos autoconjugados y es una Q-álgebra diferenciablemente completa

Para probar las condiciones de morfismo t liso necesitamos el siguiente lema

Lema II 1 1

Sea X un compacto de una variedad diferenciable $\mathcal{V}$, U un abierto de $\mathcal{V}$ Se verifica

$$(\mathcal{E}/p_X)_{X\cap U} = \mathcal{E}_U/p^U_{X\cap U}$$

donde $p^U_{X\cap U}$ es el ideal de nulidades cerrado en $\mathcal{E}_U$ correspon-diente a $X\cap U$

En efecto, sea Q_1 una sucesión exhaustiva de compactos de U, p_n el ideal de nulidades cerrado correspondiente a $Q_n\cap X$ Según la definición de la localización para L-álgebras

$$(\mathcal{E}/p_X)_{X\cap U} = \varprojlim (\mathcal{E}/p_X)/(p_n/p_X) = \varprojlim \mathcal{E}/p_n$$

Por otra parte es trivial que $\mathcal{E}/p_n = \mathcal{E}_U/p^U_n$ donde p^U_n es l cierre del ideal de nulidades en $\mathcal{E}_U$ correspondiente a $Q_n\cap X$ Se tiene entonces

$$(\mathcal{E}/p_X)_{X\cap U} = \varprojlim \mathcal{E}/p_n = \varprojlim \mathcal{E}_U/p^U_n$$

y este último es igual a $\mathcal{E}_U/p^U_{X\cap U}$ como se deduce del siguiente lema

<u>Lema II 1 2</u>

Sea A una F^*-álgebra (0 3 5), $Q_1 \subset Q_2 \subset$ una sucesión exhaus-tiva de compactos en el Spec(A) = X Sea F un cerrado de X, p_n es el cierre del ideal de nulidades de $Q_n\cap F$, p_F el cierre del ide-al de nulidades de $F = \bigcup (Q_n\cap F)$ Se verifica entonces que $p_F = \bigcap p_n$ y que $A/p_F = \varprojlim A/p_n$

En efecto, desde luego $p_F \subset \bigcap p_n$ Sea ahora $a\in \bigcap p_n$ y p una semi-norma en A que puede suponerse localizada en Q_n (0 3 4) Por ser a de p_n podemos encontrar un $b\in A$ nulo en un entorno de $Q_n\cap F$ y tal que $p(a-b)<\varepsilon$ para $\varepsilon>0$ prefijado La intersección de dicho entorno con F puede expresarse como un entorno de Q_n intersección con F, pues F es cerrado $U(Q_n) \cap F$ Sea $\phi \in A$ igual a 1 en Q_r y nulo en un entorno del complementario de $U(Q_n)$, $\phi b \in \mathcal{P}_F$ y se tiene $p(a-\phi b) < p(a-b) < \varepsilon$, luego $a \in \mathcal{P}_F$

Vale entonces la relación $\mathcal{P}_F = \cap \mathcal{P}_n$ De aquí que la aplicación canónica $A/\mathcal{P}_F \longrightarrow \varprojlim A/\mathcal{P}_n$ es inyectiva La imagen es densa y para ver que la aplicación es exhaustiva es suficiente demostrar que toda seminorma $\bar{p}$ de $A/\mathcal{P}_F$ procede de una del $\varprojlim A/\mathcal{P}_n$

En efecto, sea p una seminorma de A que esté localizada en Q_n y que induzca $\bar{p}$ Tendremos

$$\bar{p}(\bar{a}) = \inf_{c \in \mathcal{P}_F} p(a+c) = \inf_{b \in \mathcal{P}_F + \mathcal{P}_{Q_n}} p(a+b) = \inf_{b \in \overline{\mathcal{P}_F + \mathcal{P}_{Q_n}}} p(a+b) = \inf_{b \in \mathcal{P}_{F \cap Q_n}} p(a+b)$$

que es una seminorma del límite proyectivo

A partir de este lema se acaba la demostración del lema II 1 1 sin más que tomar $A = \mathcal{E}_U$ y $F = X \cap U$

<u>Necesidad de la condición 1 de morfismo t liso</u>

Según el teorema I 2 4 $D_{A_U} = D_A \hat{\otimes}_{\mathcal{a}} \mathcal{a}_{U \times U}$ es decir la localización de la diagonal de A (A es una L-álgebra nuclear) es la diagonal del localizado de A Ahora bien, en nuestro caso si $A = \mathcal{E}/\mathcal{P}_F$ A_U según el lema II 1 1 es para $U = U_1 \cap F$ con U_1 abierto de la variedad, $A_U = \mathcal{E}_{U_1}/\mathcal{P}_{U_1 \cap F}$, tomando U_1 un entorno coordenado puede suponerse que $\mathcal{E}_{U_1} = C^\infty(R^n)$ A_U será entonces el álgebra de Whitney de un cerrado G de R^n $A_U = C^\infty(R^n)/\mathcal{P}_G$

La diagonal del anillo $C^\infty(R^n)$ es finito generada pues es el submódulo de $C^\infty(R^n)\,\hat{\otimes}_C\, C^\infty(R^n) = C^\infty(R^{2n})$ que consiste en las funciones $f(x_1, \ \ ,x_n,y_1, \ \ ,y_n)$ con $f(x_1, \ \ ,x_n,y_1, \ \ ,y_n)= 0$ y es un resultado clásico que este módulo de funciones está generado por x_i-y_i $i=1, \ \ ,n$, luego $D_{C^\infty(R^n)}$ está finito generado sobre $C^\infty(R^n)\,\hat{\otimes}_C C^\infty(R^n)$

Por otra parte es inmediato comprobar que $D_{A_U} = D_{C^\infty(R^n)}/\mathfrak{p}_C$ es un cociente de $D_{C^\infty(R^n)}$ ya que por ser los espacios de Fréchet y nucleares (0 1 3) tenemos el siguiente diagrama de sucesiones exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{J}\cap D_{C^\infty(R^n)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{J} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{p}_G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D_{C^\infty(R^n)} \arrow[r] \arrow[d] & C^\infty(R^n)\,\hat{\otimes}_C\, C^\infty(R^n) \arrow[r] \arrow[d] & C^\infty(R^n) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D_{C^\infty(R^n)}/\mathfrak{p}_G \arrow[r] \arrow[d] & (C^\infty(R^n)/\mathfrak{p}_C)\,\hat{\otimes}_C\,(C^\infty(R^n)/\mathfrak{p}_G) \arrow[r] \arrow[d] & C^\infty(R^n)/\mathfrak{p}_G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde $\mathfrak{J} = \mathfrak{p}_G \otimes_C C^\infty(R^n) + C^\infty(R^n)\,\hat{\otimes}_C\,\mathfrak{p}_G$

De aquí que D_{A_U} es finito generado Si las localizaciones de D_A son finito generadas y el espectro de A es compacto se sigue inmediatamente que D_A es finito generado De hecho puede demostrarse incluso que $D_{\mathcal{E}/\mathfrak{p}_F}$ es de presentación finita

Necesidad de la condición 2 de morfismo t liso

Veamos en primer lugar que D_A^m son ideales cerrados de $A\,\hat{\otimes}_C\, A$.

Sabemos {11} que para B álgebra de Whitney de un cerrado de R^n se verifica que las potencias de la diagonal son ideales cerrados de $B\hat{\otimes}_C B$ Según el teorema I 2 4 la localización de D_A^m es $D_{A_U}^m$ Si lo hacemos para los abiertos de un recubrimiento coordenado de Spec(A) puede identificarse D_A^m con un ideal de $\bigoplus_U (A_U \hat{\otimes}_C A_U)$ Por ser $D_{A_U}^m$ cerrados en $A_U \hat{\otimes}_C A_U$ y mediante una partición de la unidad se sigue inmediatamente que D_A^m es un ideal cerrado de $A\hat{\otimes}_C A$

El que Ω_A sea un A-módulo de Fréchet proyectivo localmente de dimensión n se sigue del teorema I 2 4 ya que $(D_A/D_A^2)_U = D_{A_U}/D_{A_U}^2$ y como A_U es el anillo de Whitney de un cerrado en R^n se trata de un módulo libre de dimensión n (véase {11} teorema III 3 3) La proposición se deduce ya trivialmente de la equivalencia en los módulos de Fréchet finito generados sobre L-álgebras de los conceptos de libre en entornos y proyectivo (I 3 1)

Análogamente, como

$$\left[\mathrm{Grad}_{D_A}(A \hat{\otimes}_C A)\right]_U = \mathrm{Grad}_{D_{A_U}}(A_U \hat{\otimes}_C A_U) \qquad (\mathrm{I}\ 2{,}4),$$

$$(\mathrm{Simetr}_A(\Omega_A))_U = \mathrm{Simetr}_{A_U}(\Omega_{A_U}) \qquad (0{,}2{,}2{,})$$

y por otra parte $\mathrm{Grad}_{D_{A_U}}(A_U \hat{\otimes}_C A_U)$ es el anillo de polinomios en n variables a coeficientes en A_U (véase {11} teorema III.3.3.), es decir, coincide con el $\mathrm{Simetr}_{A_U}(\Omega_{A_U})$; se verifica que los A_U-módulos $\mathrm{Grad}_{D_A}(A \hat{\otimes}_C A)$ y $\mathrm{Simetr}_A(\Omega_A)$ coinciden en sus localizaciones sobre el espectro de A que es un compacto

De aquí que el morfismo canónico $\mathrm{Simetr}_A(\Omega_A) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Grad}_{D_A}(A \hat{\otimes}_C A)$

que está definido a partir de los morfismos $\Omega_A \otimes \overset{r}{\cdots} \otimes \Omega_A \longrightarrow D_A^r/D_A^{r+1}$ $(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_r \longrightarrow \{\omega_1 \cdots \omega_r\})$ es un isomorfismo ya que tanto el Nucϕ como el Conucϕ al localizarlo en los abiertos de un recubrimiento de Spec(A) son nulos, luego ambos son cero

Suficiencia de las condiciones

Supongamos un álgebra A bajo las condiciones del teorema II 1 1 El punto fundamental es demostrar que para cada punto del Spec(A) existe un entorno abierto U tal que A_U es el álgebra de Whitney de un cerrado (en general no compacto) identificable a un cerrado U en R^n

En primer lugar sea U un abierto tal que $(\Omega_A)_U = \Omega_{A_U}$ sea un A_U-módulo libre A_U es un anillo que verifica las siguientes condiciones

1 A_U es una L-álgebra nuclear finitamente generada (topológicamente) por elementos autoconjugados)

   En efecto, A_U es una L-álgebra de espectro U según el teorema I 1 1 Es nuclear por ser límite proyectivo de cocientes de A que son a su vez nucleares (0 1 3) La finitud generada de A_U se obtiene del siguiente lema

Lema II 1 3

Sea A una L-álgebra engendrada topológicamente por $x_1, \ldots, x_r$, A_U lo está por los elementos imagenes de éstos en el morfismo canónico $A \longrightarrow A_U$

En efecto, siguiendo las notaciones del capítulo I $A_U = \varprojlim A/J_n$, las imágenes de $x_1, \ldots, x_r$ en el morfismo canónico $A \longrightarrow A/J_n$ generan una parte densa, de aquí que las imá genes de $x_1, \ldots, x_r$ en el $\varprojlim A/J_n$ generan una parte densa en él

2 A_U es diferenciablemente completa por ser límite proyectivo numerable de álgebras cociente de álgebras diferenciablemen te completas, que son álgebras del mismo tipo (0 3 7)

3 La diagonal de A_U, D_{A_U} es un $(A_U \hat{\otimes}_C A_U)$-módulo finito genera do

Se deduce inmediatamente de la relación

$$D_{A_U} = D_A \otimes_{A \hat{\otimes}_C A} (A \otimes_C A)_{U \times U} \qquad \text{(teorema I 2 4)}$$

4 Las potencias $D^m_{A_U}$ son ideales cerrados de $A_U \hat{\otimes}_C A_U$, Ω_{A_U} es un A_U-módulo libre de dimensión n y $\mathrm{Grad}_{D_{A_U}}(A_U \hat{\otimes}_C A_U)$ es el anillo de polinomios en n variables a coeficientes en A_U

En efecto, veamos que $D^m_{A_U}$ son cerrados en $A_U \hat{\otimes}_C A_U$ Sea la sucesión topológicamente exacta

$$0 \longrightarrow D^m_A \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/D^m_A \longrightarrow 0$$

donde $\mathcal{A} = A \hat{\otimes}_C A$

Localizando en $U \times U$ tendremos la sucesión topológicamente exacta (I 2 2)

$$0 \longrightarrow D^m_A \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{U \times U} \longrightarrow \mathcal{A}_{U \times U} \longrightarrow \mathcal{A}_{U \times U}/D^m_A \mathcal{A}_{U \times U} \longrightarrow 0$$

De aquí que $D^m_A \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{U \times U} = D^m_A \mathcal{A}_{U \times U}$ es cerrado en $\mathcal{A}_{U \times U}$ y es precisamente

$$D^m_{A_U} = (D_A \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{U \times U})^m = (D_A \mathcal{A}_{U \times U})^m = D^m_A \mathcal{A}_{U \times U}$$

Por hipótesis Ω_{A_U} es un A_U-módulo libre y de la relación

$$\mathrm{Grad}_{D_A}(A\hat{\otimes}_C A) = \mathrm{Simetr}_A(\Omega_A)$$

localizando y teniendo en cuenta el teorema I 2 4 y O 2 2

$$[\mathrm{Grad}_{D_A}(A\hat{\otimes}_C A)]_U = \mathrm{Grad}_{D_{A_U}}(A_U\hat{\otimes}_C A_U)$$

$$[\mathrm{Simetr}_A(\Omega_A)]_U = \mathrm{Simetr}_{A_U}((\Omega_A)_U) = \mathrm{Simetr}_{A_U}(\Omega_{A_U})$$

y como este último es el anillo de los polinomios a coeficien-tes en el anillo A_U se sigue la proposición

Resumiendo, la localización de A, A_U verifica las mismas condiciones que el álgebra A enunciadas en el teorema II 1 1 que estamos demostrando, pero sustituyendo la condición de ser Ω_A un A-módulo de Fréchet proyectivo localmente de dimensión n por la condición de ser libre de dimensión n

Supongamos, por simplificar la notación, que ya A verifica la citada condición

Sean $x_1, \ ,x_r$ generadores topológicos de A Se trata de ver que para cada punto p existe un entorno V tal que $\Omega_{A_V} = \Omega_A \otimes_A A_V$, que es un módulo libre de dimensión n, tiene una base formada por n de los elementos $dx_1, \ ,dx_r$ imágenes en el morfismo $A_V \longrightarrow \Omega_{A_V}$ que asocia a $x_i \longrightarrow dx_i = \overline{(x_i\otimes 1 - 1\otimes x_i)}$ (de hecho deberíamos escribir en lugar de x_i las imágenes de x_i en A_V por el morfismo canónico $A \longrightarrow A_V$

En efecto, si Δ_A es el núcleo del morfismo producto

$A \otimes_C A \longrightarrow A \longrightarrow 0$, D_A es el cierre de Δ_A en $A \hat{\otimes}_C A$ y por otra parte Δ_A está engendrado por elementos del tipo da para $a\in A$ De aq-uí y de la continuidad de la aplicación $A \longrightarrow \Omega_A$, $a \longrightarrow da=\overline{a\otimes 1-1\otimes a}$, se sigue que el submódulo de Ω_A engendrado por dx_1, $,dx_r$ es denso en Ω_A Del lema siguiente deduciremos que dx_1, dx_r generan todo Ω_A

Lema II 1 4

Sea A un álgebra de Fréchet, M un A-módulo libre de dimensión finita En M no existen submódulos finito generados y densos

En efecto, sea $N \subset M$ un tal submódulo finito generado y denso Sea m_1, $,m_k$ una base de M Si $a\in M$, $a=a_1m_1+$ $+a_km_k$ Consideremos la proyección $M \longrightarrow A$, $m \longrightarrow a_1$ La imagen de N por esta aplicación continua es un ideal finito generado y denso en A, luego coincide con A (R Arens (2)) Es decir, en N existen elementos que tienen por componente i-ésima cualquier elemento prefijado de A En particular existe un elemento en N cuya primera componente es 1 '

$$n_1=m_1+a_2m_2+ \quad +a_km_k$$

Es trivial verificar que la base de M m_1, $,m_k$ puede sustituirse por n_1,m_2, $,m_k$ Podemos, ahora, manejando esta nueva base proceder en forma análoga y llegar así a una base formada por elementos de N, de donde N = M

En nuestro caso tenemos entonces que dx_1, $,dx_r$ generan todo Ω_A Sea ξ_1, $,\xi_n$ una base de Ω_A Siempre puede suponerse $r>n$ Tendremos las siguientes relaciones

$$(1) \qquad dx_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j \qquad i=1, \quad ,r$$

$$(2) \qquad \xi_l = \sum_{k=1}^{r} b_{lk}dx_k \qquad l=1, \quad ,n$$

de donde

$$\xi_l = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} b_{lk}a_{kj}\xi_j, \text{ luego}$$

$$\sum_{k=1}^{r} b_{lk}a_{kj} = \delta_{lj} \qquad l=1, \quad ,n \ , \ j=1, \quad ,n$$

Estas relaciones entre los elementos de A mediantes el morfismo "tomar valores en p" $A \longrightarrow A/m_p = C$ da una relación entre números que implica que el morfismo entre espacios vectoriales inducido por la matriz $(a_{kl}(p))$ compuesta con el de la matriz $(b_{lk}(p))$ da la identidad en un espacio vectorial de dimensión n De aquí que el morfismo inducido por $(a_{kl}(p))$ es inyectivo y por lo tanto existe un menor de orden n, supongamos $(a_{kl}(p))$ $k=1, \quad ,n \ , \ l=1, \quad ,n$ de determinante no nulo , de donde $\det (a_{kl})_{\substack{k=1, \quad ,n \\ l=1, \quad ,n}}$ da un elemento invertible en A_V, para V un entorno conveniente de p Tendremos entonces que las relaciones (1) inducen unas relaciones en Ω_{A_V}

$$dx_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\xi_j$$

$$dx_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\xi_j$$

con $\det(a_{ij})$ invertible en A_V De aquí que podemos despejar $\xi_1, \quad ,\xi_n$ como combinación lineal de $dx_1, \quad ..,dx_n$ de donde éstos son generadores y generadores libres de Ω_{A_V}

Nos encontramos pues en que A_V que está generada por $x_1, \quad ,x_r$ verificará tambien todas las condiciones del enunciado del teorema II 1 1 y además $dx_1, \quad ,dx_n$ forma una base de Ω_{A_V} Para simplificar las notaciones llamaremos nuevamente A al álgebra A_V que verificaba las condiciones anteriores

Se trata ahora de ver que para cada punto p del espectro de A existe un entorno W tal que en la nueva localización A_W D_{A_W} que desde luego está finito generada sobre $A_W \hat{\otimes}_C A_W$ (pues es la localización de D_A en $W \times W$) está generado precisamente por $x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i$, $i=1, \quad ,n$

En efecto, sea I el ideal contenido en D_A y generado por $x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i$ De la condición de ser en D_A/D_A^2, $dx_i = \overline{x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i}$ $i=1, \quad ,n$ una base tendremos que $D_A = I + D_A^2$

Sea $x \in \mathrm{Spec}(A)$, veamos que $(D_A)_{(X,X)} = I_{(X,X)}$, localización algebraica en el punto $(X,X) \in \mathrm{Spec}(A \hat{\otimes}_C A)$ Tenemos

$$(D_A)_{(X,X)} = I_{(X,X)} + (D_{A_{(X,X)}})^2$$

como $D_{A_{(X,X)}}$ está contenido en el ideal maximal de $(A \hat{\otimes}_C A)_{(X,X)}$ ya que $D_A \subset A \hat{\otimes}_C m_x + m_x \hat{\otimes}_C A$, que es el ideal maximal de (X,X) en $A \hat{\otimes}_C A$, por el lema de Nakayama {8}

$$(D_A)_{(X,X)} = I_{(X,X)}$$

Tendremos entonces que si $n_1, \quad ,n_k$ son generadores de D_A, $n_i = \Sigma f_j (x_j - \bar{x}_j)$ en $(A \hat{\otimes}_C A)_{(X,X)}$, de aquí que la igualdad anterior tiene sentido para la localización de $A\otimes_C A$ en un entorno de (X,X) y como tenemos un número finito de generadores se deduce inmediatamente que la localización de D_A en un entorno de (X,X) está generado por las imágenes de $x_i\otimes 1-1\otimes x_i$ en dicha localización El entorno siempre puede tomarse del tipo $W\times W$ con W entorno de X

De aquí que $(D_A)_{W\times W} = D_{A_W}$ está generado por las imágenes de $x_i\otimes 1-1\otimes x_i$ en D_{A_W}

Resumiendo, estamos al presente en la siguiente situación

Dada un álgebra A en las condiciones del teorema II 1.1 para cada punto p del Spec(A) existe un entorno W tal que la localización A_W verifica las siguientes condiciones

1' Si los generadores de A son $x_1, \quad ,x_r$, A_W tiene por generadores las imágenes de éstos en el morfismo canónico $A\longrightarrow A_W$ A_W es por otra parte una L-álgebra nuclear de espectro W

2' A_W es diferenciablemente completo

3' D_{A_W} está generado por $x_i\otimes 1-1\otimes x_i$ $i=1,\ldots ,n$

4' $D^k_{A_W}$ son ideales cerrados de $A_W\hat{\otimes}_C A_W$, Ω_{A_W} es un A_W-módulo libre con base $dx_1, \quad ,dx_n$ y $\mathrm{Grad}_{D_{A_W}}(A_W\hat{\otimes}_C A_W)$ es el anillo de polinomios en n variables a coeficientes en A_W.

Consideremos ahora la aplicación $\mathrm{Spec}(A_W)= W\longrightarrow R^n$ dado por

$p \longrightarrow (x_1(p), \quad , x_n(p))$ Veamos que esta aplicación es inyectiva En efecto, si $x_i(p) = x_i(\bar{p})$ para $i=1, \quad ,n$, tendremos que puesto que $x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i$ pertenece a D_{A_V} para $i=n+1, \quad ,r$, por la propiedad 2' $x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (x_j \otimes 1 - 1 \otimes x_j)$, $\alpha_j \in A_W \hat{\otimes}_C A_W$ De donde el valor que tomarán estos elementos en el punto $(p,\bar{p}) \in \mathrm{Spec}(A_W \hat{\otimes}_C A_W)$ será :

$$x_i(p) - x_i(\bar{p}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(p,\bar{p})(x_j(p) - x_j(\bar{p})) = 0$$

luego $x_i(p) = x_i(\bar{p})$ para $i=1, \quad ,r$ es decir para una familia de generadores topológicos de A_W, de aquí que $p=\bar{p}$ (+)

La aplicación inyectiva considerada es continua, luego es un

(+) Obsérvese que en estos razonamientos está implícito el <u>teorema clásico de la función inversa</u> que puede enunciarse así sea $\mathcal{E}$ el anillo de las funciones infinitamente diferenciables en R^n Sea un morfismo continuo $\mathcal{E} \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}$ tal que la imagen de x_i es $y_i = f_i(x_1, \quad , x_n)$ de tal forma que $dy_1, \quad , dy_n$ forman una base de las diferenciales en el punto p Existe un entorno U de p tal que el morfismo anterior induce un isomorfismo $\mathcal{E}_{\phi^*(U)} \to \mathcal{E}_U$

En efecto, siguiendo los razonamientos anteriores $y_i - \bar{y}_i$ constituyen una familia de generadores de $D_{\mathcal{E}_U}$ sobre $\mathcal{E}_U \hat{\otimes}_C \mathcal{E}_U$ para un abierto U De aquí que las funciones $y_1, \ldots, y_n$ separan puntos del espectro de $\mathcal{E}_U$ y $\mathcal{E}_U$ son las funciones diferenciables sobre el abierto imagen de U por las aplicaciones $y_1, \quad , y_n$ Es facil demostrar a partir de aquí que el morfismo $\mathcal{E}_{\phi^*(U)} \longrightarrow \mathcal{E}_U$ es un isomorfismo.

homeomorfismo sobre cada compacto de W Puesto que el espectro de A_W es localmente compacto para cada punto p de W existe un entorno abierto de adherencia compacta en W La localización de A_W a este entorno vuelve a verificar las condiciones 1',2',3', 4' y además su espectro es identificable mediante $x_1, \ldots, x_n$ a una parte abierta de un compacto de R^n Es decir a la intersección de un compacto de R^n con un compacto del mismo que puede suponerse es una bola (identificable a R^n) si así lo deseamos) Para no complicar más las notaciones supondremos que ya A_W se encuentra en estas últimas condiciones

Nuestro segundo punto básico en la demostración es probar que A_W es el anillo de Whitney correspondiente al cerrado W (no necesariamente compacto considerado como cerrado de R^n mediante la identificación dada por los elementos $x_1, \ldots, x_n$ En este punto seguiremos la pauta marcada en {11} para la caracterización del álgebra de Whitney de un compacto de R^n

Por comodidad en las notaciones escribiremos en lo sucesivo $a \otimes 1 = a(y)$, $1 \otimes a = a(x)$, y por $f(x,y)$ los elementos de $A_W \hat{\otimes}_C A_W$.

Para cada a de A_W, da se expresa en forma única $da = a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n$ Escribamos $a_i = \delta_i(a)$ Se verificará que $a(y)-a(x)$ y $\sum_{i=1}^{n} \delta_i(a)(y_i-x_i)$ tienen la misma clase en Ω_{A_W}, luego su diferencia será de $D^2_{A_W}$ $a(y)-a(x)-\sum_{i=1}^{n} \delta_i(a)(y_i-x_i) \in D^2_{A_W}$ La clase en $D^2_{A_W}/D^3_{A_W}$ se expresa unívocamente como $\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}dx_i dx_j$

Sea $a_{ij} = \delta_{ij}(a)$ Se verificará entonces

$$a(y)-a(x) - \sum_{i=1}^{n} \delta_i(a) - \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1} \delta_{ij}(a)(y_i-x_i)(y_j-x_j) \in D^3_{A_W}$$

Así sucesivamente para cada n-pla de numeros naturales $k=(k_1, \quad ,k_n)$ existe una aplicación $\delta_{(k)}\ A_W \longrightarrow A_W$ tal que

$$a(y) - \sum_{|k|<r} \frac{\delta_k(a)}{k!} (y-x)^k \in D^{r+1}_{A_W}$$

y las aplicaciones $\delta_{(k)}$ vienen determinadas por esta condición

Es fácil comprobar que las aplicaciones δ_h son composición de aplicaciones continuas y por tanto continuas

Estas aplicaciones verifican $\delta_k \circ \delta_h = \delta_{k+h}$ Esto se deduce sin más que aplicar $\delta_h \otimes 1\ A_W \hat{\otimes}_C A_W \rightarrow A_W \hat{\otimes}_C A_W$ al "desarrollo" de un elemento cualquiera a de A Se obtiene entonces el desarrollo de $\delta_h a$ ya que $D^r_{A_W}$ por medio de la aplicación $\delta_h \otimes 1$ tiene su imagen en $D^{r-j}_{A_W}$ (trivial teniendo en cuenta los generadores de D_{A_W})

Por otra parte, mediante el producto de desarrollos y teniendo en cuenta su unicidad se llega a la regla de Leibnitz

$$\delta_k(a\ b) = \sum_{h<k} \binom{k}{h} \delta_h(a)\delta_{k-h}(b)$$

Sea $A_W[[\xi]]$ el anillo de las series formales en n variables a coeficientes en A_W Definamos una aplicación $\phi: A_W \longrightarrow A_W[[\xi]]$ tal que $\phi(a) = \sum_k \frac{1}{k!} \delta_k(a)\xi^k$ La regla de Leibnitz prueba que trata de un morfismo de anillos Sea $\bar{A}_W$ el anillo cociente de A_W por su radical El morfismo $A_W \longrightarrow \bar{A}_W$, $a \longrightarrow \bar{a}$ da canónicamente un morfismo $A_W[[\xi]] \longrightarrow \bar{A}_W[[\xi]]$ Considerando el morfismo composición de ϕ con este último tendremos una aplicación

$A_W \xrightarrow{\bar{\phi}} \bar{A}_W[[\xi]]$ que asigna a $a \in A_W$, $\sum_k \frac{\delta_k(a)}{k!} \xi^k$ Ahora bien, estos elementos no son otra cosa que " jets" de Whitney correspondientes a W (véase 0 4 y (7 bis)) ya que de las relaciones

$$(1) \quad \delta_k(a)(y) - \sum_{|h|<r-|k|} \frac{\delta_{k+h}(a)(x)}{h!}(y-x)^h \in D_{A_W}^{r+1-|k|}$$

y puesto que D_{A_W} está engendrado por $y_1-x_1, \quad , y_n-x_n$ (he aquí un punto esencial por el que hemos necesitado localizar el álgebra de partida) tendremos que para x_o y x_1 de W

$$\overline{\delta_k(a)}(x_1) - \sum_{|h|\leq r-|k|} \frac{\overline{\delta_{k+h}(a)}(x_o)}{h!}(x_1-x_o)^h = \sum_{|p|=r+1-|k|} f_p(x_o,x_1)(x_1-x_o)$$

que son las condiciones de Whitney 0 4 . Tendremos entonces un morfismo $\bar{\phi}$ de A_W en el anillo de Whitney del cerrado W de R^n,o lo que es lo mismo del cerrado W respecto a una bola de R^n

Veamos que dicho morfismo $\bar{\phi}$ es un isomorfismo

$\bar{\phi}$ es inyectivo

Sea a de A_W, y $x_o \in W$, de la relación (1) aplicada a a

$$a(y) - \sum_{|h|<r} \frac{\delta_h(a)(x)}{h!}(y-x)^h \in D_{A_W}^{r+1}$$

hallando su imagen por el morfismo $A_W \hat{\otimes}_C A_W \longrightarrow A_W$ que asocia a $f(x,y) \longrightarrow f(x_o,y)$

$$a(y) - \sum_{|h|\leq r} \frac{\delta_h(a)(x_o)}{h!}(y-x_o)^h \in m_{x_o}^{r+1}$$

pues el citado morfismo aplica D_{A_W} en m_{x_o} Por consiguiente si $\bar{\phi}(a) = 0$, tendremos $a \in m_{x_o}^{r+1}$ para todo x_o del espectro de A_W y para todo r de N De la condición de "subsemisimplicidad" de A_W se deduce que a= 0

$\bar{\phi}$ es exhaustiva

Sea $\tilde{f} \in C^\infty(R^n)/p_W$ y sea f un representante de $\tilde{f}$ en $C^\infty(R^n)$. Por ser A_W diferenciablemente completa se demuestra que existe un morfismo continuo $C^\infty(R^n) \longrightarrow A_W$ que transforma las coordenadas $t_1, \ldots, t_n$ en $x_1, \ldots, x_n$ de A_W. Esto da un morfismo

$C^\infty(R^n) \hat{\otimes}_C C^\infty(R^n) \longrightarrow A_W \hat{\otimes}_C A_W$ que transforma el desarrollo de f

$$f(t) = \sum_{|k|<r} \frac{f^{(k)}(s)}{k!}(t-s)^k - \sum_{|h|=r} R_h(t,s)(t-s)^h$$

en

$$a(y) = \sum_{|k|<r} \frac{a_k(x)}{k!}(y-x)^k - \sum_{|h|=r} \bar{R}_h(y,x)(y-x)^h$$

De la unicidad del desarrollo de $a \in A$ necesariamente debe ser $a_k = \delta_k(a)$. Ahora bien, la función $\bar{a}_k$ sobre W coincide con $f^{(k)}$ sobre W que es la k-ésima componente del "jet" de Whitney f, luego en el morfismo $\bar{\phi}$, a se aplica en f. Esto acaba la demostración.

Obsérvese que en particular demuestra que A_W estába generado por $x_1, \ldots, x_n$.

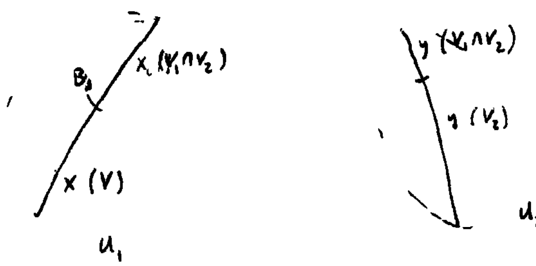
Resumiendo lo demostrado hasta el momento :

Si A está bajo las condiciones del teorema II.1.1, para cada punto del Spec(A) existe un entorno W tal que la localización de A a este entorno W es el álgebra de Whitney de un cerrado, identificable a W, en un abierto de R^n. Se trata, a partir de esto, de construir una variedad y un compacto en ella de tal forma que A sea el álgebra de Whitney de éste en aquella.

Sean V_1 y V_2 dos abiertos de Spec(A) tales que A_{V_i} son álgebras de Whitney de cerrados en abiertos U_1 y U_2 de R^n Supongamos que $V_1 \cap V_2$ es no vacío Se tiene

$$A_{V_1 \cap V_2} = (A_{V_1})_{V_1 \cap V_2} = (A_{V_2})_{V_1 \cap V_2}$$

Si los generadores de A_{V_1} son x_1, , x_n y los de A_{V_2} son y_1, , y_n se tiene que tanto las restricciones de unos como de otros a $A_{V_1 \cap V_2}$ lo generan topológicamente



Sabemos ue $A_{V_1 \cap V_2}$ es la localización en $x_1(V_1 \cap V_2)$ de A_{V_1} Es decir, existe un abierto B_1 contenido en U_1 con $B_1 \cap V_1 = V_1 \cap V_2$ y tal que $A_{V_1 \cap V_2}$ es el álgebra de Whitney de $V_1 \cap V_2$ en B_1 Existen entonces f_1, , f_n, funciones diferenciables en B_1 tales que sus clases en el álgebra $A_{V_1 \cap V_2}$ son los elementos y_i Se verifica que $\det(\partial f_i/\partial x_j) \neq 0$ en los puntos de $V_1 \cap V_2$ y por lo tanto en todo B_1 si lo consideramos suficientemente pequeño Estas funciones establecen difeomorfismos locales de entornos de puntos de $x_i(V_1 \cap V_2)$ en los correspondientes entornos de puntos de $y_i(V_1 \cap V_2)$, Esto permite definir un difeomorfismo de un entorno de $x_i(V_1 \cap V_2)$ contenido en U_1 en un entorno de $y_i(V_1 \cap V_2)$ contenido en U_2, reduciendo si es preciso V_1 y V_2 de tal forma que no varíe $V_1 \cup V_2$ y que la nueva intersección tenga su adherencia, que será compacta, contenida en $V_1 \cap V_2$ Ello se deduce inmediatamente del siguiente lema

Lema II 1 5

Sea $y = f(x)$ una aplicación de R^n en R^n tal que sobre un compacto K sea una aplicación biyectiva y que para cada punto del compacto exista un entorno tal que la restricción de $y = f(x)$ a él sea un homeomorfismo sobre su imagen Existe entonces un entorno del compacto en el que $y = f(x)$ es un homeomorfismo sobre su imagen

En efecto, si no fuese así podríamos encontrar $x_i, \bar{x}_i$ dos puntos pertenecientes al conjunto $\{x \mid d(x,K) < 1/i\}$ con $f(x_i)=f(\bar{x}_i)$ Pueden seleccionarse sucesiones parciales de x_i y $\bar{x}_i$ de tal forma que tengan límites, estos serán de K Sean l y $\bar{l}$ respectivamente Tendremos entonces que $f(x_i) \longrightarrow f(l)$, $f(\bar{x}_i) \longrightarrow f(\bar{l})$ y puesto que $f(x_i)=f(\bar{x}_i)$ se deduce $f(l)=f(\bar{l})$, de donde $l=\bar{l}$ en contradicción con el que la aplicación sea un homeomorfismo local en un entorno de l de K

De esta forma el conjunto formado por los dos abiertos U_1, U_2 y las funciones de transición $y_i=f_i(x_1, \quad ,x_n)$ definen una variedad diferenciable $\mathcal{V}$ Si suponemos que Spec(A) está recubierto por dos abiertos U_1 y U_2 en las condiciones anteriores, $\mathcal{V}$ contendrá un compacto formado por V_1 y V_2 con la correspondiente identificación de puntos mediante las funciones f_i Este compacto es trivialmente homeomorfo a Spec(A) Lo único que nos resta es comprobar que A es precisamente el anillo de Whitney de este cerrado en la variedad Establezcamos una aplicación de A en este último anillo

Sea $a \in A$, define sendos $a_1 \in A_{V_1}, a_2 \in A_{V_2}$ a_i es un elemento del álgebra de Whitney de V_i en U_i, sea f_i una función de U_i representante de a_i en el anillo de las funciones infinitamente diferenciables en U_i Se trata de comprobar que existe una función diferenciable en toda la variedad que nos de en $C^\infty(U_i)/\mathfrak{p}_{V_i}$ la misma clase que f_i El único problema es que f_1 y f_2 no tienen por qué coincidir en $U_1 \cap U_2$

Sea h una función de $C^\infty(U_2)$ que valga cero en un entorno de U_2-U_1 y 1 en $U_1' \cap U_2'$ donde U_1' y U_2' es un nuevo recubrimiento de la variedad con $U_1' \cap U_2'$ fuertemente contenido en $U_1 \cap U_2$

Definamos la siguiente función diferenciable sobre $\mathcal{V}$

En U_1' se define como la función f_1 y en U_2' como $f_2+h(f_1-f_2)$ Estas funciones coinciden en $U_1' \cap U_2'$, luego definen una función diferenciable en $\mathcal{V}$ y teniendo en cuenta que $h(f_1-f_2)$ tiene todas sus derivadas sucesivas cero en V_2 vemos que nos define el elemento de Whitney de $C^\infty(\mathcal{V})/\mathfrak{p}_{\mathrm{Spec}(A)}$ que venía dado por a_1 y a_2 Es inmediato probar que esta correspondencia así establecida es un isomorfismo

La demostración del caso general en que el Spec(A) es recubrible por s entornos en que al localizar A sean álgebras de Whitney, como en el caso anterior, puede hacerse por recurrencia añadiendo entorno a entorno o bien por inducción Tanto la construcción de la variedad como la comprobación de que el anillo es el álgebra de Whitney del compacto identificado a Spec(A) respecto a la variedad no ofrece ninguna dificultad salvo las de notación y se verifica reiterando los procesos que acabamos de exponer Con esto se acaba la demostración del teorema.

Obsérvese que si el espectro de A fuese localmente homeomorfo a una bola de R^n, es decir, si el espectro fuese una variedad topológica, las condiciones del teorema II 1 1 darían la caracterización del anillo de las funciones diferenciables en una variedad El problema de la caracterización de un anillo que su espectro sea una variedad topológica es un problema no resuelto Sin embargo, para el caso de la recta real sí puede darse una caracterización del álgebra de Whitney de un segmento de la recta Así tendremos la siguiente proposición

Proposición II 1 1

Sea A una Q-álgebra de Fréchet dotada de involución simétrica y generada topológicamente por un elemento autoconjugado La condición necesaria y suficiente para que A sea el álgebra de Whitney de un segmento de R es que tenga las siguientes propiedades

1 A es diferenciablemente completa
2 D_A es un ideal finito generado sobre $A\hat{\otimes}_C A$.
3 Para cada m, D_A^m es un ideal cerrado de $A\hat{\otimes}_C A$ y el graduado de $A\hat{\otimes}_C A$ por D_A es el anillo de polinomios en una variable
4 A es semisimple y de espectro conexo

Demostración

Tras el teorema dado en {11} (0 4), A es el álgebra de Whitney de un compacto de R Si el espectro de A tuviese un solo punto A no sería semisimple Por ser el espectro conexo, es un segmento de R

Bajo la hipótesis de que el espectro sea ya un segmento el que el graduado de $A\hat{\otimes}_C A$ por D_A sea el anillo de polinomios en una variable puede sustituirse por la hipótesis más simple de que $D_A^m \neq D_A^{m+1}$ para cada m En efecto, si x es un generador topológico de A, puede probarse que D_A está generado por $x\otimes 1 - 1\otimes x$ (brevemente x-y), D_A^m/D_A^{m+1} tendrá la clase $\overline{(x-y)^m}$ por generador Se trata de ver que este elemento constituye una base del módulo Sea entonces $g(x,y)\overline{(x-y)^m} \in D_A^{m+1}$ Tendremos $g(x,y)(x-y)^m =$ $= h(x,y)(x-y)^{m+1}$, luego $[g(x,y)-h(x,y)(x-y)](x-y)^m = 0$ Dando a y un valor fijo, $\bar{y}$ tendremos $[g(x,\bar{y})-h(x,\bar{y})(x-\bar{y})](x-\bar{y})^m = 0$ luego $g(x,\bar{y})-h(x,\bar{y})(x-\bar{y}) = 0$ para $x\neq\bar{y}$ y por lo tanto para todo x De aquí que $g(x,y) \in D_A$ y $D_A^m/D_A^{m+1} \cong A$ Lorch [7] impone una condición de este tipo pero no para la diagonal D_A sino solo para los ideales maximales de un álgebra de Banach con un generador y con ello demuestra la existencia de un desarrollo de Taylor en el punto

Obsérvese que la hipótesis de que el espectro sea conexo no puede evitarse en principio ya que el álgebra de Whitney de un compacto del tipo de Cantor en R sería una álgebra semisimple y su espectro no sería un segmento de R La condición de que el álgebra de Whitney sobre un compacto sea semisimple solo equivale a que una función diferenciable que sea cero sobre el compacto tenga todas sus derivadas sucesivas nulas en él No implica esta condición el que el espectro sea localmente homeomorfo a una bola de R^n Una conjetura quizá plausible es que un álgebra de Whitney semisimple y de espectro localmente conexo sea de espectro localmente euclídeo Sería una caracterización diferenciable del espacio localmente euclídeo

CAPITULO TRES

CALCULO DIFERENCIAL FORMAL PARA A-ALGEBRAS DE FRECHET Y MORFISMO TOPOLOGICAMENTE LISO ENTRE L-ALGEBRAS

En el primer apartado del capítulo se dan definiciones de derivaciones y diferenciales para A-álgebras de Fréchet y se estudian propiedades para éstas similares a las propiedades algebraicas de las diferenciales de Kähler.

Dada un álgebra de Fréchet A se pueden definir las funciones diferenciables de R^n en A en la forma habitual. Estas coinciden con $C^\infty(R^n) \hat{\otimes}_C A$. Si K es un compacto de R^n podemos hablar del ideal de nulidades de K en $C^\infty(R^n) \hat{\otimes}_C A$ como el conjunto de funciones nulas en un entorno de K, y del cierre de dicho ideal que denotaremos por $\mathfrak{p}_K(A)$. Al cociente $C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_C A/\mathfrak{p}_K(A)$ le llamaremos álgebra de Whitney valorada en A. Puede darse una definición análoga para un compacto K de una variedad diferenciable.

En el segundo apartado se da la definición de morfismo topo lógicamente liso entre álgebras de Fréchet En la categoría de álgebras que se precisa, una A-álgebra $\mathcal{A}$ es el álgebra de Whitney de un compacto de una variedad valorada en A si y solamente si el morfismo $A \longrightarrow \mathcal{A}$ es liso En esencia se estudia la relación que existe entre el concepto de lisitud del morfismo $A \longrightarrow \mathcal{A}$ donde $\mathcal{A}$ es el álgebra de un fibrado sobre Spec(A), y la lisitud de $C \longrightarrow B$ donde B es el álgebra en la fibra Por último se estudia la relación entre la lisitud del morfismo $A \longrightarrow \mathcal{A}$ y la de sus localizaciones $A_U \longrightarrow \mathcal{A}_U$ En particular se obtiene una caracterización de una A-álgebra $\mathcal{A}$ que localmente sea el álgebra de Whitney de un compacto en una variedad a coeficientes en el anillo localizado correspondiente A_U

1 Cálculo diferencial formal para A-álgebras de Fréchet

Definiciones

Sean A y $\mathcal{A}$ álgebras de Fréchet, diremos que $\mathcal{A}$ es una A-álgebra si existe un morfismo continuo $A \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}$ De esta forma, A opera sobre los elementos de $\mathcal{A}$ Sustituyendo A por A/Nucϕ tenemos un morfismo continuo de $A/\text{Nuc}\phi \longrightarrow A$, de aquí que por comodidad y cuando no haya lugar a confusiones, cuando hagamos referencia a una A-álgebra supondremos que A es una subálgebra de $\mathcal{A}$

Consideremos el morfismo canónico $\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ A su núcleo le llamaremos diagonal de $\mathcal{A}$ sobre A, $D_{\mathcal{A}|A}$

Definiremos el $\mathcal{A}$-módulo de diferenciales como el cociente $\Omega_{\mathcal{A}|A} = D_{\mathcal{A}|A}/\overline{D^2_{\mathcal{A}|A}}$

Para todo $\mathcal{A}$-módulo topológico M, llamaremos derivaciones de $\mathcal{A}$ en M a las A-derivaciones algebraicas de $\mathcal{A}$ en M que sean aplicaciones continuas Lo escribiremos $\text{Der}_A(\mathcal{A},M)$

Teorema III 1 1

Para todo $\mathcal{A}$-módulo topológico completo M se tiene un isomorfismo canónico entre el $\mathcal{A}$-módulo de las A-derivaciones continuas de $\mathcal{A}$ en M y el $\mathcal{A}$-módulo de los $\mathcal{A}$-morfismos continuos de $\Omega_{\mathcal{A}|A}$ en M

$$\text{Der}_A(\mathcal{A},M) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}|A},M)$$

Demostración

Definamos una $\mathfrak{a}$-álgebra topológica $\mathfrak{a}*M$ extensión trivial de $\mathfrak{a}$ por M, dando como estructura aditiva $\mathfrak{a}*M = \mathfrak{a}\oplus M$ y como multiplicativa la natural con $M^2= 0$, es decir $(a,m)(a',m') =$
$= (aa',am'+a'm)$

Cada morfismo continuo f $\Omega_{\mathfrak{a}|A} \longrightarrow M$ define una derivación D $\mathfrak{a} \longrightarrow M$ escribiendo D = f d donde d es la aplicación continua $\mathfrak{a} \longrightarrow \Omega_{\mathfrak{a}|A}$ que asocia al elemento a de $\mathfrak{a}$ la clase en $\Omega_{\mathfrak{a}|A}$ de $a\otimes 1-1\otimes a$

Recíprocamente, sea $D\in Der_A(\mathfrak{a},M)$ Definamos un morfismo de $\mathfrak{a}$-álgebras Φ $\mathfrak{a}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}*M$ definiendo $\Phi(a\otimes b)=(a\ b,b\ Da)$ Dicho morfismo se deduce de la aplicación continua A-bilineal $\mathfrak{a}\times\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}*M$ $(a,b) \longrightarrow (a\ b,b\ Da)$ Observemos que $\Phi(D_{\mathfrak{a}|A}) \subset M$ y como $M^2= 0$, $\Phi(D^2_{\mathfrak{a}|A})= 0$ y por continuidad $\Phi(\overline{D^2_{\mathfrak{a}|A}})= 0$ de donde Φ induce un morfismo continuo

$$f \quad \Omega_{\mathfrak{a}|A}= D_{\mathfrak{a}|A}/\overline{D^2_{\mathfrak{a}|A}} \longrightarrow M$$

que aplica da en $\Phi(a\otimes 1-1\otimes a) = (0,Da)$ De esta forma $D=f\cdot d$ Por otra parte, dado D, f es único puesto que la imagen de $\mathfrak{a}$ por d engendra una parte densa en $\Omega_{\mathfrak{a}|A}$

Relación entre las diferenciales de una A-álgebra y de un cociente de ésta

Teorema III 1 2

Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{B}$ dos A-álgebras de tal forma que $\mathfrak{B}$ es un cociente de $\mathfrak{a}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow 0$$

existe una sucesión de $\mathcal{B}$-módulos y de morfismos continuos

$$\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}^2} \to \mathcal{B} \otimes_{\pi\mathcal{A}} \Omega_{\mathcal{A}|A} \longrightarrow \Omega_{\mathcal{B}|A} \longrightarrow 0$$

tal que la imagen del primer morfismo es densa en el núcleo del segundo y el segundo morfismo es exhaustivo

<u>Demostración</u>

Seguiremos la pauta marcada en {11} en que el enunciado se da para el caso en que A son los números complejos

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Delta_{\mathcal{A}|A} \arrow[r] \arrow[d] & J \arrow[r, "(2)"] \arrow[d] & \mathcal{J} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Delta_{\mathcal{A}|A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A} \otimes_{\pi A} \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "(1)"] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Delta_{\mathcal{B}|A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B} \otimes_{\pi A} \mathcal{B} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Comprobemos que (1) y (2) son aplicaciones exhaustivas y veamos una expresión de J

Consideremos las sucesiones

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & & \\
\mathcal{J} \otimes_{\pi A} \mathcal{B} \arrow[r, "f_1"] & \mathcal{A} \otimes_{\pi A} \mathcal{B} \arrow[r, "f_2"] \arrow[u] & \mathcal{B} \otimes_{\pi A} \mathcal{B} \arrow[r] & 0 \\
 & \mathcal{A} \otimes_{\pi A} \mathcal{A} \arrow[u, "g_2"] & & \\
 & \mathcal{A} \otimes_{\pi A} \mathcal{J} \arrow[u, "g_1"] & &
\end{tikzcd}$$

De aquí que la aplicación $\mathcal{A} \otimes_{\pi A} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \otimes_{\pi A} \mathcal{B}$ es exhaustiva y que el núcleo es la antiimagen por q_2 de $\mathrm{Nuc}\, f_2$

Como $\mathrm{Nuc}\, f_2 = \overline{f_1(\mathfrak{J} \otimes_{\pi A} \mathfrak{B})}$ tendremos que el núcleo J será, si llamamos g_1 $\mathfrak{A} \otimes_{\pi A} \mathfrak{J} \longrightarrow \mathfrak{A} \otimes_{\pi A} \mathfrak{A}$ y $\bar{g}_1$ a la aplicación natural

$\bar{g}_1$ $\mathfrak{J} \otimes_{\pi A} \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A} \otimes_{\pi A} \mathfrak{A}$, $J = \overline{g_1(\mathfrak{A} \otimes_{\pi A} \mathfrak{J}) + \bar{g}_1(\mathfrak{J} \otimes_{\pi A} \mathfrak{A})}$

Naturalmente la aplicación (2) será exhaustiva Consideremos por otra parte el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & D_{\mathfrak{A}|A} \cap \mathfrak{J} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{J} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{J} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D_{\mathfrak{A}|A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{A} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathfrak{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{A} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D_{\mathfrak{B}|A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{B} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathfrak{B} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{B} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Este diagrama resulta de completar el anterior, de donde $\mathfrak{J}$ es el cierre de J en $\mathfrak{A} \otimes_{\pi A} \mathfrak{A}$ y $D_{\mathfrak{A}|A} \cap \mathfrak{J}$ es el cierre, tambien en $\mathfrak{A} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathfrak{A}$, de $\Delta_{\mathfrak{A}|A} \cap J$

De la relación $D_{\mathfrak{B}|A} = (D_{\mathfrak{A}|A} + \mathfrak{J})/\mathfrak{J}$ se obtiene la igualdad topológica

$$\Omega_{\mathfrak{B}|A} = \frac{D_{\mathfrak{A}|A} + \mathfrak{J}}{\overline{D^2_{\mathfrak{A}|A} + \mathfrak{J}}}$$

De aquí que tenemos la sucesión topológicamente exacta

$$0 \longrightarrow \frac{D_{\mathfrak{a}|A} \cap \overline{(D^2_{\mathfrak{a}|A} + \mathfrak{J})}}{\overline{D^2_{\mathfrak{a}|A}}} \longrightarrow \frac{D_{\mathfrak{a}|A}}{\overline{D^2_{\mathfrak{a}|A}}} \longrightarrow \frac{D_{\mathfrak{a}|A} + \mathfrak{J}}{\overline{D^2_{\mathfrak{a}|A} + \mathfrak{J}}} \longrightarrow 0$$

Tensorializando por $\mathfrak{B}$ obtenemos una sucesión de espacios con morfismos continuos

$$\mathfrak{B} \otimes_{\pi\mathfrak{a}} \frac{D_{\mathfrak{a}|A} \cap \overline{(D^2_{\mathfrak{a}|A} + \mathfrak{J})}}{\overline{D^2_{\mathfrak{a}|A}}} \longrightarrow \mathfrak{B} \otimes_{\pi\mathfrak{a}} \Omega_{\mathfrak{a}|A} \longrightarrow \Omega_{\mathfrak{B}|A} \longrightarrow 0$$

donde el último morfismo es exhaustivo, y la imagen del primero es denso en el núcleo del segundo (0 3 6)

Ahora bien, veamos que $\overline{D_{\mathfrak{a}|A} \cap (D^2_{\mathfrak{a}|A} + \mathfrak{J})} = D_{\mathfrak{a}|A} \cap \overline{(D^2_{\mathfrak{a}|A} + \mathfrak{J})}$

En efecto, sea $u \in D_{\mathfrak{a}|A} \cap \overline{(D^2_{\mathfrak{a}|A} + \mathfrak{J})}$, $u = \lim u_n$ con $u_n \in D^2_{\mathfrak{a}|A} + \mathfrak{J}$, como $u \in D_{\mathfrak{a}|A}$ en el morfismo $\pi \;\; \mathfrak{a} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}$ se tendrá $\lim \pi u_n = 0$, $\lim(\pi u_n \otimes 1) = 0$, luego $u = \lim(u_n - \pi u_n \otimes 1)$, donde $u_n - \pi u_n \otimes 1$ pertenece a $(D^2_{\mathfrak{a}|A} + \mathfrak{J}) \cap D_{\mathfrak{a}|A}$

Tendremos entonces la sucesión

$$\mathfrak{B} \otimes_{\pi\mathfrak{a}} \frac{\overline{(\mathfrak{J} \cap D_{\mathfrak{a}|A}) + D^2_{\mathfrak{a}|A}}}{\overline{D^2_{\mathfrak{a}|A}}} \longrightarrow \mathfrak{B} \otimes_{\pi\mathfrak{a}} \Omega_{\mathfrak{a}|A} \longrightarrow \Omega_{\mathfrak{B}|A} \longrightarrow 0$$

ya que $D_{\mathfrak{a}|A} \cap (D^2_{\mathfrak{a}|A} + \mathfrak{J}) = (\mathfrak{J} \cap D_{\mathfrak{a}|A}) + D^2_{\mathfrak{a}|A}$

Consideremos el morfismo $\mathfrak{J} \longrightarrow \mathfrak{B} \otimes_{\pi\mathfrak{a}} \frac{\overline{(\mathfrak{J} \cap D_{\mathfrak{a}|A}) + D^2_{\mathfrak{a}|A}}}{\overline{D^2_{\mathfrak{a}|A}}}$ que asigna a $z \in \mathfrak{J}$ el elemento $1_{\mathfrak{B}} \otimes dz$ (dz es la clase en $\Omega_{\mathfrak{a}|A}$ de $z \otimes 1 - 1 \otimes z$)

Este morfismo es continuo por serlo la aplicación diferencial y es nulo sobre $\mathcal{J}^2$, luego sobre $\overline{\mathcal{J}^2}$ De aquí que tendremos un morfismo continuo

$$\frac{\mathcal{J}}{\overline{\mathcal{J}^2}} \longrightarrow \mathcal{B} \underset{\pi\mathcal{A}}{\otimes} \frac{\overline{(\mathcal{J} \cap D_{\mathcal{A}|A}) + D^2_{\mathcal{A}|A}}}{\overline{D^2_{\mathcal{A}|A}}} \qquad (1)$$

Para ver que la imagen es densa es suficiente verificar que todo elemento de $J \cap \Delta_{\mathcal{A}|A}$ en el cociente (1) es imagen de algún elemento de $\mathcal{J}/\overline{\mathcal{J}^2}$, es decir, es de la forma dz +xdt, con z,t de $\mathcal{J}$, y x de $\mathcal{A}$ Sea $u \in J \cap \Delta_{\mathcal{A}|A}$, es de la forma $\Sigma a_i \otimes z_i + t_i \otimes b_i$ con z_i y t_i de $\mathcal{J}$ y de tal forma que $\Sigma a_i z_i + t_i b_i = 0$ en $\mathcal{A}$

Podemos escribir

$$u = \Sigma -a_i \otimes 1(z_i \otimes 1 - 1 \otimes z_i) + 1 \otimes b_i(t_i \otimes 1 - 1 \otimes t_i) + \Sigma(1 \otimes b_i t_i - b_i t_i \otimes 1) =$$

$$= \Sigma -a_i dz_i - b_i dt_i - db_i t_i$$

luego vale el teorema

Corolario III 1 1

Sea $\mathcal{B}$ un A-álgebra que además de ser un cociente de una A-álgebra $\mathcal{A}$ sea una subálgebra estable en el morfismo $\mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ Se tiene entonces una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}/\overline{\mathcal{J}^2} \longrightarrow \mathcal{B} \underset{\pi\mathcal{A}}{\otimes} \Omega_{|A} \longrightarrow \Omega_{\mathcal{B}|A} \longrightarrow 0$$

Se verifica además $\mathcal{B} \underset{\pi\mathcal{A}}{\otimes} \Omega_{\mathcal{A}|A} = (\mathcal{J}/\overline{\mathcal{J}^2}) \oplus \Omega_{\mathcal{B}|A}$

Demostración

Definamos una derivación D $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{J}/\overline{\mathcal{J}^2}$ asignando a cada elemento a de $\mathcal{A}$ la clase de a - πa en $\mathcal{J}/\overline{\mathcal{J}^2}$. Esta derivación da un mor fismo continuo de $\mathfrak{A}$-módulos f $\Omega_{\mathfrak{A}|A} \longrightarrow \mathfrak{J}/\overline{\mathfrak{J}^2}$ que es nulo en $\mathfrak{J}\Omega_{\mathfrak{A}|A}$, luego en su cierre

De aquí que define un morfismo

$$\mathfrak{B} \otimes_{\pi A} \Omega_{\mathfrak{A}|A} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{J}/\overline{\mathfrak{J}^2} \qquad \pi(1_{\mathfrak{B}} \otimes da) = Da$$

Este morfismo es exhaustivo pues todo elemento de $\mathfrak{J}$ es de la forma a-πa Además ésta es la aplicación inversa de la aplicación que aparecía en el teorema III 1 2 $\mathfrak{J}/\overline{\mathfrak{J}^2} \longrightarrow \mathfrak{B} \otimes_{\pi A} \Omega_{\mathfrak{A}|A}$ De aquí que $\mathfrak{J}/\overline{\mathfrak{J}^2}$ es sumando directo topológico de $\mathfrak{B} \otimes_{\pi A} \Omega_{\mathfrak{A}|A}$ y por lo tanto es cerrado Luego vale la exactitud de la sucesión y queda demostrado el corolario

Teorema III 1 3

Sean A, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ C-álgebras de Fréchet y supongamos que tenemos morfismos continuos $A \xrightarrow{\pi} \mathfrak{A} \xrightarrow{\tau} \mathfrak{B}$

Existe una sucesión de $\mathfrak{A}$-módulos y de morfismos continuos

$$\Omega_{\mathfrak{A}|A} \otimes_{\pi A} \mathfrak{B} \longrightarrow \Omega_{\mathfrak{B}|A} \longrightarrow \Omega_{\mathfrak{B}|\mathfrak{A}} \longrightarrow 0$$

tal que la imagen del primer morfismo es densa en el núcleo del segundo, y este último es exhaustivo

Demostración

Veamos en primer lugar el núcleo del morfismo natural $\mathfrak{B} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B} \hat{\otimes}_{\pi \mathfrak{A}} \mathfrak{B}$

$$\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi\mathcal{A}}\mathcal{B} = \frac{\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi}\mathcal{B}}{\overline{\Delta_{\mathcal{A}|C}(\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi}\mathcal{B})}} = \frac{(\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi}\mathcal{B})/\overline{\Delta_{A|C}(\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi}\mathcal{B})}}{\overline{\Delta_{\mathcal{A}|C}(\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi}\mathcal{B})}/\overline{\Delta_{A|C}(\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi}\mathcal{B})}} =$$

$$= \frac{\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{B}}{\overline{\Delta_{\mathcal{A}|C}(\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi}\mathcal{B})}/\overline{\Delta_{A|C}(\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi}\mathcal{B})}}$$

Ahora bien, si consideramos el morfismo natural $\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A} \xrightarrow{1} \mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{B}$, $D_{\mathcal{A}|A}$ tendrá una imagen $i(D_{\mathcal{A}|A})$ en la cual es densa $i(\Delta_{\mathcal{A}|A})$

Es inmediato verificar que la imagen de

$\overline{\Delta_{\mathcal{A}|C}(\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi}\mathcal{B})}/\overline{\Delta_{A|C}(\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi}\mathcal{B})}$ en la inclusión en $\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{B}$ coincide con $\overline{i(\Delta_{\mathcal{A}|A})\,\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{B}}$, pues ambos consisten en el ideal cerrado engendrado por los elementos $\tau f\otimes 1 - 1\otimes\tau f$ en $\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{B}$

Podemos entonces escribir el siguiente diagrama de sucesiones exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & D_{\mathcal{B}|\mathcal{A}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi\mathcal{A}}\mathcal{B} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D_{\mathcal{B}|A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{B} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{i(\Delta_{\mathcal{A}|A})\,\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{B}} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{i(\Delta_{\mathcal{A}|A})\,\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{B}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

En particular, tenemos la sucesión exacta _

$$0 \longrightarrow \overline{i(\Delta_{\mathcal{A}|A})\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{B}} \longrightarrow D_{\mathcal{B}|A} \longrightarrow D_{\mathcal{B}|\mathcal{A}} \longrightarrow 0$$

de aquí que tendremos el siguiente diagrama de sucesiones algebraicamente exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \dfrac{\overline{i(\Delta_{\mathcal{A}|A})\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{B}}}{\overline{D^2_{\mathcal{B}|A}} \cap \overline{i(\Delta_{\mathcal{A}|A})\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{B}}} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{\mathcal{B}|A} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{\mathcal{B}|\mathcal{A}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{i(\Delta_{\mathcal{A}|A})\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{B}} \arrow[r] \arrow[d] & D_{\mathcal{B}|A} \arrow[r] \arrow[d] & D_{\mathcal{B}|\mathcal{A}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{D^2_{\mathcal{B}|A}} \cap \overline{i(\Delta_{\mathcal{A}|A})\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{B}} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{D^2_{\mathcal{B}|A}} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{D^2_{\mathcal{B}|\mathcal{A}}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

En resumen, obtenemos la sucesión topológicamente exacta

$$0 \longrightarrow \frac{\overline{i(\Delta_{\mathcal{A}|A})\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{B}} + \overline{D^2_{\mathcal{B}|A}}}{\overline{D^2_{\mathcal{B}|A}}} \longrightarrow \Omega_{\mathcal{B}|A} \longrightarrow \Omega_{\mathcal{B}|\mathcal{A}} \longrightarrow 0$$

Consideremos la aplicación continua

$$\Omega_{\mathcal{A}|A} \hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{B} \longrightarrow \Omega_{\mathcal{B}|A}$$

que asigna a $da \otimes f$ el elemento fda, donde la última diferencial está tomada en $\Omega_{\mathcal{B}|A}$ Lo único que resta probar es que una parte densa de la imagen de $(\overline{i(\Delta_{\mathcal{A}|A})\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{B}} + \overline{D^2_{\mathcal{B}|A}})/\overline{D^2_{\mathcal{B}|A}}$ en $\Omega_{\mathcal{B}|A}$ proviene de elementos de la forma fda con $a \in \mathcal{A}$ Esto es, por otra parte, trivial

Observación

La imagen de $\Omega_{\mathcal{A}|A} \otimes_{\pi A} \mathcal{B}$ en $\Omega_{\mathcal{B}|A}$ es el $\mathcal{B}$-módulo de las diferenciales en $\Omega_{\mathcal{B}|A}$ engendrados por las diferenciales de $\tau(\mathcal{A})$ Si este módulo es cerrado la sucesión del teorema es exacta

2 MORFISMO TOPOLOGICAMENTE LISO ENTRE L-ALGEBRAS

Preliminares

Como ya hemos dicho la motivación de este apartado es la de caracterizar en términos algebraicos y topológicos un álgebra $\mathcal{A}$ para que sea el "algebra de Whitney" de un compacto de R^n valorado en A, ó bien de un compacto de una variedad valorado en A ó de un álgebra que localmente sea de este tipo. Veamos en primer lugar una descripción del álgebra de Whitney de un compacto de R^n valorada en A

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathfrak{p}_K \longrightarrow C^{\infty}(R^n) \longrightarrow W(K) \longrightarrow 0$$

donde $\mathfrak{p}_K$ es el cierre del ideal de nulidades del compacto K en $C^{\infty}(R^n)$ y W(K) es el álgebra de Whitney ordinaria correspondiente a K Tensorializando por A obtenemos la sucesión :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{p}_K \hat{\otimes}_C A \longrightarrow C^{\infty}(R^n, A) \longrightarrow W(K) \hat{\otimes}_C A \longrightarrow 0$$

Veamos que $\mathfrak{p}_K \hat{\otimes}_C A$ es el ideal de nulidades cerrado $(\mathfrak{p}_K(A))$

correspondiente a K en $C^{\infty}(R^n,A)$ y coincide con el ideal I de los elementos de $C^{\infty}(R^n,A)$ de derivadas sucesivas nulas en K

Desde luego se verifica que $\rho_K \otimes_C A \subset \rho_K(A) \subset I$, luego $\rho_K \hat{\otimes}_C A \subset \rho_K(A) \subset I$ Por otra parte

$$\rho_K I \subset \rho_K(C^{\infty}(R^n)\hat{\otimes}_C A) \subset \rho_K \hat{\otimes}_C A \subset \rho_K(A) \subset I$$

si demostramos que $\rho_K I$ es denso en I, por ser $\rho_K \hat{\otimes}_C A$ y $\rho_K(A)$ cerrados, valdría la proposición

Sea F de I, p una seminorma en A, existe un entorno de K formado por los elementos de R^n que distan de K menos que 2d en el que se verifica

$$p(D_x^k F) < \varepsilon \; d(x,K)^{m-|k|} < \varepsilon \; d^{m-|k|}$$

para un $\varepsilon > 0$ y m prefijados y $|k| < m$

Dividamos R^n en cubos de lado d y consideremos para cada cubo el del mismo centro y de lado 2d Existe una partición de la unidad subordinada a estos últimos cubos (J) tales que para $|k| < m$

$$\sum_{i \in J} |D^k \Phi_i(x)| < C/d^{|k|}$$

donde C solo depende de m y n (véase (7 bis))

Sea J' la familia de aquellos cubos S que cortan a K. Definamos $\Phi = \sum_{S \in J'} \Phi_S$, $\Phi(x) = 1$ en un entorno de K Veamos que $(-\Phi+1)F$ "aproxima" a la función F

$(-\Phi+1)F - F = -\Phi F$ Ahora bien, Φ es cero fuera del entorno de K de radio 2d y dentro de él tendremos

$$p(D_x^k(\phi F)) = p(D_x^k(\sum_{S\in J'}\phi_S F)) = p(\sum_{S\in J'}\sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}D_x^h(\phi_S)D_x^{k-h}F) \leq$$

$$\leq \sum_{S\in J'}\sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}|D_x^h(\phi_S)|p(D_x^{k-h}F) \leq k\ \varepsilon\ \ d^{m-k-|h|}/d^{|h|} \leq$$

$$\leq k_1\ \varepsilon$$

donde k_1 no depende de d y por lo tanto no depende de ε Puesto que un sistema fundamental de seminormas en $C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_C A$ viene dado por $f \longrightarrow \sup_{x\in K} p(D_x^k(f))$ donde p recorre un sistema fundamental de seminormas en A, K un sistema exhaustivo de compactos en R^n y $|k|$ los diversos índices de derivación, se deduce que $(-\phi+1)F$ que es un elemento de $p_K I$ "aproxima" a F De aquí la densidad de $p_K I$ en I

En resumen, el álgebra de Whitney de un compacto de R^n valorada en A es justamente, $W(K)\hat{\otimes}_C A$, donde $W(K)$ es el álgebra de Whitney ordinaria de K en R^n

Puede verse una proposición análoga para un compacto K de una variedad diferenciable El álgebra de Whitney del compacto valorada en A es $W(K)\hat{\otimes}_C A$ con $W(K)$ el álgebra de Whitney del compacto en la variedad

Pasemos ya a la definición de morfismo topológicamente liso entre L-álgebras, definición análoga a la que da Grothendieck para el morfismo diferenciablemente liso (sus condiciones son puramente algebraicas)

<u>Definición III 2 1</u>

Sea $\mathfrak{a}$ una A-álgebra $\mathfrak{a}$ y A dos álgebras de Fréchet Diremos que el morfismo inyección $A \longrightarrow \mathfrak{a}$ es <u>topológicamente liso</u> (t.liso) si se verifican las siguientes condiciones

1 $D_{\mathcal{A}|A}$ es un $\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}$ -módulo finito generado

2 $D^{m}_{\mathcal{A}|A}$ son ideales cerrados de $\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}$, $\Omega_{\mathcal{A}|A}$ es un $\mathcal{A}$-módulo proyectivo y

$$\mathrm{Grad}_{D_{\mathcal{A}|A}}(\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}) = \mathrm{Simetr}_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}|A})$$

Observación

Según (I 3 1), bajo la condición 1 en la clase de las L-álgebras ó de las F^*-álgebras puede sustituirse el que $\Omega_{\mathcal{A}|A}$ sea un $\mathcal{A}$-módulo de Fréchet proyectivo por el que sea plano

Interesa precisar la situación de cuando una A-álgebra $\mathcal{A}$ consiste en los "elementos de tipo A" definidos en Spec(A) y valorados en una álgebra B Daremos las siguientes definiciones

Definiciones III 2 2

En la clase de las L-álgebras nucleares diremos que una A-álgebra $\mathcal{A}$ es una extensión trivial finita sobre A si $\mathcal{A}= B\hat{\otimes}_{C}A$ donde B es una L-álgebra topológicamente finito generada Si B puede tomarse generada por elementos autoconjugados diremos que la extensión tiene generadores autoconjugados

Diremos que $\mathcal{A}$ es una extensión localmente trivial finita sobre A si para cada punto de Spec(A) existe un entorno U tal que la localización $\mathcal{A}_U = \mathcal{A}\hat{\otimes}_A A_U$ es una extensión trivial finita sobre A

En el primer caso la inyección $A \longrightarrow \mathcal{A}$ induce una aplicación entre los espectros Spec($\mathcal{A}$)$\longrightarrow$Spec(A) que hace de ellos un fibrado trivial de fibra Spec(B) En el segundo caso se trata de un fibrado localmente trivial El problema de cuando una A-álgebra $\mathcal{A}$ es una extensión trivial ó localmente trivial sobre A es un problema de índole distinta a los que estamos tratando Desconocemos que existan caracterizaciones para que una A-álgebra $\mathcal{A}$ esté en esta situación El problema en general está desde luego abierto y tendría gran interes su solución

III 2 2 MORFISMO T LISO Y EXTENSIONES TRIVIALES FINITAS

Se trata de dada una extensión trivial finita sobre una L-álgebra A, dar una caracterización en términos algebraicos y topológicos para que sea el álgebra de Whitney de un compacto de una variedad con coeficientes en A Tras lo dicho en los preliminares se trata de relacionar la condición de que el morfismo de A en su extensión sea un morfismo t liso con la condición de que en el álgebra de las fibras B, el morfismo C$\longrightarrow$B sea t liso Daremos despues condiciones específicas para que como variedad pueda tomarse el espacio euclídeo En un apartado posterior examinaremos las extensiones localmente triviales

Supondremos que todas las álgebras del enunciado son L-álgebras nucleares, diferenciablemente completas y de espectro conexo. Sea $\mathcal{A}$ una extensión trivial finita sobre A por elementos autoconjugados $\mathcal{A} = B\hat{\otimes}_C A$ y supongamos que B es una Q-álgebra, es decir de espectro compacto K

Teorema III 2 1

Bajo las hipótesis anteriores el morfismo $A \longrightarrow \mathfrak{a}$ es t liso si/y solamente si el morfismo $C \longrightarrow B$ es t liso En este caso las dimensiones locales de $\Omega_{\mathfrak{a}|A}$ y de Ω_B coinciden

Observaciones

1 La hipótesis de que los espectros sean conexos tienen por único objeto que las dimensiones locales de $\Omega_{\mathfrak{a}|A}$ y de Ω_B sean constantes Puede entonces sustituirse aquella hipótesis por ésta

2 El teorema anterior constituye una caracterización del álgebra de Whitney de un compacto en una variedad con coeficientes en A (W(K,A)) ya que según el teorema II 1 1, en las condiciones anteriores el que el morfismo $C \longrightarrow B$ sea t liso equivale a que B sea el álgebra de Whitney de un compacto K en una variedad, y según los preliminares $W(K,A) = W(K)\hat{\otimes}_C A$

Antes de pasar a la demostración del teorema veamos algunos lemas que necesitaremos

Lema III 2 1

Sea M un A-módulo de Fréchet, A un álgebra de Fréchet y sea N un e v t de Fréchet Se verifican los siguientes isomorfismos topológicos

$$M\ {}_{\pi}\hat{\otimes}_A (A\hat{\otimes}_C N) = (M_{\pi}\hat{\otimes}_A A)\hat{\otimes}_C N = M\hat{\otimes}_C N$$

Demostración

Consideremos una aplicación A-bilineal

$$(1) \qquad M \times (A \hat{\otimes}_C N) \longrightarrow M \hat{\otimes}_C N$$

$$(m, \Sigma\lambda_i a_i \otimes n_i) \longrightarrow \Sigma\lambda_i a_i m \otimes n_i$$

Obsérvese que $\Sigma\lambda_i a_i m \otimes n_i$ es una serie convergente por estar la sucesión a_i acotada en A y por lo tanto $a_i m$ en M

Veamos que la aplicación es separadamente continua, luego continua En efecto, para m fijo la aplicación

$$A \hat{\otimes}_C N \longrightarrow M \hat{\otimes}_C N$$

$$\Sigma\lambda_i a_i \otimes n_i \longrightarrow \Sigma\lambda_i a_i m \otimes n_i$$

es continua pues proviene a su vez de la aplicación bilineal continua $A \times N \longrightarrow M \hat{\otimes}_C N$ que asigna al par (a,n) el elemento $am \otimes n$

Veamos que la aplicación (1) es continua en la primera variable Será una aplicación $M \longrightarrow M \hat{\otimes}_C N$ que asigna a m, $\Sigma\lambda_i a_i m \otimes n_i$ Observemos que si p recorre una familia fundamental de seminormas en M y q una familia análoga en N, $p \otimes q$ es una familia fundamental de seminormas en $M \hat{\otimes}_C N$, donde

$p \otimes q\ (\Sigma\lambda_i a_i m \otimes n_i) = \inf\ \{\Sigma|\lambda_i|p(a_i m\ )q(n_i)\}$, estando el ínfimo tomado para todas las expresiones posibles del elemento Tenemos entonces

$$p \otimes q(\Sigma\lambda_i a_i m \otimes n_i) \leq \Sigma|\lambda_i|p(a_i m)q(n_i)$$

de donde la aplicación $M \longrightarrow M \hat{\otimes}_C N$ es continua

Tendremos entonces una aplicación A-lineal continua

$$M \hat{\otimes}_{\pi A} (A \hat{\otimes}_C N) \xrightarrow{\phi} M \hat{\otimes}_C N$$

Por otra parte, podemos considerar la aplicación bilineal

$$M \times N \longrightarrow M \hat{\otimes}_{\pi A} (A \hat{\otimes}_C N)$$

que asigna al par (m,n) el elemento $m \otimes_A (1 \otimes n)$

Es inmediato demostrar que se trata de una aplicación separadamente continua, luego continua y que define por tanto una aplicación continua a su vez

$$M \hat{\otimes}_C N \xrightarrow{\psi} M \hat{\otimes}_{\pi A} (A \hat{\otimes}_C N)$$

Las aplicaciones ϕ y ψ son inversas una de la otra sobre una parte densa de los espacios, luego en todo el espacio Se trata pues de isomorfismos

El isomorfismo $(M \hat{\otimes}_{\pi A} A) \hat{\otimes}_C N = M \hat{\otimes}_C N$ es trivial a partir de la relación $M \hat{\otimes}_{\pi A} A = M$

Lema III 2 2

Sean A y B álgebras de Fréchet, A nuclear $\mathcal{a} = B \hat{\otimes}_C A$ es una A-álgebra Se verifica $D_{\mathcal{a}|A} = D_B \hat{\otimes}_C A$ y $\mathcal{a} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathcal{a} = (B \hat{\otimes}_C B) \hat{\otimes}_C A$

En efecto, tenemos las sucesiones

$$0 \longrightarrow D_{\mathcal{a}|A} \longrightarrow \mathcal{a} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathcal{a} \longrightarrow \mathcal{a} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow D_B \longrightarrow B \hat{\otimes}_C B \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

Tensorializando esta última por A obtenemos

$$0 \longrightarrow D_B \hat{\otimes}_C A \longrightarrow (B \hat{\otimes}_C B) \hat{\otimes}_C A \longrightarrow B \hat{\otimes}_C A \longrightarrow 0$$

Ahora bien

$\mathcal{a} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathcal{a} = (B \hat{\otimes}_C A) \hat{\otimes}_{\pi A} (B \hat{\otimes}_C A)$, aplicando el lema III 2.1 es igual a

$$= B \hat{\otimes}_C (A \hat{\otimes}_{\pi A} (B \hat{\otimes}_C A)) = B \hat{\otimes}_C (B \hat{\otimes}_C A) = (B \hat{\otimes}_C B) \hat{\otimes}_C A$$

A partir de aquí la proposición es trivial

<u>Lema III 2 3</u>

En las condiciones del lema III 2 2 se verifica

$$\overline{D^n_{\mathcal{a}|A}} = \overline{D^n_B} \hat{\otimes}_C A \qquad y \qquad \frac{\overline{D^n_{\mathcal{a}|A}}}{\overline{D^{n+1}_{\mathcal{a}|A}}} = \frac{\overline{D^n_B}}{\overline{D^{n+1}_B}} \hat{\otimes}_C A$$

donde los cierres están tomados respectivamente en $\mathcal{a} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathcal{a}$ y en $B \hat{\otimes}_C B$,

<u>Demostración</u>

$$\overline{D^n_{\mathcal{a}|A}} = \overline{(D_B \otimes_C A)^n} = \overline{(D_B \otimes_C A)^n} = \overline{D^n_B \otimes_C A}$$

Ahora bien, $(D_B \otimes_C A)^n$ con la topología inducida por $\mathcal{a} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathcal{a} =$ $= (B \hat{\otimes}_C B) \hat{\otimes}_C A$ y la topología π de $D^n_B \otimes_\pi A$ coinciden Esto es consecuencia de que la proposición es cierta para las topologías ε y de la nuclearidad de A

De aquí que $\overline{D^n_B \otimes_C A} = D^n_B \hat{\otimes}_C A$ o si se prefiere es igual a $\overline{D^n_B} \hat{\otimes}_C A$

La relación $\overline{D^n_{\mathcal{a}|A}} / \overline{D^{n+1}_{\mathcal{a}|A}} = (\overline{D^n_B}/\overline{D^{n+1}_B}) \hat{\otimes}_C A$ se sigue ahora sin más que tensorializar por A la sucesión

$$0 \longrightarrow \overline{D^{m+1}_B} \longrightarrow \overline{D^m_B} \longrightarrow \overline{D^m_B}/\overline{D^{m+1}_B} \longrightarrow 0$$

teniendo en cuenta (0 1 3), que A es nuclear y que los espacios son de Fréchet

Lema III 2 4

Sea M un B-módulo de Fréchet y N un A-módulo de Fréchet B y A L-álgebras, Todos los espacios los supondremos nucleares Si U es un abierto de Spec(B) y V uno de Spec(A) se verifica que la localización de $M \otimes_C N$ como $B\hat{\otimes}_C A$-módulo en $U \times V$ es el $B_U \hat{\otimes}_C A_V$-módulo $M_U \otimes_C N_V$

Demostración

Desde luego que $M \otimes_C N$ tiene estructura de $B \otimes_C A$-módulo Veamos en primer lugar que

$$(B\hat{\otimes}_C A)_{U\times \mathrm{Spec}(A)} \underset{B\hat{\otimes}_C A}{\otimes} (M\hat{\otimes}_C N) = M_U \hat{\otimes}_C N$$

En efecto, sea Q_n una sucesión exhaustiva de compactos de U definidora de la localización de B en U Siguiendo la notación de I 1 4 , sea $I_{Q_n} = \bigcap_{\substack{x\in Q_n \\ h\in N^n}} \overline{m_x^h}$ Sabemos (I 1 4) que $(B/I_{Q_n})\hat{\otimes}_C A = (B\hat{\otimes}_C A)/I_{Q_n\times \mathrm{Spec}(A)}$

de donde $I_{Q_n\times \mathrm{Spec}(A)} = I_{Q_n}\hat{\otimes}_C A$ por ser los espacios de Fréchet y ser A nuclear Tendremos entonces que $I_{Q_n}\hat{\otimes}_C A$ pueden tomarse como ideales definidores de la localización de $B\hat{\otimes}_C A$ en $U\times\mathrm{Spec}(A)$ Tendremos

$$(M\hat{\otimes}_C N)_{U\times \mathrm{Spec}(A)} = \varprojlim \frac{M \otimes_C N}{\overline{(I_{Q_n}\hat{\otimes}_C B)(M\hat{\otimes}_C N)}} = \varprojlim \frac{M\hat{\otimes}_C N}{(I_{Q_n} M)\otimes_C N}$$ que por la nuclearidad de N es igual a

$\varprojlim \left(\frac{M}{\overline{I_{Q_n} M}} \hat{\otimes}_C N\right)$ y por la conmutación del producto tensorial π completado con los límites proyectivos estrictos (0 1 1.), es igual a

$$\left(\varprojlim \frac{M}{I_{C_n} M} \right) \hat{\otimes}_C N = M_U \hat{\otimes}_C N$$

Aplicando los mismos razonamientos al A-módulo N, tendremos que

$$(M\hat{\otimes}_C N)_{U\times V} = ((M\hat{\otimes}_C N)_{U\times \mathrm{Spec}(A)})_{U\times V} = (M_U\hat{\otimes}_C N)_{U\times V} = M_U\hat{\otimes}_C N_V$$

como queríamos demostrar

Estamos ya en condiciones de pasar a la demostración del teorema III 2 1

a) <u>Si el morfismo $C \longrightarrow B$ es t liso, el morfismo $A \longrightarrow \mathcal{A}$ es t liso</u>

1 El morfismo $A \longrightarrow \mathcal{A}$ verifica la condición primera de morfismo t liso

En efecto, D_B es finito generado sobre $B\hat{\otimes}_C B$, luego tenemos una sucesión exacta

$$L_{B\hat{\otimes}_C B} \longrightarrow D_B \longrightarrow 0$$

donde $L_{B\hat{\otimes}_C B}$ es un módulo libre de dimensión finita Tensorializando por A

$$L_{B\otimes_C B}\hat{\otimes}_C A \longrightarrow D_B\hat{\otimes}_C A \longrightarrow 0$$

luego, aplicando los lemas III 2 1 y III222., $D_{\mathcal{A}|A}$ es un $\mathcal{A}\hat{\otimes}_A\mathcal{A}$-módulo finito generado

2 El moffismo $A \longrightarrow \mathcal{A}$ verifica la condición segunda de morfismo t liso

Veamos en primer lugar que $D^m_{\mathcal{A}|A}$ son ideales cerrados de $\mathcal{A}\hat{\otimes}_A\mathcal{A}$

Bajo las hipótesis del teorema III 2 1 si el morfismo $C \to B$ es t liso, B es el álgebra de Whitney correspondiente a un compacto K en una variedad $\mathcal{V}$ Según los preliminares del teorema $\mathcal{A}=B\hat{\otimes}_C A =$
$= W(K)\hat{\otimes}_C A$ es el álgebra de Whitney de K valorada en A Consideremos en primer lugar el anillo $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}(\mathcal{V})\hat{\otimes}_C A$ Aplicando el lema III 2 1
$\mathcal{E}_A \hat{\otimes}_{\pi A} \mathcal{E}_A = \mathcal{E}(\mathcal{V}\times\mathcal{V})\hat{\otimes}_C A = \mathcal{E}(\mathcal{V}\times\mathcal{V},A)$ Sea D^k la aplicación de $\mathcal{E}_A$ en sí mismo que asigna a $f\otimes a$ el elemento $D^k f\otimes a$, donde $D^k f$ es la función que resulta de aplicar a f k campos sucesivos de $\mathcal{V}$ Sea ρ la aplicación restricción a la diagonal $\mathcal{E}(\mathcal{V}\times\mathcal{V},A) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathcal{V},A)$ Es fácil comprobar que $D^m_{\mathcal{E}_A|A}$ es la intersección de los núcleos de las aplicaciones continuas $\rho\circ(D^k\otimes 1)$ $\mathcal{E}(\mathcal{V}\times\mathcal{V},A) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathcal{V},A)$ para $|k|<m$ Se trata pues de un ideal cerrado Estas aplicaciones inducen unas aplicaciones continuas $\tilde{\rho}\circ(\tilde{D}^k\otimes 1) = \mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A} = W(K)\hat{\otimes}_C W(K)\hat{\otimes}_C A \longrightarrow W(K)\hat{\otimes}_C A$
$D^m_{\mathcal{A}|A}$ es la intersección de estos núcleos para $|k|<m$, luego son ideales cerrados

Veamos que $\Omega_{\mathcal{A}|A}$ es un $\mathcal{A}$-módulo de Fréchet proyectivo de la misma dimensión local que Ω_B En efecto, sea U un abierto en el que Ω_{B_U} sea libre Tendremos entonces que según los lemas III2 3 y III 2 4

$$(\Omega_{\mathcal{A}|A})_{U\times \mathrm{Spec}(A)} = (\Omega_B\hat{\otimes}_C A)_{U\times \mathrm{Spec}(A)} = \Omega_{B_U}\hat{\otimes}_C A$$

que es un módulo libre sobre $\mathcal{A}_{U\times \mathrm{Spec}(A)} = B_U\hat{\otimes}_C A$

Se trata de probar, por último, que $\mathrm{Simetr}_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}|A}) = \mathrm{Grad}_{D_{\mathcal{A}|A}}(\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A})$

Consideremos el morfismo canónico del $\mathrm{Simetr}_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}|A})$ en el $\mathrm{Grad}_{D_{\mathcal{A}|A}}(\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A})$ Al localizar dicho morfismo en un abierto del tipo $U\times\mathrm{Spec}(A)$ con Ω_{B_U} libre, obtendremos un isomorfismo En efec to

$$\mathrm{Simetr}_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}|A})_{U\times \mathrm{Spec}(A)} = \mathrm{Simetr}_{\mathcal{A}_{U\times \mathrm{Spec}(A)}}((\Omega_{\mathcal{A}|A})_{U\times \mathrm{Spec}(A)}) =$$

$$= \mathrm{Simetr}_{B_U \hat{\otimes}_C A}(\Omega_{B_U} \hat{\otimes}_C A) = (\mathrm{Simetr}_{B_U}(\Omega_{B_U}))\hat{\otimes}_C A =$$

$$= (\mathrm{Grad}_{D_{B_U}}(B_U \hat{\otimes}_C B_U))\hat{\otimes}_C A = \mathrm{Grad}_{D_{B_U \hat{\otimes}_C A}}(B_U \hat{\otimes}_C B_U \hat{\otimes}_C A) =$$

$$= \mathrm{Grad}_{D_{\mathcal{A}_{U\times \mathrm{Spec}(A)}|A}}(\mathcal{A}_{U\times \mathrm{Spec}(A)} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathcal{A}_{U\times \mathrm{Spec}(A)}) =$$

$$= (\mathrm{Grad}_{D_{\mathcal{A}|A}}(\mathcal{A} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathcal{A}))_{U\times \mathrm{Spec}(A)}$$

En estas igualdades se ha hecho uso reiterado de los lemas anteriores y de la nuclearidad de A

Ahora bien, puesto que $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ puede recubrirse con un número finito de estos abiertos, $U\times \mathrm{Spec}(A)$, se deduce la identidad entre el simetrizado y el graduado del enunciado

Veamos el recíproco del teorema

b) <u>Si el morfismo $A \longrightarrow \mathcal{A}$ es t liso lo es el morfismo $C \longrightarrow B$</u>

1 El morfismo $C \longrightarrow B$ verifica la condición primera de morfismo t liso

Sea una sucesión exacta $L_{\mathcal{A} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathcal{A}} \longrightarrow D_{\mathcal{A}|A} \longrightarrow 0$, donde L es un $\mathcal{A} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathcal{A}$-módulo libre de dimensión finita Tensorializando por A/m_x, donde m_x es un ideal maximal cerrado de A

$$L_{\mathcal{A} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathcal{A}} \hat{\otimes}_{\pi A} (A/m_x) \longrightarrow D_{\mathcal{A}|A} \hat{\otimes}_{\pi A} (A/m_x) \longrightarrow 0$$

haciendo uso de los lemas III 2 1 y III 2 2

$(\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A})\hat{\otimes}_{\pi A}(A/m_x) = ((B\hat{\otimes}_C B)\hat{\otimes}_C A)\hat{\otimes}_{\pi A}(A/m_x) = B\hat{\otimes}_C B$ y

$D_{\mathcal{A}|A}\hat{\otimes}_{\pi A}(A/m_x) = (D_B\hat{\otimes}_C A)\hat{\otimes}_{\pi A}(A/m_x) = D_B$

luego tenemos la sucesión

$$L_B\hat{\otimes}_C B \longrightarrow D_B \longrightarrow 0$$

que permite afirmar que D_B es finito generado sobre $B\hat{\otimes}_C B$

2 El morfismo $C \longrightarrow B$ verifica la condición segunda de morfismo t liso

Veamos que D_B^m son ideales cerrados en $B\hat{\otimes}_C B$

Consideremos el epimorfismo "tomar valores en x"

$$\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A} = (B\hat{\otimes}_C B)\hat{\otimes}_C A \longrightarrow B\hat{\otimes}_C B$$

que se obtiene al tensorializar por $(B\hat{\otimes}_C B)\hat{\otimes}_C A$ sobre A el epimorfismo $A \longrightarrow A/m_x = C$ y aplicar como antes el lema III2211.

En este epimorfismo $D_{\mathcal{A}|A} = D_B\hat{\otimes}_C A$ tiene como imagen $\bar{D}_B = D_B$ De aquí que $D_{\mathcal{A}|A}^m$ tendrá como imagen D_B^m, pero, por otra parte, puesto que $D_{\mathcal{A}|A}^m = D_B^m\hat{\otimes}_C A$ (lema III 2 1), su imagen será $(D_B^m\hat{\otimes}_C A)\hat{\otimes}_{\pi A}(A/m_x) = D_B^m\hat{\otimes}_C C = \overline{D_B^m}$ Luego $D_B^m = \overline{D_B^m}$ y se trata por tanto de ideales cerrados

Veamos que Ω_B es un B-módulo proyectivo de la misma dimensión local que $\Omega_{\mathcal{A}|A}$ sobre $\mathcal{A}$ Sea la localización de $\Omega_{\mathcal{A}|A}$ en $U \times V$ libre de dimensión n

$(\Omega_{\mathcal{A}|A})_{U\times V} = (\Omega_B\hat{\otimes}_C A)_{U\times V}$, que según el lema III.2.4. es igual a $(\Omega_B)_U\hat{\otimes}_C A_V$, según los teoremas I 2 4. y I.1.4. es igual a su vez a $(\Omega_{B_U})\hat{\otimes}_C A_V = L_{B_U}\hat{\otimes}_C A_V$

Tensorializando los dos últimos módulos por $A_V/m_{x,V}$, donde $m_{x,V}$ es el ideal maximal en A_V correspondiente al punto x, tendremos

$$(\Omega_{B_U}\hat{\otimes}_C A_V)\hat{\otimes}_{\pi A_V}(A_V/m_{x,V}) = L_{B_U}\hat{\otimes}_C A_V \hat{\otimes}_{\pi A_V}(A_V/m_{x,V})$$

y aplicando el lema III 2 1 $\Omega_{B_U} = L_{B_U}$ como queríamos demostrar

Veamos por último que $Grad_{D_B}(B\hat{\otimes}_C B) = Simetr_B(\Omega_B)$

Necesitamos para ello el siguiente lema

Lema III 2 5

Sean A y B dos álgebras de Fréchet I un ideal de A, M un B-módulo de Fréchet de tipo finito Se verifica

$$M\hat{\otimes}_C I = (B\hat{\otimes}_C I)(M\hat{\otimes}_C A)$$

donde el producto está definido en $M\hat{\otimes}_C A$ que es un $B\hat{\otimes}_C A$-módulo

Demostración

Desde luego es válida la inclusión $(B\hat{\otimes}_C I)(M\hat{\otimes}_C A) \subset M\hat{\otimes}_C I$

Sean $z_1, \quad , z_n$ generadores de M Se tiene un epimorfismo de un módulo libre en B sobre M $\quad L_B \longrightarrow M \quad (\beta_1, \quad ,\beta_n) \to \beta_1 z_1 + \quad . + \beta_n z_n$

De esta forma M es un cociente de L_B Por ser L_B de Fréchet, si m_J es una sucesión de M que tiene por límite 0, pueden tomarse representantes de m_j en L_B de tal forma que la sucesión sea convergente a cero en L_B, es decir, existen $\beta_{j,i}$ tales que $m_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{j,i} z_i$ con

$\beta_{j,i} \xrightarrow[j]{} 0$ en B

Sea ahora $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \otimes b_j \in M \hat{\otimes}_C I$, $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < +\infty$, $a_j \longrightarrow 0$ en M y $b_j \longrightarrow 0$ en I Tendremos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \otimes b_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \beta_{j,i} \otimes b_j \right)(z_i \otimes 1) \in (B \hat{\otimes}_C I)(M \hat{\otimes}_C A)$$

con lo que se acaba la demostración

Volvamos a nuestra proposición

Sea la sucesión

$$0 \longrightarrow m_x \longrightarrow A \longrightarrow A/m_x \longrightarrow 0$$

tensorializando por B

$$0 \longrightarrow B \hat{\otimes}_C m_x \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

de esta forma B puede expresarse $B = \mathcal{A}/(B \hat{\otimes}_C m_x)$ De aquí que

$$(D^m_{\mathcal{A}|A}/D^{m+1}_{\mathcal{A}|A}) \underset{\mathcal{A}}{\otimes} B = \frac{D^m_{\mathcal{A}|A} / D^{m+1}_{\mathcal{A}|A}}{(B\hat{\otimes}_C m_x)(D^m_{\mathcal{A}|A}/D^{m+1}_{\mathcal{A}|A})} = \frac{(D^m_B/D^{m+1}_B)\hat{\otimes}_C A}{(B\hat{\otimes}_C m_x)((D^m_B/D^{m+1}_B)\hat{\otimes}_C A)} =$$

aplicando el lema III 2 1 es igual a

$\dfrac{(D_B^m/D_B^{m+1})\hat{\otimes}_C A}{(D_B^m/D_B^{m+1})\hat{\otimes}_C m_x}$ y por la nuclearidad de D_B^m/D_B^{m+1} y por ser los espacios de Frêchet es igual a $\dfrac{D_B^m}{D_B^{m+1}} \hat{\otimes}_C \dfrac{A}{m_x} = \dfrac{D_B^m}{D_B^{m+1}}$

Por otra parte

$B \otimes_{\mathcal{A}} \mathrm{Simetr}_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}|A}) = \mathrm{Simetr}_B(B \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_{\mathcal{A}|A}) = \mathrm{Simetr}_B(\Omega_B)$

Luego, bajo la hipôtesis de que $\mathrm{Grad}_{D_{\mathcal{A}|A}}(\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}) = \mathrm{Simetr}_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}|A})$ tensorializando por B sobre $\mathcal{A}$ obtenemos la relaciôn buscada $\mathrm{Grad}_{D_B}(B\hat{\otimes}_C B) = \mathrm{Simetr}_B(\Omega_B)$

Esto acaba la demostraciôn del teorema

<u>Corolario III 2 1 (Caracterizaciôn del âlgebra de Whitney de un compacto de R^n valorada en un anillo A)</u>

Sea $\mathcal{A}$ una extensiôn trivial finita sobre A por n elementos autoconjugados, es decir $\mathcal{A} = B\hat{\otimes}_C A$ con B generado por n elementos autoconjugados Las âlgebras las supondremos en las condiciones del teorema anterior El morfismo $A \longrightarrow \mathcal{A}$ es t liso y el $\mathcal{A}$-môdulo $\Omega_{\mathcal{A}|A}$ es libre de dimensiôn n sobre $\mathcal{A}$ si y solamente si $\mathcal{A}$ es el âlgebra de Whitney de un compacto de R^n valorada en el anillo A

La demostraciôn es trivial teniendo en cuenta que $\Omega_{\mathcal{A}|A}$ es libre de dimensiôn n sobre A si y solamente si Ω_B es libre de dimensiôn n sobre B y aplicar la condiciôn 0 4 .Esto a su vez es una mera comprobación En efecto, $\Omega_{\mathcal{A}|A} = \Omega_B \hat{\otimes}_C A$, y si $\Omega_B = L_B$, tensorializando esta última relación por A sobre C obtenemos que $\Omega_{\mathcal{A}|A}$ es libre de la misma dimensión que Ω_B Si $\Omega_{\mathcal{A}|A} = L_{\mathcal{A}}$, tensorializando por A/m_x $\Omega_{\mathcal{A}|A} \hat{\otimes}_{\pi A} (A/m_x) = L_{\mathcal{A}} \hat{\otimes}_{\pi A} (A/m_x)$, y aplicando el lema III 2 1 obtenemos que Ω_B es libre y de la misma dimensión que $\Omega_{\mathcal{A}|A}$

Observación al corolario

Hay que tener en cuenta que este corolario no está enunciado en sus condiciones mínimas Por ejemplo, no es preciso suponer las condiciones de "superregularidad" y de "subsemisimplicidad" de A, ya que no es preciso localizar en Spec(A) Tampoco es preciso suponer la "superregularidad" de B, por la misma razón En cuanto a la hipótesis de que las dimensiones locales de las diferenciales sean constantes, en este caso, que hemos supuesto que éstas forman un módulo libre, es redundante Por lo tanto la hipótesis de conexión de los espectros puede suprimirse tambien

III 2 3. MORFISMO T LISO Y LOCALIZACION

Dada una A-álgebra $\mathcal{A}$ se trata de verificar que, bajo ciertas condiciones, el concepto de que el morfismo $A \longrightarrow \mathcal{A}$ sea t. liso es un concepto local. Aplicando esto al caso en que $\mathcal{A}$ sea una extensión localmente trivial finita obtendremos la caracterización de una A-álgebra $\mathcal{A}$ que localmente sea el álgebra de Whitney de un compacto de una variedad con coeficientes en el anillo localizado de A correspondiente

Supondremos que las álgebras del enunciado son L-álgebras nucleares diferenciablemente completas y que sean Q-álgebras, es decir, de espectro compacto

Teorema III 2 2

Bajo las hipótesis anteriores el morfismo $A \longrightarrow \mathcal{A}$ es t liso si y solamente si para cada punto de Spec(A) existe un entorno U tal que el morfismo $A_U \longrightarrow \mathcal{A}_U = \mathcal{A} \otimes_A A_U$ es t liso

Antes de pasar a la demostración veamos algunos lemas

Lema III 2 6

Sean A y $\mathcal{A}$ L-álgebras nucleares, $\mathcal{A}$ una A-álgebra. $\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}$ es una $A\hat{\otimes}_C A$-álgebra y una A-álgebra y se verifica que para cada abierto U de Spec(A)

$$(A\otimes_C A)_{U\times U} \otimes_{A\otimes_C A} (\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}) = A_U \otimes_A (\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}) = \mathcal{A}_U \hat{\otimes}_{\pi A_U} \mathcal{A}_U$$

Demostración

$\mathcal{A}\hat{\otimes}_C\mathcal{A}$ es una $A\hat{\otimes}_C A$-álgebra y ya sabemos (I 1 4.) que $(A\hat{\otimes}_C A)_{U\times U} = A_U \hat{\otimes}_C A_U$ Por otra parte si τ es la aplicación de $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ asociada a la inyección de A en $\mathcal{A}$, $\tau\times\tau$ es la aplicación asociada a la inyección de $A\hat{\otimes}_C A$ en $\mathcal{A}\hat{\otimes}_C\mathcal{A}$, de donde, según el teorema general de localización (I.2.3.1) $(A\hat{\otimes}_C A)_{U\times U} \otimes_{A\hat{\otimes}_C A} (\mathcal{A}\hat{\otimes}_C\mathcal{A}) = (\mathcal{A}\hat{\otimes}_C\mathcal{A})_{\tau^{-1}(U)\times\tau^{-1}(U)}$ que según (I 1 4) es igual a $\mathcal{A}_{\tau^{-1}(U)} \otimes_C \mathcal{A}_{\tau^{-1}(U)}$ y nuevamente por (I 2 3.1) coincide con $\mathcal{A}_U \hat{\otimes}_C \mathcal{A}_U$

Consideremos la sucesión exacta de $A\hat{\otimes}_C A$-módulos

$$0 \longrightarrow \overline{\Delta_A(\mathcal{A}\otimes_C \mathcal{A})} \longrightarrow \mathcal{A}\hat{\otimes}_C \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A} \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

localizando en $U\times U$ y tras lo dicho anteriormente obtendremos

$$0 \longrightarrow \overline{\Delta_A(\mathcal{A}\otimes_C \mathcal{A})}_{U\times U} \longrightarrow \mathcal{A}_U\hat{\otimes}_C \mathcal{A}_U \longrightarrow (\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A})_{U\times U} \longrightarrow 0$$

Según el teorema I 2 2 la topología propia de $\overline{\Delta_A(\mathcal{A}\otimes_C \mathcal{A})}_{U\times U}$, coincide con la inducida por $\mathcal{A}_U\hat{\otimes}_C \mathcal{A}_U$

Por otra parte, tenemos una aplicación inyectiva

$$\Delta_{A_U}(\mathcal{A}_U\otimes_C \mathcal{A}_U) \longrightarrow \overline{\Delta_A(\mathcal{A}\otimes_C \mathcal{A})}_{U\times U}$$

cuya imagen es densa, como se puede comprobar expresando el segundo término como límite proyectivo de cocientes, y teniendo en cuenta que la imagen cubre una parte densa en cada cociente De aquí que el cierre de $\Delta_{A_U}(\mathcal{A}_U\otimes_C \mathcal{A}_U)$ en $\mathcal{A}_U\hat{\otimes}_C \mathcal{A}_U$ coincide con $\overline{\Delta_A(\mathcal{A}\otimes_C \mathcal{A})}_{U\times U}$

Tendremos entonces

$$\mathcal{A}_U \hat{\otimes}_{\pi A_U} \mathcal{A}_U = (A\hat{\otimes}_C A)_{U\times U}\otimes_{A\hat{\otimes}_C A}(\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A})$$

Ahora bien, puesto que $D_{A_U} = (D_A)_U$ y como $D_A(\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}) = 0$ se sigue que

$$(A_U\hat{\otimes}_C A_U)\otimes_{A\hat{\otimes}_C A}(\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}) = \frac{A_U\hat{\otimes}_C A_U}{D_{A_U}}\otimes_{A\hat{\otimes}_C A}(\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}) = A_U\otimes_A(\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A})$$

Lema III 2 7

En las condiciones del lema anterior se verifica

$$(A\hat{\otimes}_C A)_{U\times U}\otimes_{A\hat{\otimes}_C A} D_{\mathcal{A}/A} = D_{\mathcal{A}_U/A_U} = (\mathcal{A}_U\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}_U)\otimes_{\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}} D_{\mathcal{A}/A}$$

En efecto, consideremos la sucesión de $A\hat{\otimes}_C A$-módulos

$$0 \longrightarrow D_{\mathcal{A}|A} \longrightarrow \mathcal{A} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

localicemos en $U\times U$

$$0 \longrightarrow (D_{\mathcal{A}|A})_{U\times U} \longrightarrow \mathcal{A}_U \otimes_{\pi A_U} \mathcal{A}_U \longrightarrow \mathcal{A}_{U\times U} \longrightarrow 0$$

lo único que debemos demostrar es que $\mathcal{A}_{U\times U} = \mathcal{A}_U$ Veámoslo

Los elementos de $A\hat{\otimes}_C A$ actuan sobre $\mathcal{A}$ pasando al cociente por D_A, $(A\hat{\otimes}_C A)/D_A = A$ y mediante el producto en $\mathcal{A}$ teniendo en cuenta la inclusión $A \longrightarrow \mathcal{A}$ Tendremos entonces

$$(A\hat{\otimes}_C A)_{U\times U} \, {}_{A\hat{\otimes}_C A} \mathcal{A} = (A\hat{\otimes}_C A)_{U\times U} \otimes_{A\hat{\otimes}_C A} \left(\frac{A\hat{\otimes}_C A}{D_A} \otimes_A \mathcal{A}\right) =$$

$$= \left((A\hat{\otimes}_C A)_{U\times U} \otimes_{A\hat{\otimes}_C A} \frac{A\hat{\otimes}_C A}{D_A}\right) \otimes_A \mathcal{A}$$, que según (I;2.4.)

es igual a $A_U \otimes_A \mathcal{A} = \mathcal{A}_U$

Por último $(A\hat{\otimes}_C A)_{U\times U} \otimes_{A\hat{\otimes}_C A} D_{\mathcal{A}|A} = (A\hat{\otimes}_C A)_{U\times U} \otimes_{A\hat{\otimes}_C A} ((\mathcal{A} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}} D_{\mathcal{A}|A})$

Aplicando el lema III 2 6 es igual a $(\mathcal{A}_U \hat{\otimes}_{\pi A_U} \mathcal{A}_U) \otimes_{\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}} D_{\mathcal{A}|A}$.

<u>Lema III 2 8</u>

En las condiciones de los dos lemas anteriores se verifica

$$(D^m_{\mathcal{A}|A})_{U\times U} = D^m_{\mathcal{A}_U|A_U} \quad \text{y} \qquad \mathcal{A}_U \otimes_{\mathcal{A}} \frac{D^m_{\mathcal{A}|A}}{D^{m+1}_{\mathcal{A}|A}} = \frac{D^m_{\mathcal{A}_U|A_U}}{D^{m+1}_{\mathcal{A}_U|A_U}}$$

<u>Demostración</u>

Según el lema III 2 7 $(D_{\mathcal{A}|A})_{U\times U} = D_{\mathcal{A}_U|A_U}$, luego

$$D^m_{\mathcal{A}_U|A_U} = ((D_{\mathcal{A}|A})_{U\times U})^m = (D^m_{\mathcal{A}|A})_{U\times U}$$

Consideremos la sucesión exacta de $A\otimes_C A$-módulos

$$0 \longrightarrow D^{m+1}_{\mathcal{A}|A} \longrightarrow D^m_{\mathcal{A}|A} \longrightarrow D^m_{\mathcal{A}|A}/D^{m+1}_{\mathcal{A}|A} \longrightarrow 0$$

localicemos en $U\times U$

$$0 \longrightarrow D^{m+1}_{\mathcal{A}_U|A_U} \longrightarrow D^m_{\mathcal{A}_U|A_U} \longrightarrow (A\hat{\otimes}_C A)_{U\times U} \otimes_{A\hat{\otimes}_C A} \frac{D^m_{\mathcal{A}|A}}{D^{m+1}_{\mathcal{A}|A}} \longrightarrow 0$$

Aplicando los lemas anteriores

$$\frac{D^m_{\mathcal{A}_U|A_U}}{D^{m-1}_{\mathcal{A}_U|A_U}} = (\mathcal{A}_U \hat{\otimes}_{\pi A_U} \mathcal{A}_U) \otimes_{\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}} \frac{D^m_{\mathcal{A}|A}}{D^{m+1}_{\mathcal{A}|A}} = (\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A})_{U\times U} \otimes_{\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}} \frac{D^m_{\mathcal{A}|A}}{D^{m+1}_{\mathcal{A}|A}}$$

Ahora bien, de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (D_{\mathcal{A}|A})_{U\times U} \longrightarrow (\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A})_{U\times U} \longrightarrow \mathcal{A}_U \longrightarrow 0$$

tensorializando por $D^m_{\mathcal{A}|A}/D^{m+1}_{\mathcal{A}|A}$ sobre $\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}$

$$(D_{\mathcal{A}|A})_{U\times U} \otimes_{\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}} \frac{D^m_{\mathcal{A}|A}}{D^{m+1}_{\mathcal{A}|A}} \longrightarrow (\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A})_{U\times U} \otimes_{\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}} \frac{D^m_{\mathcal{A}|A}}{D^{m+1}_{\mathcal{A}|A}} \longrightarrow \mathcal{A}_U \otimes_{\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}} \frac{D^m_{\mathcal{A}|A}}{D^{m+1}_{\mathcal{A}|A}} \longrightarrow 0$$

la imagen del primer morfismo es cero, luego tendremos el isomorfismo :

$$(\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A})_{U\times U} \otimes_{\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}} \frac{D^m_{\mathcal{A}|A}}{D^{m+1}_{\mathcal{A}|A}} = \mathcal{A}_U \otimes_{\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}} \frac{D^m_{\mathcal{A}|A}}{D^{m+1}_{\mathcal{A}|A}}$$

Esto acaba la demostración

Pasemos ya a demostrar el teorema.

<u>Si el morfismo $A \longrightarrow \mathcal{A}$ es t liso, el morfismo $A_U \longrightarrow \mathcal{A}_U$ es t liso</u>

Veamos en primer lugar que se verifica la condición 1c de morfismo t liso Sea una sucesión exacta

$$L_{\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}} \longrightarrow D_{\mathcal{A}|A} \longrightarrow 0$$

donde $L_{\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}}$ es libre finito Localizando en $U\times U$ y teniendo en cuenta los lemas III 2 6 y III 2 7 se llega a que $D_{\mathcal{A}_U|A_U}$ es finito generado

Veamos que el morfismo $A_U \longrightarrow \mathcal{A}_U$ verifica la condición 2 de morfismo t liso

Según el lema III 2 8 , $D^m_{\mathcal{A}_U|A_U} = (D^m_{\mathcal{A}|A})_{U\times U}$, de donde por la exactitud topológica del functor localización $D^m_{\mathcal{A}_U|A_U}$ es cerrado en $\mathcal{A}_U \underset{\pi A_U}{\otimes} \mathcal{A}_U$

Como resultado particular del lema III 2 8 tenemos que $\mathcal{A}_U \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \Omega_{\mathcal{A}|A} = \Omega_{\mathcal{A}_U|A_U}$ Puesto que $\mathcal{A}_U$ es la localización de $\mathcal{A}$ como álgebra en el abierto $\tau^{-1}(U)$, donde τ es la epiyección (pues los espectros son compactos) entre los espectros $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Spec}(A)$, inducida por la inyección $A \longrightarrow \mathcal{A}$, tendremos que $\Omega_{\mathcal{A}_U|A_U}$ es un $\mathcal{A}_U$-módulo localmente libre de la misma dimensión local que la de $\Omega_{\mathcal{A}|A}$

A partir del mismo lema III 2 8 y de la relación $\mathrm{Grad}_{D_{\mathcal{A}|A}}(\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\pi A}\mathcal{A}) = \mathrm{Simetr}_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}|A})$ y teniendo en cuenta que la operación "tomar simetrizado" conmuta con la localización, se deduce que $\mathrm{Grad}_{D_{\mathcal{A}_U|A_U}}(\mathcal{A}_U \hat{\otimes}_{\pi A_U} \mathcal{A}_U) = \mathrm{Simetr}_{\mathcal{A}_U}(\Omega_{\mathcal{A}_U|A_U})$

Veamos ahora el recíproco

<u>Si para un recubrimiento de Spec(A), $\{U\}$, los morfismos $A_U \longrightarrow \mathcal{a}_U$ son t lisos, el morfismo $A \longrightarrow \mathcal{a}$, es t liso</u>

En efecto, Spec(A) es un conjunto compacto, luego existe un recubrimiento finito de abiertos U tales que $D_{\mathcal{a}_U|A_U}$ son $\mathcal{a}_U \hat{\otimes}_{\pi A_U} \mathcal{a}_U$-módulos finito generados De aquí que, por medio de una partición finita de la unidad, se llega a que $D_{\mathcal{a}|A}$ es un $\mathcal{a} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathcal{a}$ -módulo finito generado

Veamos que $D^m_{\mathcal{a}|A}$ son ideales cerrados en $\mathcal{a} \otimes_{\pi A} \mathcal{a}$ Consideremos el recubrimiento anterior e identifiquemos $\mathcal{a} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathcal{a}$ con una parte de $\bigoplus_U \mathcal{a}_U \hat{\otimes}_{\pi A_U} \mathcal{a}_U$ Teniendo en cuenta que $D^m_{\mathcal{a}_U|A_U}$ son cerrados en $\mathcal{a}_U \hat{\otimes}_{\pi A_U} \mathcal{a}_U$ se llega a la verificación de la proposición

Si $\Omega_{\mathcal{a}_U|A_U}$ es un $\mathcal{a}_U$-módulo de Fréchet proyectivo localmente de dimensión n, es trivial que $\Omega_{\mathcal{a}|A}$ es localmente libre, luego proyectivo, con la misma dimensión local

El morfismo canónico $\text{Simetr}_{\mathcal{a}}(\Omega_{\mathcal{a}|A}) \longrightarrow \text{Grad}_{D_{\mathcal{a}|A}}(\mathcal{a} \hat{\otimes}_{\pi A} \mathcal{a})$ es un isomorfismo, puesto que sus localizaciones en un recubrimiento de Spec(A), que es compacto, lo son

<u>Corolario III 2 2</u>

Supondremos que las álgebras del enunciado son L-álgebras nucleares, diferenciablemente completas, Q-álgebras y de espectro conexo

Sea $\mathcal{A}$ una A-álgebra extensión localmente trivial finita sobre A generada por elementos autoconjugados

La condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{A}$ sea localmente $\mathcal{A}_U = W(K)\hat{\otimes}_C A_U$, donde $W(K)$ es el álgebra de Whitney de un compacto respecto de una variedad, es que el morfismo $A \longrightarrow \mathcal{A}$ sea t liso En este caso la dimensión local de $\Omega_{\mathcal{A}|A}$ y la dimensión de la variedad coinciden

Observaciones

La hipótesis de conexión tiene por objeto el que las dimensiones locales de $\Omega_{\mathcal{A}|A}$ sean constantes y de que sea cual fuera el abierto U trivializante, si $\mathcal{A}_U = B\hat{\otimes}_C A_U$, el álgebra B de la fibra sea la misma para todos

La demostración es trivial tras el teorema III 2.2 y el corolario III 2 1

CAPITULO CUATRO

ESTRUCTURAS DIFERENCIABLES ELEMENTALES CON COEFICIENTES EN UN ANILLO DE FRECHET

En este capítulo se describen diversos ejemplos de morfismos t lisos que aparecen con naturalidad en análisis.

Un problema que se presenta con frecuencia es el de dotar a un módulo libre de dimensión finita sobre un álgebra de Fréchet real de una estructura diferenciable Pensemos, por ejemplo, en que A sea el álgebra de las funciones infinitamente diferenciables sobre un segmento, ó continuas simplemente El módulo libre sobre A de dimensión n son el conjunto de las curvas diferenciables ó continuas respectivamente en el espacio R^n Parece natural dar una definición de función infinitamente diferenciable de $L = A \oplus {}^n \oplus A$ en A Si tomamos como definición la clásica sustituyendo números reales por elementos de A y valor absoluto por las diversas seminormas de A, tendremos la siguiente definición

F $L \longrightarrow A$ es infinitamente diferenciable si para cada $k = (k_1, \quad ,k_n)$ existe, una función de L en A, F^k tal que si de finimos

$$T^m_{\bar{a}} F^k(\bar{z}) = \sum_{|r|\leq m} \frac{F^{k+r}(\bar{a})}{r!}(\bar{z}-\bar{a})^r \qquad y \ R^n_{\bar{a}} F^k = F^k - T^m_{\bar{a}} F^k$$

para $\bar{z}$ y $\bar{a}$ de L, para cada seminorma p de una familia fundamental de seminormas de A y cada $\varepsilon>0$ existe un entorno de $\bar{a}$ tal que para cada $\bar{z}$ de este entorno

$$p(R^m_{\bar{a}} F^k(\bar{z})) \leq \varepsilon(\mathrm{Sup}\ p(a^i-z^i))^{m-|k|}$$

donde $\bar{a} = (a^1, \quad ,a^n)$ y $\bar{z} = (z^1, \quad ,z^n)$

Si consideramos el morfismo t liso $A \longrightarrow \mathcal{A} = C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A$, tendremos una aplicación asociada $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}) = R^n \times \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ que es un fibrado trivial de fibra R^n Las A-secciones de este fibrado son $L=A\oplus \overset{n}{\cdots} \oplus A$ y los elementos de $\mathcal{A}$ pueden considerarse como funciones valoradas en A sobre las A-secciones del fibrado Se demuestra que estas secciones son infinitamente diferenciables en el sentido anterior, con lo que $\mathcal{A}$ dota a las A-secciones de una estructura A-diferenciable

En el segundo apartado se estudian las ecuaciones diferenciales parametrizadas por un anillo Es un instrumental necesario para el apartado siguiente y una muestra de cómo un problema planteado en su lugar natural gana en claridad y profundidad Así, la demostración del teorema de existencia de ecuaciones diferenciales ordinarias planteado en un lugar adecuado da directamente el teorema de dependencia diferenciable de la solución respecto de las condiciones iniciales ó respecto a una familia de parámetros de la que dependa la propia ecuación diferencial.

En el apartado tres, se asocia a todo módulo proyectivo sobre A una A-álgebra $\mathcal{A}$, extensión localmente trivial de A, tal que el morfismo $A \longrightarrow \mathcal{A}$ sea t liso y que el álgebra de la fibra del fibrado asociado sea $C^\infty(R^n)$

En este caso $Spec_A(\mathfrak{a}) = Hom_A(\mathfrak{a},A)$ es el módulo proyectivo que tiene, de esta forma, una estructura A-diferenciable En el mismo apartado se dota de estructura A-diferenciable a las A-secciones de un fibrado trivial de base Spec(A) y fibra una variedad diferenciable $\mathcal{V}$ Se demuestra que esta A-variedad es localmente isomorfa a un A-móduloproyectivo del tipo anterior,

Para simplificar las notaciones supondremos que todas las álgebras de este capítulo son álgebras reales partes hermíticas de álgebras simétricas

I MORFISMO T LISO ASOCIADO A UN MODULO LIBRE FINITO SOBRE UNA F^*-ALGEBRA

Sea A una F^*-álgebra diferenciablemente completa real (0 3 5) Sea L un A-módulo libre de dimensión n $L = A\oplus \overset{n}{\cdots} \oplus A$ Los elementos de L los denotaremos por $\bar{a}$ y si $f \in C^\infty(R^n)$, $f(\bar{a})$ denotará la función $f\circ\bar{a}$

El módulo libre L es el módulo de las A-secciones del fibrado trivial de base Spec(A) y fibra R^n Vamos a definir una A-álgebra $\mathcal{A}$ tal que Spec($\mathcal{A}$) sea el fibrado y cuyo $\mathrm{Spec}_A(\mathcal{A}) = \mathrm{Hom}_A(\mathcal{A}, A)$ sea el módulo L Esto puede hacerse tomando simplemente $\mathcal{A} = C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A$ El morfismo de A en $\mathcal{A}$ es t liso y es trivial verificar que Spec($\mathcal{A}$) es el fibrado y que $\mathrm{Spec}_A(\mathcal{A}) = L$; esta última relación se deduce de la condición de diferenciablemente completa de A

Se trata ahora de verificar que $\mathcal{A}$ es un anillo de A-funciones "infinitamente diferenciables" en el módulo L de las A-secciones del fibrado En particular, deduciremos que la topología A-espectral de L coincide con la topología de partida de L

Veamos en primer lugar un lema

Lema IV 1 1

Sea $f \in C^\infty(R^n)$ La función de $L = A\oplus \overset{n}{\cdots} \oplus A \longrightarrow A$ definida por $\bar{a} \longrightarrow f(\bar{a})$ es continua.

Demostración

Sea p una seminorma continua en A Fijados dos números naturales k y h, el conjunto

$$C_{kh} = \{ \bar{a} \in L \ , \ p(e^{i\bar{\sigma}\bar{a}}) \leq k(|\bar{\sigma}|^h + 1) \text{ para cada } \bar{\sigma} \in R^n \}$$

es cerrado, puesto que $p(e^{i\bar{\sigma}\bar{a}})$ es una función continua de $\bar{a}$ Por ser A diferenciablemente completo (0 3 7) (véase {11}, cálculo operacional con un número finito de variables), se verifica que $L = \bigcup_{k,h} C_{kh}$, por el teorema de Baire, alguno de los cerrados C_{kh} tiene punto interior, por medio de una traslación puede suponerse que este punto es el $\bar{0}$ ó cualquier otro Así pues, dado un punto $\bar{a}_o \in L$, existe un entorno U de él y números naturales k,h tales que $p(e^{i\bar{\sigma}\bar{a}}) \leq k(|\bar{\sigma}|^h + 1)$ para todo $\bar{a} \in U$ y $\bar{\sigma} \in R^n$

Supongamos en principio que Spec(A) es compacto Entonces, dado un $\bar{a}_o \in L$ podemos encontrar el entorno U anterior de modo que $\bar{a}(x)$ esté contenido en un cubo de lado $2\pi/\sigma$ en R^n para un $\sigma > 0$ fijo y todo $\bar{a} \in U$

Sea $f \in C^\infty(R^n)$, podemos hacer que f coincida con una función periódica de período $2\pi/\sigma$ en un entorno de $\bigcup_{\substack{x \in \mathrm{Spec}(A) \\ \bar{a} \in U}} \bar{a}(x)$, con lo que mediante el desarrollo de Fourier de f

$$f = \sum_{\bar{m} \in Z^n} \lambda_{\bar{m}} e^{i\sigma\bar{m}t} \ ,$$

tendremos las relaciones

$$p(f(\bar{a}) - f(\bar{a}_o)) = p(\Sigma \lambda_{\bar{m}} (e^{i\sigma\bar{m}\bar{a}} - e^{i\sigma\bar{m}\bar{a}_o})) < \sum_{|\bar{m}| \leq N} |\lambda_{\bar{m}}| p(e^{i\sigma\bar{m}\bar{a}} - e^{i\sigma\bar{m}\bar{a}_o}) +$$

$$+ \sum_{|\bar{m}| > N} |\lambda_{\bar{m}}| \ 2k(|\sigma\bar{m}|^h - 1)$$

donde dado $\varepsilon > 0$, el número natural N puede elegirse de modo que la segunda suma sea menor que $\varepsilon/2$ (independiente de $\bar{a}$), y una vez elegido éste, la primera suma, que es finita y continua en $\bar{a}$, puede hacerse menor que $\varepsilon/2$ tomando $\bar{a}$ suficientemente próximo a $\bar{a}_o$ Esto demuestra la continuidad cuando Spec(A) es compacto

Si Spec(A) no es compacto, podemos tomar una sucesión exhaustiva de compactos $K_1 \subset K_2 \subset$ de Spec(A) , y llamando $A_q = A/NucK_q$, ($NucK_q$ son los elementos de A nulos en K_q), de tal forma que $A = \varprojlim A_q$

Sea $\bar{a} \in L$, la proyección de $\bar{a}$ en A_q^n será $\bar{a}_q$ y la proyección de $f(\bar{a})$ en A_q será $f(\bar{a}_q) = f \circ \bar{a}_q$ Como hemos visto $f(\bar{a}_q)$ es continua en $\bar{a}_q$, que a su vez es continua en $\bar{a}$, como $(f(\bar{a}))_q$ es continua en $\bar{a}$ para todo q, $f(\bar{a})$ es función continua de $\bar{a}$, con lo que acabamos la demostración

Corolario IV 1 1

La aplicación $C^\infty(R^n) \times L \longrightarrow A$ $(f,\bar{a}) \to f(\bar{a})$ es continua

En efecto, la aplicación es lineal en el primer factor y separadamente continua La aplicación del enunciado es entonces continua sin más que tener en cuenta en teòrema de Mazur-Orlicz Sea I un espacio métrico, E un espacio de Fréchet, F un e l c cualquiera Si la aplicación ϕ $E \times I \to F$ es separadamente continua y lineal en E, ϕ es continua

Lema IV 1 2

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ elementos de L, $f \in C^\infty(R^n)$, definamos una función $R \longrightarrow A$ escribiendo $g(t) = f(\bar{a} + t\bar{b})$, está función es de clase C^∞ y se tiene $g'(t) = \sum_{i=1}^{n} b^i (\partial f/\partial y^i)(\bar{a} + t\bar{b})$, donde $\partial f/\partial y^i$ es una función de $C^\infty(R^n)$ y tiene sentido por tanto aplicarla a $\bar{a} + t\bar{b}$

Demostración

Definamos la función $g'(t)$ de R en A escribiendo

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} b^i(\partial f/\partial y^i)(\bar{a}+t\bar{b})$$

Del lema IV 1 1 se deduce que $g'(t)$ es una función continua de R en A Integremos esta función entre $s=0$ y $s=t$

$h(t) = \int_{s=0}^{t} g'(s)ds$, para cada x de Spec(A) tendremos

$$h(t)(x) = \int_0^t g'(s)(x)ds = \int_0^t \sum_{i=0}^{n} b^i(x)\frac{\partial f}{\partial y^i}(\bar{a}(x) + s\bar{b}(x))ds =$$

$$= \int_0^t \frac{d}{ds} f(\bar{a}(x)+s\bar{b}(x))ds = f(\bar{a}(x) + t\bar{b}(x))-f(\bar{a}(x))$$

y como A es semisimple, $h(t) = f(a+tb)-f(a) = g(t) - g(0)$, y por tanto $g(t) = g(0) + \int_0^t g'(s)ds$ lo que demuestra la aserción dada

Este resultado significa que se puede derivar $f(\bar{a}+t\bar{b})$ como si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ fuesen vectores numéricos ordinarios, es decir, se puede derivar punto a punto en $f(\bar{a}(x)+t\bar{b}(x))$ Naturalmente puede calcularse del mismo modo formal todas las derivadas sucesivas

Estamos ya en condiciones de establecer el siguiente teorema

Teorema IV 1 1

$\mathcal{A} = C^\infty(R^n)\otimes_R A$ es un anillo de funciones infinitamente diferenciables de L en A en el sentido dado en la introducción de este capítulo

Demostración

Veamos primero que toda $F \in \mathcal{A}$ es una función continua de L en A Si $f \in C^\infty(R^n)$ lo hemos comprobado en el lema IV 1 1 Para probar la continuidad de F será suficiente verificarla para la restricción a cada compacto de L (L es un espacio metrizable completo) Sea entonces Ω un compacto de L, p una seminorma en A definida por una parte equicontinua K_p de A', Ω define en $C^\infty(R^n)$ una seminorma q mediante la expresión

$$q(f) = \max_{\bar{a} \in \Omega} p(f(a)) = \max_{\bar{a} \in \Omega} \max_{\omega \in K_p} |\langle \omega, f(a) \rangle| \quad , \text{ como } \langle \omega, f(a) \rangle \text{ es}$$

una funcional lineal continua en $C^\infty(R^n)$ y como este espacio es tonelado, q es una seminorma continua

En consecuencia, si f_m es una sucesión acotada en $C^\infty(R^n)$, $\operatorname{Sup}_m q(f_m) < +\infty$, luego para toda serie numérica absolutamente sumable λ_m y todo par de sucesiones acotadas $f_m \in C^\infty$, $a_m \in A$, la función $F = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_m f_m$ es, sobre Ω, límite uniforme de funciones continuas, luego es continua en Ω Por lo tanto F es continua en L.

Para ver que F es diferenciable, escribamos nuevamente, $F = \sum_m \lambda_m a_m f_m$ con $\Sigma|\lambda_m| < +\infty$, $a_m \to 0$ en A, $f_m \to 0$ en $C^\infty(R^n)$.

Definamos $\dfrac{\partial F}{\partial y^j} = \sum_{m=1} \lambda_m a_m \dfrac{\partial f_m}{\partial y^j}$ $j=1, \quad ,n$ Son funciones de $\mathcal{A}$ puesto que $\partial f_m/\partial y^j \to 0$ en $C^\infty(R^n)$

En virtud del lema IV 1 2 , $f_m(\bar{a}+t\bar{b})$ es diferenciable en t y se tiene

$$\frac{d}{dt} f_m(\bar{a}+t\bar{b}) = \sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial f_m}{\partial y^j} (\bar{a}+t\bar{b}) \text{ con lo que}$$

$$f_m(\bar{a} + \bar{b}) = f_m(\bar{a}) + \sum_{j=1}^{n} b^j \int_0^1 \frac{\partial f_m}{\partial y^j} (\bar{a} + t\bar{b})\, dt$$

tendremos entonces

$$\sum_{j=1}^{n} b^j \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial y^j}(\bar{a}+t\bar{b})dt = \sum_{j=1}^{n} b^j \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_m \int_0^1 \frac{\partial f_m}{\partial y^j}(\bar{a}+t\bar{b})dt\Big) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_m \int_0^1 \frac{d}{dt} f_m(\bar{a}+t\bar{b})dt = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_m f_m(\bar{a}+\bar{b}) - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_m f_m(\bar{a}) =$$

$$= F(\bar{a} + \bar{b}) - F(\bar{a})$$

luego $F(\bar{a}+\bar{b}) - F(\bar{a}) = \sum_{j=1}^{n} b^j \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial y^j}(\bar{a}+t\bar{b})dt$ y por tanto

$$F(\bar{a}+\bar{b}) - F(\bar{a}) - \sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial F}{\partial y^j}(\bar{a}) = \sum_{j=1}^{n} b^j \int_0^1 \Big(\frac{\partial F}{\partial y^j}(\bar{a}+t\bar{b}) - \frac{\partial F}{\partial y^j}(\bar{a})\Big)dt$$

y como $\partial F/\partial y^j$ son funciones continuas en L, resulta inmediatamente que F es diferenciable y que su "diferencial" viene dada por

$$d_{\bar{a}} F(\bar{b}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y^j}(\bar{a}) b^j$$

como si $\partial F/\partial y^j$ fuese la i-ésima derivada parcial de F.

Hemos demostrado que F es una vez diferenciable y calculado su diferencial El que sea infinitamente diferenciable se deduce de la formula de Taylor que vamos a demostrar .

Definamos $\phi\ [0,1] \longrightarrow A$ por $\phi(t) = F(\bar{a}+t\bar{b})$ Aplicando reiteradamente los resultados obtenidos se verifica que ϕ es infinitamente diferenciable Como para las funciones ordinarias se tiene un desarrollo de Taylor

$$\phi(1) = \phi(0) + \frac{\phi'(0)}{1!} + \quad + \frac{\phi^{(m)}(0)}{m!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} \phi^{(m+1)}(t)dt$$

y teniendo en cuenta el valor de las sucesivas derivadas de ϕ

$$F(\bar{a}+\bar{b}) = F(\bar{a}) + \sum_{j=1}^{n} b^{i} \frac{\partial F}{\partial y^{j}}(\bar{a}) + \frac{1}{2!} \sum_{j_1, j_2} b^{j_1} b^{j_2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^{j_1} \partial y^{j_2}}(\bar{a}) +$$

$$+ \frac{1}{m!} \sum_{j_1, \quad , j_m} b^{j_1} \quad b^{j_m} \frac{\partial^m F}{\partial y^{j_1} \quad \partial y^{j_m}} (\bar{a}) +$$

$$+ \sum_{j_1, \quad , j_{m+1}} \frac{b^{j_1} \quad b^{j_{m-1}}}{m!} \int_0^1 \frac{\partial^{m+1} F(\bar{a}+t\bar{b})}{\partial y^{j_1} \quad \partial y^{j_{m+1}}} (1-t)^m dt$$

que constituye la "formula de Taylor" buscada

Corolario IV,1 2

La aplicación $\mathcal{A} \times L \longrightarrow A$, $(F,\bar{a}) \to F(\bar{a})$ es una aplicación continua

Tras el teorema IV 1 1 se deduce como el corolario IV 1 1 a partir del teorema de Mazur-Orlicz

Considerando $\mathcal{A}$ como anillo de funciones de L en A, $\mathcal{A}$ define en L una segunda topología, la topología débil, que es la menos fina que hace continuas las funciones F $L \longrightarrow A$, $F \in \mathcal{A}$. El teorema anterior implica que la topología débil es menos fina que la inicial Pero es fácil ver que tambien es mas fina Una base de entornos del punto $\bar{a} = (a^1, \quad ,a^n) \in L$ para la topología inicial está constituido por los puntos $\bar{b} = (b^1, \quad ,b^n)$ tales que

$p(b^j-a^j) < \varepsilon$, con p seminorma continua en A si $z^1, \quad , z^n$ son las funciones coordenadas en R^n, $b^j = z^j(\bar{b})$, $a^j = z^j(\bar{a})$, luego $p(b^j-a^j) = p(z^j(\bar{b})-z^j(\bar{a}))$, y los puntos $\bar{b}$ que verifican $p(z^j(\bar{b})-z^j(\bar{a})) < \varepsilon$, forman un entorno de $\bar{a}$ para la topología débil de A Hemos verificado entonces el siguiente corolario

Corolario IV 1 3

La topología inicial de L coincide con su topología débil como espacio de morfismos de $\mathcal{A}$ en A

A-Derivaciones de $\mathcal{A}$

Sabemos (lema III 2 3) que $\Omega_{\mathcal{A}|A} = \Omega_{C^\infty(R^n)} \hat{\otimes}_R A$ Por otra parte, para todo $\mathcal{A}$-módulo de Fréchet N

$$\mathrm{Der}_A(\mathcal{A},N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}|A},N) \qquad \text{(Teorema III.1 1)}$$

Si tomamos, en particular, $N = \mathcal{A}$ o bien N =A con su estructura de $\mathcal{A}$-módulo $F\, b = F(\bar{a})\, b$ para un $\bar{a}\in L$, tendremos el siguiente teorema de verificación directa :

Teorema IV 1.2

Las A-derivaciones de $\mathcal{A}$ en A en un punto $\bar{a}\in L$ forman un A-módulo libre generado por $(\partial /\partial y^j)_{\bar{a}}$, j=1, ,n

Los A-campos D $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ forman un $\mathcal{A}$-módulo libre generado por $\partial / \partial y^j$, j=1, ,n, donde $\partial v/\partial y^j$ ha sido definido en el curso del teorema IV 1 1 y $(\partial/\partial y^j)_{\bar{a}}(F) = \partial F/\partial y^j(\bar{a})$

Al A-módulo de las A-derivaciones de $\mathcal{A}$ en A en el punto $\bar{a}$ le llamaremos módulo tangente a L en el punto $\bar{a}$ Como hemos dicho, es isomorfo al propio L

2 ECUACIONES DIFERENCIALES PARAMETRIZADAS EN UN ANILLO

Familia de ecuaciones diferenciales parametrizadas por un álgebra de Banach

Por naturalidad en el contexto, nos limitaremos a ecuaciones diferenciales de clase C^∞, pero el método es aplicable esencialmente para ecuaciones de clase C^m

Sea A una F^*-álgebra de Banach real diferenciablemente completa de espectro X Sea $\mathcal{A}$ como en el apartado anterior la A-álgebra $C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A$

Definición

Llamaremos ecuacion diferencial parametrizada por A a una curva de clase C^∞ en el espacio $\mathrm{Der}_A(\mathcal{A},\mathcal{A})$

Según el teorema IV 1 2 $\mathrm{Der}_A(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \mathcal{A}\oplus {}^n \oplus\mathcal{A}$, luego la ecuación diferencial vendrá dada por un conjunto de n funciones

$$F^i \in C^\infty(R)\hat{\otimes}_P C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_P A \qquad i=1, \quad ,n$$

Dada una A-sección $\bar{a}_o$ $L=A\oplus^n \oplus A$ del fibrado de base Spec(A) y fibra R^n, llamaremos solución de la ecuación diferencial con condición inicial $\bar{a}_o$ a toda función $\bar{\phi}$ de clase C^∞ de un segmento $I_{(-\alpha,-\alpha)}$ en el módulo L tal que $\bar{\phi}(0) = \bar{a}_o$ y tal que

$$\frac{d\bar{\phi}(t)}{dt} = \bar{F}(t,\bar{\phi}(t)), \text{ esto es, } \frac{d\phi^i(t)}{dt} = F^i(t,\phi_1(t), \quad ,\phi_n(t))$$

i , n

Teorema de existencia local IV 2 1

Dada una ecuación diferencial y una sección $\bar{a}_o$ perteneciente a L, existe un entorno de $\bar{a}_o$, $U_{\bar{a}_o}$, un segmento $I_{[-\alpha,+\alpha]}$ y una aplicación

$$I_{[-\alpha,+\alpha]}\times U_{\bar{a}_o} \xrightarrow{\phi} L$$

tal que para cada $\bar{a}\in U_{\bar{a}_o}$, $\bar{\phi}(t,\bar{a})$ es una solución de la ecuación diferencial con condición inicial $\bar{a}$ Además $\bar{\phi}$ es única

Demostración

Observemos que $\bar{F} = \{F^i\}$ puede interpretarse como una función de $R\times L \to L$ Esta función es continua como puede comprobarse tras lo dicho en el apartado 1 de este capítulo (teorema IV 1 1) así como las derivadas $\partial\bar{F}/\partial y^i$ $i=1, \quad ,n$ A partir del mismo teorema IV 1 1 puede verificarse que $\bar{F}$ cumple una condición de Lipschitz $|\bar{F}(t,\bar{b}) - \bar{F}(t,\bar{a})| \leq k|\bar{b}-\bar{a}|$ para $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en una bola de centro $\bar{a}_o$ y para todo t en un intervalo

Estamos entonces en las condiciones del teorema clásico enunciado para espacios de Banach y nos remitimos a dicha demostración (véase por ejemplo {6 bis})

Corolario IV 2 1

Sea una ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{df^i}{dt} = F^i(t,f^1(t), \quad ,f^n(t)) \quad i=1, \quad ,n \quad (F^i \text{ de clase } C^\infty)$$

Para cada condición inicial $(\lambda_o^1, \quad ,\lambda_o^n)$ y para cada entorno compacto $B = B_r((\lambda_o^1, \quad ,\lambda_o^n))$, bola cerrada de centro $(\lambda_o^1, \quad ,\lambda_o^n)$ y radio r, y cada numero natural m, existe un intervalo $I=[-\alpha,+\alpha]$ y una aplicación $I\times B \xrightarrow{\bar{\phi}} R^n$ tal que

$$\frac{d\phi^i(t)}{dt} = F^i(t,\phi^1(t), \quad ,\phi^n(t)), \qquad \phi^i(0,\lambda^1, \quad ,\lambda^n)=\lambda^i$$

donde $\bar{\phi}$ es de clase C^m en las λ^i y C^∞ en t

Demostración

Sea $A=C^m(B)$ Consideremos el fibrado trivial $B\times R^n$ Tenemos $F^i \in C^\infty(R)\hat{\otimes}_R C^\infty(R^n) \subset C^\infty(R)\hat{\otimes}_R C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A$

Es una ecuación diferencial en el fibrado en el sentido del teorema anterior (en este caso la ecuación es independiente de la fibra) Tomemos como condición inicial $a^i(\lambda^1, \quad ,\lambda^n)=\lambda^i$ Por el teorema anterior existe una solución $\phi^i \in C^\infty(I)\hat{\otimes}_R C^m(B)$ con $\phi^i(0,\lambda^1, \quad ,\lambda^n) = \lambda^i$ como queríamos probar

Observación

Si la ecuación diferencial depende de una familia de parámetros $\mu^1, \quad ,\mu^r$ podemos considerar un fibrado trivial de base $B((\lambda^1, \quad ,\lambda^n)) \times B((\mu^1, \quad ,\mu^r))$ y fibra R^n La ecuación diferencial dependerá de $\mu^1, \quad ,\mu^r$ y será independiente de las λ^i Tomando como condición inicial la sección que asigna a $(\lambda,\mu) \to \lambda$ se obtiene el teorema local de dependendia diferenciable de las soluciones, de las condiciones iniciales y de una familia de parámetros sobre la ecuación diferencial

Corolario IV 2 2

Sea una ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{df^i}{dt} = F^i(t,f^i(t), \quad ,f^n(t)) \qquad i=1, \quad ,n$$

F^i de clase C^∞ Sea el subconjunto de $R\times R^n$ consituido por los puntos (t,x) con $t^-(x)<t<t^+(x)$, donde $t^+(x)$ y $t^-(x)$ son los extremos del intervalo maximal (pueden ser $+\infty$ ó $-\infty$) $J(x)$ en el que existe solución de la ecuación diferencial con condición inicial x Llamémosle $\mathcal{D}$ Es un conjunto abierto y la aplicación $\mathcal{D}\xrightarrow{\psi}R^n$, $(t,x) \to \psi(t,x) =\psi_x(t)$, solución de la ecuación diferencial, es de clase C^∞

Demostración

Ver S Lang {6 bis}

Teorema IV 2 2

Sea A una F^*-álgebra de espectro compacto diferenciablemente completa Sea $\bar{F}$ una ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{df^i}{dt} = F^i(t,f^1, \quad ,f^n) \qquad i=1, \quad ,n$$

Para cada $\bar{a}_o\in L$ existe un entorno $U(\bar{a}_o)$, un intervalo $I_{[-\alpha,+\alpha]}$ y un elemento

$$\bar{\phi} \in C^\infty(I)\hat{\otimes}_R(C^\infty(R^n)\otimes \overset{n}{\quad} \otimes C^\infty(R^n)) \subset C^\infty(I)\hat{\otimes}_R(\mathcal{A}\otimes \overset{n}{\quad} \otimes\mathcal{A})$$

tal que

$$\frac{d\bar{\phi}(t,\bar{a})}{dt} = \bar{F}(t,\bar{\phi}(t,\bar{a})) \qquad y \qquad \bar{\phi}(0,\bar{a}) = \bar{a}$$

$\bar{\phi}$ es único

Observación

La diferencia esencial con el teorema IV 2 1 es que aquí no se supone que A sea de Banach y que el enunciado presente es más preciso en cuanto a la dependencia de las condiciones iniciales

Obsérvese por otra parte que $\bar{\phi}(t,\bar{a})$ es un elemento de L, y tiene sentido por tanto $\bar{F}(t,\bar{\phi}(t,\bar{a}))$

Demostración

Sea $\mathcal{D} \subset R \times R^n$ el abierto en el que existe solución ordinaria $\mathcal{D} \longrightarrow R^n$ de la ecuación Por ser X= Spec(A) compacto podemos encontrar un entorno de $\bar{a}_o$, $U(\bar{a}_o)$ (bola para la norma de la convergencia uniforme) y un segmento $I = [-\alpha,+\alpha]$ tal que $I \times U(\bar{a}_o)(X) \subset \mathcal{D}$, donde

$$U(\bar{a}_o)(X) = \bigcup_{\substack{\bar{a}\in U(\bar{a}_o)\\ x\in X}} \bar{a}(x)$$

La solución de la ecuación restringida a este abierto coincide con una función $\bar{\phi} \in C^\infty(I)\hat{\otimes}_R(C^\infty(R^n)\oplus \overset{n}{\cdots} \oplus C^\infty(R^n))$, $\bar{\phi}$ es la solución del enunciado (si $\bar{\phi} = \sum_i g_i(t)\otimes h_i(x_1, \quad ,x_n)$,

$\bar{\phi}(t,\bar{a}) = \sum_i g_i(t)h_i(a_1, \quad ,a_n))$

3 MORFISMO T LISO ASOCIADO A UN MODULO PROYECTIVO Y A UN FIBRADO TRIVIAL DE FIBRA UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE

Morfismo t liso asociado a un módulo proyectivo

Sea A una F^*-álgebra real de espectro compacto diferenciablemente completa Sabemos que todo A-módulo M de Fréchet proyectivo finitamente generado es localmente libre Podemos asociarle un fibrado sobre Spec(A) tal que la fibra en cada punto x sea $(A/m_x)\otimes_A M = M/m_x M$ Este fibrado es localmente trivial y las secciones de tipo A son los elementos de M

Las funciones de transición correspondientes a dos abiertos trivializantes U y V de Spec(A) son las funciones de $A_{U\cap V}$ que expresan el cambio de bases inducido en $M_{U\cap V}$ por las bases libres de M_U y M_V

Supondremos que las dimensiones locales de M son constantes.

Teorema IV 3 1

Para cada A-módulo localmente libre M existe una A-álgebra $\mathcal{A}$ de Fréchet tal que su espectro es el fibrado asociado a M, $\mathrm{Spec}_A(\mathcal{A})=M$, $\mathcal{A}$ es una extensión localmente trivial finito generada sobre A y el morfismo $A\longrightarrow\mathcal{A}$ es t liso

Demostración

Supongamos que sea n la dimensión de las fibras en cada $x\in\mathrm{Spec}(A)$ Sea $\{U_i\}$ un recubrimiento trivializante del espectro, numerable y localmente finito Sea $A_i=A_{U_i}$, $M_i=M_{U_i}$, y llamemos $B=\prod_i A_i$ B es una

A-álgebra de espectro la suma topológica de los abiertos U_i. La inyección natural de A en B es continua y la imagen es cerrada en B puesto que para cada par de índices i,j se tiene un morfismo lineal $\delta_{ij}: B \to A_{U_i \cap U_j}$ que es la diferencia de las restricciones de las componentes i,j a $U_i \cap U_j$. Entonces $A = \bigcap_{i,j} \mathrm{Nuc}\,\delta_{ij}$ (propiedad de haz de A) y por lo tanto A es cerrado.

Sea $\mathcal{B} = C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R B$. Se tiene $\mathrm{Spec}_B \mathcal{B} = \mathrm{Hom}_B(\mathcal{B}, B) = \mathrm{Hom}_R(C^\infty(R^n), B) =$
$= B \oplus \overset{n}{\cdots} \oplus B = \mathcal{M}$

Mediante la inyección natural $M \to \mathcal{M}$, que es un morfismo de A-módulos, podemos considerar M como una parte de $\mathcal{M}$ que caracterizaremos. De esta forma M se puede interpretar como

a) Un submódulo de $\mathcal{M}$ que es el espacio de todas las funciones de la suma disjunta de las U_i en R^n que localmente son de A^n

b) Un espacio de B-morfismos $\mathcal{B} \longrightarrow B$

Sean $\{\bar{m}_{i\alpha}\}, \{\bar{m}_{j\alpha}\}$ $\alpha=1, \ldots, n$, bases de M_i y M_j respectivamente. En $U_{ij} = U_i \cap U_j$ tendremos las relaciones $\bar{m}_{i\beta} = a^\alpha_{ij\beta}\bar{m}_{j\alpha}$, donde $a^\alpha_{ij\beta} \in A_{ij}$ son las funciones de transición.

En la interpretación funcional de M, si $\bar{m} \in M$ tendremos $\bar{m} = a^\alpha_i \bar{m}_{i\alpha}$ en U_i y $\bar{m} = a^\alpha_j \bar{m}_{j\alpha}$ en U_j, luego en U_{ij} serán válidas las relaciones $a^\alpha_j = a^\beta_i a^\alpha_{ij\beta}$

Estas ecuaciones caracterizan, en $\mathcal{M}$, los elementos de M por ser éste un haz. Para cada i,j tenemos dos aplicaciones naturales ϕ_i, ϕ_j de B en A_{ij}. Hemos llamado $\delta_{ij} = \phi_i - \phi_j$. Como $\bar{m} \in \mathcal{M}$ define, por composición con δ_{ij} una aplicación lineal $\delta_{ij} \cdot \bar{m} : \mathcal{B} \longrightarrow A_{ij}$ definamos $\mathcal{A}$ por la relación $\mathcal{A} = \bigcap_{\substack{\bar{m} \in M \\ i,j}} \mathrm{Nuc}(\delta_{ij} \cdot \bar{m})$.

$\mathcal{A}$ es una subálgebra cerrada de $\mathcal{B}$ que contiene a A, es pues una A-álgebra Veamos que $\mathrm{Spec}_A(\mathcal{A}) = M$

Cada $\bar{m}\in M$ da un morfismo de $\mathcal{A}$ en A, pues define un morfismo de $\mathcal{A}$ en B y la condición $\delta_{ij}\circ\bar{m}(F) = 0$ para todo $F\in\mathcal{A}$ y todo i,j, prueba que $\bar{m}(F)\in A$ Falta ver que todo A-morfismo $\mathcal{A}\longrightarrow A$ proviene de un $\bar{m}\in M$ y que la correspondencia es biunívoca Veamos antes dos lemas

Lema IV 3 1

Sea A una F^*-álgebra diferenciablemente completa y (a_α^β) una matriz de $n\times n$ coeficientes en A Entonces, para todo $F\in C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A$, la función $(\tau F)(\bar{y},x) = F((a_\alpha^\beta)\bar{y},x)$ es un elemento de $C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A$

En efecto, probémoslo para los elementos $f\in C^\infty(R^n)$ y observemos que la aplicación τf se puede considerar como composición de las aplicaciones

$$\begin{array}{ccccc} R^n & \longrightarrow & A\oplus\cdots\oplus A & \longrightarrow & A \\ \bar{y} & \longrightarrow & (a_\alpha^\beta)\bar{y} & \longrightarrow & f((a_\alpha^\beta)\bar{y}) \end{array}$$

como ambas son infinitamente diferenciables, lo es la composición y $\tau f\in C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A$

El caso en que $F\in C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A$ es ahora trivial.

Lema IV 3 2

Siguiendo las notaciones del teorema IV 3 1 , $\mathcal{A}_i = A_i\otimes_A\mathcal{A}$ es isomorfo a $C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A_i$

Demostración

Se tiene una aplicación natural

$$\mathcal{B}_i = A_i \otimes_A \mathcal{B} \longrightarrow A_i \otimes_B \mathcal{B} = C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A_i$$

que se restringe a una aplicación

$$\mathcal{A}_i = A_i \otimes_A \mathcal{A} \longrightarrow C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A_i$$

Construyamos la aplicación inversa de ésta Sea I_i el ideal de A_i consistente en las funciones a soporte compacto contenido en U_i Es suficiente construir la aplicación inversa para el subespacio $C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R I_i$ y extenderla por continuidad Se trata, entonces, de establecer una inclusión topológica de $C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A_i$ en $A_i \otimes_A \mathcal{A}$ Sea π_i la proyección natural de $\mathcal{B}$ en $C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A_i$ Para cada par de índices i,j componiendo π_i y π_j con la restricción a U_{ij} tendremos aplicaciones

$$\psi_i \; \mathcal{B} \longrightarrow C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A_{ij} \qquad\qquad \psi_j ; \mathcal{B} \longrightarrow C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A_{ij}$$

Si llamamos τ_{ij} a la aplicación $C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A_{ij} \to C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A_{ij}$, $F \to \tau_{ij}F$, asociada a las funciones de transición correspondientes al par de índices ij y que tiene sentido según el lema IV.3 1., es una comprobación verificar que

$$\mathcal{A} = \bigcap_{ij} \text{Nuc } (\psi_i - \tau_{ij}\psi_j)$$

Estamos ya en condiciones de establecer la inyección $C^\infty(R^n)\otimes_R I_i \longrightarrow A_i \otimes_A \mathcal{A}$ Definiremos una inclusión

$$C^\infty(R^n)\otimes_R I_i \longrightarrow A_i \otimes_A \mathcal{B} = A_i \;{}_A(\prod_j (C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A_j))$$ y comprobaremos que la imagen está en $A_i \otimes_A \mathcal{A}$

Sea $b\in I_i$, $f\in C^\infty(R^n)$, $f\otimes b$ es un elemento de $C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R I_i$, llamaremos $i_j(f\otimes b)$ al elemento de $C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A_j$ definido así restrinjamos $f\otimes b$ a $C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A_{ij}$, prolonguemos por 0 a $R^n\times(U_j-U_{ij})$ y apliquemos a este elemento τ_{ij}^{-1} La inclusión que definimos es la siguiente

$$f\otimes b \longrightarrow 1\otimes_A((i_j(f\otimes b))_j)$$

que, puede comprobarse, es un homomorfismo topológico

Tal como se ha hecho la construcción, la imagen será de $\mathcal{A}_i$ La imagen de esta aplicación es densa en $\mathcal{A}_i$, como puede probarse teniendo en cuenta la expresión de $\mathcal{A}_i$ como límite proyectivo de cocientes de $\mathcal{A}$ (ver capítulo I sección 2) y observando que la imagen cubre una parte densa en cada uno de estos cocientes Esto acaba la demostración del lema

Terminemos la demostración del teorema

Todo A-morfismo $\mathcal{A}\longrightarrow A$ define A-morfismos $\mathcal{A}_i = C^\infty(R^n)\hat{\otimes}_R A_i \longrightarrow A_i$ que se expresan por conjuntos de funciones $\bar{a}_i\in A_i^n$ donde $\bar{a}_i$ y $\bar{a}_j$ están relacionadas mediante las funciones de transición, es decir, definen un elemento de M Esto prueba que $\mathrm{Spec}_A(\mathcal{A}) = M$. Es ya evidente que $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ es el fibrado localmente trivial relativo al módulo M y que se verifican las restantes condiciones del teorema.

Teorema IV 3 2

Si $\mathcal{A}$ es el álgebra definida en el teorema IV 3.1.,

$\mathcal{A}_U \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_{\mathcal{A}|A} = \Omega_{\mathcal{A}_U|A_U}$ En particular $\Omega_{\mathcal{A}|A}$ es un $\mathcal{A}$-módulo proyecti vo

Demostración

La demostración de este teorema se podría reducir al lema III 2 8 No obstante, para poder aplicar éste necesitaríamos unas hipótesis superabundantes para este caso particular Preferimos, entonces, hacer una demostración directa

Según el teorema III 1 1 , tenemos las sucesiones

$$(1) \qquad \mathcal{A}\otimes_A \Omega_A \longrightarrow \Omega_{\mathcal{A}|R} \longrightarrow \Omega_{\mathcal{A}|A} \longrightarrow 0$$

$$(2) \qquad \mathcal{A}_U\otimes_{A_U} \Omega_{A_U} \xrightarrow{\alpha_1} \Omega_{\mathcal{A}_U|R} \xrightarrow{\alpha_2} \Omega_{\mathcal{A}_U|A_U} \longrightarrow 0$$

donde las imágenes de los primeros morfismos son densas en los nucleos de los segundos

Si tensorializamos la sucesión (1) por $\mathcal{A}_U$ sobre $\mathcal{A}$, tendremos

$$(3) \qquad \mathcal{A}_U\otimes_A \Omega_A \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{A}_U \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_{\mathcal{A}|R} \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{A}_U\otimes_{\mathcal{A}} \Omega_{\mathcal{A}|A} \longrightarrow 0$$

Observemos en primer lugar que

$$\mathcal{A}_U\otimes_A \Omega_A = (\mathcal{A}_U \otimes_{A_U} A_U)\otimes_A \Omega_A = \mathcal{A}_U \otimes_{A_U} (A_U\otimes_A \Omega_A) = \mathcal{A}_U \otimes_{A_U} \Omega_{A_U}$$

tambien sabemos que $\mathcal{A}_U \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_{\mathcal{A}|R} = \Omega_{\mathcal{A}_U|R}$ De aquí que las sucesiones (2) y (3) tienen los dos primeros términos iguales

Veamos que la sucesión (3) tiene la imagen de ϕ_1 densa en el nucleo de ϕ_2 Esto se deduce de que si para un morfismo $N \longrightarrow M$, entre módulos de Fréchet, la imagen de N es densa en M, el morfismo de los localizados $N_U \rightarrow M_U$ sigue verificando que la imagen de N_U es densa en M_U Esto se deduce de la expresión de M_U como límite proyectivo de cocientes de M De aquí que

$$\mathcal{A}_U \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_{\mathcal{A}|A} = \frac{\mathcal{A}_U \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_{\mathcal{A}|R}}{\overline{\operatorname{Img}\phi_1}} = \frac{\Omega_{\mathcal{A}_U|R}}{\overline{\operatorname{Img}\, \alpha_1}} = \Omega_{\mathcal{A}_U|A_U}$$

Corolario IV 1 2

En las condiciones del teorema anterior, para dada $\mathcal{A}$-módulo de Fréchet N, se tiene

$$\mathcal{A}_U \otimes_{\mathcal{A}} \operatorname{Der}_A(\mathcal{A},N) = \operatorname{Der}_{A_U}(\mathcal{A}_U,N_U)$$

Demostración

$$\mathcal{A}_U \otimes_{\mathcal{A}} \operatorname{Der}_A(\mathcal{A},N) = \mathcal{A}_U \otimes_{\mathcal{A}} \operatorname{Hom}(\Omega_{\mathcal{A}|A},N) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}_U}(\Omega_{\mathcal{A}_U|A_U},N_U)$$

donde la última igualdad se deduce de ser $\Omega_{\mathcal{A}|A}$ de presentación finita

En particular, para los campos, tendremos la relación

$$\mathcal{A}_U \otimes_{\mathcal{A}} \operatorname{Der}_A(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \operatorname{Der}_{A_U}(\mathcal{A}_U,\mathcal{A}_U)$$

y para las derivaciones a lo largo de una sección σ tendremos

$$\mathcal{A}_U \otimes_{\mathcal{A}} \operatorname{Der}_{A,\sigma}(\mathcal{A},A) = \operatorname{Der}_{A_U;\sigma}(\mathcal{A}_U,A_U)$$

donde A es un $\mathcal{A}$-módulo vía el valor que toman los elementos de $\mathcal{A}$ en σ

En particular $\operatorname{Der}_{A,\sigma}(\mathcal{A},A)$ será un A-módulo proyectivo localmente isomorfo a M_U, luego isomorfo a M

Digamos, por último, que para los elementos de $\mathcal{A}$ se puede dar una fórmula de Taylor

$$F(\bar{m}+\bar{h}) = F(\bar{m}) + \frac{1}{1!} dF_{(\bar{m})}(\bar{h}) + \qquad + \frac{1}{(r-1)!} d^{(r-1)}F_{(\bar{m})}(\bar{h}, \overset{r-1}{\ldots} ,\bar{h}) + R_r$$

donde R_r se expresa localmente como una integral de las del tipo del teorema IV 1 1 La demostración se reduce al caso local teniendo en cuenta las relaciones entre las localizaciones de las derivaciones y las derivaciones de los anillos localizados, que hemos expuesto

<u>Morfismo t liso asociado a un fibrado trivial de fibra una variedad diferenciable</u>

Sea $\mathcal{V}$ una variedad diferenciable, compacta o recubrible por un número finito de entornos coordenados A un álgebra real como en el apartado anterior y nuclear $\mathcal{E}$ es el anillo de las funciones infinitamente diferenciables sobre $\mathcal{V}$ Consideremos el fibrado trivial de base Spec(A)= X y fibra $\mathcal{V}$ Podemos asociarle el morfismo t liso $A \to \mathcal{A} = \mathcal{E}\hat{\otimes}_R A$ Se verifica que Spec($\mathcal{A}$) es el fibrado y que $\mathrm{Spec}_A(\mathcal{A}) = \mathrm{Hom}_A(\mathcal{A}, A) = \mathrm{Hom}_R(\mathcal{E}, A)$ son las secciones de tipo A del fibrado A este último le llamaremos variedad asociada a $\mathcal{V}$ con coeficientes en A, $\mathcal{V}_A$ Por ejemplo, si A son las funciones diferenciables sobre un segmento, la A-variedad $\mathrm{Spec}_A(\mathcal{A})$ está formada por las curvas diferenciables en la variedad

Usando el teorema de inmersión de Whitney se tiene una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow C^{\infty}(R^{2n+1}) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

de donde, tensorializando por A, por ser ésta nuclear y ser los espacios de Fréchet

$$0 \longrightarrow I\hat{\otimes}_R A \longrightarrow C^{\infty}(R^{2n+1})\hat{\otimes}_R A \longrightarrow \mathcal{E}\hat{\otimes}_R A \longrightarrow 0$$

sucesión de la que obtendremos

$$0 \quad \to \mathcal{V}_A \quad \to \mathrm{Hom}_R(C^{\infty}(R^{2n+1}),A) = A \overset{2n+1}{\oplus \quad \oplus} A$$

$\mathcal{V}_A$ es el subespacio de $A \overset{2n+1}{\oplus \quad \oplus} A$ incidente con $I\hat{\otimes}_R A$

El espacio $\mathrm{Hom}_R(C^{\infty}(R^{2n+1}),A)$ tiene como topología débil la de la suma directa $A \overset{2n+1}{\oplus \quad \oplus} A$ y $\mathcal{V}_A$ es un subespacio cerrado de éste para la topología débil, topología que induce en $\mathcal{V}_A$ la topología espectral débil natural

Nos proponemos demostrar que esta variedad es localmente isomorfa a A-módulos proyectivos del tipo del apartado anterior

Teorema IV 3 3

Para cada $\sigma \in \mathcal{V}_A$, las derivaciones en la sección σ, $\mathrm{Der}_{A,\sigma}(\mathcal{A},A)$ forman un A-módulo proyectivo de dimensión local la dimensión de la variedad El $\mathcal{A}$-módulo $\mathrm{Der}_A(\mathcal{A},\mathcal{A})$ es un $\mathcal{A}$-módulo localmente libre de la misma dimensión

Demostración

Sabemos que $\mathrm{Der}_{A,\sigma}(\mathcal{A},A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}|A},A)$ donde A es un $\mathcal{A}$-módulo, vía σ (III 1 1) Por otra parte, $\Omega_{\mathcal{A}|A} = \Omega_{\mathcal{E}}\hat{\otimes}_R A$ es un $\mathcal{A}$-módulo de Fréchet finito generado En este caso la localización conmuta con los homomorfismos (Teorema I 3 2) y tendremos que si U es un abierto de Spec(A) y V un abierto coordenado de la variedad :

$$\mathcal{A}_{V\times U} \otimes_{\mathcal{A}} \mathrm{Der}_{A,\sigma}(\mathcal{A},A) = \mathcal{A}_{V\times U} \otimes_{\mathcal{A}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A},\sigma}(\Omega_{\mathcal{E}}\hat{\otimes}_R A,A) =$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{V\times U},\sigma|U}(\Omega_{\mathcal{E}_V}\hat{\otimes}_R A_U, A_U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_V,\sigma|U}(\Omega_{\mathcal{E}_V}, A_U) = A_U \oplus \overset{n}{\cdots} \oplus A_U$$

Anâlogamente, el caso de los campos $\mathrm{Der}_A(\mathcal{A},\mathcal{A})$

<u>Definición</u>

Una <u>ecuación diferencial</u> en $\mathcal{V}_A$ (independiente del tiempo) es un elemento $D\in\mathrm{Der}_A(\mathcal{A},\mathcal{A})$

Una <u>solución de la ecuación diferencial</u> D con la condición inicial $\sigma_o\in\mathcal{V}_A$, definida en un intervalo I de R que contiene a 0, es un A-morfismo

$$\mathcal{A}=\mathcal{E}\hat{\otimes}_R A \xrightarrow{\sigma} C^\infty(I)\hat{\otimes}_R A$$

tal que compuesto con el morfismo $C^\infty(I)\hat{\otimes}_R A \to A$ que resulta de sustituir el parámetro t por 0, resulta el morfismo σ_o y tal que si consideramos la derivación D_t $C^\infty(I)\hat{\otimes}_R A \longrightarrow A$, $f\otimes a \longrightarrow f'(t)a$, $D_t\circ\sigma$ (derivación a lo largo de la curva de secciones en σ_t, que es la sección que consiste en componer el morfismo σ con el morfismo $C^\infty(I)\hat{\otimes}_R A \to A$ "dar al parámetro el valor t") coincide con la restricción del campo D a dicha sección σ_t $\mathcal{A}\xrightarrow{D}\mathcal{A}\xrightarrow{\sigma_t}A$

<u>Teorema IV 3 4</u> <u>(De existencia de soluciones de una ecuación diferencial)</u>

Para toda ecuación diferencial $D\in\mathrm{Der}_R(\mathcal{E},\mathcal{E})\subset\mathrm{Der}_A(\mathcal{A},\mathcal{A})$ y toda condición inicial σ_o, existe un entorno de condiciones iniciales y un intervalo I tal que para toda condición inicial σ de dicho entorno existe una solución definida en I

La demostración se reduce al teorema local IV 2 2

Teorema IV 3 5

Dado un punto $\sigma \in \mathcal{V}_A$, el anillo asociado al módulo de las derivaciones de $\mathcal{A}$ en σ es la localización de $\mathcal{A}$ en un entorno del gráfico de σ En consecuencia $\mathcal{A}$ es un límite proyectivo de A-álgebras asociadas a módulos proyectivos

Demostración

Tras el teorema IV 3 4 la demostración es equivalente a la clásica de existencia de "entornos tubulares"

Sabemos que existe un entorno de la diagonal de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ tal que él y $T_{\mathcal{V}}$, fibrado tangente a $\mathcal{V}$ son difeomorfos, correspondiendo en el isomorfismo el campo 0 con la diagonal $T_{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, $(y,0) \to (y,y)$ y en general la imagen del par (y,v) $y \in \mathcal{V}$, v vector tangente a $\mathcal{V}$ en y, es $(y, \exp_y \lambda(y,v)v)$, donde $\lambda(y,v)$ es el "parámetro de contracción" del fibrado tangente a un entorno conveniente de la sección 0 de $T_{\mathcal{V}}$ para que se pueda aplicar la función exponencial

Dada la sección σ, podemos establecer la aplicación biyectiva del fibrado tangente en σ, en un entorno del gráfico de σ, dada por

$$(x, x \circ D_\sigma) \to (x, \exp \lambda(\sigma(x), x\, D_\sigma)(x \circ D_\sigma))$$

donde $x \circ D_\sigma$ es la derivación en $\sigma(x) \in \mathcal{V}$ dada por la composición de D_σ con el morfismo "tomar valores en x" $A \to R$

Es una mera comprobación que esta aplicación nos establece el isomorfismo del enunciado.

BIBLIOGRAFIA

{1} R Arens A qeneralitation of normed rings Pacific Journal of Mathematics Dic 1952

{2} R Arens Dense inverse limit ring Michigan Math J Vol 5 nº2 1958

2 bis} Atiyah-McDonald Introduction to commutative algebra Addison-Wesley P C

{3} R M Brooks The Structure Space of a commutative locally M-convex algebra Pacific J of Math Vol 25 nº3 1968

{4} R M Brooks Partitions of unity in F-álgebras Math Ann 177-4-1968

{5} Gelfand,Raikov, Chilov Les aneaux normés conmutatifs Gauthier-Villars, Paris 1964

{6} A Grothendieck Produits tensoriels topologiques et espa ces nucleaires Memoire of the Amer Math Soc nº16 1955

6 bis} S Lang Introduction aux varietés differentiables Dunod

{7} Lorch The structure of normed abelian rings. Bull. Amer Math Soc 447-463 1944

7 bis} B Malgrange Ideals of differentiable funtions Oxford University Press, 1966

{8} Matsumura Commutative Algebra W A.Benjamin 1970

{9} E Michael Locally Multiplicatively-convex topological alqebras Memoire of the Amer.Math.Soc nº11 1952

{10} J Muñoz y J M Ortega Sobre las álgebras localmente convexas Coll Math volXX fasc 2º 1969

{11} J Muñoz Caracterización de las álgebras diferenciables y síntesis espectral para módulos sobre tales álgebras Tesis doctoral 1971

{12} R S Palais Foundations of Global non-linear analysis W A Benjamin 1968

{13} B Roth Finitely-generated ideals od differentiable functions Trans Amer Math Cos Vol 150 Julio 1970

{14} M Rosenfeld Commutative Algebras Pacific J of Math Vol 16 nº1 1966

{15} Seminaire Schwartz 1953-54

{16} J C Tougeron et J Merrien Ideaux de fonctions differentiables,II Ann Inst Fourier Tomo XX fasc I 1970