

TARTU ÜLIKOOL

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Füüsika instituut

Kaur Kristjuhan

**MITTE-MINIMAALSELT SEOTUD INFLATSIOONIMUDELITE  
VÕRDLEMINE VAATLUSTEGA**

Bakalaureusetöö (12 EAP)

Juhendaja:  
PhD Margus Saal

Kaitsmisele lubatud:

Tartu 2018

# Mitte-minimaalselt seotud inflatsioonimudelite võrdlemine vaatlustega

Varajase universumi probleemide lahendamiseks on formuleeritud kosmoloogilise inflatsiooni teooria. See on ruumi eksponentsiaalse paisumise etapp univerumis, mis on enamikes mudelites kirjeldatud skalaarvälja abil. Kõige lihtsamal ja uuritumal juhul on skalaarväli gravitatsiooniga minimaalselt seotud. Käesolevas töös uuritakse mitte-minimaalselt seotud inflatsioonimudeleid. Üldise kujuga mitte-minimaalselt seotud mudeli jaoks leitakse avaldised spektraalse indeksi  $n_s$  ja tensor-skalaar häirituste suhte  $r$  jaoks, kasutades raamiteisendustel ja skalaarvälja ümberparametriseerimisel invariantseks jäävaid suursi. Töö käigus on valmis kirjutatud programm, mille abil on võimalik lahendada vajalikud võrrandid, et joonistada teooria poolt ennustatud parametrizeeritud jooned  $n_s$ - $r$  graafikul ning esitada need koos vaatlusandmete poolt määratud usalduskontuuridega.

Märksõnad: inflatsioon, kosmoloogia, skalaar-tensor teooria

CERCS: P190 - Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika.

## Comparison of non-minimally coupled inflationary models with observational data

Multiple problems in cosmology are solved by a theory of inflation, which describes the exponential expansion of space in the early universe. In the simplest and most studied case, the scalar field that drives inflation is assumed to be minimally coupled to gravity. In this thesis, non-minimally coupled inflationary models are considered. An expression for the scalar spectral index  $n_s$  and tensor-scalar ratio  $r$  is found for a general non-minimally coupled action. This is done by using the properties of certain quantities, that are invariant under conformal rescaling of the metric and reparametrisation of the scalar field. A computer program is created, which solves the necessary equations to calculate the lines predicted by the theory on the  $n_s$ - $r$  plot. These lines are plotted alongside confidence contours fixed by observational constraints.

Keywords: inflation, cosmology, scalar-tensor theory

CERCS: P190 - Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics.

# Sisukord

<b>Sissejuhatus</b>	<b>4</b>
<b>1 Kosmoloogia standardmudel</b>	<b>6</b>
1.1 Üldrelatiivsusteooria . . . . .	6
1.1.1 Aegruumi geomeetria . . . . .	6
1.1.2 Einsteini väljavõrrandid . . . . .	8
1.2 Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker mudel . . . . .	8
1.2.1 Friedmanni võrrandid . . . . .	9
1.2.2 Probleemid . . . . .	10
1.3 Inflatsioon . . . . .	11
1.3.1 Skalaarväli . . . . .	11
1.3.2 Aeglase veeremise lähend . . . . .	13
1.3.3 Vaadeldavad suurused . . . . .	15
<b>2 Mitte-minimaalselt seotud mudelid</b>	<b>19</b>
2.1 Mõjufunktsionaal ja väljavõrrandid . . . . .	19
2.2 Teisendused . . . . .	21
2.3 Invariantide formalism . . . . .	22
<b>3 Programm ja tulemused</b>	<b>25</b>
3.1 Tarkvara üldine arhitektuur . . . . .	25
3.2 Arvutusfaili töö kirjeldus . . . . .	27
3.3 Tulemuste võrdlus . . . . .	28
3.3.1 Minimaalselt seotud mudelid . . . . .	28
3.3.2 Mitte-minimaalselt seotud mudelid . . . . .	31
3.4 Perspektiiv . . . . .	35
<b>Kokkuvõte</b>	<b>36</b>
<b>Tänuavaldused</b>	<b>37</b>
<b>Kirjandus</b>	<b>38</b>
<b>Lihtlitsents</b>	<b>42</b>

# Sissejuhatus

Kosmoloogia eesmärk on uurida universumi struktuuri ja dünaamikat [1]. Standardmudeliks on  $\Lambda$ CDM (*Lambda cold dark matter*) mudel, kus gravitatsiooni kirjeldab üldrelatiivsusteooria [2], kuhu on lisaks barüonainele kaasatud tumeaine [3] ja tumeenergiat [4] kirjeldav kosmoloogiline konstant  $\Lambda$ . See mudel kirjeldab Suure Pauguga algavat universumit, mis on läbinud erinevad evolutsioonietapid ja jõudnud praeguseks kiireneva paisumise faasi [5]. Mudel on küll kooskõlaline ja selle raames on võimalik leida teooria parameetreid suure täpsusega, kuid see sisaldab siiski mitmeid lahendamata probleeme [6].

Varajase universumi probleemide üheks võimalikuks lahenduste allikaks on kosmoloogilise inflatsioonina tuntud ruumi eksponentsiaalse paisumise periood [7]. Paisumine on määratud skalaarvälja  $\phi$  dünaamikaga. Kõige lihtsamal ja uuritumal juhul tehakse eeldus, et skalaarväli ei ole gravitatsiooniga seotud, ehk seda käsitletakse kui teatud omadustega eksootilist materialliiki, mida kirjeldab eneseinteraktsiooni väljendav potentsiaalse energia funktsioon  $V(\phi)$ . Sellist tüüpi mudeleid nimetatakse minimaalselt seotud mudeliteks.

Skalaarväli võib ka olla gravitatsiooniga seotud. Selliseid mudeleid nimetatakse mitte-minimaalselt seotuteks ning selles töös on uuritud teatud kujuga mudelid, mis on kirjeldatud nelja funktsiooniga  $A(\phi)$ ,  $B(\phi)$ ,  $V(\phi)$  ja  $\sigma(\phi)$  [8]. Mitte-minimaalselt seotud teooriad pakuvad huvitavaid alternatiivseid lahendusi ja üldistusi, kuid selliste teooriate uurimine osutub keerukaks. Artiklis [9] on leitud teatud teisendustel invariantseteks jäävad suurused, mida saab kasutada mitte-minimaalselt seotud mudelite uurimiseks.

Käesoleva töö originaalse osana on leitud nende invariantide põhjal mitte-minimaalselt seotud teooria jaoks avaldised kahe olulise suuruse jaoks - skalaarne spektraalindeks (*scalar spectral index*)  $n_s$  ja tensor-skalaar häirituste suhe (*tensor-scalar ratio*)  $r$ . Need suurused on olulised sellepärast, et nende väärtusi saab mikrolainelise taustkiirguse vaatluse põhjal hinnata [10]. Efektiivseks võrdlemiseks on kirjutatud arvutiprogramm, mis lahendab vajalikud võrrandid, et joonistada graafik telgedega  $n_s$  ja  $r$ , mis sisaldab nii teooria poolt ennustatud

parametriseeritud jooni kui ka vaatluste poolt fikseeritud usalduspiirkondi.

Töö on jaotatud kolmeks osaks. Esimeses peatükis on antud ülevaade kosmoloogia standardmudelist ning inflatsioonist. Teises peatükis on tutvustatud gravitatsiooniga mitte-minimaalselt seotud inflatsioonimudeleid ja nendega seonduvaid teisendusi. Kolmandas peatükis on kirjeldatud töö originaalse osana loodud programmi ning võrreldud saadud tulemusi.

Töö eesmärkideks on:

1. Süvendada teadmisi üldrelatiivsusteooriast, kosmoloogiast ja inflatsioonist.
2. Teha selgeks inflatsioonimudelite analüüsimiseks kasutatavate suuruste  $n_s$  ja  $r$  füüsikaline sisu ning avaldised mitte-minimaalselt seotud mudelite jaoks.
3. Kirjutada arvutiprogramm, mis oleks võimeline arvutama ja kuvama teooria ja eksperimendi poolt ennustatud suurusi.
4. Võrrelda saadud tulemusi ning hinnata meetoodilisi piiranguid.

Töös kehtivad kokkulepped:

1. Kasutusel on loomulikud ühikud  $c = \hbar = 1$ .
2. Meetrika signatuur on  $(-+++)$ .
3. Kui võrrandil ei ole eraldi viidet, on märgid valitud selliselt nagu raamatus [2].
4. Kui tekstis on kasutatud mõnda lühendit, siis see on esimesel korral pikalt välja kirjutatud.
5. Spetsiifilistel terminitel, mis eestikeelses kirjanduses puuduvad või esinevad harva, on esimesel korral sulgudes toodud kaldkirjas selle inglise keelne vaste.
6. Kreeka tähtedega on tähistatud aegruumi indeksid, mis võtavad väärtusi 0...3. Ladina tähtedega on tähistatud kolmruumi indeksid, mis võtavad väärtusi 1...3.
7. Ajaline tuletis on tähistatud funktsiooni kohal asuva täpiga  $\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}$ . Osatuletised aegruumi koordinaatide järgi on tähistatud 4-gradiendi abil  $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ .

# Peatükk 1

## Kosmoloogia standardmudel

Käesoleva peatüki eesmärk on anda ülevaade kosmoloogia standardmudelist. Selle aluseks on kosmoloogilise konstandiga täiendatud üldrelatiivsusteooria, mida on tutvustatud alapeatükis 1.1. Alapeatükis 1.2 on selle baasil teatud eeldustega tuletatud universumi dünaamikat kirjeldavad Friedmanni võrrandid. Mudeli kosmoloogilistele probleemidele otsib lahendust inflatsiooni teooria, mida on kirjeldatud alapeatükis 1.3. Kosmoloogia standardmudelisse kuulub ka tumeaine, kuid selles töös seda ei uurita. Tumeainest võib saada ülevaate näiteks artiklist [3].

### 1.1 Üldrelatiivsusteooria

Üldrelatiivsusteooria on üldjoontes kooskõlaline ja edukas teooria gravitatsiooni kirjeldamiseks [11]. Alternatiivsed gravitatsiooniteooriad tihti üldistavad seda, lisades teooriale teatud vabadust ja ka keerukust, mis on enamasti väljendatav samas matemaatilises raamistikus. Käesoleva alajaotuse eesmärk on tutvustada üldrelatiivsusteooria ülesehitust ning kasutatavat matemaatilist aparati. Lühülevaade on koostatud tuginedes raamatutele [2, 12, 13] ja üldjuhul tekstis nende enam eraldi ei viidata.

#### 1.1.1 Aegruumi geomeetria

Üldrelatiivsusteooria kirjeldab gravitatsiooni aegruumi geomeetria kaudu. Matemaatiliselt on aegruum 4-mõõtmeline diferentseeruv muutkond, millel on defineeritud kindlate omadustega seostus ja meetrika [12].

Meetrika ehk meetriline tensor  $g_{\mu\nu}$  on sümmeetriline bilineaarvorm, mis määrab kahe aegruumi punkti, koordinaatidega  $x^\mu$  ja  $x^\mu + dx^\mu$ , omavahelise intervalli valemiga

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (1.1)$$

Seostus defineerib objektide liigutamise eeskirja muutkonnal. Üldrelatiivsusteoorias valitakse seostus selliselt, et kahe vektori omavaheline nurk säiliks muutkonnal liigutamisel [12]. See fikseeritakse meetrilisuse tingimusega

$$\nabla_\sigma g_{\mu\nu} \equiv \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda g_{\mu\lambda} = 0 , \quad (1.2)$$

kus  $\nabla_\sigma$  on kovariantne tuletis,  $\partial_\sigma$  on osatuletis ning  $\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$  on seostuse kordajad. Kirjutades sama võrrandi lahti erinevate indeksite jaoks ning tehes täiendava eelduse, et seostuse kordajad on alumistes indeksites sümmeetrilised  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$  (öeldakse, et sellisel juhul on seostus väändevaba), saab seostuse kordajad avaldada meetrilise tensori kaudu:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) . \quad (1.3)$$

Sellisel defineeritud seostust nimetatakse Levi-Civita seostuseks ning kordajaid  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  nimetatakse Christoffeli sümboliteks.

Vektorile  $V^\mu$  mõjuv kovariantse tuletise kommutaator  $[\nabla_\sigma, \nabla_\tau]$  on

$$[\nabla_\sigma, \nabla_\tau] V^\mu = (\nabla_\sigma \Gamma_{\nu\tau}^\mu - \nabla_\tau \Gamma_{\nu\sigma}^\mu) V^\nu + (\Gamma_{\sigma\tau}^\lambda - \Gamma_{\tau\sigma}^\lambda) \nabla_\lambda V^\mu . \quad (1.4)$$

Mõlemad sulgudes olevad suurused on tensorid. Esimene neist on Riemanni kõverustensor

$$R_{\nu\sigma\tau}^\mu \equiv \nabla_\sigma \Gamma_{\nu\tau}^\mu - \nabla_\tau \Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \partial_\sigma \Gamma_{\nu\tau}^\mu - \partial_\tau \Gamma_{\nu\sigma}^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \Gamma_{\tau\nu}^\rho - \Gamma_{\tau\rho}^\mu \Gamma_{\sigma\nu}^\rho . \quad (1.5)$$

Teises sulgudes olev suurus on väändetensor  $T_{\sigma\tau}^\lambda \equiv \Gamma_{\sigma\tau}^\lambda - \Gamma_{\tau\sigma}^\lambda$ , mis on Levi-Civita seostuse korral alati null. Üldrelatiivsusteooria formuleering kasutab Riemanni tensori ahendeid, milleks on Ricci tensor  $R_{\mu\nu}$  ja Ricci skalaar  $R$ . Need on antud valemitega:

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\lambda\nu}^\lambda = \partial_\lambda \Gamma_{\nu\tau}^\lambda - \partial_\tau \Gamma_{\nu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{\tau\nu}^\rho - \Gamma_{\tau\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho , \quad (1.6)$$

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} (\partial_\lambda \Gamma_{\nu\tau}^\lambda - \partial_\tau \Gamma_{\nu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{\tau\nu}^\rho - \Gamma_{\tau\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho) . \quad (1.7)$$

### 1.1.2 Einsteini väljavõrrandid

Üldrelatiivsusteooria väljavõrrandid on tuletatvad mõjufunktsionaali  $S_{\text{GR}}$  abil, mis tavaliselt jaotatakse kaheks osaks:

$$S_{\text{GR}} = S_{\text{EH}} + S_{\text{m}} . \quad (1.8)$$

Esimene liige  $S_{\text{EH}}$  on aegeomeetriat kirjeldav Einstein-Hilberti mõjufunktsionaal, mis on esitatav Ricci skalaari kaudu:

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) , \quad (1.9)$$

kus  $\kappa^2 \equiv 8\pi G_{\text{N}}$  ja  $G_{\text{N}}$  on Newtoni gravitatsioonikonstant. Konstant  $\kappa^2$  on antud ruuduna, et rõhutada selle positiivset väärtust. Negatiivne väärtus vastaks negatiivsele gravitatsioonikonstandile, mis iseloomustaks tõukavat jõudu.  $\Lambda$  on kosmoloogiline konstant, mis on praeguste vaatlusandmete kohaselt nullist erinev, kuid väike positiivne suurus [5, 14].

Teine liige  $S_{\text{m}}$  on mateeriat kirjeldav mõjufunktsionaal, mis sõltub meetrikast  $g_{\mu\nu}$  ja materiaäljadest  $\chi$ . Mateeria mõjufunktsionaali kaudu defineeritakse variatsiooniarvutuse teel energia-impulsi tensori valemiga

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} S_{\text{m}}[g_{\mu\nu}, \chi] . \quad (1.10)$$

Kui mõjufunktsionaali (1.8) varieerida meetrika  $g_{\mu\nu}$  järgi, on tulemuseks Einsteini väljavõrrandid [13]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} . \quad (1.11)$$

Einsteini väljavõrrandid on hüperboolset tüüpi mittelineaarsed diferentsiaalvõrrandid.

## 1.2 Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker mudel

Suurtel skaaladel on gravitatsioon domineeriv jõud, sest tuumajõude piirab väike mõjuraadius ning elektromagnetism kompenseerib iseenast erimärgiliste laengute olemasolu tõttu. Seega on universumi kui terviku dünaamika määratud gravitatsioonilise interaktsiooniga.



## 1.2.1 Friedmanni võrrandid

Suurtel skaaladel võib teha kaks eeldust - universum on homogeenne ja isotroopne. Sellist paradigmat kutsutakse kosmoloogiliseks printsiibiks. Kosmoloogilise printsiibi kehtivust ja mõõdetavust on detailsemalt analüüsitud mitmes artiklis [15, 16, 17].

Matemaatiliselt tähendavad homogeensus ja isotroopsus aegruumi sümmeetriat ruumiliste nihete ja pöörete suhtes. Need omadused panevad piirangud meetrika võimalikule kujule. Sellist meetrikat nimetatakse Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) meetrikaks, mis sfäärilistes koordinaatides kirjutatuna on:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right]. \quad (1.12)$$

FLRW meetrika kirjeldab kõikjal ühtlase kõverusega universumit, mille ruumilise joonelemendi pikkus muutub ajas. Seda ajalist sõltuvust kirjeldab täielikult funktsioon  $a(t)$ , mida nimetatakse mastaabikordajaks (*scale factor*). Suurus  $k$  iseloomustab universumi kõverust - positiivne väärtus tähendab suletud geomeetriaga ruumi, negatiivne väärtus avatud geomeetriga ruumi ja  $k = 0$  tähendaks, et ruum on tasane. Vaatlused näitavad, et universum on peaaegu väga täpselt tasane [14].

Homogeensuse ja isotroopsuse eeldamine annab energia-impulsi tensorile kuju  $T_{\mu\nu} = Ag_{\mu\nu} + Bu_{\mu}u_{\nu}$  [18], kus  $u$  on mateeria nelikiirus (normeeritud tingimusega  $u_{\mu}u^{\mu} = -1$ ). Lokaalses inertsiaalses taustsüsteemis  $u_{\mu} = (-1, 0, 0, 0)$  ja  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}[-1, 1, 1, 1]$ . Kokku annab see  $T_{\mu\nu} = \text{diag}[-A + B, A, A, A]$ . Selline mudel kirjeldab ideaalset vedelikku tihedusega  $\rho = -A + B$  ja rõhuga  $p = A$ . Seega on mateeria FLRW mudelis ideaalne vedelik, mille energia-impulsi tensor on

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu}. \quad (1.13)$$

Energia-impulsi jäävusseaduse  $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$  rakendamine saadud tulemusele annab pidevuse võrrandi (1.14). Einsteini väljavõrranditest (1.11) saab tuletada kiirendusvõrrandi (1.15) ja seosevõrrandi (1.16). Kokku neid kolme (vahel ka ainult viimast) kutsutakse Friedmanni

võrranditeks. FLRW kosmoloogia kontekstis on need põhivõrrandid:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (1.14)$$

$$\dot{H} + H^2 \equiv \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.15)$$

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G_N}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.16)$$

Kolmest võrrandist on sõltumatud kaks:

1. Kui võtta seosevõrrandist (1.16) ajaline tuletis ning asendada sisse kiirendusvõrrand (1.15), on tulemuseks pidevuse võrrand (1.14)
2. Kui võtta seosevõrrandist (1.16) ajaline tuletis ning asendada sisse pidevuse võrrand (1.14), on tulemuseks kiirendusvõrrand (1.15)

## 1.2.2 Probleemid

Friedmanni võrrandid kirjeldavad universumi arengut. Nende abil saab näidata, et universum oli algselt väga kõrge rõhu ja tihedusega ning see on aja jooksul paisunud ja jahtunud [19]. Seda tuntakse Suure Paugu teooriana. Seda toetavad paljud vaatluslikud tulemused, näiteks galaktikate kiirusjaotus, kosmilise taustkiirguse olemasolu ning universumi keemiline koostis. Selle protsessi detalisem analüüs toob aga esile mitmeid probleeme:

1. **Horisondi probleem.** Kosmiline taustkiirgus on kõige kaugemalt tulev elektromagnetkiirgus, mida õnnestub detekteerida. See tekkis 379 000 aastat pärast Suurt Pauku, hetkel mil universumi temperatuur oli langenud väärtuseni, kus aatomid said moodustuda. Varasemast perioodist footoneid meieni ei jõua, sest siis oli aatomite asemel footonitele läbipaistmatu plasma. Kosmiline taustkiirgus on igast suunast tulev musta keha kiirgus, temperatuuriga  $2,72548 \pm 0,00057$  K [20]. Temperatuur on madal, sest universumi paisumine on põhjustanud footonitele kosmoloogilist punanihet. Märkimisväärne on see, et universumi temperatuur sellel hetkel oli kõikjal peaaegu sama (suhteline anisotroopsus vaid  $10^{-5}$ ). See tähendab, et kogu universum pidi olema soojuslikus tasakaalus, kuid FLRW mudel ennustab, et leidunuks ligikaudu  $10^4$  piirkonda, mis ei olnud omavahel kausaalselt seotud. Horisondi probleem seisneb selles, et puudub selgitus, miks kosmilise taustkiirguse temperatuur on niivõrd ühtlane.
2. **Tasasuse probleem.** Kosmoloogiliste vaatlustega on võimalik hinnata universumi kõverust  $k$ . Osutub, et universum on peaaegu täpselt tasane [14]. Veel enam, seosevõrrandist (1.16) saab näidata, et universumi kõverus pidi algselt olema veel

palju väiksem kui praegu [6]. Tasasuse probleem seisneb selles, et ei leidu põhjendust, miks peaks  $k$  väärtus olema algselt niivõrd lähedal nullile. Spetsiifiliste algtingimuste nõudmist nimetatakse täppishäälestuseks. Täppishäälestuse vältimiseks tuleks leida mingi mehhanism, mis loomulikult teel viiks tänapäeval vaadeldava universumini.

3. **Kosmoloogilise konstandi probleem.** Kosmoloogiline konstant  $\Lambda$  kirjeldab mingit siemist aegruumi omadust, mis interakteerub gravitatsiooniga. Universumi kiirenev paisumine [5] näitab, et kosmoloogiline konstant on nullist erinev, kuid siiski väike. Osakestefüüsika pakub, et konstandi allikaks on vaakumi energia, kuid ennustavad  $\Lambda$  väärtuse kuni  $10^{120}$  korda suurema [21]. Kosmoloogilise konstandi probleem seisneb selles, et olemasolev füüsika ei suuda adekvaatselt ennustada vaatlustega kooskõlas olevat  $\Lambda$  väärtust.

Lisaks nendele probleemidele eksisteerib mitmeid teisi.

## 1.3 Inflatsioon

Kosmoloogiline inflatsioon on teooria, et universumi esimestel hetkedel toimus eksponentsiaalne aegruumi paisumine, oluliselt kiiremini kui FLRW mudel seda ennustaks. Teooria alused formuleeriti 1980-ndate alguses [7, 22, 23].

### 1.3.1 Skalaarväli

Selleks, et horisondi probleem lahendada, peaks varajases universumis mastaabikordaja  $a$  kasvama kiiremini kui Hubble'i horisont  $H^{-1}$ . Seda võibki võtta inflatsiooni defineeriva tingimusena, mille saab kirja panna kujul

$$\frac{d}{dt}(aH) > 0, \quad (1.17)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{a}) = \ddot{a} > 0. \quad (1.18)$$

Arvestades, et inflatsiooni ajal on kosmoloogilise konstandi panus tühine, saab suuruse  $\ddot{a}$  avaldada kiirendusvõrrandist (1.15) ning inflatsiooni tingimuse (1.18) täitmiseks peab kehtima:

$$\rho + 3p < 0. \quad (1.19)$$

Tavaline materia (tolm või kiirgus) sellist tingimust ei võimalda. Osutub, et sellist tingimust rahuldab teatud tingimustel skalaarväli  $\phi$ , mida nimetatakse inflatoniks.

Väljateooriast tuntud vaba skalaarvälja mõjufunktsionaal on

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2} \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi - V(\phi) \right\} . \quad (1.20)$$

Skalaarväljaga minimaalselt seotud gravitatsiooniteooriaks nimetatakse gravitatsiooniteooriat, mille mõjufunktsionaal on esitatav kujul

$$S = S_{\text{GR}} + S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{2\kappa^2} - \frac{1}{2} \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi - V(\phi) \right\} + S_m[g_{\mu\nu}, \chi] . \quad (1.21)$$

Skalaarvälja energia-impulss tensor on arvutatav analoogselt valemi (1.10) põhjal, skalaarvälja mõjufunktsionaalist (1.20):

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^\phi &= -2 \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} \left( -\frac{1}{2} \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi - V(\phi) \right) + g_{\mu\nu} \left( -\frac{1}{2} \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi - V(\phi) \right) \\ &= \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi - g_{\mu\nu} V(\phi) . \end{aligned} \quad (1.22)$$

Eeldusel, et skalaarväli on vaid aja funktsioon, on FLRW meetrika energia-impulsi tensori komponendid

$$T_{00}^\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) , \quad (1.23)$$

$$T_{ij}^\phi = \delta_{ij} \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right) . \quad (1.24)$$

Sellele vastava ideaalse vedeliku rõhk ja tihedus on

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) , \quad (1.25)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) . \quad (1.26)$$

Pidevuse võrrand (1.14) kirjeldab nüüd skalaarvälja dünaamikat:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 . \quad (1.27)$$

Seda tulemust kutsutakse ka gravitatsiooniga minimaalselt seotud skalaarvälja Klein-Gordon võrrandiks.

Inflatsiooni protsess koosneb etappidest:

1. Alguses on ainult skalaarväli. Materiat ei ole, ehk  $S_m = 0$ .
2. Skalaarväli areneb. Dünaamikat kirjeldab võrrand (1.27). Selle käigus ruum paisub.
3. Skalaarväli jõuab potentsiaalimiinimumi lähedale ning selle ümbruses ostsilleerudes annab energiat ära - toimub ülessoojenemine (*reheating*) [24, 25]. Energia kulub selleks, et luua materiat. Hilisema bariogeneesi ja leptogeneesi käigus tekivad elementaarosakesed.
4. Skalaarväli jõuab stabiilse väärtuseni  $\phi_*$ . Kineetiline liige  $\nabla_\sigma \phi_* \nabla^\sigma \phi_*$  on null. Potentsiaali liige on konstantse väärtusega ja võib kirjeldada kosmoloogilist konstanti väärtusega  $\Lambda = \kappa^2 V(\phi_*)$ . Materiat mõjufunktsionaal ei ole enam null, vaid on määratud tekkinud materiaga. Mõjufunktsionaal (1.21) on jõudnud üldrelatiivsusteooriat kirjeldava kujuni (1.8)

### 1.3.2 Aeglase veeremise lähend

Asendades skalaarvälja tiheduse (1.25) ja rõhu (1.26) inflatsiooni tingimusse (1.19), on tulemuseks

$$\dot{\phi}^2 < V(\phi) . \quad (1.28)$$

Kiirenev paisumine saab toimuda ainult siis kui see tingimus on täidetud. Osutub, et inflatsioon toimub peamiselt aeglase veeremise (*slow-roll*) režiimis, kus kehtib aeglase veeremise lähend [26]:

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) . \quad (1.29)$$

Terminoloogia tuleneb klassikalise mehaanika analoogiast - kui pall alustab aeglaselt mäe otsast veeremist, siis potentsiaalne energia domineerib üle kineetilise energia. Kui mõlemast poolest võtta ajaline tuletis, saab ekvivalentse tingimuse

$$2\ddot{\phi} \ll \frac{dV}{d\phi} . \quad (1.30)$$

Aeglase veeremise lähendis (1.30) on seega skalaarvälja võrrand (1.27)

$$3H\dot{\phi} \approx -\frac{dV}{d\phi} , \quad (1.31)$$

kus  $H$  saab leida seosevõrrandist (1.16), arvestades, et universum on ligikaudu tasane ( $k \approx 0$ ) ja kosmoloogilise konstandi panus on skalaarväljaga võrreldes tühine:

$$H^2 \approx \frac{8\pi G_N}{3} V. \quad (1.32)$$

Aeglase veeremise režiimi uurimiseks defineeritakse veel erinevaid suurus, mida nimetatakse aeglase veeremise parameetriteks. Käesolevas töös kasutatakse ainult kahte esimest potentsiaali aeglase veeremise parameetrit, mis on defineeritud potentsiaali kaudu [26]:

$$\varepsilon(\phi) \equiv \frac{1}{2\kappa^2} \left( \frac{d \ln V}{d\phi} \right)^2 = \frac{1}{2\kappa^2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2, \quad (1.33)$$

$$\eta(\phi) \equiv \frac{1}{\kappa^2 V} \frac{d^2 V}{d\phi^2} = \frac{1}{\kappa^2} \frac{V''}{V}. \quad (1.34)$$

Saab näidata, et tingimus  $\varepsilon(\phi) \ll 1$  on ekvivalentne aeglase veeremise tingimusega (1.29). Inflatsiooni käigus toimunud paisumist väljendatakse  $e$ -korduste arvu ( $e$ -folds)  $N$  abil, mis on naturaallogaritm mastaabikordajate suhtest:

$$\begin{aligned} N &\equiv \ln \frac{a(t_{\text{end}})}{a(t_0)} = \int_{t_0}^{t_{\text{end}}} H dt = \int_{\phi_0}^{\phi_{\text{end}}} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \stackrel{(1.31)}{\approx} \int_{\phi_0}^{\phi_{\text{end}}} -\frac{3H^2}{V'} d\phi \\ &\stackrel{(1.32)}{\approx} -8\pi G_N \int_{\phi_0}^{\phi_{\text{end}}} \frac{V}{V'} d\phi = \kappa^2 \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi_0} V \left( \frac{dV}{d\phi} \right)^{-1} d\phi. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Siin  $\phi_{\text{end}}$  on skalaarvälja väärtus inflatsiooni lõpus, mille saab leida tingimusest  $\varepsilon(\phi_{\text{end}}) = 1$ . Skalaarvälja algväärtus  $\phi_0$  on tundmatu.

Horisoni probleemi lahendamiseks on vajalik, et [27]

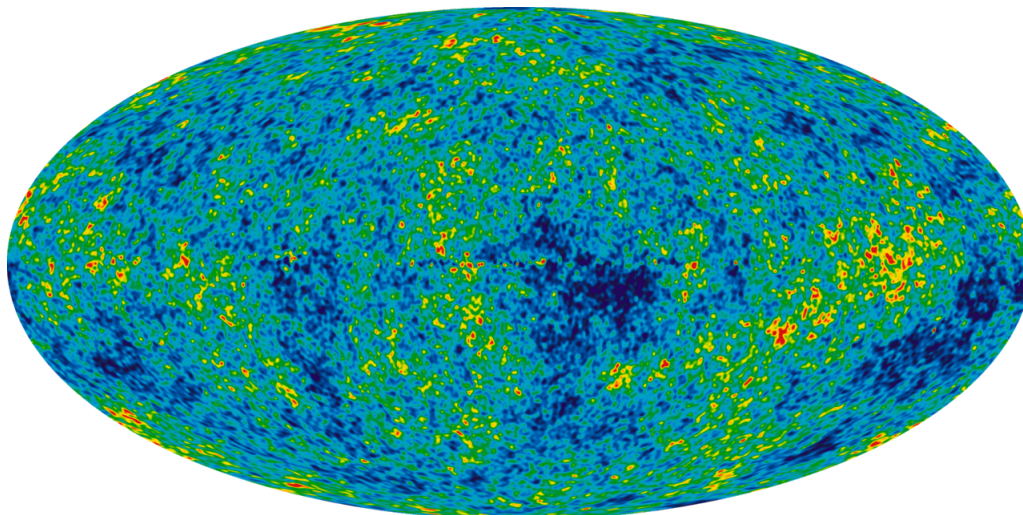
$$N \gtrsim 60. \quad (1.36)$$

See tähendaks, et inflatsiooni käigus suurenevad ruumi mõõtmed vähemalt  $e^{60}$  korda. Ühe nanomeetri pikkune lõik oleks pärast sellist paisumist 12 valgusaasta pikkune.

Selline paisumine lahendaks ka tasasuse probleemi. Inflatsiooni ajal tingimuse (1.18) tõttu universumi kõverus  $|k|$  hoopis väheneb ning teeb seda piisaval määral, et edasine  $|k|$  suurenemine on sellega võrreldes tühine [6].

### 1.3.3 Vaadeldavad suurused

Nagu igal väljal, esineb ka inflatoni väljal kvantfluktuatsioone. Kuigi kvantfluktuatsioonid on väga väikesed, siis eksponentsiaalne paisumine võimendab neid. Need väikesed fluktuatsioonid on aluseks universumi suuremastaabilise struktuuri tekkele ja neid on võimalik kosmilises taustkiirguses mõõta (Joonis 1.1) [28].



Joonis 1.1: Fluktuatsioonid kosmilises taustkiirguses [28]. Punane värv tähistab kõrgemat temperatuuri (ehk kõrgemat aine tihedust) ning sinine värv tähistab madalamat temperatuuri (ehk madalamat aine tihedust). Suhteline erinevus on vaid  $10^{-5}$ .

Kosmoloogilise häiritusteooria abil saab inflatsioonimudelitest arvutada fluktuatsioonide kirjeldavaid statistilisi suurusid. See võimaldab inflatsioonimudeleid võrrelda omavahel ja vaatlusandmetega. Käesoleva alapeatüki eesmärk on tutvustada põhilisi vaatlustega võrreldavaid suurusid. Detailne käsitus on leitav raamatus [29] ja ülevaadetes [30, 31].

Lisaks skalaarvälja häiritusele  $\delta\phi$  tuleb arvestada ka meetrika häiritusega  $\delta g_{\mu\nu}$ , mis on omakorda jaotatav skalaar-, vektor- ja tensorhäiritusteks:

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}^{(s)} + \delta g_{\mu\nu}^{(v)} + \delta g_{\mu\nu}^{(t)} \quad (1.37)$$

Vektorhäiritused  $\delta g_{\mu\nu}^{(v)}$  sumbuvad ajas, mistõttu võib neid lugeda nulliks [30]. Häirituste dünaamikat kirjeldavad häiritud skalaarvälja ja häiritud Einsteini võrrandid. Kasutades sünkroonset kalibratsiooni (*comoving gauge*), on võimalik esitada kõik häiritused meetrika

ruumilise osa kaudu [30]:

$$\delta g_{ij} = a^2(1 - 2\zeta)\delta_{ij} + a^2 h_{ij}. \quad (1.38)$$

Skalaarne kõverushäiritus (*curvature perturbation*)  $\zeta$  põhjustab kosmilises taustkiirguses temperatuurierinevusi. Tensorhäiritus  $h_{ij}$  kirjeldab ürgseid gravitatsioonilaineid (*primordial gravitational waves*) TT-kalibratsioonis ( $\nabla_i h^{ij} = 0$  ja  $h_i^i = 0$ ).

Vaatlustega võrdlemiseks tuleb skalaarsete häirituste spekter mikrolaine taustkiirgusest rekonstrueerida. Stohhastikast ja signaalitööstusest tuntud Wiener-Khinchini teoreemi põhjal on fluktuatsioonide võimsusspekter antud Fourier'i pöörde autokorrelatsioonifunktsioonina [32, 33]. Kõverushäirituse  $\zeta$  võimsusspekter  $P_\zeta(k)$  defineeritakse selle abil seosega (kasutatakse erinevaid definitsioone, vt näiteks [29, 30, 34])

$$\langle \hat{\zeta}_k, \hat{\zeta}_{k'} \rangle = \frac{1}{k^3} (2\pi)^2 P_\zeta(k) \delta(k - k'), \quad (1.39)$$

kus suurus  $\hat{\zeta}_k$  on suuruse  $\zeta(x)$  Fourier'i pöörde komponent lainearvuga  $k$ . Arvutamiseks valitakse teatud kindel lainearv  $k_0$  (*pivot scale*), mille kaudu on võimsusspekter esitatav kujul

$$P_\zeta(k) = \Delta_\zeta^2 \left( \frac{k}{k_0} \right)^{n_s - 1}, \quad (1.40)$$

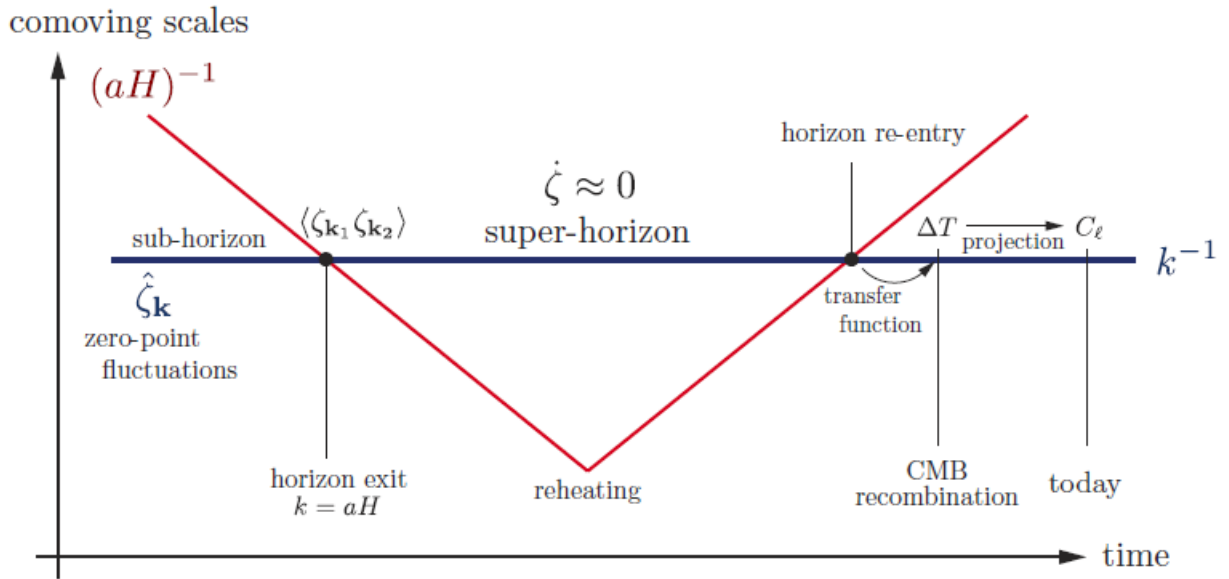
kus  $\Delta_\zeta^2 = P_\zeta(k_0)$  on häirituste amplituud, mis on arvatud skaalal  $k_0$  ning  $n_s$  on skalaarne spektraalindeks (*scalar spectral index*), mis iseloomustab spektri sõltuvust lainearvust. Detailse arvutusega saab leida kõverushäiritusele vastavate fluktuatsioonide võimsusspektri ja tensorhäiritustele vastavate fluktuatsioonide võimsusspektri aeglase veeremise lähendis [29, 31]:

$$\Delta_\zeta^2(k) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{H^2}{\epsilon} \Big|_{k=aH}, \quad (1.41)$$

$$\Delta_h^2(k) = \frac{2H^2}{\pi^2} \Big|_{k=aH}, \quad (1.42)$$

kus võimsus arvutatakse hetkel  $k = aH$ , sest sellel hetkel vastav mood külmub, kuna kaasaliikuv horisont  $(aH)^{-1}$  muutub väiksemaks kui ühe täisvõnke pikkus  $k^{-1}$ . Pärast inflatsiooni siseneb mood uuesti horisonti, kuid edasised fluktuatsioonid on tühised võrreldes esialgsetega, mida on inflatsiooni käigus mitu suurusjärku võimendatud (Joonis 1.2)[30]. Selle tulemusena on mikrolaine taustkiirguses lainearvuga  $k$  fluktuatsiooni võimsus selline nagu see oli horisondist väljumise hetkel  $k = aH$ .





Joonis 1.2: Inflatsiooni kvanthäirituste edasikandumine mikrolainetaustkiirgusele [30]. Inflatsiooni tingimuse (1.17) põhjal kaasaliikuv horisont  $(aH)^{-1}$  väheneb ajas. Alates inflatsiooni käigus saavutatud hetkest  $k = aH$  lainearvuga  $k$  fluktuatsioonid enam ei toimu (*horizon exit*). Hiljem taastuvad moodid lainepikkusega  $k$  (*horizon re-entry*), kuid on tühised võrreldes eelnevate häiritusega, mis inflatsiooni käigus võimendusid.

See võrdlus võimaldab siduda inflatsiooni mudeli parameetrid taustkiirguse vaatlustega, kuna häirituste amplituud on seotud materia suhtelise tihedushäiritusega  $\delta\rho/\rho$  ja ka temperatuuri  $T$  fluktuatsioonidega taustkiirguses:

$$\Delta_{\zeta}^2(k) \sim \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2 \sim \left(\frac{\delta T}{T}\right)^2. \quad (1.43)$$

Skalaarse spektraalindeksi saab avaldada, kui valem (1.40) logaritmid ja diferentseerida:

$$n_s = 1 + \frac{d \ln P_{\zeta}}{d \ln k}. \quad (1.44)$$

Osutub, et suurus  $n_s$  on esitatav aeglase veeremise parameetrite (1.33) ja (1.34) abil ja kuna inflatsiooni alguses on need parameetrid väikesed, siis võib kasutada nende suhtes esimest järku avaldist

$$n_s \approx 1 - 6\varepsilon - 2\eta. \quad (1.45)$$

Praeguste vaatluste kohaselt on spektraalindeks lainearvust sõltumatu ning veidi väiksem kui

üks,  $n_s = 0,968 \pm 0,006$  [10].

Tensorhäirituste osakaalu väljendatakse tensor-skalaar häirituste suhtega (*tensor-scalar ratio*)

$$r \equiv \frac{\Delta_h^2}{\Delta_\zeta^2}, \quad (1.46)$$

mille aeglase veeremise esimest järku lähend on

$$r \approx 16\epsilon \quad (1.47)$$

Tensorhäirituste võimsusspektri vaatluslik uurimine on keerulisem, sest veel ei ole olemas piisavalt tundlikke vahendeid ürgsete gravitatsioonilainete detekteerimiseks. Küll aga saab kaudselt hinnata tensorhäirituste osakaalu ülemist piiri - suhteliselt suure võimsuse korral mõjutaksid tensorhäiritused mikrolaine taustkiiruselt tulevate footonite polarisatsioone. Ülemiseks piiriks on leitud  $r < 0.11$  skaalal  $k_0 = 0,002 \text{ MPc}^{-1}$  [10].

Aeglase veeremise lähendis saadud avaldised (1.45) ja (1.47) on leitud eeldusel, et skalaarväli on gravitatsiooniga minimaalselt seotud. Järgmise peatüki eesmärk on leida need avaldised üldisema inflatsioonimudeli jaoks, mis ei pruugi olla minimaalselt seotud gravitatsiooniga.

## Peatükk 2

# Mitte-minimaalselt seotud mudelid

Mitte-minimaalselt seotud inflatsioonimudelid on sellised, kus skalaarväli on gravitatsiooniga seotud ning teooria ei ole enam otseselt kirjeldatav mõjufunktsionaali (1.21) kaudu. Stringiteooria, braanimaailmad, osakestefüüsika ja muud huvipakkuvad mudelid võivad anda mitte-minimaalselt seotud teooriatele selge füüsikalise sisu ja pakkuda huvipakkuvaid alternatiivseid lahendusi ja laiendusi füüsikas esinevatele probleemidele. Alapeatükk 2.1 tutvustab üldisema kujuga mõjufunktsionaali ja sellest tuletatavaid väljavõrrandeid. Alapeatükis 2.2 on käsitletud üldiseid teisendusi, mida saab sellistele mudelitele teha. Alapeatükk 2.3 annab mitte-minimaalse mudeli jaoks eeskirja suuruste  $n_s$ ,  $r$  ja  $N$  arvutamiseks.

### 2.1 Mõjufunktsionaal ja väljavõrrandid

Mitte-minimaalselt seotud mudelite uurimiseks defineeritakse üldine mõjufunktsionaal, mis sisaldab nelja vaba funktsiooni  $A$ ,  $B$ ,  $V$  ja  $\sigma$  [8]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\kappa^2} A(\phi) R - \frac{1}{2} B(\phi) \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi - V(\phi) \right\} + S_m[e^{2\sigma(\phi)} g_{\mu\nu}, \chi]. \quad (2.1)$$

Kui varieerida mõju (2.1) meetrika  $g_{\mu\nu}$  järgi, on tulemuseks üldistatud Einsteini võrrand:

$$A \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) + \left( \frac{\kappa^2}{2} B + A'' \right) g_{\mu\nu} \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi - (\kappa^2 B + A'') \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + A' (g_{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla^\rho \phi - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi) + \kappa^2 g_{\mu\nu} V = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Kui varieerida mõju (2.1) skalaarvälja  $\phi$  järgi ning asendada tulemuse sisse võrrandi (2.2) jälg, on tulemuseks üldistatud skalaarvälja võrrand:

$$\left(\frac{3}{2\kappa^2}\frac{(A')^2}{A} + B\right)\nabla_\rho\nabla^\rho\phi + \frac{1}{2}\left(\frac{BA'}{A} + \frac{3}{\kappa^2}\frac{A'A''}{A} + B'\right)g_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi + \left(\frac{2A'V - AV'}{A}\right) = \left(\frac{1}{2}\frac{A'}{A} - \sigma'\right)T. \quad (2.3)$$

Selline kuju hõlmab mitmeid tuntud teooriaid, millest on siin loetletud mõned aspektid:

- Kui skalaarvälja võrrandis (2.3) on kõik sulgudes olevad kordajad nullid, siis teooria on ekvivalentne üldrelatiivsusteooriaga.
- Kui skalaarväli on jõudnud väärtuseni  $\phi_*$ , kus skalaarvälja esimesed ja teised tuletised on nullid, siis on teooria jõudnud kosmoloogilise konstandiga üldrelatiivsusteooriani. Kusjuures, Einsteini võrrandi (2.2) põhjal on kosmoloogilise konstandi väärtus  $\Lambda = \kappa^2 V(\phi_*)$
- Kui skalaarvälja võrrandi (2.3) parem pool on null, kuid vasak pool ei ole, siis see kirjeldab kvintessentsi teooriat. Kvintessentsi idee on see, et praegune universumi kiirenev paisumine tuleneb sellest, et universum on endiselt aeglase veeremise režiimis [35].
- $A = 1$ ,  $B = 1$  vastab minimaalselt seotud teooriale. Kui  $\sigma$  ei ole konstantne, siis on tegemist Einsteini raamis formuleeritud skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooni (STG) teooriaga. Aeglaselt veereva inflatsiooni ajal on võrrandi (2.3) parem pool null, sest  $T = 0$ , kuna materia tekib alles hiljem, ülessoojenemise käigus. See tähendab, et aeglase veeremise režiimi uurides ei ole vaja arvestada funktsiooniga  $\sigma(\phi)$ .
- $\sigma = 0$ ,  $B = 1$  on Jordani raamis formuleeritud STG teooria
- $\sigma = 0$ ,  $B = \frac{\omega(\phi)}{\phi}$ ,  $A = \phi$  on Jordani raamis STG teooria Brans-Dicke parametrisatsioon
- Kui  $A = \phi$ ,  $B = 0$ ,  $\sigma = 0$  ja  $V$  on funktsiooni  $f$  Legendre teisendus, siis on tegemist O'Hanloni mõjuga, mis kirjeldab  $f(R)$  tüüpi teooriat [36, 37]. Sellises teoorias ei ole  $\phi$  dünaamiline muutuja.

Funktsioonidel on mõned füüsikalistest kaalutlustest tulenevad piirangud:

1.  $A > 0$ . Negatiivne  $A$  viitaks tõukavale gravitatsioonile. Selliseid mudeleid selles töös ei uurita.
2. Võrrandis (2.3) esinev kordaja  $\frac{3}{2\kappa^2}\frac{(A')^2}{A} + B > 0$ . Vastasel korral võivad ilmned teoorias kummitusväljad (*ghost fields*) [38]. See võimaldaks teatud protsessidega süsteemist

eraldada lõputult energiat.

3.  $V \geq 0$ . Negatiivne potentsiaal tooks endaga kaasa mitmeid probleeme. Näiteks, kui inflatsiooni lõpuks oleks skalaarväli jõudnud potentsiaalimiinimumi, siis alles jääks negatiivne kosmoloogiline konstant. Negatiivseid potentsiaale siiski täielikult välistada ei saa [39], kuid selles töös neid ei käsitleta.

## 2.2 Teisendused

Skalaarväljal on numbriline väärtus, mida võib alati ümber parametrizeerida:

$$\phi = f(\hat{\phi}) . \quad (2.4)$$

Selline teisendus võib olla arvutuste lihtsustamisel kasulik. Pärast arvutamist saab alati minna esialgsesse parametrisatsiooni tagasi.

Teisendust

$$g_{\mu\nu} = e^{2\gamma(\hat{\phi})} \hat{g}_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

nimetatakse meetrika konformseks teisenduseks. Kuna  $e^{2\gamma(\hat{\phi})}$  on positiivne suurus, siis meetrika märk ei muutu sellisel teisendusel. See tähendab, et ajasarnased vektorid jäävad ajasarnasteks ning ruumisarnased vektorid jäävad ruumisarnasteks. Lisaks ei muutu kahe vektori omavaheline nurk. Seega aegruumi kausaalne struktuur konformsel teisendusel ei muutu. Konformset teisendus tehes öeldakse, et liigutakse ühest raamist teise.

Selline vabadus võimaldab nähtusi erinevates raamides väga erinevalt tõlgendada. Näiteks, artiklis [40] on leitud raam, kus ruumi paisumise asemel põhjustab kosmoloogilist punanihet ja taustkiirguse jahtumist hoopis elektroni massi muutumine aja jooksul. Tõlgenduserinevustest hoolimata on raamid omavahel matemaatiliselt ja vaatluslikult ekvivalentsed. Detailselt on seda põhjendatud näiteks artiklites [8, 41].

Selleks, et skalaarvälja ümberparametriseerimine (2.4) ning meetrika konformne teisendus (2.5) säilitaksid mõjufunktsionaali (2.1) struktuuri, peavad skalaarvälja funktsioonid teisenema

Flanagani teisenduste alusel [8]:

$$\hat{A}(\hat{\phi}) = e^{2\gamma(\hat{\phi})} A[f(\hat{\phi})], \quad (2.6)$$

$$\hat{B}(\hat{\phi}) = e^{2\gamma(\hat{\phi})} \left\{ \left( \frac{df}{d\hat{\phi}} \right)^2 B[f(\hat{\phi})] - \frac{6}{\kappa^2} \left( \frac{d\gamma}{d\hat{\phi}} \right)^2 A[f(\hat{\phi})] - \frac{6}{\kappa^2} \frac{df}{d\hat{\phi}} \frac{d\gamma}{d\hat{\phi}} \frac{dA}{d[f(\hat{\phi})]} \right\}, \quad (2.7)$$

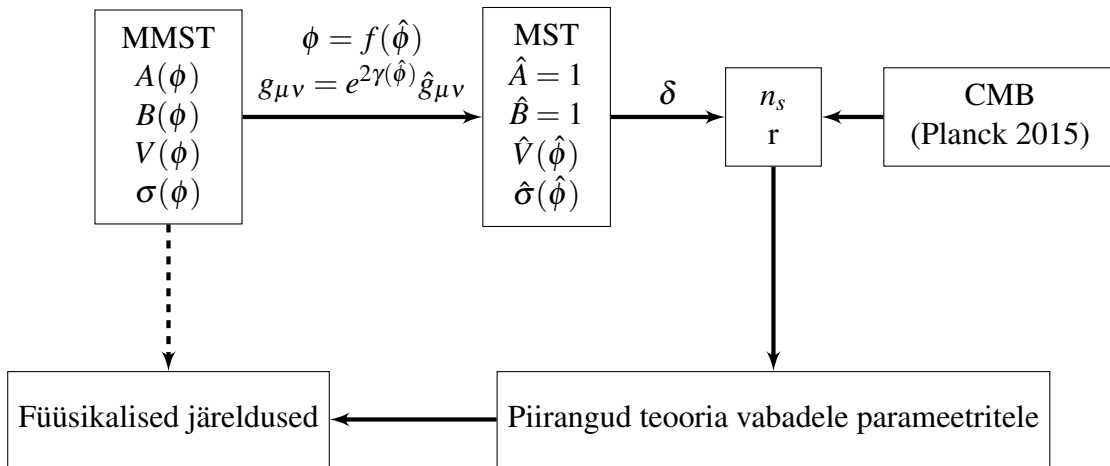
$$\hat{V}(\hat{\phi}) = e^{4\gamma(\hat{\phi})} V[f(\hat{\phi})], \quad (2.8)$$

$$\hat{\sigma}(\hat{\phi}) = \sigma[f(\hat{\phi})] + \gamma(\hat{\phi}). \quad (2.9)$$

Teooriaid, mis on nende teisendustega seotud, võib pidada ekvivalentseteks. Seda asjaolu saab ära kasutada, et leida mitte-minimaalselt seotud mudeliga ekvivalentne minimaalselt seotud mudel.

## 2.3 Invariantide formalism

Mitte-minimaalsete mudelite otsene analüüsimine ja vaatlusandmetega võrdlemine osutub keerukaks, kuna häiritusarvutused on mahukad ning nüansirohked. Lihtsam oleks leida identse dünaamikaga minimaalselt seotud teooria, analüüsida selle käitumist ning interpreteerida tulemusi esialgse teooria kontekstis.. Joonisel 2.1 on toodud kogu lähenemise põhimõtteline skeem. Seda skeemi on võimalik universaalselt rakendada invariantide formalismi abil, mida on alljärgnevalt kirjeldatud.



Joonis 2.1: Mitte-minimaalselt seotud teooria analüüsimise põhimõtteline plokk skeem

Funktsioonid  $A$ ,  $B$ ,  $V$  ja  $\sigma$  eraldi küll teisenevad, kuid on võimalik leida selliseid kombinatsioone, mis jäävad invariantseks [38, 42]. Otsese arvutuse teel on lihtne kontrollida, et

järgnevad kolm suurust on invariantseid teisenduste (2.6) - (2.9) suhtes:

$$I_m(\phi) \equiv \frac{e^{2\sigma(\phi)}}{A(\phi)}, \quad (2.10)$$

$$I_V(\phi) \equiv \frac{V(\phi)}{[A(\phi)]^2}, \quad (2.11)$$

$$I_\phi(\phi) \equiv \int \sqrt{\frac{1}{A} \left( \frac{3}{2\kappa^2} \frac{(A')^2}{A} + B \right)} d\phi. \quad (2.12)$$

Edaspidi on viimasel real ruutjuure all olev avaldis lühiduse huvides tähistatud sümboliga  $F \equiv \frac{1}{A} \left( \frac{3}{2\kappa^2} \frac{(A')^2}{A} + B \right)$ . Minimaalselt seotud teooriale ( $A, B = 1$ ) vastavad invariantid  $I_m = e^{2\sigma}$ ,  $I_V = V$  ja  $I_\phi = \phi$ . Asendades need MST mõjusse (1.21) saab panna kirja ainult invariantidest sõltuva mõjufunktsionaali [9]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left\{ \frac{1}{2\kappa^2} \hat{R} - \frac{1}{2} \nabla_\rho I_\phi \nabla^\rho I_\phi - I_V \right\} + S_m[I_m \hat{g}_{\mu\nu}, \chi]. \quad (2.13)$$

Inflatsiooni kontekstis  $S_m = 0$  ja tulemus on mõjufunktsionaali (1.21) kujuga, kus minimaalselt seotud skalaarvälja rollis on  $I_\phi$  ning mille potentsiaalne energia on  $I_V(I_\phi)$ . Arvutades üldise teooria (2.1) invariantne potentsiaal  $I_V(I_\phi)$  ongi leitud sellega ekvivalentne minimaalselt seotud teooria (2.13), mida saab uurida näiteks potentsiaali aeglase veeremise parameetrite abil (1.33) ja (1.34), milleks on

$$\varepsilon(\phi) = \frac{1}{2\kappa^2} \left( \frac{d \ln I_V}{d I_\phi} \right)^2, \quad (2.14)$$

$$\eta(\phi) = \frac{1}{\kappa^2 I_V} \frac{d^2 I_V}{d I_\phi^2}. \quad (2.15)$$

Käesoleva töö jaoks on suurused  $n_s$ ,  $r$  ja  $N$  leitud esialgsete funktsioonide kaudu:

$$\begin{aligned} r = 16\varepsilon(\phi_0) &= \frac{8}{\kappa^2} \left( \frac{d(\ln I_V)}{d\phi} \frac{d\phi}{dI_\phi} \right)^2 \Big|_{\phi_0} = \frac{8}{\kappa^2} \left( \frac{I'_V}{I_V} \frac{1}{\sqrt{F}} \right)^2 \Big|_{\phi_0} = \frac{8}{\kappa^2 F} \left[ \frac{A^2}{V} \left( \frac{V'}{A^2} - \frac{2VA'}{A^3} \right) \right]^2 \Big|_{\phi_0} \\ &= \frac{8}{\kappa^2 F} \left( \frac{V'A - 2VA'}{AV} \right)^2 \Big|_{\phi_0}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} n_s = 1 - 6\varepsilon(\phi_0) + 2\eta(\phi_0) &= 1 - \frac{3r}{8} + \frac{2}{\kappa^2 I_V} \left[ \frac{d\phi}{dI_\phi} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{dI_V}{d\phi} \frac{d\phi}{dI_\phi} \right) \right]_{\phi_0} \\ &= 1 - \frac{3r}{8} + \frac{2}{\kappa^2 I_V} \left[ \frac{1}{\sqrt{F}} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{V'}{A^2\sqrt{F}} - \frac{2VA'}{A^3\sqrt{F}} \right) \right]_{\phi_0} \\ &= 1 - \frac{3r}{8} + \frac{2A^2}{\kappa^2 V\sqrt{F}} \left[ \frac{V''}{A^2\sqrt{F}} - \frac{2V'A'}{A^3\sqrt{F}} - \frac{V'F'}{2A^2F\sqrt{F}} - \frac{2V'A'}{A^3\sqrt{F}} - \frac{2VA''}{A^3\sqrt{F}} + \frac{6V(A')^2}{A^4\sqrt{F}} + \frac{VA'F'}{A^3F\sqrt{F}} \right]_{\phi_0} \\ &= 1 - \frac{3r}{8} + \frac{2}{\kappa^2 VF} \left[ V'' - 4V'\frac{A'}{A} - V'\frac{F'}{2F} - 2V\frac{A''}{A} + 6V\left(\frac{A'}{A}\right)^2 + \frac{VA'F'}{AF} \right]_{\phi_0}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

$e$ -kordsuste arv on

$$\begin{aligned} N(\phi_0) &= \kappa^2 \int_{I_\phi^{\text{end}}}^{I_\phi^0} I_V \left( \frac{dI_V}{dI_\phi} \right)^{-1} dI_\phi = \kappa^2 \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi_0} I_V \left( \frac{dI_V}{d\phi} \frac{d\phi}{dI_\phi} \right)^{-1} \frac{dI_\phi}{d\phi} d\phi \\ &= \kappa^2 \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi_0} \frac{V}{A^2} \left( \frac{V'A - 2VA'}{A^3\sqrt{F}} \right)^{-1} \sqrt{F} d\phi = \kappa^2 \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi_0} \frac{AVF}{V'A - 2VA'} d\phi. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Otsese asendamise teel saab kontrollida, et tulemused (2.16) - (2.18) annavad minimaalselt seotud mudeli ( $A = 1$  ja  $B = 1$ ) korral tagasi esialgsed avaldised (1.47), (1.45) ja (1.35). Järgmises peatükis on neid tulemusi numbrilise arvutuse abil rakendatud.



# Peatükk 3

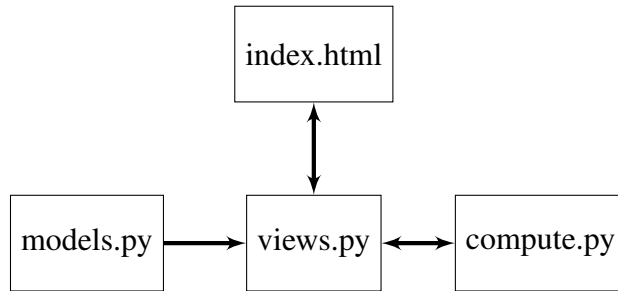
## Programm ja tulemused

Suuruseid  $n_s$ ,  $r$  ja  $N$  saab arvutada funktsioonide  $A(\phi)$ ,  $B(\phi)$  ja  $V(\phi)$  kaudu. Mõnel juhul võib muutuda analüütiline arvutamine äärmiselt keeruliseks, mistõttu on mõistlik seda teha numbriliselt. Käesoleva töö ühe osana on kirjutatud valmis Pythoni programm ja veebirakendus, mille eesmärk on mõju (2.1) poolt kirjeldatud teooria jaoks välja trükkida graafik, kuhu on kujutatud teooria poolt ennustatud  $n_s$  ja  $r$  väärtusi erinevate parameetrite väärtuste korral koos eksperimentaalsete andmete usalduspiirkondadega. Programmi lähtekood on leitav leheküljelt <https://github.com/KaurKristjuhan/Inflatsioon>

Alapeatükk 3.1 tutvustab programmi ülesehitust, 3.2 selgitab programmis tehtavaid arvutusi ja protseduure. Alapeatükk 3.3 eksponeerib saadud tulemusi ning võrdleb neid usaldusväärtuste allikatega, mitme inflatsioonimudeli näitel. Lisaks tuuakse üks näide, mis illustreerib arvutustel ilmnevaid probleeme. Alapeatükk 3.4 analüüsib neid probleeme ning pakub välja lahendusi nendega tegelemiseks.

### 3.1 Tarkvara üldine arhitektuur

Programm on kirjutatud Pythonis, kasutades Django raamistikku (*framework*), et muuta see veebirakenduseks [43]. Veebirakendust saab kergesti jagada ja kasutada veebilehitsejas. Kasutamiseks ei ole vaja paigaldada spetsiaalset tarkvara ega eraldada arvutusvõimsust, sest arvutused toimuvad eraldi serveri peal. Failid on organiseeritud standardsel kujul, lähtuvalt Django dokumentatsioonist [43]. Peamine info sisaldub neljas failis, mille omavaheline koostöö on kujutatud Joonisel 3.1.



Joonis 3.1: Põhifailide omavahelised seosed

Failide töö lühikirjeldus:

1. **views.py** on organiseeriva rolliga fail. See edastab andmeid, ning saadab rakendusele käsu, et neid kuvada.
2. **index.html** otstarve on veebirakendus küljendada. See saab kogu sisendinformatsiooni failist `views.py` ning määrab igale elemendile asukoha rakenduses.
3. **models.py** defineerib sisendandmete jaoks sobiva klassi, kasutades Django olemasolevaid teeke. Näiteks, see fail defineerib, et mudeli vabad parameetrid on reaalarvud ning kujundab nende sisestamiseks sobiva suurusega välja.
4. **compute.py** on fail, kus toimuvad kõik arvutused. See kutsutakse andmete sisestamisel välja faili `views.py` poolt, kust see saab ka sisendandmed. Siin failis on olemas ka Planck sateliidi eksperimentaalsete mõõtmiste tulemused, mis kantakse usalduskontuuridena koos uuritava inflatsioonimudeli arvutuste tulemustega graafikule. Graafik salvestatakse pildina, mille mäluaadress edastatakse väljundina, mida teised failid saavad hiljem kasutada.

Lisaks nendele failidele on ka mitmeid abifaile, mis on automaatselt Django poolt genereeritud. Nende otstarve on veebirakendus üles seada. Sisulist informatsiooni need ei oma ning modifikatsioone on neis tehtud minimaalselt.

Kuna kogu sisuline arvutus toimub failis `compute.py`, siis seda saab kasutada graafikute joonistamiseks selle lähtekoodi ka eraldiseisvana, ilma et oleks vajalik veebirakendus üles seada.

## 3.2 Arvutusfaili töö kirjeldus

Esmalt saab programm sisendist funktsioonid  $A(\phi)$ ,  $B(\phi)$  ja  $V(\phi)$ , arvutab nende põhjal  $F(\phi)$  ning defineerib numbriliselt nende esimesed ja teised tuletised. Nende kaudu on defineeritud otsitavad suurused  $n_s$ ,  $r$  ja  $N$ , valemite (2.16), (2.17) ja (2.18) põhjal.

Järgmisena on vaja leida skalaarvälja väärtus aeglase veeremise režiimi lõpus  $\phi_{\text{end}}$ . See leitakse tingimusest  $\varepsilon(\phi_{\text{end}}) = 1$ . Selle jaoks on kasutatud Scipy teegi funktsiooni `brentq`, et leida funktsiooni  $\varepsilon - 1$  nullkohad [44]. Sõltuvalt sisendfunktsioonidest ja kasutatavast võrrandi lahendamise algoritmist võib see samm keeruliseks osutada. Alapeatükis 3.3.2 on analüüsitud näidet, kus see aspekt muutub probleemiks ning vajab täiendavat uurimist.

Inflatsiooni määra defineerivas  $e$ -kordsuste arvu  $N$  avaldises (2.18) on pärast sisendfunktsioonide defineerimist jäänud üks tundmatu suurus - skalaarvälja algväärtus  $\phi_0$ . Kui see oleks teada, siis oleks  $N$  üheselt määratud ning teooria ennustaks konkreetsed väärtused vaadeldavatele  $r$  ja  $n_s$ . Skalaarvälja algväärtus tuleks tuletada fundamentaalsest teooriast, kuid kuna kooskõlalist kvantgravitatsiooni teooriat ei ole teada, siis  $\phi_0$  teooriast leitav ei ole. Seetõttu tuleb suurust  $\phi_0$  käsitleda inflatsiooniteooria lisaparameetrina.

Tulemus kajastub joonena  $n_s$ - $r$  graafikul, mis on parametrizeeritud algväärtuse või sellele vastava  $e$ -kordsuste arvuga. Selleks, et joon terves ulatuses kuvada, tuleb arvutada vaadeldavate väärtused kõikide võimalike  $\phi_0$  väärtuste jaoks. Erinevad mudelid võivad aga lubada erinevaid suurusjärke ja vahemikke. Tundmatu algväärtusega  $\phi_0$  seotud probleemide lahendamiseks on kasutatud meetodit, mis võimaldab joont parametrizeerida  $e$ -kordsuste arvu  $N$  järgi. Mistahes inflatsiooni kirjeldava mudeli jaoks on see positiivne suurus ning oodatav suurusjärg on tingimuse (1.36) põhjal teada. Valemid (2.16) ja (2.17) nõuavad arvutamiseks siiski suurust  $\phi_0$ . Selle saab avaldada valemist (2.18), kasutades integraalarvutuse fundamentaalset teoreemi [45]:

$$\frac{dN}{d\phi_0} = \kappa^2 \frac{AVF}{V'A - 2VA'} \Big|_{\phi_0} . \quad (3.1)$$

Pöörates võrrandi (3.1) ümber, on tulemuseks diferentsiaalvõrrand funktsiooni  $\phi_0(N)$  leidmiseks:

$$\frac{d\phi_0}{dN} = \frac{1}{\kappa^2} \frac{V'A - 2VA'}{AVF} \Big|_{\phi_0} . \quad (3.2)$$

Võrrandi lahendamiseks vajalik ääritingimus on  $\phi_0(0) = \phi_{\text{end}}$ , sest kui skalaarvälja algväärtus on võrdne lõppväärtusega, siis inflatsiooni ei toimugi ning valemi (2.18) põhjal on  $e$ -kordsuste

arv  $N = 0$ . Diferentsiaalvõrrand lahendatakse numbriliselt, scipy teegi funktsiooni `odeint` abil [44]. Programm arvutab võrdsete vahedega 1000 punkti  $N$  vahemikus  $[0, 100]$  ning sealt edasi eksponentsiaalselt kasvavate vahedega 100 punkti kuni väärtuseni  $5 \cdot 10^8$ . See tagab selle, et kõige huvipakkuvam  $N$  vahemik on tihedalt kaetud ning joone ots kajastab mõistliku täpsusega ekstreemselt suuri  $N$  väärtusi.

Uuritavad inflatsioonimudelid sisaldavad samuti vabu (teooria poolt määramata) parameetreid. Mudelis oleva parameetri sõltuvuse uurimiseks korratakse kogu protsess iga parameetri väärtuse jaoks ning kõik jooned kantakse ühele graafikule. Programmis on mudeli parameeter alati tähistatud tähisega  $p$ , kuid järgmises alapeatükis on mudelite parameetreid tekstis tutvustatud konventsionaalsete tähistega. Kasutaja poolt valitud  $N$  väärtused tähistatakse punktidega ning ühendatakse punktiirjoonega erinevate parameetrite väärtuse jaoks.

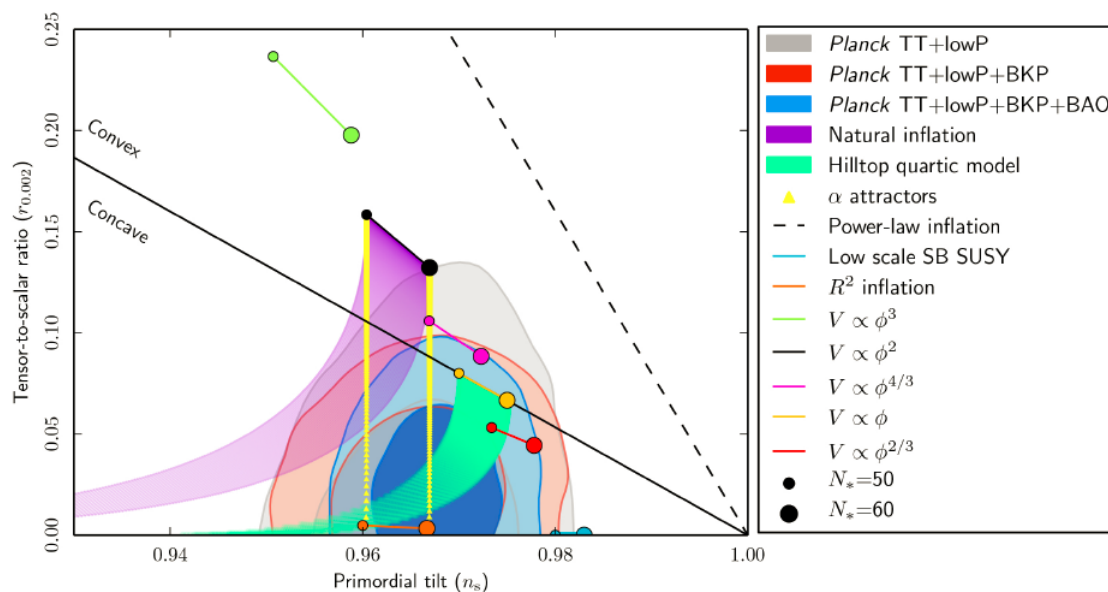
Viimase asjana lisatakse samale graafikule vaatlustest leitud  $1\sigma$  ja  $2\sigma$  piirkonnad, mis on saadud Plancki satelliidi 2015 aasta mõõtmisandmetest [10]. Programm ei arvuta neid kontuure, vaid kuvab  $\sim 20$  punkti põhjal konstrueeritud täidetud hulknurga, mis on skitseeritud Plancki töögrupi artiklis avaldatud graafikult [10] (Joonis 3.2).

### 3.3 Tulemuste võrdlus

Selleks, et veenduda, et programm töötab õigesti, tuleks seda testida. Selleks saab valida mõned teadaolevad mudelid, mille jaoks on  $n_s-r$  graafikud usaldusväärsetes allikates publitseeritud ning võrdluse abil veenduda, et programm annab sama tulemuse.

#### 3.3.1 Minimaalselt seotud mudelid

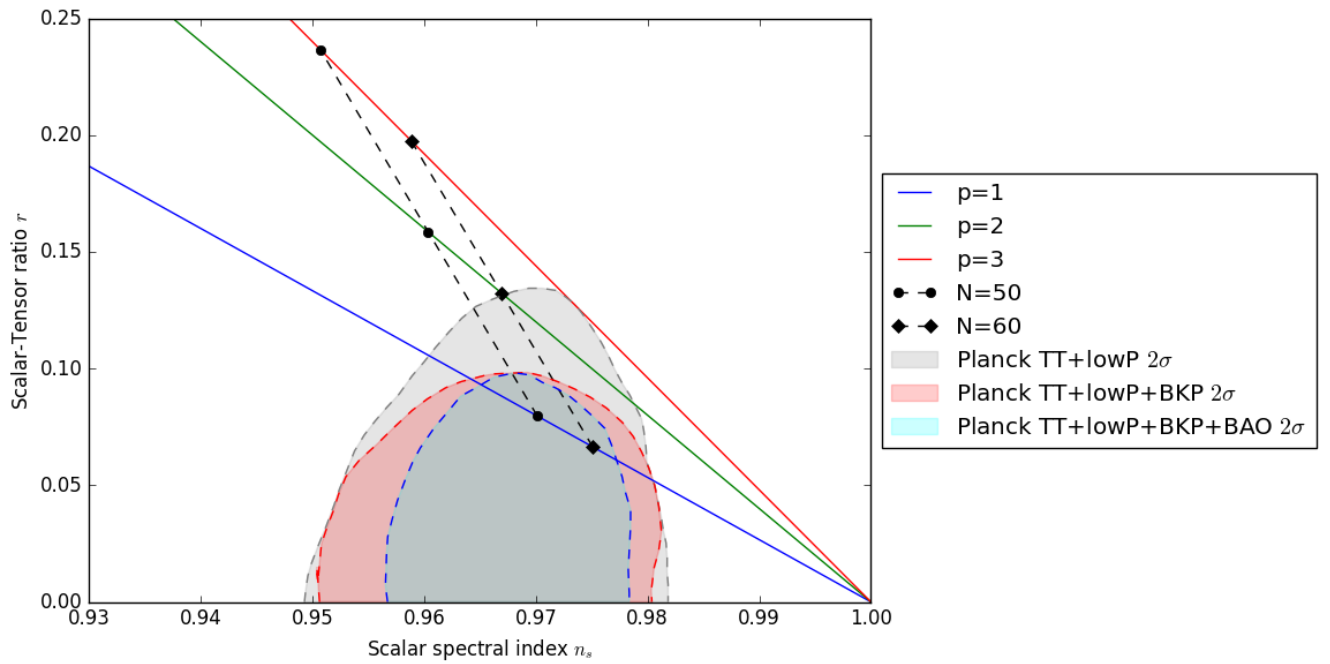
Ainuüksi minimaalselt seotud mudelite peresid on kümneid [46], nii et valikuid on palju. Võrdluseks on valitud kolm: suure välja inflatsioon (*Large Field Inflation*) [47, 48], naturaalne inflatsioon (*Natural Inflation*) [49, 50] ja teist tüüpi alfa atraktor (*Type II Alpha Attractor*) [51], mis on kõik korraga esitatud ka Plancki tööühme artiklis [10] avaldatud graafikul (Joonis 3.2).



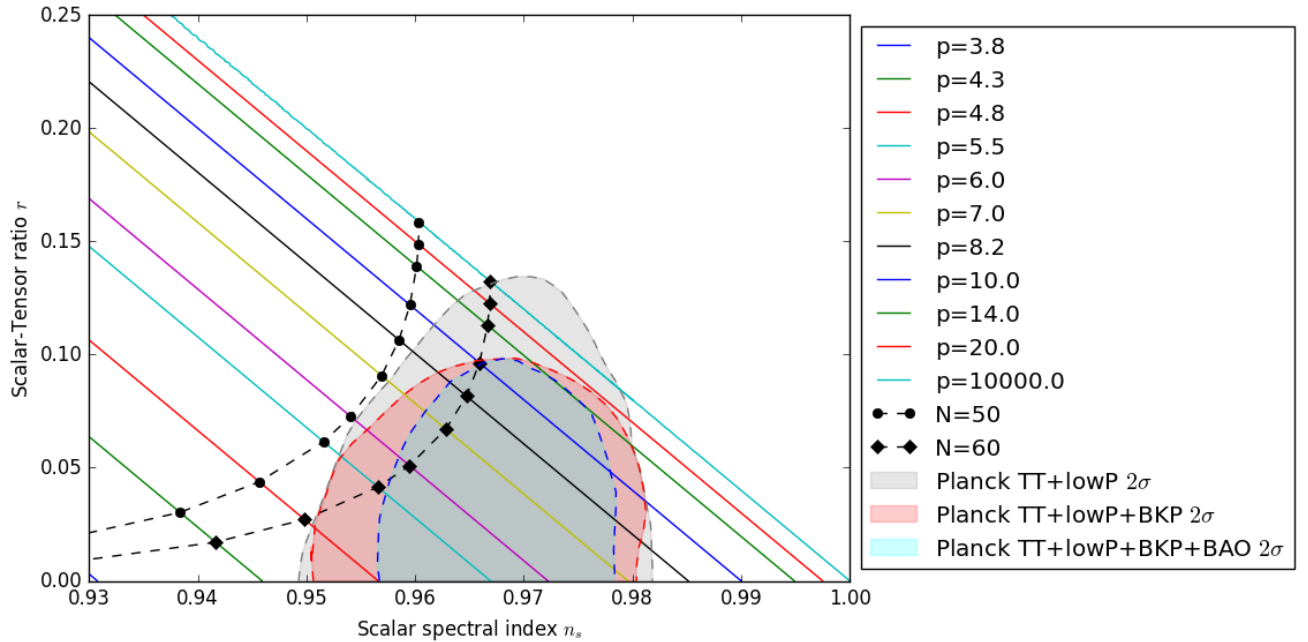
Joonis 3.2: Graafik vaadeldavate suuruste  $n_s$  ja  $r$  jaoks [10]. Kontuuridega on joonisele kantud eksperimentaalsed  $1\sigma$  ja  $2\sigma$  usaldusnivood. Graafikul on ka mitmete teoreetiliste mudelite ennustused, vahemikus  $N = 50$  kuni  $N = 60$ .

Suure välja inflatsiooni üheks alamklassiks on mudelid, kus potentsiaal muutub astmefunktsiooni kohaselt  $V \propto \phi^p$ , kus  $p$  on mudeli parameeter. Tulemus on Joonisel 3.3. Väiksemad  $p$  väärtused annavad parema kooskõla vaatlusandmetega.

Naturaalne inflatsioon on kirjeldatud potentsiaaliga  $V(\phi) \propto [1 - \cos(\phi/f)]$ , kus  $f$  on mudeli parameeter. Tulemus on esitatud Joonisel 3.4. Väikese argumenti korral saab koosinus funktsiooni arendada Taylori ritta nulli lähedal ning arvestada vaid esimesi liikmeid  $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ . Seega piirjuhul  $f \rightarrow \infty$  on potentsiaal esitatav kujul  $V(\phi) \propto \phi^2$ . Veel võib märgata, et selles mudelis kõrgemad  $e$ -kordsused annaksid enamasti parema kooskõla eksperimentidega.

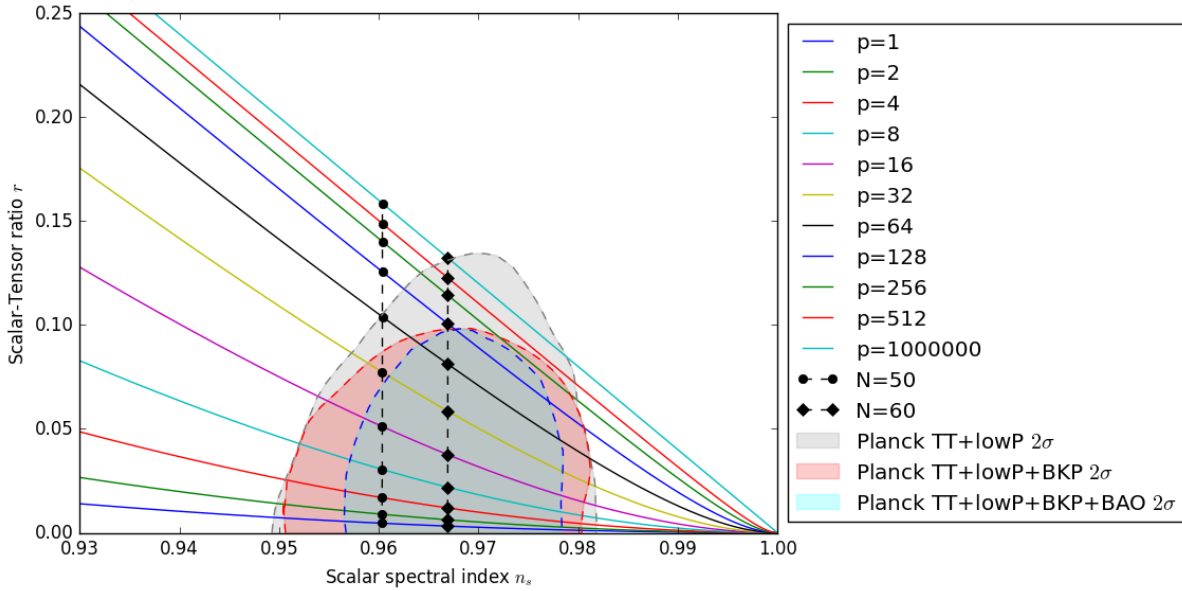


Joonis 3.3: Programmi poolt joonistatud graafik suure välja inflatsiooni mudeli  $V = \phi^p$  jaoks. Tulemus on kooskõlas Plancki uurimisrühma poolt publitseeritud tulemusega (Joonis 3.2).



Joonis 3.4: Programmi poolt joonistatud graafik naturaalsel inflatsiooni mudeli  $V(\phi) = [1 - \cos(\phi/p)]$  jaoks. Tulemus on kooskõlas Plancki uurimisrühma poolt publitseeritud tulemusega (Joonis 3.2).

Teist tüüpi alfa atraktor on kirjeldatud potentsiaaliga  $V(\phi) \propto \left[ \tanh\left(\frac{\phi}{\sqrt{6}\alpha}\right) \right]^2$ , kus  $\alpha$  on mudeli parameeter. Tulemus on Joonisel 3.5. Piirjuhul  $\alpha \rightarrow \infty$  on  $V(\phi) \propto \phi^2$ , sest väikese argumendi korral  $\tanh(x) \approx x$ . Kui  $\alpha = 1$ , siis on see ekvivalentne [51, 52] Starobinsky inflatsiooniga [23], mis on tuntud ka  $R^2$  inflatsiooni nime all.



Joonis 3.5: Programmi poolt joonistatud graafik teist tüüpi alfa atraktori mudeli  $V(\phi) = \left[ \tanh\left(\frac{\phi}{\sqrt{6}p}\right) \right]^2$  jaoks. Tulemus on kooskõlas Plancki uurimisrühma poolt publitseeritud tulemusega (Joonis 3.2).

### 3.3.2 Mitte-minimaalselt seotud mudelid

Mitte-minimaalsete mudelite analüüsimiseks piisab funktsioonide  $A(\phi)$ ,  $B(\phi)$  ja  $V(\phi)$  sisestamisest ja üldiste seoste (2.16), (2.17) ja (2.18) rakendamisest, et leida avaldised  $r$ ,  $n_s$  ja  $N$  jaoks. Seega saab mudelit iseloomustada, ilma et peaks läbi viima häiritusarvutusi. Mitte-minimaalselt seotud mudelitest on valitud kaks näidet - kaootiline inflatsioon [53] ja Higgsi inflatsioon [54]. Esimene on selleks, et veenduda arvutuste korrektsuses ning teise eesmärk on juhtida tähelepanu probleemidele mis võivad arvutamisel tekkida, ja mille lahendamise tegeleme edaspidi.

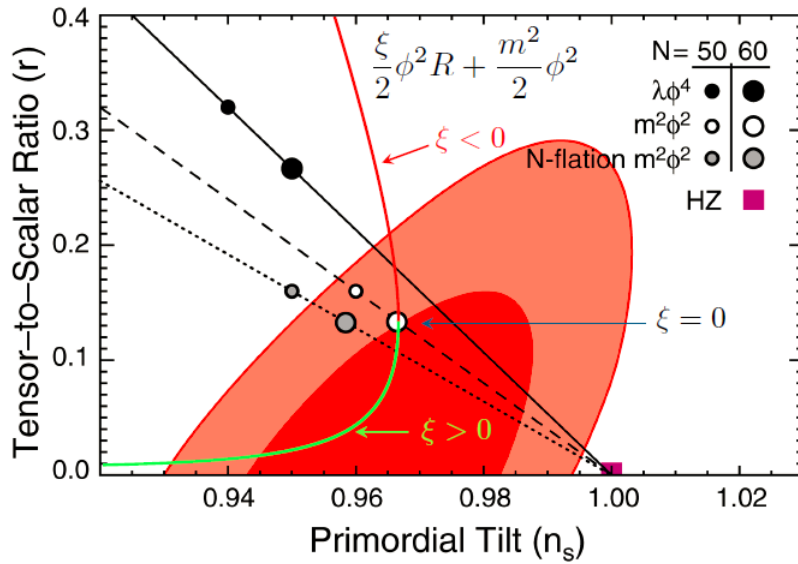
Mitte-minimaalselt seotud kaotiline inflatsioon on antud funktsioonidega

$$A(\phi) = 1 + \xi \phi^2, \quad (3.3)$$

$$B(\phi) = 1, \quad (3.4)$$

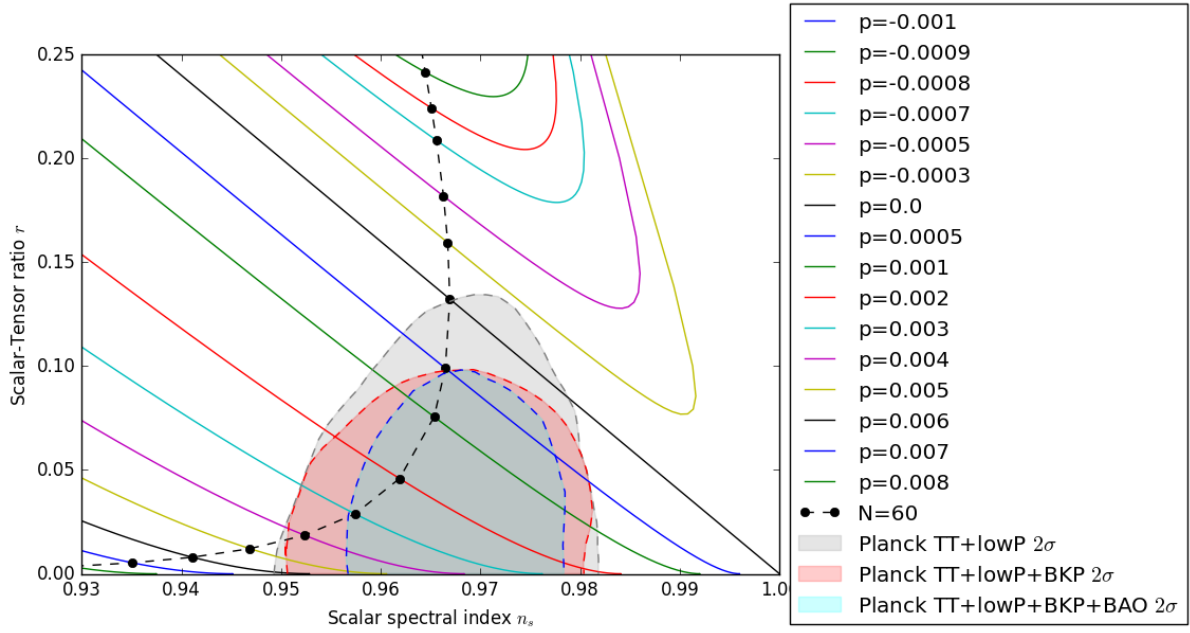
$$V(\phi) = \lambda M_{\text{Pl}}^4 \phi^2, \quad (3.5)$$

kus  $\xi$  on mudeli parameeter [53]. Osutub, et isegi väga väikesed muudatused parameetris  $\xi$  põhjustavad suuri erinevusi vaadeldavate suuruste arvutamisel. Joonisel 3.6 on artiklis [53] avaldatud graafik ning Joonisel 3.7 on programmi poolt väljastatud graafik. Vaatlusandmetega määratud usalduspiirkonnad on Joonisel 3.6 suuremad, sest seal on kasutatud vanemaid andmeid. Telgedelt arväärtusi võrreldes on aga näha, et tulemus on kooskõlaline.



Joonis 3.6: Mitte-minimaalselt seotud kaotiline inflatsioon [53]





Joonis 3.7: Programmi poolt joonistatud graafik mitte-minimaalselt seotud kaootilise inflatsiooni mudeli ( $A(\phi) = 1 + p\phi^2$ ,  $B = 1$  ja  $V(\phi) = \phi^2$ ) jaoks. Sirge must joon  $p = 0$  vastab minimaalselt seotud mudelile, mis on sama kui Joonisel 3.3. Tulemus on kooskõlaline Joonisega 3.6.

Higgsi boson on ainus eksperimentaalselt avastatud skalaarne elementaarosake [55]. Higgsi inflatsioonimudel tugineb sellele, et inflatsiooni põhjustajaks on Higgsi väli  $h$  [54, 56, 57, 58]. See saab vaatlustega olla kooskõlaline vaid siis, kui Higgsi väli on gravitatsiooniga mitte-minimaalselt seotud [54]. Mitte-minimaalselt seotud Higgsi mudel on antud funktsioonidega

$$A(h) = 1 + \xi h^2, \quad (3.6)$$

$$B(h) = 1, \quad (3.7)$$

$$V(h) = \frac{\lambda}{4}(h^2 - v^2)^2, \quad (3.8)$$

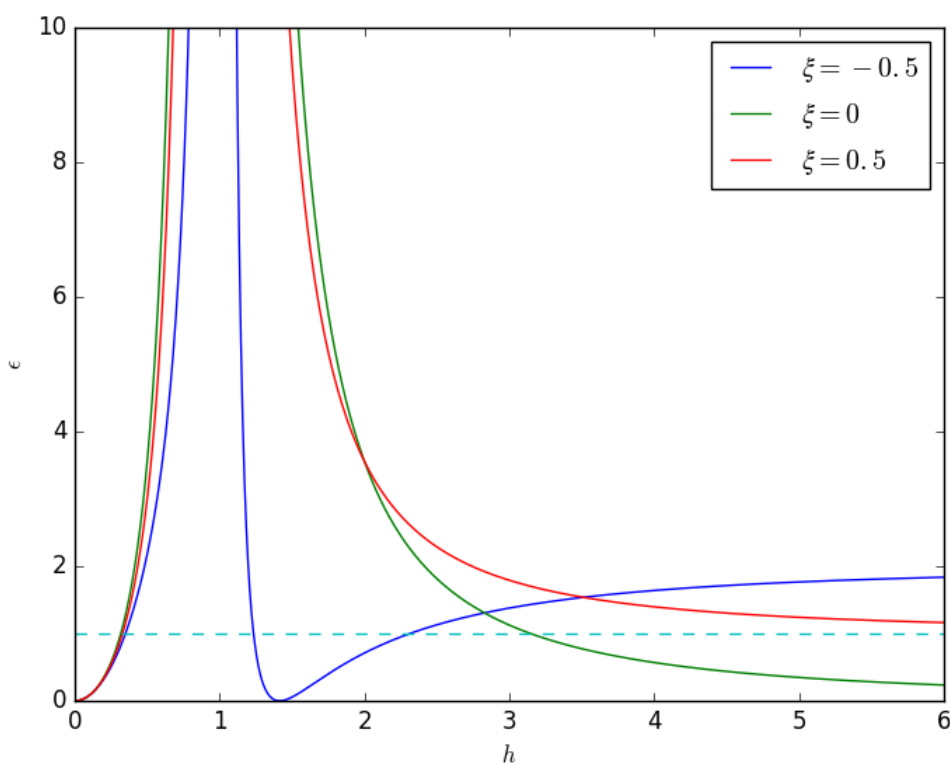
kus  $\lambda$  ja  $v$  on osakestefüüsikast leitavad parameetrid ning  $\xi$  on mitte-minimaalsust kirjeldav parameeter.

Kui see mudel sellisena programmi sisestada, ei leia programm tingimusele  $\varepsilon = 1$  vastavat

skalaarvälja lõppväärtust. Põhjuse uurimiseks saab valemist (2.14) leida avaldis  $\varepsilon$  jaoks:

$$\varepsilon(h) = \frac{8(1 + \xi v^2)^2 h^2}{(h^2 - v^2)^2 (1 + \xi h^2 + 6\xi^2 h^2)^2}, \quad (3.9)$$

Graafikuna on see funktsioon kujutatud Joonisel 3.8. Funktsioonil  $\varepsilon(h)$  on katkevuspunkt, väärtuse  $h = v$  juures. See esineb ka minimaalselt seotud mudeli korral (graafikul roheline joon  $\xi = 0$ ). Erinevate  $\xi$  väärtuste korral on erinev arv punkte, mis rahuldavad tingimust  $\varepsilon = 1$ . Graafikul vasakpoolseim punkt sõltub  $\xi$  väärtusest nõrgalt, kuid parempoolsed on selgelt erinevad. Piirjuhul  $h \gg v$  läheneb  $\varepsilon$  väärtusteni 2, 1 ja 0 vastavalt  $\xi = -0.5$ ,  $\xi = 0$  ja  $\xi = 0.5$  jaoks.



Joonis 3.8: Mitte-minimaalselt seotud Higgsi mudeli aeglase veeremise parameetri  $\varepsilon$  sõltuvus välja väärtusest  $h$ . Välja väärtus  $h$  on sellel graafikul antud  $v$  ühikutes (ehk  $v = 1$ ) kolme erineva  $\xi$  väärtuse jaoks. Punktiiriga on märgitud nivoo  $\varepsilon = 1$

Programmis kasutatav funktsioon `brentq` on kiiresti koonduv hübriidmeetod, mis vajab sisendina pidevat funktsiooni ning kahte erimärgilise funktsiooni väärtusega punkti, et leida nullkoht nende vahel [59]. Katkevus kohal  $h = v$  tuleneb sellest, et  $V(h)$  on selles punktis null. Selle katkevuse saaks kõrvaldada näiteks uurides alternatiivset potentsiaali  $W = \sqrt{V^2 + z^2}$ ,

kus  $0 \neq z \ll 1$ . Pärast võrrandi lahendamist saab arvutusi jätkata potentsiaaliga  $V$ , seega lõpptulemust selline vahetus ei mõjutaks.

Kõikide eelnevalt käsitletud mudelite korral on otspunktide valik olnud muutumatu - üks on valitud väga väike, teine väga suur. Selline valik töötaks ka Joonisel 3.8 toodud juhu  $\xi = 0.5$  jaoks. Juhul  $\xi = 0$  ei oleks otspunktid enam erimärgiliste  $\varepsilon - 1$  väärtustega. Juhul  $\xi = -0.5$  algoritm töötaks, leides juhuslikult ühe äärmistest nullpunktidest. Tegelik lõppväärtus sõltub skalaarvälja algväärtuse paiknemisest võimalike lõppväärtuste suhtes. Selle näite põhjal on selge, et sobilik otspunktide vahemik võib mudeli valikust sõltuvalt varieeruda.

### 3.4 Perspektiiv

Programmi eesmärk on usaldusväärselt arvutada kõik otsitavad suurused, lahendades iseseisvalt selleks vajalikud võrrandid. Võimalikud lahendused võrrandi lahendamise töökindluse parandamiseks on näiteks:

1. Automaatse otsingu loomine, mis leiaks algoritmi brentq tööks sobilikud otspunktid sisendi jaoks.
2. Teise tööpõhimõttega numbrilise meetodi implementeerimine, mis vajadusel asendaks või toetaks olemasoleva algoritmi tööd.
3. Numbrilise integreerimise asendamine või toetamine sümbolarvutusega.

Inflatsioonimudeli analüüsimise seisukohalt on veel oluline mudeli parameetrite kohta järelduste tegemine. Hetkel saab seda kvalitatiivselt teha graafikut lugedes, aga kasulik oleks ka implementeerida automaatne mehhanism, mis leiab parameetrite vahemikud, kus teooria ennustus on kooskõlas vaatlustega.

Selle informatsiooni põhjal saaks ka leida piirangud invariantsetele suurustele (2.10) - (2.12), mis võimaldaks konstrueerida esialgse mudeliga ekvivalentseid uusi mudeleid, mis on erinevalt gravitatsiooniga seotud [9]. Selliselt moodustatud ekvivalentsete mudelite uurimine võib viia huvitavate tulemusteni, kuna need on vaatluslikult eristamatud esialgsest mudelist.

# Mitte-minimaalselt seotud inflatsioonimudelite võrdlemine vaatlustega

Kaur Kristjuhan

## Kokkuvõte

Inflatsioon lahendab mitmeid varajase universumiga seonduvaid probleeme. Selle protsessi täpsem kulg on määratud skalaarvälja  $\phi$  dünaamikaga, mis on kõige lihtsamal juhul gravitatsiooniga minimaalselt seotud. Käesolevas töös on sellise teooria füüsikaline sisu selgeks tehtud, antud ülevaade teooria ülesehitusest ning tutvustatud teooriast leitavaid suurusi  $n_s$  ja  $r$ , mida saab vaatluslike andmetega võrrelda.

Neid teadmisi on laiendatud mitte-minimaalselt seotud inflatsioonimudelitele ning invariantide formalismi abil on leitud avaldised vaadeldavate suuruste jaoks, mis sõltuvad täielikult sisendfunktsioonidest  $A(\phi)$ ,  $B(\phi)$  ja  $V(\phi)$  ja nende tuletistest.

Töö tulemusena on kirjutatud valmis arvutiprogramm, mis võimaldab leitud avaldiste abil võrrelda mitte-minimaalselt seotud teooriast saadud ennustusi vaatlustega. Selle jaoks lahendab programm võrrandeid ääritingimuste täpsustamiseks ning joonistab erinevate parameetrite väärtuste jaoks parametrizeeritud jooned. Need kantakse koos vaatlusandmetest saadud usalduskontuuridega samale graafikule.

Saadud graafikuid on võrreldud usaldusväärsete allikatega ning on veendunud, et tulemused on kooskõlalised. Arvutuslikult problemaatilised aspektid on tuvastatud ning Higgsi mudeli näitel välja toodud. Töö lõpus on välja pakutud võimalikke lahendusi nendele probleemidele ning pakutud ideid, kuidas programmi tulevikus täiendada.

# Tänuavaldused

Täna oma juhendajat Margus Saali, kellega mul olid sisukad ja mitmekesised vestlused, mis hoidsid mind motiveerituna terve töö vältel. Lisaks täna kõiki Tartu Ülikooli õppejõude, kelle põnevad õppeained on minu õpinguid ja mõistust sihtotstarbeliselt sisustanud.

Kaur Kristjuhan

# Kirjandus

- [1] George F. R. Ellis. Issues in the philosophy of cosmology. In Jeremy Butterfield and John Earman, editors, *Philosophy of physics*, pages 1183–1285. 2006.
- [2] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry*. Addison Wesley, 2004.
- [3] Virginia Trimble. Existence and Nature of Dark Matter in the Universe. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 25:425–472, 1987.
- [4] Joshua Frieman, Michael Turner, and Dragan Huterer. Dark Energy and the Accelerating Universe. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 46:385–432, 2008.
- [5] S. Perlmutter et al. Discovery of a supernova explosion at half the age of the Universe and its cosmological implications. *Nature*, 391:51–54, 1998.
- [6] Andrew Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley, 2003.
- [7] Alan H. Guth. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev.*, D23:347–356, 1981.
- [8] Eanna E. Flanagan. The Conformal frame freedom in theories of gravitation. *Class. Quant. Grav.*, 21:3817, 2004.
- [9] Laur Järv, Kristjan Kannike, Luca Marzola, Antonio Racioppi, Martti Raidal, Mihkel Rünkla, Margus Saal, and Hardi Veermäe. Frame-Independent Classification of Single-Field Inflationary Models. *Phys. Rev. Lett.*, 118(15):151302, 2017.
- [10] P. A. R. Ade et al. Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation. *Astron. Astrophys.*, 594:A20, 2016.
- [11] Clifford M. Will. The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Rev. Rel.*, 17:4, 2014.
- [12] Ian Lawrie. *A Unified Grand Tour of Theoretical Physics*. IOP, 2002.
- [13] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. Wiley, 1972.

- [14] P. A. R. Ade et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594:A13, 2016.
- [15] Roy Maartens. Is the Universe homogeneous? *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, A369:5115–5137, 2011.
- [16] Chris Clarkson and Roy Maartens. Inhomogeneity and the foundations of concordance cosmology. *Class. Quant. Grav.*, 27:124008, 2010.
- [17] George F. R. Ellis. Inhomogeneity effects in Cosmology. *Class. Quant. Grav.*, 28:164001, 2011.
- [18] Stephen W. Hawking and Werner Israel. *300 years of gravitation*. Cambridge University Press, 1989.
- [19] Robert J. Nemiroff and Bijunath Patla. Adventures in Friedmann Cosmology: An Educationally Detailed Expansion of the Cosmological Friedmann Equations. *Am. J. Phys.*, 76:265–276, 2008.
- [20] D.J. Fixsen. The Temperature of the Cosmic Microwave Background. *Astrophys. J.*, 707:916–920, 2009.
- [21] Jerome Martin. Everything You Always Wanted To Know About The Cosmological Constant Problem (But Were Afraid To Ask). *Comptes Rendus Physique*, 13:566–665, 2012.
- [22] Andrei D. Linde. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. *Phys. Lett.*, 108B:389–393, 1982.
- [23] Alexei A. Starobinsky. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. *Phys. Lett.*, B91:99–102, 1980. [771(1980)].
- [24] Lev Kofman, Andrei D. Linde, and Alexei A. Starobinsky. Reheating after inflation. *Phys. Rev. Lett.*, 73:3195–3198, 1994.
- [25] Y.Šhtanov, Jennie H. Traschen, and Robert H. Brandenberger. Universe reheating after inflation. *Phys. Rev.*, D51:5438–5455, 1995.
- [26] Andrew R. Liddle, Paul Parsons, and John D. Barrow. Formalizing the slow roll approximation in inflation. *Phys. Rev.*, D50:7222–7232, 1994.
- [27] Andrew R Liddle and Samuel M Leach. How long before the end of inflation were observable perturbations produced? *Phys. Rev.*, D68:103503, 2003.

- [28] NASA / WMAP Science Team. <https://wmap.gsfc.nasa.gov/resources/cmbimages.html>.
- [29] David H. Lyth and Andrew R. Liddle. *The Primordial Density Distribution: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure*. New York: Cambridge University Press, 2009.
- [30] Daniel Baumann. The physics of inflation. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/db275/TEACHING/INFLATION/Lectures.pdf>.
- [31] J Ellis and D. Wands. Inflation. <http://www-pdg.lbl.gov/2016/reviews/rpp2016-rev-inflation.pdf>.
- [32] Weisstein, Eric W. "Wiener-Khinchin Theorem." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Wiener-KhinchinTheorem.html>.
- [33] Luca Amendola and Shinji Tsujikawa. *Dark Energy: Theory and Observations*. Cambridge University Press, 2010.
- [34] Sebastien Clesse. An introduction to inflation after Planck: from theory to observations. In *Proceedings, 10th Modave Summer School on Mathematical Physics: Modave, Belgium, September 1-5, 2014*, 2015.
- [35] Shinji Tsujikawa. Quintessence: A Review. *Class. Quant. Grav.*, 30:214003, 2013.
- [36] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa.  $f(R)$  theories. *Living Rev. Rel.*, 13:3, 2010.
- [37] Takeshi Chiba.  $1/R$  gravity and scalar - tensor gravity. *Phys. Lett.*, B575:1–3, 2003.
- [38] Laur Järv, Piret Kuusk, Margus Saal, and Ott Vilson. Invariant quantities in the scalar-tensor theories of gravitation. *Phys. Rev.*, D91(2):024041, 2015.
- [39] Gary N. Felder, Andrei V. Frolov, Lev Kofman, and Andrei D. Linde. Cosmology with negative potentials. *Phys. Rev.*, D66:023507, 2002.
- [40] Nathalie Deruelle and Misao Sasaki. Conformal equivalence in classical gravity: the example of 'Veiled' General Relativity. *Springer Proc. Phys.*, 137:247–260, 2011.
- [41] Guillem Domènech and Misao Sasaki. Conformal frames in cosmology. *Int. J. Mod. Phys.*, D25(13):1645006, 2016. [,56(2017)].
- [42] Piret Kuusk, Mihkel Rünkla, Margus Saal, and Ott Vilson. Invariant slow-roll parameters in scalar–tensor theories. *Class. Quant. Grav.*, 33(19):195008, 2016.
- [43] Django Software Foundation. Django. <https://djangoproject.com>.
- [44] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson, et al. SciPy: Open source scientific tools for Python. <http://www.scipy.org/>.



- [45] George B. Thomas, Maurice D. Weir, and Joel Hass. *Calculus*. Addison-Wesley, 11 edition, 2008.
- [46] Jerome Martin, Christophe Ringeval, and Vincent Vennin. Encyclopædia Inflationaris. *Phys. Dark Univ.*, 5-6:75–235, 2014.
- [47] Andrei D. Linde. Chaotic Inflation. *Phys. Lett.*, 129B:177–181, 1983.
- [48] Alexander Vilenkin. Eternal inflation and chaotic terminology. 2004.
- [49] Katherine Freese, Joshua A. Frieman, and Angela V. Olinto. Natural inflation with pseudo - Nambu-Goldstone bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 65:3233–3236, 1990.
- [50] Fred C. Adams, J. Richard Bond, Katherine Freese, Joshua A. Frieman, and Angela V. Olinto. Natural inflation: Particle physics models, power law spectra for large scale structure, and constraints from COBE. *Phys. Rev.*, D47:426–455, 1993.
- [51] Renata Kallosh, Andrei Linde, and Diederik Roest. Superconformal Inflationary  $\alpha$ -Attractors. *JHEP*, 11:198, 2013.
- [52] Renata Kallosh and Andrei Linde. Superconformal generalizations of the Starobinsky model. *JCAP*, 1306:028, 2013.
- [53] Andrei Linde, Mahdiyar Noorbala, and Alexander Westphal. Observational consequences of chaotic inflation with nonminimal coupling to gravity. *JCAP*, 1103:013, 2011.
- [54] Fedor L. Bezrukov and Mikhail Shaposhnikov. The Standard Model Higgs boson as the inflaton. *Phys. Lett.*, B659:703–706, 2008.
- [55] Georges Aad et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett.*, B716:1–29, 2012.
- [56] Fedor L. Bezrukov, Amaury Magnin, and Mikhail Shaposhnikov. Standard Model Higgs boson mass from inflation. *Phys. Lett.*, B675:88–92, 2009.
- [57] F. Bezrukov and M. Šhaposnikov. Standard Model Higgs boson mass from inflation: Two loop analysis. *JHEP*, 07:089, 2009.
- [58] Juan Garcia-Bellido, Javier Rubio, Mikhail Shaposhnikov, and Daniel Zenhausern. Higgs-Dilaton Cosmology: From the Early to the Late Universe. *Phys. Rev.*, D84:123504, 2011.
- [59] Richard P. Brent. *Algorithms for Minimisation without Derivatives*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1973.

# **Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, Kaur Kristjuhan,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

**Mitte-minimaalselt seotud inflatsioonimudelite võrdlemine vaatlustega,**

mille juhendaja on PhD Margus Saal,

- (a) reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
  - (b) üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
  3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartu, 1. juuni 2018. a.