

CARACTERIZANDO LA PRÁCTICA DOCENTE EN LA IMPLEMENTACIÓN DE UNA “PROPUESTA DIDÁCTICA DE LÍMITES INFINITOS MEDIANTE SITUACIONES CONTEXTUALES”

José Rafael Couoh Noh, María Guadalupe Cabañas-Sánchez y Eddie Aparicio-Landa
Universidad Autónoma de Guerrero; Universidad Autónoma de Yucatán. México
jose_rafael_1988@hotmail.com, gcabanas.sanchez@gmail.com, alanda@uady.mx

Resumen. Presentamos los avances de una investigación que se interesa por caracterizar la práctica profesional del profesor de matemáticas mientras desarrolla una propuesta didáctica sobre los límites infinitos que está basada en situaciones contextuales. Interesan dos cuestiones: a) comprender y a partir de ello caracterizar el tipo de ayudas, dificultades y formas de comunicación que establece con sus estudiantes en ese proceso, y b) reconocer de la propuesta didáctica, aquella(s) que posibilita(n) el aprendizaje de este tipo de límites. El estudio se realizará con estudiantes de Cálculo Diferencial de una licenciatura en Matemáticas, al momento en que este tópico es objeto de estudio. En este reporte, describimos principalmente la propuesta didáctica que será el instrumento para observar la clase del profesor universitario de Cálculo y en consecuencia caracterizar su práctica.

Palabras clave: límites infinitos, práctica del profesor, propuesta didáctica, situaciones contextuales

Abstract. We present the progress of research, which is interested in characterizing the professional practice of mathematics teacher while developing a didactic proposal about infinite limits, based on contextual situations. We are interested in two issues: a) understand and, from that, characterize the type of aid and forms of communication difficulties the teacher has with his students, and b) recognize from the didactic proposal, which one(s) that allow(s) learning such limits. The study was conducted with University Differential Calculus students, at the time that this topic is being studied. In this report, we describe mainly the didactic design that will be the instrument to observe the Calculus class and characterize the teacher practice.

Key words: infinite limits, teacher practice, proposal didactic, contextual situations

Introducción

Una buena parte de las investigaciones sobre los procesos de aprendizaje del Cálculo en nuestra disciplina, se han enfocado fundamentalmente a evidenciar las complejidades que subyacen en torno a su enseñanza a través de los errores y dificultades de los estudiantes con conceptos básicos. En ese contexto, Tall (1990) reconoce que conceptos como el límite y el infinito pueden ser interpretados de manera errónea en razón de la complejidad de sus significados. Artigue (1995) por su parte, afirma que las concepciones muy dependientes de una “geometría de la forma” no obligan a identificar con claridad sobre cuáles objetos se lleva a cabo el proceso límite, lo cual causa dificultades e introduce o refuerza convicciones erróneas como la creencia en que si “geométricamente” un objeto tiende hacia otro, todas las magnitudes que le están asociadas tendrán por límite valores correspondientes a las magnitudes del objeto límite. En este mismo sentido, Cornu (1991) sostiene que el concepto de límite es particularmente difícil, típica del tipo de pensamiento requerido en matemáticas avanzadas, en razón de que ocupa una posición central dentro del Análisis Matemático como un fundamento de la teoría de aproximación, de continuidad, y del Cálculo Diferencial e Integral. Asimismo, que una de las más grandes dificultades en la

enseñanza y aprendizaje de este concepto, se debe no solamente a su riqueza y complejidad, sino también a que los aspectos cognitivos no pueden ser abordados desde un único punto de vista de la definición matemática.

En el plano de la enseñanza, Duval (1993) sostiene que la formación de conceptos matemáticos implica una coordinación de varios registros de representación semiótica. En el concepto de límite, el registro numérico se estudia mediante tablas de valores, el gráfico mediante el uso de gráficas en los ejes cartesianos, el simbólico sustentado en la simbología matemática adecuada y el verbal, definiendo el concepto utilizando palabras coloquiales (Aquere et. al, 2009). En la enseñanza tradicional se tiende a una práctica algorítmica y algebraica del cálculo (Artigue, 1995). Tall (1990) sostiene que no es posible hacer más simple los conceptos complicados del Cálculo, pero se pueden dar experiencias más ricas basadas en contextos. Por ello, las investigaciones actuales relacionadas con la Didáctica del Cálculo proponen una aproximación más intuitiva y una metodología más activa para su enseñanza, ya que para los alumnos es un concepto árido, poco atractivo y demasiado abstracto (Engler et. al, 2008).

A este respecto, varios investigadores coinciden en que los contenidos del cálculo deben abordarse desde diferentes perspectivas buscando estrategias que contribuyan en una mejor comprensión por los estudiantes (e. g. Engler et. al, 2008). En ese sentido, algunos investigadores han desarrollado propuestas de enseñanza, tales como: Camacho y Aguirre (2001) quienes hacen un análisis preliminar del límite infinito para plantear una situación didáctica; Bertoia (2006) quien propone la interpretación del límite infinito mediante una experiencia con espejos; Engler et. al (2008) y Aquere et. al (2009) quienes diseñan una situación didáctica del límite infinito y una propuesta didáctica para la enseñanza del límite, respectivamente.

Sin duda el estudio sobre errores y dificultades de los estudiantes en torno a los conceptos de Cálculo son importantes, así como de propuestas de enseñanza. Sin embargo, se requieren además, estudios que den cuenta de la práctica profesional del profesor. Güçler (2013) menciona que hay investigación sobre la enseñanza de límites, pero todavía no es tan extensa como la investigación enfocada al aprendizaje de los estudiantes, por ello sugiere realizar estudios que examinen el discurso explícito del profesor ya que contribuye a perfeccionar su práctica docente. Oliveira (2009), sostiene que los estudios sobre la práctica del profesor contribuyen a mejorar su práctica. Por su parte, Laborde y Perrin-Glorian (2005), afirman que cuando se conoce la problemática que subyace en torno a procesos de aprendizaje de determinados conceptos matemáticos, conviene analizar la situación del salón de clases de matemáticas.

La investigación que se reporta se interesó precisamente por el estudio de la práctica del profesor. En particular, nos interesamos por caracterizar la práctica de un profesor de una licenciatura en matemáticas, a partir de las *ayudas* que introduce a los estudiantes, de las *dificultades* que encara y de las formas de *comunicación* que establece mientras implementa “una propuesta didáctica de límites infinitos basada en situaciones contextuales”, para enfatizar aquella(s) que posibilita(n) o favorece(n) el aprendizaje de límites infinitos. El estudio se desarrollará con dos grupos del primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas, en la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero.

En este reporte se describe principalmente la propuesta didáctica cuyo diseño es motivado, parcialmente, por Bertoia (2006) quien propone una situación para la interpretación del límite infinito mediante una experiencia con espejos en estudiantes del nivel secundario (5° grado) en Argentina. El concepto del límite infinito es objeto de estudio de manera explícita en la escuela mexicana en el Nivel Superior. Su importancia radica en que es fundamental en la introducción de otros conceptos del Cálculo Diferencial e Integral y del Análisis Matemático.

Fundamentos Teóricos

La teoría de los registros de representación semiótica de Duval

Para Duval (1993), los registros de representación semiótica son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias compulsiones de significado y de funcionamiento. Así, una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes. Se considera generalmente a las representaciones semióticas como un simple medio de exteriorización de las representaciones mentales para fines de comunicación, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a otros. En ese sentido, los registros de representación semiótica juegan un papel fundamental en la actividad matemática. Este investigador, hace hincapié en la importancia porque en la actividad matemática, se movilizan varios registros de representación semiótica (figuras, gráficas, escritura simbólica, lengua natural, etc...) en el transcurso de una misma tarea, o bien cómo elegir un registro en lugar de otro. Asimismo, señala que la coordinación de varios registros de representación semiótica desde esta perspectiva teórica, aparece como fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos, en donde es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de ellas. Bajo estas dos condiciones una representación funciona verdaderamente como representación cuando este facilita el acceso al objeto representado.

Por otra parte, este investigador señala que la existencia de varios registros de representación semiótica permite hacer cambios de un registro a otro, cuyo objetivo es efectuar tratamientos de una manera más económica y más potente. Además, menciona que dichos registros se complementan, ya que toda representación es cognitivamente parcial con respecto a lo que ella representa y entonces, de un registro a otro los aspectos del contenido de una situación representados son diferentes. De esta manera, la conceptualización implica una coordinación de registros de representación. De acuerdo con Duval (1993) la conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. Se identifican las siguientes conversiones: 1) *ilustración* es la conversión de una representación lingüística en una representación figural; 2) *traducción* es la conversión de una representación lingüística en una lengua dada en una representación lingüística de otra lengua o de otro tipo de lenguaje; y 3) *descripción* es la conversión de una representación no verbal (esquema, figura, gráfica) en una representación lingüística. A continuación, presentamos la caracterización de los distintos registros de representación involucrados en nuestra investigación. De acuerdo con Duval (1998, citado en Dal Bianco, et. al, 2006; p. 5): El *registro de representación lenguaje coloquial* se da en el lenguaje común y es utilizado para representar situaciones llamadas del mundo real; el *registro de representación analítico* hace referencia a la definición del objeto matemático mediante una expresión algebraica; el *registro de representación tabular* corresponde a los valores numéricos del objeto matemático organizados en tablas de valores; y el *registro de representación gráfico* se refiere a la imagen del objeto en el plano cartesiano.

La práctica Profesional del Profesor

De acuerdo con Llinares (2000) la práctica profesional del profesor se ve como el conjunto de actividades que genera cuando realiza las tareas que definen la enseñanza de las matemáticas y la justificación dada por el profesor. En este sentido, la práctica del profesor no está inscrita únicamente en lo que sucede en el aula, sino que se conceptualiza desde una perspectiva más amplia, comunidad de práctica profesional en la que se incluyen tareas como tutorías, reuniones de seminario departamento, asistencia a actividades de formación, etc. En nuestro estudio retomamos éstas ideas, sin embargo, con base en nuestro objetivo nos centramos en el aula de clases, dado que las ayudas y dificultades, las analizaremos desde las intervenciones del profesor en el aula a través de las razones y explicaciones que realiza con sus estudiantes cuando se movilizan de un registro de representación a otro.

Aspectos Metodológicos

a) *Participantes*. Se desarrollará con dos profesores universitarios de Cálculo Diferencial cuando el concepto de límite infinito es objeto de estudio, implementando una propuesta didáctica de límites infinitos mediante situaciones contextuales.

b) *Fase de planeación de la propuesta didáctica*. Con base en el análisis de algunos libros de texto de Cálculo Diferencial e Integral, identificamos que el estudio de los límites infinitos se realiza de la siguiente manera: Se define una función, luego se tabulan algunos valores y finalmente se construye una gráfica a partir de dichos valores. Considerando lo anterior, elaboramos una propuesta didáctica bajo el marco de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval, en la que se privilegió la conversión entre los registros de representación gráfico, tabular, lenguaje coloquial y analítico del tópico, en el contexto de la resolución de problemas. El objetivo general de la propuesta didáctica es que los estudiantes establezcan una definición del límite infinito sustentados de la simbología matemática ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, donde $a \in \mathbf{R}$). Para ello, se diseñaron siete actividades. Las primeras tres corresponden al estudio de la relación entre el ángulo formado por dos espejos y el número de imágenes reflejadas, y abordan el caso particular $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$. Las siguientes tres involucran el contexto de los contaminantes tóxicos en aguas dulces, específicamente $\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = \infty$. La última actividad, pretende que el estudiante sintetice el conocimiento adquirido escribiendo la expresión $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, donde $a \in \mathbf{R}$. Por cuestiones de espacio, se describen las primeras tres actividades, las cuales son similares a las siguientes tres.

Actividad 1. Su objetivo es que el estudiante comprenda la situación sobre los espejos. Se presenta un video del experimento, el cual consiste en: colocar de manera vertical sobre una base dos espejos rectangulares de iguales dimensiones unidos por uno de sus bordes, se pone un objeto sobre la base, se varía el ángulo formado por los dos espejos y se observa cómo cambia el número de imágenes reflejadas. Se cuestiona al estudiante para indagar respecto de su comprensión de la situación: Describan con sus propias palabras en qué consistió el experimento mostrado en el videoclip; ¿qué relación existe entre el número de imágenes reflejadas en los dos espejos y el ángulo formado entre ellos?; ¿a qué creen que se deba dicho comportamiento?

Actividad 2. Su propósito es calcular el límite infinito de una función a partir de la representación numérica y movilizand los registros de representación tabular, lenguaje coloquial y analítico. Se presentan cinco tablas de valores, con dos columnas cada una, que relacionan el ángulo formado por los dos espejos y el número de imágenes reflejadas en ellos; tres de las tablas tienen valores

completos, las cuales serán utilizadas para completar los datos de las dos tablas restantes (ver figura 1)

Ángulo formado por los dos espejos	Número de imágenes reflejadas	Ángulo formado por los dos espejos	Número de imágenes reflejadas
0.0015°	239999	0.015°	23999
0.0009°	399999	0.009°	39999
0.0005°	719999	0.005°	71999
0.0001°	3599999	0.001°	359999

Ángulo formado por los dos espejos	Número de imágenes reflejadas
0.15°	2399
0.09°	3999
0.05°	7199
0.01°	35999

Con base en los datos, analicen y respondan en cada caso lo que se pide.

- a) Completen los datos faltantes en las tablas siguientes.

Número de imágenes reflejadas	Ángulo formado por los dos espejos
239	
359	
7199999	

Número de imágenes reflejadas	Ángulo formado por los dos espejos
	0.00005°
	0.00001°
	0.000001°

Figura 1. Registro tabular en la propuesta didáctica del límite infinito.

Se cuestiona respecto de los procedimientos realizados para completar las tablas, la variable independiente y dependiente, el número de imágenes reflejadas conforme disminuye y aumenta el ángulo entre los dos espejos, y el comportamiento del número de imágenes cuando el ángulo tiende a 0° y se pide expresarlo con la notación matemática correspondiente.

Actividad 3. Su finalidad es determinar el límite infinito de una función a partir de la representación gráfica y se favorecen los registros de representación gráfico, lenguaje coloquial y analítico. Se presenta una gráfica (ver figura 2) que modela la situación, elaborada a partir de algunos datos de las tablas anteriores.

Con base en la gráfica se cuestiona: ¿qué valores puede tomar la variable independiente y dependiente?; ¿qué comportamiento presenta el número de imágenes reflejadas cuando el ángulo formado por los dos espejos disminuye o aumenta?; ¿qué comportamiento presenta el número de imágenes reflejadas cuando el ángulo formado por los dos espejos se reduce, por ejemplo, cuando $\alpha = 5^\circ$, $\alpha = 2^\circ$?; ¿qué valor se esperaría para el número de imágenes si $\alpha = 0^\circ$ y por qué?; ¿qué comportamiento tiene el número de imágenes reflejadas si α es muy cercano a 0° ?; ¿existe un valor máximo de la función? Determinenlo en caso afirmativo, caso contrario, justificar por qué no existe; utilizando lenguaje común y la simbología matemática adecuada, describan la relación que guardan el número de imágenes reflejadas y la disminución del ángulo formado por los dos espejos.

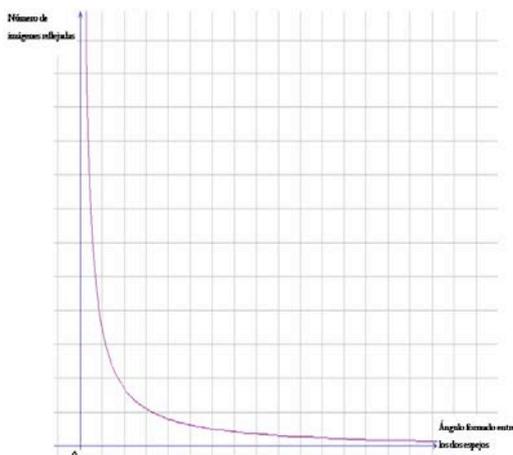


Figura 2. Registro gráfico en la propuesta didáctica del límite infinito.

c) *Desarrollo de la propuesta didáctica.* En cada grupo, las actividades se resolverán en un ambiente de lápiz y papel durante cuatro sesiones de 100 minutos cada una y serán videograbadas. Cada profesor organizará a los estudiantes en equipos, de tal forma que al menos un integrante tenga conocimientos consistentes de Cálculo. El rol del primer autor, quien planteó la propuesta didáctica, será acordar con los profesores, en dos sesiones de trabajo previo a la implementación, las actividades de la propuesta didáctica para incorporar elementos que consideren relevantes desde su experiencia docente y argumentar dichas modificaciones. En la puesta en escena, el primer autor se limitará a observar el desarrollo de la clase y a videograbar.

d) *Entrevista final.* El investigador seleccionará episodios de los videos que considere representativos de la práctica del profesor en el desarrollo de la propuesta didáctica y planteará preguntas para profundizar en ciertos aspectos. Se pretende una reflexión del profesor sobre su práctica con base en dichos videos y a partir de ciertos cuestionamientos, por ejemplo, qué modificaciones realizaría en su práctica y por qué.

Reflexiones Finales

El contexto utilizado y las actividades planteadas en la propuesta didáctica deben ser fundamentales para que los estudiantes se motiven en su resolución y en consecuencia lleguen al objetivo planteado. Estamos convencidos del gran valor que tiene la elaboración de propuestas didácticas, ya que al profesor le permite enseñar los conceptos matemáticos con mayor significado y al estudiante lo obliga a poner en juego sus habilidades y conocimientos matemáticos a través de la reflexión sobre la solución del problema; con lo cual confirmamos la postura de Tall (1990) y Engler et. al (2008) quienes sostienen, respectivamente, la importancia de dar experiencias más ricas basadas en contextos en la enseñanza del Cálculo y en una metodología más activa para su enseñanza.

Finalmente, consideramos que la propuesta didáctica está sujeta a modificaciones, ya que convendría validarla con algunos estudiantes e incorporar elementos desde la perspectiva de la práctica profesional de los profesores universitarios de Cálculo Diferencial.

Referencias bibliográficas

- Aquere, S; Engler, A., Gregorini, M., Vrancken, S., Müller, D., Hecklein, M., y Henzenn, N. (2009). Una propuesta didáctica para la enseñanza de límite. *Revista Premisa*, 40, 14-24.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Bertoia, M. (2006). La interpretación del límite infinito mediante una experiencia con espejos. *Revista Premisa*, 30, 24-27.
- Camacho, A y Aguirre, M. (2001). Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(3), 237-265.
- Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 153-166). Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.
- Dal Bianco, N., Botta Gioda, R., Castro, N., Martinez, S., y Prieto, F. (2006). Descripción bibliográfica de funciones trascendentes y su aplicación en las ciencias biológicas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19, 4-10.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 5, 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En E. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Engler, A., Gregorini, M., Vrancken, S., Müller, D., Hecklein, M., y Henzenn, N. (2008). El límite infinito: Una situación didáctica. *Revista Premisa*, 36, 11-21.
- Güçler, B. (2013) Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 82(3), 439-453.
- Laborde, C. y Perrin-Glorian, M. J. (2005). Introduction: Teaching situations as object of research: Empirical studies within theoretical perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), 1-12.

- Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J.P. da Ponte y L. Serrazina (coord.). *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Italia*. (pp. 109-132). Lisboa, Portugal: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.
- Oliveira, H. (2009). Understanding the teacher's role in supporting student's generalization when investigating sequences. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*, *Supplemento n.2 al n. 19*, 2009.
- Tall, D. (1990). Inconsistencies in the Learning of Calculus and Analysis. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *12*, 49-63