

ANÁLISIS CUALITATIVO DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS Y CAOS

Juan Carlos Bressan y Ana Ferrazzi de Bressan

Universidad de Buenos Aires

Universidad Argentina de la Empresa

bressanjuancarlos22@gmail.com, anaferrazzibressan@gmail.com

Argentina

Resumen. El objetivo de este trabajo es introducir el concepto de caos, mediante el análisis cualitativo de sistemas dinámicos discretos, cuyos modelos deterministas están dados por ecuaciones en diferencias no lineales. La variable independiente discreta es el tiempo y al cabo de cada intervalo de igual longitud la variable dependiente describirá el estado del sistema. El análisis cualitativo se realiza geoméricamente, mediante representaciones gráficas, sin aplicar métodos formales de resolución de la ecuación, usando algunas veces métodos iterativos.

Palabras clave: caos, órbita, período, atractor, repulsor

Abstract. The aim of this paper is to introduce the chaos concept. This is done through a qualitative analysis of discrete dynamical systems, whose deterministic models are given by non-linear differences equations. In each one, discrete time of same length is the independent variable and at the end of each interval the dependent variable will describe the state of the system. The qualitative analysis was conducted geometrically, using representations that let us to describe the change in state variables, without analytical resolution of equations but, using iterative methods if it is necessary.

Key words: chaos, orbit, period, attracting, repelling

Introducción

Definiremos conceptos esenciales para el análisis cualitativo de una ecuación en diferencias $x_{k+1} = f(x_k)$, donde $\text{imag}(f) \subseteq \text{dom}(f)$. Si $x_0 \in \text{dom}(f)$ la ecuación $x_{k+1} = f(x_k)$ genera por iteración de f la sucesión $x_0; x_1 = f(x_0); \dots; x_{k+1} = f(x_k); \dots$, que es la órbita de x_0 , la cual se denotará $\Theta_{x_0} = \{x_0; x_1; \dots; x_k; x_{k+1}; \dots\}$. Diremos que \tilde{x} es punto fijo de $f(x)$ cuando es abscisa de un punto de intersección de las gráficas de $y=x$ con la de $y = f(x)$, es decir, $\tilde{x} = f(\tilde{x})$. Un punto fijo \tilde{x} de $f(x)$ es *atractor*, si existe algún entorno I de \tilde{x} , tal que para todo $x_0 \in I$, su órbita converge a \tilde{x} , permaneciendo por tanto en dicho entorno. Un punto fijo \tilde{x} de $f(x)$ es *repulsor* si existe algún entorno I de \tilde{x} , tal que para todo $x_0 \in I$ con $x_0 \neq \tilde{x}$, su órbita diverge de \tilde{x} saliendo por tanto de dicho entorno.

El análisis cualitativo del sistema puede encararse: i) Graficando para algunos valores iniciales de x_0 los pares $(k; x_k)$ correspondientes a los primeros valores orbitales x_k de la órbita de x_0 , con lo que tendremos una idea sobre el comportamiento de la sucesión correspondiente a ese x_0 . ii) Mediante la representación para un determinado valor inicial x_0 de los pares ordenados $(x_k; x_{k+1})$ correspondientes a sucesivas iteraciones de f , obteniendo la línea de fases de x_0 . La

reiteración del procedimiento para cada $x_0 \in \text{Dom } f$ genera la gráfica de f que conjuntamente con la bisectriz del 1er y 3er cuadrantes permiten construir el *diagrama de red*.

Para las funciones lineales $f(x) = ax + b$ se sabe que un punto fijo \tilde{x} es atractor si $|a| < 1$, mientras que es repulsor si $|a| > 1$. Para cualquier función f continua y derivable en el intervalo de definición del sistema, el análisis del carácter de \tilde{x} puede encararse mediante la linealización de la función en \tilde{x} , válida en un intervalo infinitesimal alrededor de ese punto. Pero la pendiente de la función linealizada es $f'(\tilde{x})$; luego aplicamos el siguiente criterio: Si $|f'(\tilde{x})| < 1$, entonces \tilde{x} es atractor y si $|f'(\tilde{x})| > 1$, entonces \tilde{x} es repulsor.

Un modelo determinista caótico

Consideremos la ecuación en diferencias $x_{k+1} = x_k^2 - 2x_k$, asociada a la función $f(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$. Para su análisis cualitativo: (i) Obtenemos los puntos fijos, $\tilde{x}_1 = 0$ y $\tilde{x}_2 = 3$, resolviendo $x = x^2 - 2x$. (ii) Determinamos el comportamiento en cada \tilde{x} . Como $|f'(0)| = 2 > 1$ y $|f'(3)| = 4 > 1$, ambos puntos fijos son repulsores. (iii) Calculamos y representamos los primeros valores de la órbita para diversos x_0 , por ejemplo si $x_0 = 0.1$ su órbita es $\Theta_{x_0=0.1} = \{0.1; -0.19; 0.4161; -0.65906079; \dots; 2.98760154; 2.950559883; \dots\}$.

En la representación de los primeros valores de las órbitas de $x_{k+1} = x_k^2 - 2x_k$ se utilizan líneas de sostén para su mejor visualización. Esto puede verse en la Fig.1 donde representamos dichos valores orbitales para: $x_0 = 0,2$; $x_0 = 0,3$; $x_0 = -0,2$; $x_0 = -0,3$; $x_0 = 2,8$ y $x_0 = 2,7$ todos ellos pertenecientes al intervalo $I = (-1;3)$.

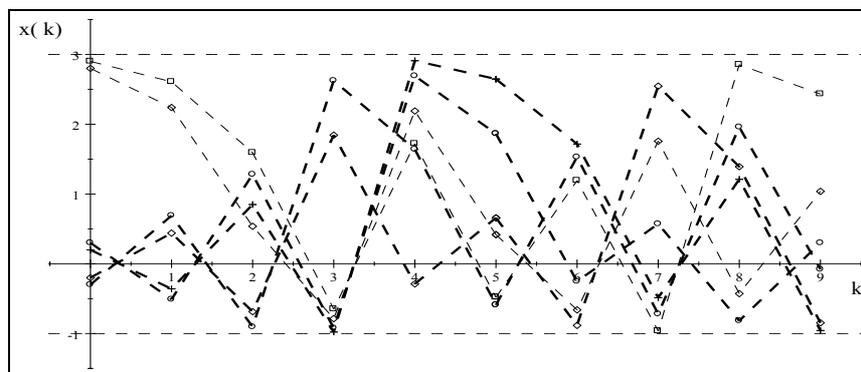


Figura 1: Valores orbitales para distintas condiciones iniciales $x_0 \in (-1;3)$

En la Fig. 1 podemos observar: 1°) Los puntos orbitales de cada órbita, están comprendidos en el intervalo $I = (-1; 3)$. 2°) Dividiendo, para cualquiera de las órbitas, el intervalo de valores orbitales en subintervalos de 5 décimas, aún con las pocas iteraciones efectuadas, son numerosos los subintervalos de esta órbita, “visitados” por otros valores orbitales de la misma órbita. Esta característica es la propiedad de *mezcla*.

Para ilustrar otra característica de ciertas órbitas de este modelo, representamos los primeros puntos orbitales de $\Theta_{-0.095}$ y de $\Theta_{-0.0951}$ (ambos x_0 menores que $\tilde{x}_1 = 0$).

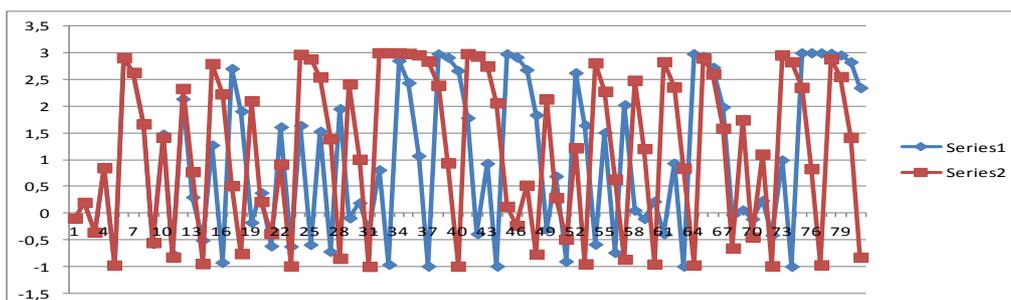


Figura 2: Valores orbitales de órbitas de $\Theta_{-0.095}$ y de $\Theta_{-0.0951}$

La Fig. 2 muestra que la variación de un diezmilésimo en la condición inicial considerada, al avanzar el número de iteraciones, provoca variaciones inicialmente poco notorias en los valores orbitales, hasta producir valores que si bien fluctúan en el mismo intervalo, lo hacen con valores, que en ciertos intervalos, están totalmente diferenciados. Existe *sensibilidad* de las condiciones iniciales.

Por ser $x_0 = \tilde{x}_1 = 0$ y $x_0 = \tilde{x}_2 = 3$ puntos fijos de la función, son de equilibrio del modelo, siendo sus órbitas periódicas $\Theta_{\tilde{x}=0}^1 = \{0; 0; 0; \dots; 0; \dots\}$; $\Theta_{\tilde{x}=3}^1 = \{3; 3; 3; \dots; 3; \dots\}$. Además, $x_0 = 2$ (cero de f); $x_0 = 1$ y $x_0 = -1$ (abscisa y ordenada del vértice de f), tienen por órbitas $\Theta_2 = \{2; 0; 0; \dots; 0; \dots\}$; $\Theta_1 = \{1; -1; 3; 3; \dots; 3; \dots\}$ y $\Theta_{-1} = \{-1; 3; 3; \dots; 3; \dots\}$, que son eventualmente periódicas, pues al cabo de las primeras iteraciones se transforman en periódicas, en este caso de período 1.

Nos resta ver el comportamiento de las órbitas cuando $x_0 \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. Puesto que $f((-\infty; -1) \cup (3; +\infty)) = (3; +\infty)$, para cualquier condición inicial $x_0 < -1$ o bien $x_0 > 3$, será $x_k > 3$ para $k \geq 1$. Para el número creciente de iteraciones los valores orbitales también son crecientes, sin que existan intervalos de fluctuación para los puntos de sus trayectorias. Observamos en la Tabla I una divergencia constante de las órbitas a más infinito y que los valores

orbitales para $x_0 = -1,01$ y $x_0 = 3,01$ son iguales; ello se debe a que ambos valores son simétricos con respecto a la abscisa del vértice de la parábola $f(x) = x^2 - 2x$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_k	3,01	3,0401	3,1620	3,6743	6,1518	25,5407	601,2457	360293.92
x_k	3,009	3,0361	3,1456	3,6037	5,7793	21,8418	433,3796	186951,12
x_k	-1,01	3,0401	3,1620	3,6743	6,1518	25,5407	601,2457	360293,92
x_k	-1,02	3,0804	3,3281	4,4199	10,6956	93,0046	8463,85	71619827

Tabla 1: Valores orbitales de de $x_{k+1} = x_k^2 - 2x_k$ para $x_0 = 3.01; x_0 = 3.009$, $x_0 = -1,01; x_0 = -1.02$

A continuación relacionaremos el comportamiento del modelo con la función compuesta $g(x) = f^2(x) = f(f(x)) = x(x-2)(x^2 - 2x - 2)$, cuyos puntos fijos son $\tilde{x}_1 = 0$, $\tilde{x}_2 = 3$, $\tilde{x}_3 = (1/2) + (1/2)\sqrt{5}$ y $\tilde{x}_4 = (1/2) - (1/2)\sqrt{5}$. Descartamos \tilde{x}_1 y \tilde{x}_2 , por ser puntos fijos de f , quedando \tilde{x}_3 y \tilde{x}_4 . Puesto que $|g'(\tilde{x}_3)| = |g'(\tilde{x}_4)| \cong 4.02 > 1$ resulta que \tilde{x}_3 y \tilde{x}_4 son puntos fijos repulsivos de $g(x) = f^2(x)$. Por otra parte, como $f(\tilde{x}_3) = \tilde{x}_4$ y $f(\tilde{x}_4) = \tilde{x}_3$ se obtienen los ciclos $\Theta_{\tilde{x}_3}^2 = \{\tilde{x}_3; \tilde{x}_4; \dots; \tilde{x}_3; \tilde{x}_4; \dots\}$ y $\Theta_{\tilde{x}_4}^2 = \{\tilde{x}_4; \tilde{x}_3; \dots; \tilde{x}_4; \tilde{x}_3; \dots\}$, que serán repulsivos por ser \tilde{x}_3 y \tilde{x}_4 puntos fijos repulsivos de $g(x) = f^2(x)$.

Calculamos, $f^3(x) = x(x-2)[x(x-2)-2][x(x-2)(x(x-2)-2)-2]$, cuyos puntos fijos son $0; 3; 0.55496; 2.2470; 2.5321; 1.3473; -0.80194; -0.87939$, donde salvo 0 y 3 los restantes valores están calculados en forma aproximada. Esos valores dan lugar a

$$\Theta_{\tilde{x}=2.2470}^3 = \{2.2470; 0.55496; -0.80194; \dots; 2.2470; 0.55496; -0.80194; \dots\},$$

$$\Theta_{\tilde{x}=-0.87939}^3 = \{-0.87939; 2.5321; 1.3473; \dots; -0.87939; 2.5321; 1.3473; \dots\},$$

que son ciclos repulsivos de orden 3. Al ver que existen puntos periódicos de período 3 en I , en virtud del teorema de Li y Yorke existen puntos periódicos de todos los períodos en I (ver pág 204 de Martín, Morán y Reyes). Esto asegura la densidad de los puntos periódicos en el intervalo I .

Diagramas de red

Otra forma de reconocer el comportamiento de un modelo, es mediante la construcción del diagrama de red. Para ello, dibujamos la línea de fases $f(x) = x^2 - 2x$ de la ecuación recursiva $x_{k+1} = x_k^2 - 2x_k$ y la bisectriz del primero y tercer cuadrantes. Así, a partir de la condición inicial x_0 elegida, se dibuja una línea vertical hasta intersectar la línea de fases en el punto $(x_0; f(x_0)) = (x_0; x_1)$. Desde esta intersección se traza una línea horizontal hasta intersectar la bisectriz en el punto $(f(x_0); f(x_0)) = (x_1; x_1)$, determinando así la nueva abscisa x_1 para calcular $f(x_1)$. A partir de este punto trazamos una vertical que intersectará la línea de fases en $(x_1; f(x_1)) = (x_1; x_2)$. Este procedimiento puede reiterarse obteniendo el diagrama de red que permite conocer los valores aproximados de la órbita de x_0 , leídos sobre cualquiera de los ejes, como muestran las Figs. 4 y 5

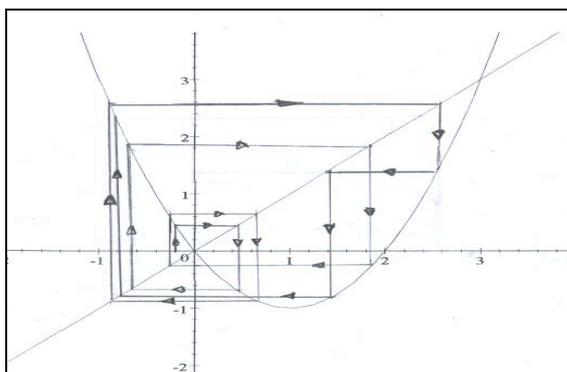


Figura 4: Diagrama de red para $f(x) = x^2 - 2x$ de la condición inicial $x_0 = -0,2$.

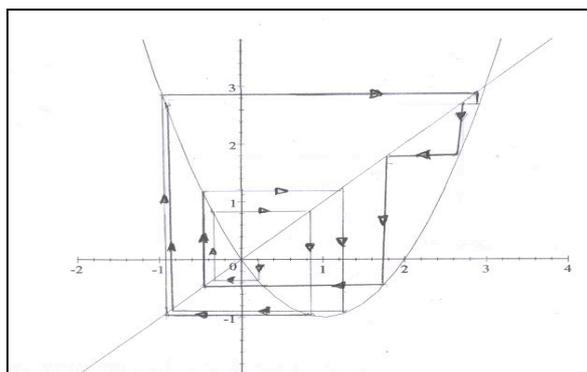


Figura 5: Diagrama de red para $f(x) = x^2 - 2x$ de la condición inicial $x_0 = 0,2$.

Si bien las figuras anteriores no pueden asegurar que el modelo sea caótico en $[-1; 3]$, nos permiten ver que ese carácter está directamente relacionado con la gráfica de la función y sus puntos fijos. Por otra parte, sabemos que la función logística $F_4(x) = 4x(1-x)$ tiene un comportamiento caótico en $[0; 1]$, lo cual se prueba estableciendo una biyección con la gráfica de la función tienda de campaña dada por $T(x) = 2x$ si $x \in [0; 1/2]$ y por $T(x) = 2(1-x)$ si $x \in (1/2; 1]$, que tiene un comportamiento caótico en $[0; 1]$, como se demuestra en el libro de Martín, Morán y Reyes. De esta forma, si existe una transformación de semejanza de la gráfica de $f(x) = x(x-2)$ en $[-1; 3]$ a la de $F_4(x) = 4x(1-x)$ en $[0; 1]$, dejando invariante la bisectriz del

1ro. y 3er. cuadrantes, tendremos aseverada la caoticidad de $f(x)$ en $[-1; 3]$. Aseguramos tal semejanza puesto que por una simetría central en $(0;0)$, la gráfica de $f(x)$ en $[-1; 3]$, se transforma en la de $f_1(x) = -x(2+x)$ en $[-3; 1]$. Luego, mediante una traslación dada por $V(3; 3)$ obtenemos $f_2(x) = x(4-x)$ en $[0; 4]$. Finalmente por una homotecia de razón $1/4$ resulta la gráfica de la función logística $F_4(x) = 4x(1-x)$ en $[0; 1]$. Los puntos fijos $\tilde{x}_1 = 0$ y $\tilde{x}_2 = 3$ de $f(x)$ se transforman, respectivamente, en los puntos fijos $\hat{x}_1 = 3/4$ y $\hat{x}_2 = 0$ de $F_4(x)$. Además, cualquier $x_0 \in [-1; 3]$ se transforma en $(1/4)(3-x_0) \in [0; 1]$. De esta forma $f(x) = x(x-2)$ tendrá una órbita caótica para $x_0 \in [-1; 3]$ si y sólo si $F_4(x) = 4x(1-x)$ tiene una órbita caótica para $(1/4)(3-x_0) \in [0; 1]$

Un modelo determinista no caótico

Consideremos la ecuación en diferencias $x_{k+1} = -x_k^2 + x_k + 2$, asociada a $f(x) = -x^2 + x + 2$. Sus puntos fijos $\tilde{x}_1 = -\sqrt{2}$ y $\tilde{x}_2 = \sqrt{2}$, son repulsores pues $|f'(\tilde{x}_1)| = 2\sqrt{2} + 1 > 1$ y $|f'(\tilde{x}_2)| = |-2\sqrt{2} + 1| > 1$, generando los ciclos $\Theta_{-\sqrt{2}}^1 = \{-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \dots; -\sqrt{2}; \dots\}$ y $\Theta_{\sqrt{2}}^1 = \{\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}; \dots; \sqrt{2}; \dots\}$ de período 1. Además, el punto notable $1 + \sqrt{2}$, que es abscisa de una intersección de la gráfica de $f(x)$ con la recta $r(x) = -\sqrt{2}$, genera el ciclo eventualmente periódico $\Theta_{1+\sqrt{2}} = \{1 + \sqrt{2}; -\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \dots; -\sqrt{2}; \dots\}$.

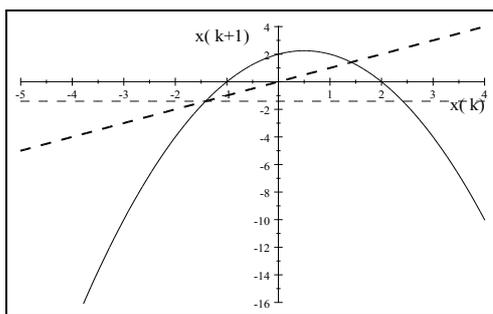


Figura 6: $\tilde{x}_1 = -\sqrt{2}$; $\tilde{x}_2 = \sqrt{2}$ puntos fijos y $1 + \sqrt{2}$ punto notable de $f(x) = -x^2 + x + 2$

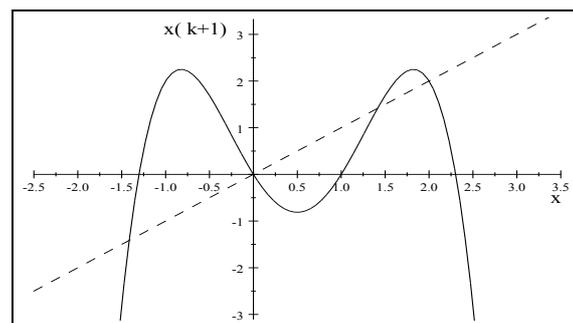


Figura 7: $\tilde{x}_3 = 0$ y $\tilde{x}_4 = 2$ puntos fijos que consideraremos de $g(x) = f^2(x)$

La función compuesta $g(x) = f^2(x) = (-x^2 + x + 2)^2 + (-x^2 + x + 2) + 2$ tiene como puntos fijos $\tilde{x}_1 = -\sqrt{2}$, $\tilde{x}_2 = \sqrt{2}$, $\tilde{x}_3 = 0$ y $\tilde{x}_4 = 2$. Descartamos \tilde{x}_1 y \tilde{x}_2 por ser puntos fijos de $f(x)$.

Así, $\Theta_0^2 = \{0; 2; 0; 2; \dots; 0; 2; \dots\}$ y $\Theta_2^2 = \{2; 0; 2; 0; \dots; 2; 0; \dots\}$ son ciclos periódicos de orden 2 repulsores, pues $|g'(0)| = |g'(2)| = |-3| > 1$. Las figuras 6 y 7, exhiben los puntos fijos de $f(x)$ y de $f^2(x)$, y además el punto notable de $f(x)$. Determinamos ahora los puntos fijos de $h(x) = f^3(x) = f(f^2(x)) = -x^8 + 4x^7 - 14x^5 + 7x^4 + 14x^3 - 7x^2 - 3x + 2$: -0.802 ; 0.555 ; 2.247 ; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ donde los tres primeros, que forman un ciclo de período 3, están calculados con una aproximación de tres decimales y los dos restantes se descartan por ser puntos fijos de $f(x)$. Como $f(2.247) = -0.802$; $f(-0.802) = 0.555$ y $f(0.555) = 2.247$, es $\Theta_{2.247}^3 = \{2.247; -0.802; 0.555; \dots; 2.247; -0.802; 0.555; \dots\}$.

Observemos en la Fig. 8 que esos tres valores son raíces dobles de $h(x) = x$, de los que la bisectriz del 1ro. y 3er. cuadrantes es su recta tangente. Como la derivada $h'(x)$ en cualquiera de esos puntos es 1, nos dificulta determinar el comportamiento del ciclo. Para ello, tomamos como condición inicial $x_0 = 2.0868 \in (-\sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$, valor aproximado de un punto fijo repulsor de $f^4(x)$; de allí que la órbita comienza tomando valores aproximados del ciclo repulsor de orden 4 $\Theta_{x=2.0868}^4 = \{2.0868; -0.26799; 1.6602; 0.90396; \dots\}$; que, después de un período confuso de la iteración 16 a la 69, se estabiliza en el ciclo atractor de orden 3, como puede verse en la Fig. 9. El comportamiento atractor del ciclo de orden tres determina el carácter no caótico de la ecuación en diferencias $x_{k+1} = -x_k^2 + x_k + 2$ en $[-\sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$

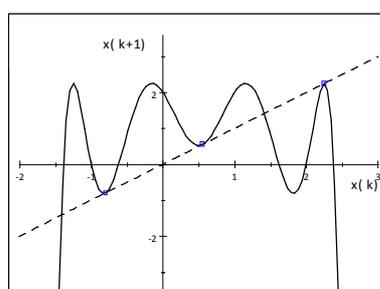


Figura 8: Gráfica de $h(x) = f^3(x)$.

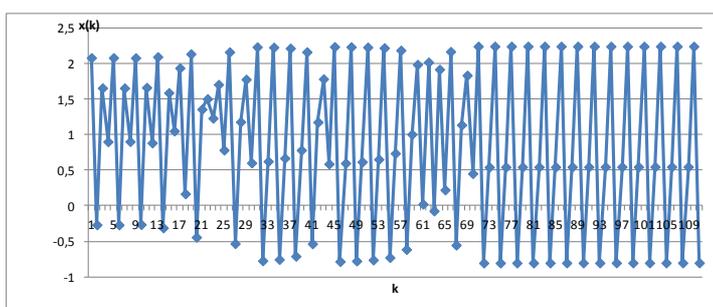


Figura 9: Representación de la órbita de $x_0 = 2.0868$.

Ahora, en la Tabla 2 veremos el comportamiento del modelo cuando $x_0 \notin [-\sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$.

k	0	1	2	3	4	5
x_k	2,5	-1,75	-2,8125	-8,72265625	-82,8073883	-6937,87095
x_k	-1,7	-2,59	-7,2981	-58,5603636	-3485,87655	-12154819,2

Tabla 2: Valores de la órbita de $x_{k+1} = -x_k^2 + x_k + 2$ para $x_0 = 2,5$ y $x_0 = -1,7$.

Puesto que $f\left(\left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(1 + \sqrt{2}; +\infty\right)\right) = \left(-\sqrt{2}; -\infty\right)$, para cualquier condición inicial $x_0 < -\sqrt{2}$ o bien $x_0 > 1 + \sqrt{2}$, será $x_k < -\sqrt{2}$ para $k \geq 1$. Para el número creciente de iteraciones los valores orbitales son monótonos decrecientes, resultando $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} = -\infty$.

Conclusiones

En los dos ejemplos desarrollados los puntos fijos de la función $f(x)$ son repulsivos. En $f(x) = x(x-2)$ existe un intervalo de caoticidad mientras que en $f(x) = -x^2 + x + 2$ no hay órbitas caóticas, pues existe un ciclo atractor de orden 3. La existencia de ciclos periódicos atractores implica que el modelo no presenta órbitas caóticas en el intervalo considerado.

En algunos casos el carácter de los ciclos de orden 1 directamente permite afirmar la no caoticidad del modelo. Así, en el sistema modelado por $x_{k+1} = x_k^3 + (3/4)x_k$, los puntos fijos: $\hat{x}_1 = -1/2$; $\hat{x}_2 = 1/2$ y $\hat{x}_3 = 0$ dan ciclos de orden 1, siendo repulsivos los generados por \hat{x}_1 y \hat{x}_2 , mientras que es atractor el generado por \hat{x}_3 . Luego, todas las órbitas dadas por condiciones iniciales $x_0 \in (-1/2; 1/2)$ tienden a $\hat{x}_3 = 0$; mientras que si $x_0 \in (1/2; +\infty)$ su órbita tenderá a $+\infty$, y si $x_0 \in (-\infty; -1/2)$ tenderá a $-\infty$. Las Figs. 10 y 11 exhiben respectivamente los puntos fijos, así como las órbitas correspondientes a las diversas situaciones que muestran la no caoticidad del modelo.

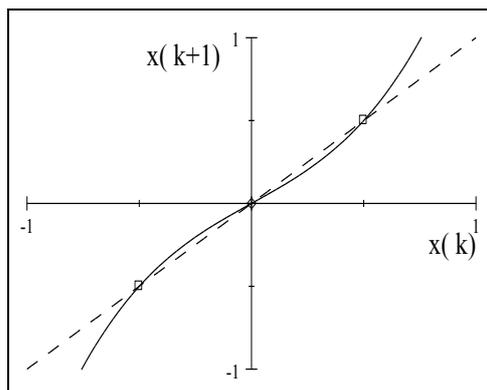


Figura 10. Puntos fijos de $f(x) = x^3 + (3/4)x$.
 $\hat{x}_1 = (-1/2)$, $\hat{x}_2 = (1/2)$, $\hat{x}_3 = 0$.

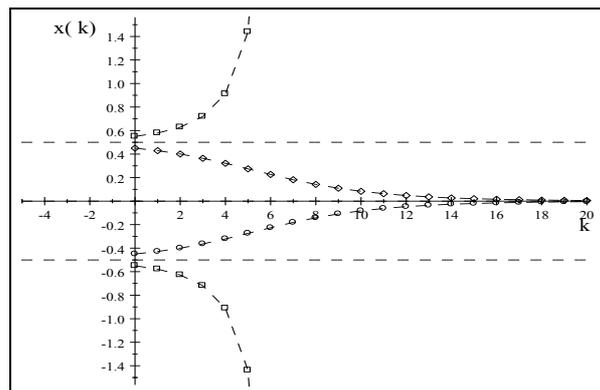


Figura 11: Órbitas de la ecuación en diferencias $x_{k+1} = x_k^3 + (3/4)x_k$

Probar que un modelo es caótico en un intervalo I requiere demostrar que: (i) Los puntos periódicos son densos en I ; (ii) Las órbitas son sensibles a las condiciones iniciales y (iii) Tiene la propiedad de mezcla, es decir, cualesquiera sea la división en subintervalos I_1, I_2, \dots, I_n de I , para cualquier I_j , existe algún $x_0 \in I_j$ tal que su órbita Θ_{x_0} tiene algún punto en cada uno de los subintervalos I_1, I_2, \dots, I_n de I . Esta propiedad por un resultado de M. Vellekoop y R. Berglund, cumple: Si I es un intervalo finito o infinito de los números reales, la ecuación en diferencias $x_{k+1} = f(x_k)$ con f continua, es caótica en el intervalo I si y sólo si tiene la propiedad de mezcla. Esta propiedad no es fácil de probar, de allí que buscamos el ejemplo del párrafo 2, que permitió inferir las características de un modelo que tiene un intervalo de caoticidad, del cual por semejanza con la ecuación logística, queda indirectamente demostrado el comportamiento caótico del modelo en $[-1; 3]$

Referencias bibliográficas

- Blanchard, P., Devaney, R. L. y Hall, G. R. (1999). *Ecuaciones diferenciales*. México: Ed. Thomson,
- Fernández Pérez, C., Vázquez Hernández, F. J. y Vegas Montaner, J. M. (2003). *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos*. España: Ed. Thomson.
- Martín, M. A., Morán, M. y Reyes, M. (1998); *Iniciación al caos. Sistemas dinámicos*. España: Ed. Síntesis.