CONSTRUCCIONES MENTALES PARA EL APRENDIZAJE DEL TEOREMA DE ISOMORFISMO DE GRUPOS

Arturo Mena Lorca, Astrid Morales Soto y Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
arturo.mena@ucv.cl, ammorale@ucv.cl, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. La importancia del teorema del isomorfismo de grupos para el estudiante de pregrado es manifiesta; sin embargo, diversas investigaciones indican que no es comprendido por la mayoría de los aprendices. Utilizamos la teoría APOE y realizamos una *descomposición genética* del teorema, para elaborar una propuesta de enseñanza *ad hoc*. Antes, separamos el teorema en una parte sin estructura algebraica y una segunda que incluye la operación del grupo.
Palabras clave: teoría APOE, grupos, teorema del isomorfismo
Abstract. The importance of the isomorphism theorem for groups for an undergraduate student is manifest; however, several studies indicate that the theorem is not understood by most learners. We use APOS theory and perform a *genetic decomposition* of the theorem, to develop a proposal for *ad hoc* teaching. Before, we separate the theorem in a part without algebraic structure and a second one that includes the operation in the group.
Key words: APOS theory, groups, isomorphism theorem

Introducción

Para un estudiante de álgebra de pregrado, los cocientes de grupos y el Teorema del isomorfismo para grupos, TIG, proveen de aspectos fundamentales de las competencias que precisa.

El TIG afirma que si G, G' son grupos y f: $G \rightarrow G'$ es un homomorfismo de grupos de núcleo $N(f)$ e imagen $\mathrm{Im}(f)$, entonces $G/N(f)$ es isomorfo a $\mathrm{Im}(f)$. Es el primero de una decena de teoremas de homomorfismo, utilizando los cuales puede construir grupos a partir de otros conocidos, identificar otros, adentrarse en su estructura, entender la resolución de ecuaciones por radicales, construir algunos sistemas numéricos, etc.

Lo anterior no obstante, diversas investigaciones, particularmente las realizadas por el grupo RUMEC (*Research in Undergraduate Mathematics Education Community*) fundado por Ed Dubinsky (Brown, De Vries, Dubinsky & Thomas, 1997), indican que el TIG no es comprendido por la mayoría de los estudiantes: ellos no entienden qué es el cociente G/N, ni que su estructura depende de la normalidad del subgrupo N en G, ni pueden definir funciones desde G/N. Así, el TIG y sus aplicaciones quedan fuera de su alcance.

Entrevistas que hemos realizado muestran que la buena definición de la operación en G/N y la de la función definida desde él son ignoradas por el alumno común, quien se apresura a comprobar que la operación en las clases tiene las propiedades de asociativad, etc., o que una función definida en el cociente 'preserva' las operaciones de los grupos.

El teorema, entonces, según las evidencias (de RUMEC, de Nardi, 1996 y las nuestras), permanece remoto al aprendiz, y ello lleva a preguntarse cuál es la utilidad real de mantener este teorema en los currículos de profesores en que se los incluye, y poner una nota de duda acerca del provecho que los estudiantes de licenciatura en Matemáticas pueden sacar de él.

Los requisitos conceptuales del teorema incluyen: conjuntos, cuantificadores existencial y universal, funciones; relaciones de equivalencia (RE), clases de equivalencia, particiones; el teorema que liga RE y particiones, definidas sobre un mismo conjunto; operaciones binarias, grupos, subgrupos, homomorfismos, isomorfismos, subgrupos normales, grupos cocientes. A lo anterior la teoría APOE comienza por agregar la noción general de satisfacer una propiedad, y la noción de axioma. La teoría requiere de explicitar, para cada uno de esos requisitos, en qué *construcción mental* se lo necesita.

Ahora bien, los textos de estudio habituales, al tratar el TIG asumen que el alumno ya ha leído las secciones anteriores del mismo, o que conoce los temas previos del currículo, que eventualmente tratan de esos temas en términos generales. Está documentado, sin embargo, que asumir sin más que los conceptos y resultados tratados previamente estén realmente disponibles para su uso no es una evaluación apropiada de la situación del alumno.

Adicionalmente, en el caso del TIG, se desaprovecha nociones que el alumno podría utilizar para abordar el teorema. En efecto, lo habitual es que la presentación del teorema se dirija a la construcción de las clases de equivalencia aN, (a en G), procure luego reunirlas en el cociente G/N y avance de inmediato a la operación $aNbN= abN$, y no es de extrañar que el alumno, a su vez, se apresure a probar en G/N las propiedades de esa operación sin comprender realmente qué es el objeto G/N.

Al respecto, hemos podido comprobar que el aprendiz posee nociones operativas de particiones y RE que le podrían servir para la (re)construcción del TIG, pero no se le invita a utilizarlas. Nuestra propuesta es separar el TIG en dos partes: la primera sin operaciones, que llamamos Teorema del isomorfismo para conjuntos o TIC, de modo que las clases en el grupo puedan ser percibidas de manera análoga a las que utiliza en la vida diaria. La segunda, ya construidas las clases y los cocientes G/N carentes de estructura, se preocupa de las operaciones en las clases.

Para lo anterior, es imprescindible la siguiente observación. La RE que un subgrupo normal N define en el grupo G es aR_Nb si y solo si $a^{-1}b\in N$; para el caso del TIG, la RE que induce el núcleo $N(f)$ del homomorfismo f en G es $aR_{N(f)}b$: $a^{-1}b\in N(f)$. Ahora bien, $a^{-1}b\in N(f)$ equivale a $f(a^{-1}b)=e_{G'}$, es decir, $f(a^{-1})f(b)=e_{G'}$, o sea, $f(a)^{-1}f(b)=e_{G'}$, equivalentemente, $f(a)=f(b)$. Basta entonces observar que, dados los conjuntos subyacentes (a las estructuras de grupo correspondientes) G, G' y dada

$f:G\rightarrow G'$ una función, podemos definir una RE R_f asociada a f por: $aR_f\,b$: $f(a)=f(b)$. Así, el TIC es: si G, G' son conjuntos y $f:G\rightarrow G'$ una función, entonces G/R_f está en correspondencia biunívoca con $\mathrm{Im}(f)$.

La Teoría APOE y el TIG

Hay consenso en que la enseñanza del álgebra abstracta en pregrado no consigue sus objetivos (Clark, De Vries, Hemenway, St. John, Tolia y Vakil, 1997).

La revisión de la literatura lleva a concluir que quienes han hecho avances mayores y más consistentes en esta área son los miembros del grupo RUMEC, que utilizan la teoría APOE desde la década de 1980.

Los estudios de RUMEC utilizan el lenguaje computacional ISETL (Interactive Set Language), especialmente diseñado para el aprendizaje del Álgebra: el estudiante debe programar en ese lenguaje, y de esa manera va aprendiendo tanto conceptos algebraicos como a trabajar en álgebra.

La breve reseña acerca de APOE que hacemos a continuación se puede encontrar en Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros y Weller (2014).

Dubinsky se basa en la abstracción reflexiva de Piaget para describir la construcción de objetos mentales, y distingue varios tipos de ella o mecanismos: *interiorización, coordinación, encapsulación, generalización, reversión.* Estos originan diferentes construcciones (mentales): *acciones, procesos, objetos, esquemas* (de donde APOE).

Enfrentado a un nuevo concepto matemático, el individuo realiza transformaciones sobre otros construidos previamente para construir este nuevo objeto (Dubinsky et al., 2005).

Si las transformaciones que hace se realizan obedeciendo a estímulos externos, decimos que él posee una *concepción acción* del concepto.

Ahora bien, si el individuo repite y reflexiona sobre una acción, esta puede ser *interiorizada* en un *proceso* mental; esto es, construye una estructura mental que hace el mismo trabajo que la acción externa: ya sea realiza esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, o solo imagina que tiene lugar, sin necesariamente recorrer todos los pasos específicos.

Cuando el individuo piensa en un proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre su totalidad, ha *encapsulado* el proceso y que posee ahora una *concepción objeto* del concepto. Hay casos en que es esencial volver desde un objeto al proceso que lo forma, lo que se realiza *desencapsulando* el objeto.

Un *esquema* es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente del individuo en una estructura cognitiva coherente (Trigueros, 2005). La *coherencia* es una característica fundamental del esquema, y se refiere a la capacidad del individuo para reconocer las relaciones que hay al interior del esquema y establecer si este le permite solucionar una situación matemática particular, y usarlo cuando corresponda.

Para describir la manera en que se construye el conocimiento matemático, APOE diseña una *descomposición genética,* DG (Clark et al, 1997), que describe en detalle los aspectos constructivos de un concepto o de un fragmento de conocimiento matemático, para explicitar un camino (no necesariamente único) factible de su construcción por parte de un individuo, en términos de construcciones y mecanismos mentales, de tal manera que él pueda seguirlo para tener éxito.

RUMEC ha manifestado dificultades en su manera de abordar el problema que nos ocupa. Cuando utiliza el programa ISETL, si el cardinal del grupo es 'grande', la construcción de los conceptos se hace difícil y eventualmente impracticable desde las acciones. Si la *presentación* del grupo es compleja, la construcción de las clases se hace difícil. Los alumnos declaran que algunas actividades de programación les parecieron extremadamente difíciles.

Ahora bien, hemos comprobado que la 'relación' entre las relaciones de equivalencia y las particiones en los conjuntos sobre los cuales están definidas –no necesariamente grupos– es una idea sumamente natural, y la encapsulación de las clases en cuanto conjuntos no pasa necesariamente por un proceso algebraico.

Siguiendo a (Mena, 2011) se podría primero encapsular de un conjunto cociente como el resultado de definir una relación de equivalencia en el conjunto G y estudiar luego el caso de R_N en G.

Metodología

APOE tiene una metodología explícita para investigar, el *ciclo de investigación*: análisis teórico, que comporta una DG inicial propuesta por el investigador; diseño y aplicación de enseñanza, y análisis y verificación de datos, que permite refinar la DG preliminar.

Nuestra DG preliminar comienza por RE y particiones, y el teorema que liga a unas y otras (RE/P); luego pasa por el TIC, y finalmente aborda la estructura algebraica del TIG.

Con el objeto de ampliar nuestra visión sobre el tema, entrevistamos a investigadores en álgebra, quienes manifestaron que en sus clases siempre procedían de lo particular a lo general, reconocieron el TIC (en el cual no habían reparado), pero consideran que transitar del TIC al

TIG es un paso de lo general a lo particular y por tanto desaconsejable –sin embargo, tienden a considerar a las relaciones de equivalencia y las particiones solo como un tema más a estudiar–.

Por nuestra parte, hemos considerado que RE, particiones y el teorema que liga a esos conceptos son 'naturales' para cualquier persona. Hicimos estudios exploratorios con cursos universitarios iniciales, y comprobamos esa naturalidad; aun cuando el estudiante no sepa formalmente lo que es una partición ni una RE, al ser requerido a propósito de esa conceptuación) pasa libremente de unas a otras, sin notar ese tránsito (esto es, puede responder con una partición si se le pregunta acerca de una relación de equivalencia, e inversamente). De tal manera, la DG propuesta para el TIG no necesita de una DG explícita para el teorema RE/P, que estaría disponible en una versión ingenua, no formal.

Encuestamos a alumnos del norte, centro y sur de Chile para determinar quiénes, según nuestra DG, han realizado las construcciones mentales necesarias para hacer la del TIG (la encuesta pregunta acerca de grupos, subgrupos, subgrupos normales, homomorfismos, relaciones de equivalencia, particiones, teorema RE/P). Se entrevistó luego a esos alumnos, de manera de refinar la DG, y se ha encontrado que quienes pueden hacer la (re)construcción del TIG pueden hacer la del TIC, y que usan para ello el teorema RE/P.

Conclusiones

Las entrevistas grabadas en video a profesores con trayectoria en investigación en temas relacionados con el álgebra abstracta han sido del mayor interés en cuanto a la elaboración de la DG. Su experiencia de aula, si bien sigue estrategias particulares de cada cual, tiende a confirmar los datos que hemos venido describiendo: el TIG es de difícil acceso; el concepto de subgrupo normal permanece sin ser entendido; el concepto de grupo cociente no se entiende (uno lo declaró "extraordinariamente difícil"). Ellos se inclinan por aproximaciones "concretas": la noción de isomorfismo primero y un tanto independiente de la de homomorfismo; en ningún caso tratar inicialmente el TIG como corolario del teorema fundamental del homomorfismo (que establece que el cociente G/N y la proyección canónica de G en G/N constituyen un *objeto universal* en la categoría de los grupos), aun en sus versiones más elementales. Es de notar que, en general, la manera de abordar el teorema de estos investigadores difiere de la de los textos habituales de enseñanza en la materia (Tales como Dean, 1967; Dubreil, 1975; Fraleigh, 1973; Herstein, 1999, Hungerford, 1980, Lang, 2005), en cuanto a que prefieren las aproximaciones más concretas al teorema. Reconocen que la forma en que dividimos el teorema es interesante y, para algunos, apropiada, pero no disponen de evidencias al respecto, en el sentido de que no la han utilizado en su práctica de aula.

En cuanto a los alumnos, los datos de las experiencias grupales tanto como las encuestas realizadas confirman nuestra hipótesis de que ellos hacen uso libremente del teorema RE/P, cuyo enunciado ignoran.

En una dirección un tanto más general, hemos podido encontrar evidencia de que la identificación que se suele hacer de una relación con su gráfico, justificable desde un punto de vista formal, no es conveniente desde un punto de vista cognitivo: de hecho, en experimentos en aula, al ser preguntados acerca de una partición hecha por un grupo de voluntarios –compañeros suyos–, los estudiantes responden con relaciones de equivalencia evidentemente 'diferentes' (ocasionalmente, sobre un conjunto dado, la misma partición puede obtenerse al separar hombres y mujeres y personas de pelo corto y pelo largo, e. g.).

Reconocimiento. Los autores han sido financiados parcialmente por el Proyecto FONDECYT 1120688, Chile, *Mental constructions in the learning of the isomorphim theorem for Groups.*

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer

Clark, J., De Vries, D., Hemenway, C., St. John, D., Tolia, G. y Vakil, R. (1997). An Investigation of students' understanding of Abstract Algebra (binary operations, groups and subgroups) and the use of abstract structures to build other structures (through cosets, normality and quotient groups). *Journal of Mathematical Behavior*, *16(3)*, 181-186.

Dean, R. A. (1967). *Elements of Abstract Algebra*. New York: John Wiley & Sons.

Dubreil, P. (1975). *Teoría de Grupos. Curso de iniciación*. Barcelona: Reverté.

Fraleigh, J. B. (1973). *A first course in Abstract Algebra*. Reading, Massachussets: Addison Wesley. (Seventh ed., 2003, with V. Katz; Boston: Pearson Education).

Herstein, I. N. (1999). *Abstract Algebra.* New York: John Wiley and Sons.

Hungerford, T. W. (1980). *Algebra*. New York: Springer-Verlag.

Lang, S. (2005). *Algebra*. New York: Addison Wesley.

Mena, A. (2011). *Estudio epistemológico del teorema del isomorfismo de grupos*. Tesis doctoral. Centro de Investigación en Ciencia Avanzada y Tecnología Aplicada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Nardi, E. (1996). *The novice mathematician's encounter with mathematical abstraction: tensions in concept-image construction and formalisation*. Thesis, University of Oxford. http://www.uea.ac.uk/~m011/thesis. Retrieved March 11th, 2014

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17 (1), 5-31