

LA FOTOGRAFÍA Y EL VIDEO DIGITAL COMO HERRAMIENTA PARA APRENDER EL OBJETO PARÁBOLA

Jonathan González Ortega, María Inés Ortega Arcega, David Zamora Caloca

Universidad Autónoma de Nayarit. (México)

ronaldinho_biosap@hotmail.com, maijua9@hotmail.com, dzcaloca@gmail.com

RESUMEN: El artículo es resultado de una tesis de la Licenciatura en Matemáticas, en la que participaron estudiantes de la carrera de Ingeniera Química de la Universidad Autónoma de Nayarit y se centra en la modelación de la situación problema "Lanzamiento de un chorro de agua" para el aprendizaje del objeto matemático Parábola. Se planteó que mediante la manipulación de fotografías digitales, el análisis de las distintas representaciones semióticas que el software Tracker proporciona (Tabla de datos, gráficas, la función ajustada) y la manipulación de los ejes coordenados en distintas posiciones, el alumno logrará identificar los distintos parámetros que describen al objeto Parábola. Una vez que se han revisado los instrumentos de valoración, se concluye que el estudio fue satisfactorio, porque el alumno aprendió a relacionar los parámetros de la parábola con una situación problema de la vida cotidiana y con la ecuación de segundo grado, además de propiciar motivación e interés por el aprendizaje de las matemáticas, ya sea individual o colaborativamente.

Palabras clave: modelación, fotografía, tracker, semiótica, parábola

ABSTRACT: The article shows the outcomes of a thesis in option of a Degree in Mathematics, in which Chemical Engineering students of the Autonomous University of Nayarit took part. It focuses on modeling the problem situation "Launching a water jet" for the learning of the mathematical object Parabola. It was stated that the student will be able to identify the different parameters that describe the Parabola object through the manipulation of digital photographs, the analysis of the different semiotic representations provided by the Tracker software (Data table, graphs, adjusted function), and the manipulation of the coordinated axes in different positions. Once the assessment instruments have been checked, the study was considered satisfactory, because the student learned to relate the parameters of the parabola with a problem situation of daily life, and with the second degree equation. In addition, it encourages motivation and interest in learning mathematics, either individually or collaboratively.

Key words: Modeling, Photography, Tracker, Semiotics, Parabola

■ Introducción

El estudio se centra sobre los elementos que intervienen en la modelación matemática (Arrieta, 2003; Arrieta y Díaz, 2015; Biembengut, 2011; Pantoja, Ulloa, Nesterova, 2013; Pantoja, Guerrero, Uloa, Nesterova, 2016), en el afán de incidir sobre la relación existente, que se pretende sea una realidad, entre las matemáticas y la vida cotidiana, contexto en el que desarrollan sus actividades, y no sólo en el aula, profesor y alumnos. El caso que se reporta es resultado de la tesis de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nayarit (UAN) intitulada “La fotografía digital y el software Tracker como mediador para propiciar el aprendizaje significativo del objeto matemático Parábola”, estudio realizado con alumnos de primer semestre de la carrera de Ingeniería Química del Área de Ciencias Básicas e Ingeniería (ACBI).

Se parte de una situación problema de la vida cotidiana, como es el lanzamiento natural de un chorro de agua desde un recipiente cerrado y con orificio en la parte superior en tres diferentes posiciones, que se fotografía para su análisis con el software Tracker. La diferencia entre lo planteado tradicionalmente con la propuesta, es que se mantiene fija la trayectoria del chorro de agua (figura 1) y es el plano cartesiano el que se desplaza vertical y horizontalmente, además de girarlo en ángulos 90° , 180° y 270° grados, con el propósito investigar el efecto que produce sobre el aprendizaje del alumno, la modelación matemática de situaciones cotidianas con el Tracker y el Geogebra e indagar si los alumnos se motivan para aprender matemáticas.

Las actividades se integraron en un cuaderno de trabajo, que se respondió en trabajo individual y colaborativo en el centro de cómputo, bajo la supervisión del tesista, director y codirector de tesis. Se incluyó en el cuaderno de trabajo, para fortalecer los conocimientos previos, una serie de actividades con ayuda del GeoGebra (Tabla 1) como recordatorio de las relaciones existentes entre los coeficientes de la ecuación de segundo grado con los parámetros de parábola: coordenadas de vértice y foco, ecuación de la directriz y el lado recto.

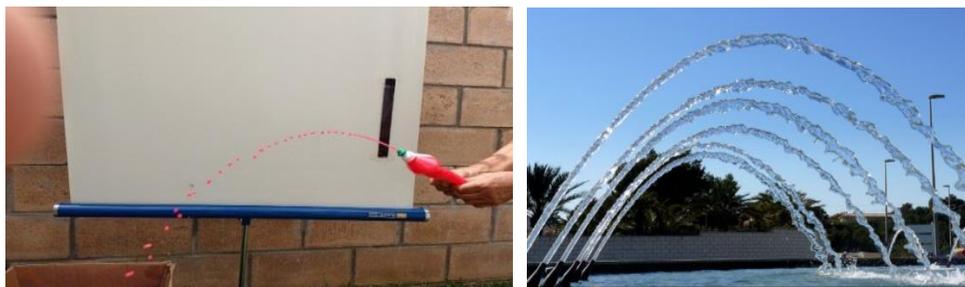
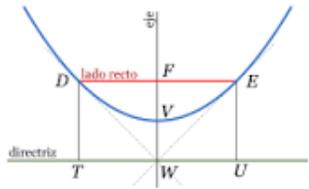


Figura 1. Fotografías de trayectorias de chorros de agua

Tabla 1. Ecuaciones de la parábola y sus parámetros

 <p>Ecuación: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ Ecuación: $y = ax^2 + bx + c$</p>	<p>Coordenadas del vértice: $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ Coordenadas del foco: $F\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$ Ecuación del eje principal: $x = \frac{-b}{2a}$ Ecuación de la directriz: $y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$</p>
--	--

■ **Teoría de las representaciones semióticas de Raymond Duval**

La perspectiva teórica que sustentó este trabajo es la teoría de registros de representación semiótica de Duval (2004), porque bajo este marco de referencia se le da sentido a la importancia que tiene la comprensión de los acercamientos verbal, analítico, numérico, visual y gráfico, a los elementos resultantes del análisis de las fotografías digitales por los alumnos con el Tracker. Se analizaron los datos numéricos, las gráficas y la expresión analítica del polinomio de segundo grado (figura 2), en relación de la trayectoria en distintas posiciones del chorro en las que se identifique a la parábola.

Duval (2004) ubica a la semiosis como una parte fundamental de la actividad cognitiva y plantea tres tipos de tareas para propiciar la construcción de un concepto matemático: la identificación de registros de representación semiótica, el desarrollo de tratamientos en el mismo registro y la generación de conversiones entre dos registros. Durante el desarrollo de las actividades planeadas y ejecutadas, se reconocieron cinco registros de representación semiótica: visual con la fotografía, gráfico con las tres representaciones que muestra Tracker, numérico con las tablas que se generan al marcar los puntos sobre la trayectoria, verbal con la discusión colaborativa de los alumnos y analítico con el ajuste del polinomio de segundo grado; cuatro tratamientos, por ejemplo en el registro gráfico, cuando se relaciona la gráfica del chorro de agua en una posición y luego cuando se desplazan los ejes o se rotan; se detectaron al menos seis conversiones, dos de ellas se manifestaron cuando a partir del video (registro visual) se obtiene la tabla de datos (registro numérico) y la ecuación (registro analítico) o bien las tres gráficas.

Posteriormente, se le pide vincular el registro visual (fotografía) de la posición del chorro de agua, con los elementos mostrados en pantalla por el programa Tracker, una gráfica, una tabla de datos y el polinomio de segundo grado asociada a la trayectoria del chorro de agua, en los que se logran

reconocer al menos seis conversiones entre los registros: visual-gráfico, visual-numérico, visual-analítico, gráfico-analítico, numérico-analítico y verbal-analítico (figura 2).

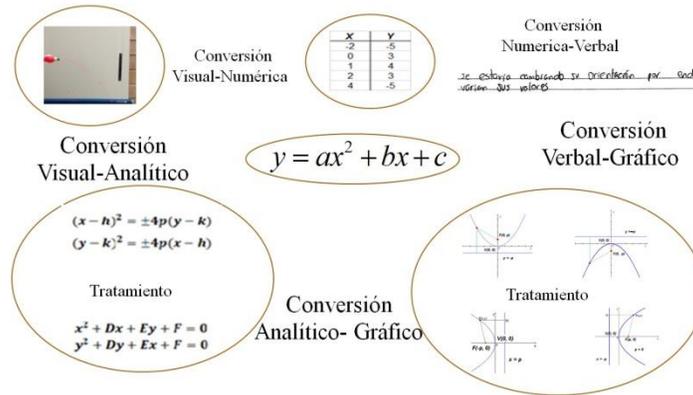


Figura 2. Registros de representación semiótica para el chorro de agua

■ Modelación matemática

Ezquerria, Iturrioz y Díaz (2011) menciona que el uso de la modelación matemática en situaciones reales, así como el trabajo con actividades abiertas, presentan numerosas ventajas sobre las prácticas y actividades que habitualmente se plantean al alumnado, además de mejorar las capacidades en su posterior desempeño de su vida laboral. En Pantoja, *et al* (2013) y Pantoja, *et al* (2016) se plantea a los estudiantes resolver problemas y trabajar colaborativamente en la modelación de situaciones en el contexto de la vida cotidiana y una vez analizados los reportes de los estudiantes, se considera que lograron el objetivo propuesto, que fue diseñar la fase experimental para grabar el video del llenado de recipientes y del movimiento de un ciclista y un corredor; identificaron las magnitudes involucradas y establecieron las relaciones para determinar el polinomio que mejor se ajusta a los datos tomados en tiempo real.

Así pues, con la modelación matemática se ubica al estudiante ante una situación problema, no inmediata de resolver, que la problematice y con el trabajo colaborativo, la discusión, el razonamiento y sus conocimientos matemáticos, transforme dicha situación. La modelación produce un resultado - un modelo - que es una descripción o una representación de la situación, elaborado a partir de las disciplinas matemáticas, en relación con la experiencia de la persona (Arrieta y Díaz, 2015). La elaboración de un modelo matemático requiere, por parte del modelador, conocimientos tanto matemáticos como no matemáticos, además de una buena dosis de intuición y creatividad para interpretar el contexto, percibir cuáles son las variables involucradas, para comprender la forma en cómo se relacionan con las gráficas, tablas y datos, con la situación problema (Figura 3), aspectos que

se buscó desarrollar los alumnos con la puesta en escena de la propuesta y que una vez analizados los instrumentos de valoración, resulta positivo lo logrado por los estudiantes.

■ Resultados

El tipo de investigación fue explorativa y cualitativa y se diseñaron actividades que se integraron en un cuaderno de trabajo y al final se aplicó una encuesta de opinión y se entrevistó a cinco estudiantes, con la finalidad de conocer su opinión sobre la propuesta.

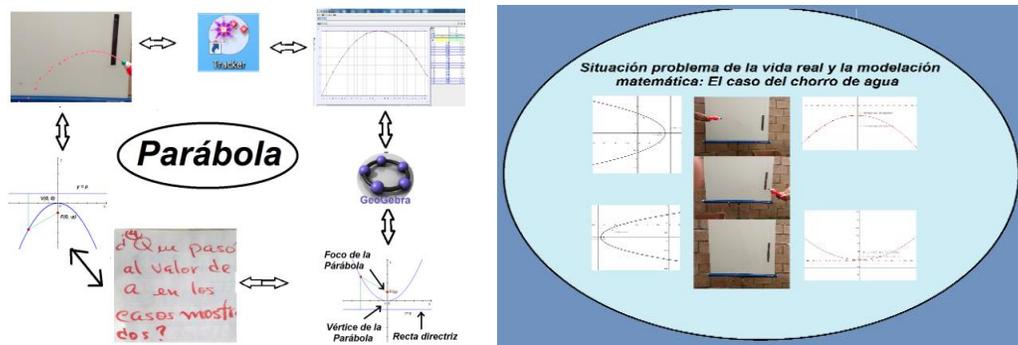


Figura 3. Representaciones semióticas del chorro de agua

El grupo de participantes se organizó en equipos de tres integrantes para el trabajo colaborativo, quienes analizaron las fotografías con el Tracker y obtuvieron una gráfica, la tabla de las coordenadas de los puntos de la trayectoria y la ecuación de la parábola, para al final discutir el modelo matemático en función de la situación problema. También se solicitó a los estudiantes tomar fotografías de situaciones problema donde se identifiquen líneas curvas que asemejen la parábola con la finalidad de hacer extensiva la propuesta didáctica a otras situaciones diferentes a la del chorro de agua.

En sesión grupal se seleccionó la fotografía digital de la parábola (figura 1), sobre la que se trabajó con dos propósitos: el primero es el manejo del Tracker y GeoGebra y dos, para desarrollar un ejemplo completo. Al final de la fase experimental se presentaron los reportes generados por cada equipo de trabajo, y algo relevante que comentar, es que la alumna que aparece en la figura 4, representa con su cuerpo el bosquejo de la parábola.

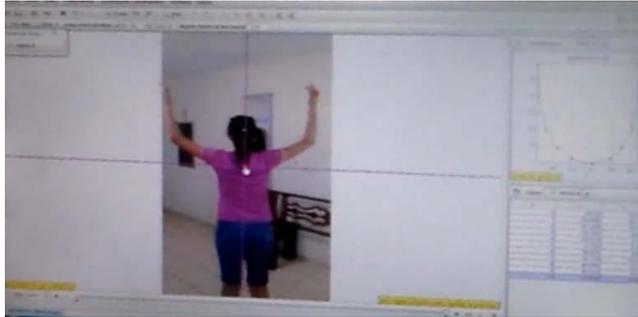


Figura 4. Expresión de una alumna al modelar la parábola

El cuaderno de trabajo.

La versión final del cuaderno de trabajo se integró de tres secciones. De la revisión de la primera sección del cuaderno de trabajo, se evidencia que los alumnos tienen un nivel aceptable de manipulación algebraica, logran identificar los parámetros y los señalan sobre la gráfica que se les pide trazar en el cuaderno (Figura 5a), aunque con sus acepciones, porque no logran identificar algunos parámetros (Figura 5b), por ejemplo en el reporte del alumno 2 actividad 1 inciso b, su desarrollo algebraico es correcto, pero en su grafica no logra colocar los parámetros de manera correcta.

Otro aspecto que se trató en esta sección fue que el alumno visualizara el efecto de los coeficientes a, b y c del polinomio $y = ax^2 + bx + c$, con la ayuda de los deslizadores de GeoGebra y no tuvieron problemas de interpretación, pero se nota un pobre dominio en la redacción de sus observaciones, pero en general logran identificar los diferentes desplazamientos de la parábola. No se manifiesta algún problema extremo sobre los conocimientos previos como para plantear actividades remediales sobre el manejo algebraico de la parábola.

<p>c. $(x+3)^2 = 2(y+1)$ $x^2 + 6x + 9 = 2y + 2$ $x^2 + 6x + 7 = 2y$ $y = \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{7}{2}$ $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2}$ $a = \frac{1}{2}, b = 3, c = \frac{7}{2}$</p> <hr/> <p>$y =$ $V(-3, 0.5)$ $F(-3, -1)$ Directriz: -1.5 Ecuación del eje principal -3</p>	<p>Ubica la gráfica en este espacio</p>	<p>d. $(x-3)^2 = -10(y+4)$ $x^2 - 6x + 9 = -10y - 40$ $x^2 - 6x + 9 + 40 = -10y$ $x^2 - 6x + 49 = -10y$ $-y = \frac{x^2 - 6x + 49}{10}$ $y = \frac{1}{10}x^2 - \frac{6}{10}x - \frac{49}{10}$</p> <hr/> <p>$y =$ $V(3, -4)$ $F(3, -6.5)$ Directriz: -1.5 Ecuación del eje principal 3</p> <p>Un error de omisión de signo, pero continúa su proceso sin problemas y concluye su ejercicio pero sin graficar la parábola</p>
a		b

Figura 5. Extracto de la respondido por los alumnos en el cuaderno de trabajo

En la figura 6, se detecta que la redacción del reporte del alumno no es clara, pero al hacer un análisis detallado de lo escrito señala de manera correcta lo solicitado en la actividad, por ejemplo “respecto al movimiento de c, la parábola toma valores de y diferentes, si va a la izquierda es - y la derecha + y”, se interpretó como que el valor de c hace el efecto desplazar la gráfica en el sentido negativo y positivo del eje en cuestión.

	Explica el efecto que hace sobre la ecuación los cambios de valores de los parámetros a, b y c.
$y^2 = x + by$	Al cambiarse el parámetro los sentidos se ven afectados.
$x^2 + bx = 4y + c$	Si se mueven los parámetros de b, la parábola se mueve hacia arriba y hacia abajo, al mover el parámetro de c la parábola se mueve de izquierda a derecha.
$x^2 = -3y + b$	Los parámetros a y c no les pasa nada, el único afectado es el sentido cuando cambia el parámetro de b.

Figura 6. Redacción no clara del estudiante con ideas correctas.

La actividad 2, página 13, de la segunda sección, consistió en que los alumnos reconocieran, en la fotografía digital el chorro de agua, la parábola y sus parámetros, que de acuerdo a lo revisado en el cuaderno de trabajo (figura 7) lo hacen satisfactoriamente pues logran identificar y graficar la parábola asociada al chorro de agua. Para la determinación de la ecuación resultante se empleó Tracker y una de las ecuaciones que encontraron fue $y = -.005994x^2 + .02999x + 202.6$.

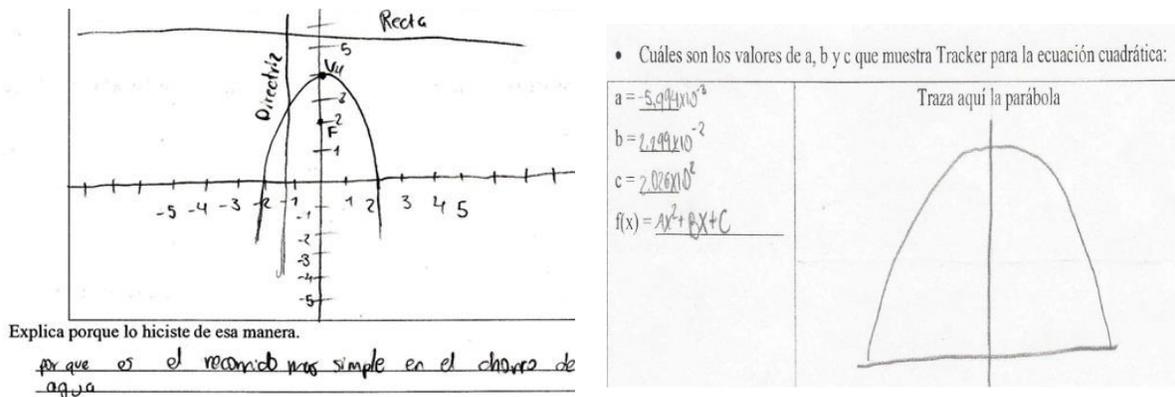


Figura 7. Representación del chorro de agua como parábola.

Análisis de la encuesta de opinión.

Una vez que se valoraron las respuestas, se comenta que no hay diferencia alguna en la opinión de los alumnos por esta alternativa didáctica, dado que todos coinciden que están de acuerdo y completamente de acuerdo con lo organizado para el curso.

Análisis de la entrevista realizada a los estudiantes

Se entrevistó a cinco estudiantes sobre aspectos cualitativos (Pantoja, Ortega, 2016) de la propuesta, con un guion integrado por ocho preguntas, de las cuales, siete fueron orientadas a conocer la opinión sobre esta alternativa didáctica para aprender, su experiencia anterior con este tipo de propuestas y el gusto y el efecto por la inclusión de las TIC en el aula; sólo una pregunta se orientó a la identificación de la trayectoria del chorro de agua con la ecuación que la describe. A continuación se presentan algunas respuestas de los estudiantes:

Profesor: ¿Cómo te pareció esta forma de aprender matemáticas?

A1: Me pareció padre porque siempre nos daban la ecuación y hacíamos la gráfica, sabíamos que era una parábola, pero no sabíamos que la podíamos aplicar a la vida real. Relacionábamos cosas que veíamos todos los días con cuestiones matemáticas.

Profesor: ¿Cómo ha sido la enseñanza de las matemáticas en tu vida escolar?

A4: Ha sido de una manera yo digo interesante, porque los maestros que he tenido de matemáticas, son buenos maestros, tienen su grado en maestría y doctorado, únicamente que entran mucho en la teoría, conceptualizan mucho, es poco atractivo la forma de aprender.

Profesor: En tu vida de estudiante ¿te habías enfrentado a este tipo de planteamientos?, es decir ¿relacionar la vida cotidiana con la matemática? ¿me puedes dar tu opinión respecto a la experiencia que acabas de vivir?

A2: Nunca me ha tocado, que la vida cotidiana y matemática, siempre fue a papel y a lápiz, a mí en lo personal me gusta más a papel y lápiz, yo siento que aprendo mejor, no lo puedo relacionar con la vida cotidiana.

Profesor: ¿Qué te pareció el proyecto? Te gustó? ¿no te gustó?, ¿qué hubieras modificado?

A1: Me gustó, lo único que hubiera modificado era que hubiera más sesiones de 45 min cada una y menos actividades por sesión.

La entrevista refleja la opinión de los alumnos que han desarrollado las distintas actividades durante la fase experimental, y se muestra una actitud positiva, un gusto por haber sido partícipes activos en esta propuesta. Otra cosa que opinaron los alumnos fue que el tiempo del taller fue muy reducido. Esta y otras observaciones se tomarán en cuenta para una réplica del estudio.

■ Conclusiones

De la revisión de los cuadernos de trabajo, se evidencia que los alumnos tienen un nivel aceptable de manipulación algebraica, logran identificar los parámetros y los señalan sobre la gráfica que se les pide trazar en el cuaderno, aunque con sus acepciones, porque algunos no logran identificar los parámetros.

Respecto de la modelación del chorro de agua los alumnos logran determinar la ecuación, identificar sus parámetros y ubicarlos en la gráfica. Cuando se desplazaron los ejes coordenados, lograron relacionar el movimiento con los coeficientes de la ecuación cuadrática.

Incluir *software* especializado fue una buena opción, porque el Tracker y GeoGebra les ayudó a visualizar la fotografía del chorro de agua con la parábola: su gráfica, su ecuación y sus parámetros.

De la encuesta, se considera que estadísticamente este instrumento no se puede considerar de validez para emitir un juicio que permita afirmar o negar los resultados del curso. Se sugiere modificarlo si se pretende replicar el estudio.

Donde se reflejó una falta de comprensión, fue en el momento de la rotación de los ejes coordenados y el efecto sobre los coeficientes de la ecuación de segundo grado, y una de las causas fue que al cambiar el ángulo de giro en Tracker, no se visualiza explícitamente la rotación (al pasar el ratón por encima del eje x cambia su forma) y pareciera que los ejes están donde mismo pues no se manifiesta ninguna acción, pero al ajustar el polinomio, difiere del que se calculó antes de la rotación.

■ Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN, México. Recuperado el 9 de mayo de 2017 de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/arrieta_2003.pdf.

Arrieta, J., y Díaz, M. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *RELIME*, 18(1), 19-48. DOI: 10.12802/relime.13.1811.

Biembengut, M. (2011). Concepções e Tendências de Modelagem Matemática na Educação Brasileira. En *Acta Electrónica de la XIII Conferenciad Interamericana de Educación Matemática*. Recuperado

el 9 de mayo de 2017 de <http://www.revista.ufpe.br/topicoseducacionais/index.php/topicoseducacionais/article/viewFile/11/9>.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. ISBN: 958-670-329-0.

Ezquerria, Á., Iturrioz, I., Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias* Universidad de Cádiz. 9(2), 252-264. APAC-Eureka. Recuperado el 9 de mayo de 2017 de <http://rodin.uca.es/xmlui/bitstream/handle/10498/14733/6-165-Ezquerria.pdf?sequence=6&isAllowed=y>. ISSN: 1697-011X. DOI: 10498/14733.

Pantoja, R. Guerrero, L., Ulloa, R. Nesterova, E. (2016). Modeling in problem situations of daily life. *Journal of Education and Human Development*, 5(1), 62-76. Published by American Research Institute. Recuperado el 23 de Mayo de 2016 de <http://jehdnet.com/>. ISSN: 2334-2978 (Electronic Version). DOI: 10.15640/jehd.v5n1a1. Recuperado el 9 de mayo de 2017 de <http://jehdnet.com/vol-5-no-1-march-2016-abstract-7-jehd>.

Pantoja, R. y Ortega, M. (2016). La entrevista clínica: opción para indagar el aprendizaje de límites y continuidad. *CPU-e. Revista de Investigación Educativa* 22. Instituto de Investigaciones en Educación. Universidad Veracruzana: Xalapa, Veracruz. ISSN 1870-5308. Recuperado el 9 de mayo de 2017 de http://revistas.uv.mx/index.php/cpue/article/view/1949/html_48.

Pantoja, R., Ulloa, R., Nesterova, E. (2013). La modelación Matemática en situaciones cotidianas con los software AVIMECA y MATHCAD. *Revista Virtual Góndola, Revista de Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, 8(1), 8-22. ISSN 2145-4981. Recuperado el 9 de mayo de 2017 de <http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/GDLA/article/view/5020>