ALGUNOS CONFLICTOS SEMIÓTICOS IDENTIFICADOS EN LA NOCIÓN DE LÍMITE

Wilson Gordillo, Daniela Araya

Universidad Distrital (Colombia), Universidad San Sebastián (Chile)

wgordillot@udistrital.edu.co, daniela.araya@uss.cl

RESUMEN: En este trabajo se analiza las respuestas a tareas propuestas sobre la noción de límite de estudiantes de pedagogía de educación media en matemática que cursan la asignatura cálculo diferencial. Por medio de las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS), se realiza un análisis de las respuestas en relación a la respuesta institucional, lo que permitió proponer categorías cognitivas comunes para detectar algunos conflictos semióticos en la introducción de la noción de límite.

Palabras clave: límite, configuración ontosemiótica, conflicto semiótico

ABSTRACT: In this paper, we analyze the answers to tasks assigned to Education students majoring in mathematics for high school, who are doing the subject differential calculus, about the notion of limit By means of the Onto-Semiotic Approach theoretical tools, we analyzed the answers in relation to the institutional response, which allowed proposing common cognitive categories to detect some semiotic conflicts in the introduction of the notion of limit.

Key words: Limit, onto- semiotic configuration, semiotic conflict

Introducción

El cálculo infinitesimal ha sido una de las invenciones más trascendentales en la historia de las matemáticas, gracias a éste se pudieron resolver una gran cantidad de problemas asociados a la mecánica, economía, biología, geometría, etc. siendo éste el único medio para resolver dichos problemas por más de dos siglos. Por tal razón, el estudio del cálculo infinitesimal es fundamental y trascendental para la formación de ingenieros, biólogos, físicos, químicos, economistas, arquitectos, profesores de matemática, etc.

La base del cálculo infinitesimal comienza con la noción de límite, este concepto fundamental es el soporte para el estudio de otros conceptos como lo son: la continuidad, la derivada, la integral y las series, entre otros. Varios investigadores enmarcados en la didáctica del cálculo, han indagado sobre las dificultades asociadas a esta noción y han realizado propuestas didácticas para mejorar el aprendizaje de este objeto matemático. Por ejemplo, Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas (2006) señalan que “la complejidad del aprendizaje de la noción de límite en la enseñanza se basa principalmente en dos aspectos fundamentales, la primera está relacionada con la dificultad del propio concepto y la segunda está relacionada con el tratamiento del concepto” (p. 194). Por otra parte, Cornu (1983) investiga las concepciones, los obstáculos epistemológicos y la dificultad que existe entre la transición de una aproximación cualitativa a la formal, de la misma manera Sierpinska (1985) propone una serie de obstáculos epistemológicos que presenta la noción de limite, basándose en la génesis histórica de éste concepto. Artigue (1995), enfatiza sus investigaciones en la complejidad del concepto de límite, el cual tiene otras nociones matemáticas involucradas de difícil comprensión como lo son: la función y el número real. Por otra parte, Blázquez y Ortega (2001) establecen la necesidad de utilizar distintos registros de representación tales como el algebraico, numérico, gráfico y verbal para mejorar la comprensión del concepto de límite, el cual está basado en la teoría de representaciones semióticas propuesta por Duval (1995). Por su parte Fernández (2000) señala que “en la enseñanza del tema límite de funciones de una variable real en forma tradicional, los estudiantes tienen dificultades en la identificación del concepto y en la visualización del mismo” (p. 171). Todas estas investigaciones sustentan el hecho de indagar nuevamente en la enseñanza aprendizaje de la noción de límite, destacando el hecho, de que las investigaciones propuestas no exploran las dificultades de la noción de límite analizada con las herramientas teóricas dadas por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento (Godino, 2002). Por tal razón, el propósito de nuestra investigación es iniciar este análisis con la identificación de conflictos semióticos que presentan los estudiantes de un curso de cálculo diferencial cuando se les pide resolver tareas que introducen la noción de límite. Para cumplir con este propósito, se diseña un instrumento que permite analizar las respuestas a diferentes preguntas que involucran dicha noción. El trabajo se realiza con estudiantes de la carrera de pedagogía en matemática, en donde cada respuesta dada por ellos es analizada y comparada con las respuestas dadas por el profesor experto al mismo cuestionario; esta comparación entre las respuestas de los estudiantes y el profesor (institución), va a reflejar las diferentes disparidades que se presentan en el aprendizaje de esta noción, estas diferencias permitirán identificar algunos conflictos semióticos en la noción (Godino, Batanero & Font, 2007).

Marco teórico

En este trabajo utilizamos la noción de configuración ontosemiótica (Pino-Fan & Font, 2015), proporcionada por el marco teórico conocido como *enfoque ontosemiótico* (EOS). Esta configuración puede ser de carácter epistémica o cognitiva, según se refiera a objetos y procesos matemáticos institucionales o personales, respectivamente. Se ha utilizado porque permite describir y caracterizar de manera sistemática los objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades y argumentos) que intervienen y emergen de la práctica matemática (ver Figura 1), además, permite realizar detalladamente el análisis de los contenidos que se movilizan en las prácticas necesarias para resolver la tarea. La herramienta configuración cognitiva ayuda caracterizar las soluciones plausibles y de esta forma permite identificar posibles conflictos semióticos definidos como "disparidad o diferencia de interpretación entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)." (Godino, Batanero & Font, 2007, p. 133).

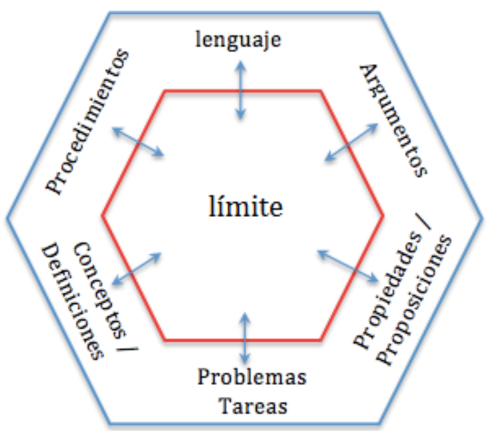


Figura 1. Configuración Semiótica de la noción de límite

Metodología

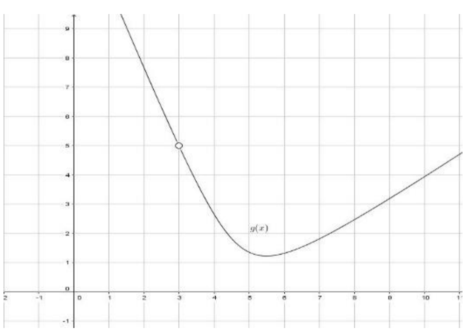
Inicialmente se diseña varios tipos de tareas en torno a la noción limite, las respuestas institucionales a las tareas dadas por el profesor experto, fueron analizadas con la herramienta configuración ontosemiótica epistémica, esta herrameinta propuesta por el EOS permite identificar los objetos matemáticos primarios. Al mismo tiempo permite dar validez de contenido de la tarea, luego de la validez de cada una de las preguntas, se aplica el cuestionario a 17 estudiantes de pedagogía media en matemáticas que conforman el curso cálculo diferencial. Cabe destacar, que el instrumento fue aplicado al finalizar el estudio de la noción de límite, el cual abarcó un mes con dos sesiones semanales de 120 minutos cada una. Las respuestas entregadas por los estudiantes se analizan con la herramienta configuración ontosemiótica, las coincidencias en el desglose de los objetos matematicos primarios identificados en las respuestas son agrupadas para configurar coginitivamente al grupo de estudiantes, estas configuraciones se contrastan con las respuestas institucionales para encontrar coincidencias o disparidades con el fin de identificar conflictos semióticos en la noción de límite.

Tareas propuestas

El cuestionario propuesto consta de 5 tareas, cada una de ellas aborda la noción de límite, partiendo del significado (personal) de limite hasta el uso de la definición de limite atribuida a Weierstrass.

Un ejemplo de respuesta institucional se presenta en la tabla 1, la cual corresponde a la tarea 3 del cuestionario.

Tabla 1. Tarea 3 y respuesta institucional

Tarea 3	Respuesta Institucional
Considere la función g, tal que $g\colon \mathbb{R}-\{3\} \to \mathbb{R}-\{5\}$ y tenga la siguiente gráfica.  ¿Existe $\delta > 0$ tal que si $\lvert x-3\rvert < \delta$ entonces $\lvert g(x)-5\rvert < 0{,}000004$? Justifique su respuesta.	Según la gráfica de g se tiene que existen los límites laterales de g en el punto $x = 3$, $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = 5 \quad y \quad \lim\limits_{x\to 3^+} g(x) = 5.$ Por tanto, existe el límite en $x = 3$, $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 5$ que es equivalente a afirmar $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ con $\delta\,(\varepsilon, 3)$ tal que si $\lvert x-3\rvert < \delta \Rightarrow \lvert g(x)-5\rvert < \varepsilon$. En particular para $\varepsilon = 0{,}000004$ existe $\delta > 0$ tal que cumple con la condición solicitada.

Dada la respuesta institucional se hace un análisis ontosemiotico de las tareas, como el propuesto por Gordillo y Pino-Fan (2015), para reconocer los objetos matemáticos primarios involucrados en la tarea y la respuesta dada por la institución. A continuación, se muestran algunos de los objetos identificados en la pregunta.

- Elementos lingüísticos: símbolos, notaciones y expresiones algebraicas que denotan la noción de límite.
- Situaciones/Problemas: en este caso, corresponde a las tareas propuestas.
- Conceptos/Definiciones: sería la descripción de límites, mediante símbolos y/o expresiones verbales.
- Proposiciones/Propiedades: Propiedades dadas por las desigualdades en números reales.
- Procedimientos: Solución algebraicas de desigualdades.
- Argumentos: Los argumentos se desprenden de la gráfica de la función g y la aplicación del teorema de existencia de límite..

Para la respuesta institucional:

- Elementos lingüísticos: Están dados por elementos verbales y algebraicos.
- Conceptos/Definiciones: Definición de límite propuesta por Weierstrass, es decir;

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ con\ \delta\,(\varepsilon,\ 3)\ \ tal\ que\ si\ \ |x-3| < \delta\ \Rightarrow\ |g(x)-5| < \varepsilon.$$

- Proposiciones/Propiedades: Teorema de existencia de límites.
- Procedimientos: Evaluación de límites laterales, solución de desigualdades
- Argumentos: Los argumentos se desprenden de la gráfica de la función g y la aplicación del teorema de existencia de límite.

Análisis de las respuestas

Para el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes, se hace el desglose de los objetos matemáticos primarios que emergen de cada estudiante, cada respuesta es comparada con el fin de identificar elementos comunes y de esta forma caracterizar cognitivamente las respuestas dadas.

En la Figura 2 se presenta un ejemplo de respuestas dadas por los dos estudiantes (E1 y E2).

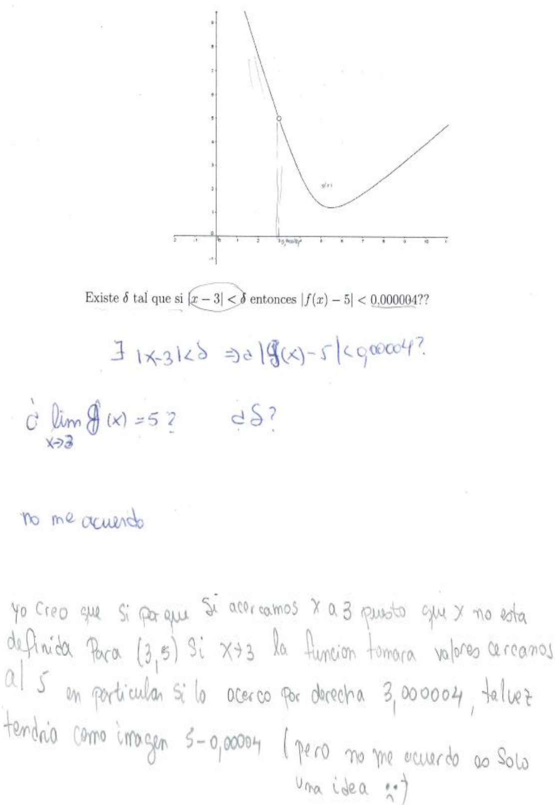
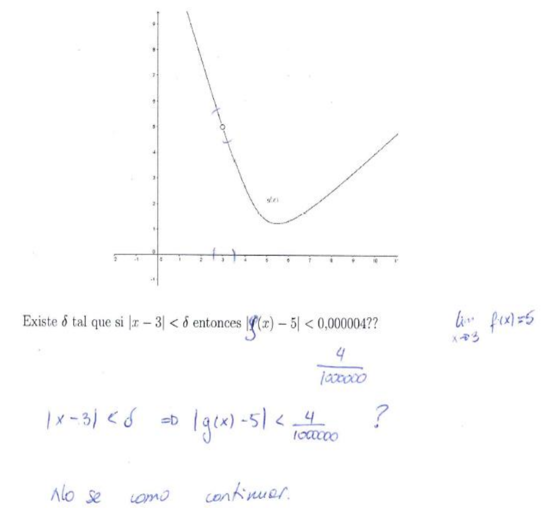
E1	E2
	 No justifica.

Figura 2. Respuestas de los estudiantes E1 y E2

Para cada una de las respuestas entregadas por el estudiante (E1), se identifican elementos lingüísticos verbales y algebraicos a través de los cuales aborda los conceptos/definiciones de límite. El uso de la gráfica es primordial al señalar en la curva la posible existencia del límite en el punto dado. Las proposiciones/propiedades que utiliza están dadas por el teorema de existencia de límite, el cual es expresada de forma verbal. Sus argumentos están dados al usar verbalmente la demostración solicitada. Por último, no se identifica en la respuesta de este estudiante algún tipo de procedimiento algorítmico. Con respecto al estudiante E2, se puede inferir que los conceptos/definiciones de límite se identifican de manera gráfica, dado que identifica los intervalos y “raya” la gráfica de la función. Las proposiciones/propiedades utilizadas es el teorema de existencia de límite, que es expresada mediante el análisis de la gráfica de la función y por medio de ésta afirma la existencia del límite. Sin embargo, la respuesta no muestra argumentos que justifique sus procedimientos.

Conclusiones

El comparar los objetos matemáticos primarios de las respuestas entregadas por los estudiantes, con el desglose de los objetos matemáticos primarios de la respuesta institucional, se evidencia disparidad o diferencia entre cada uno de estos elementos, esta disparidad lleva a inferir un posible conflicto semiótico (Godino, Batanero & Font, 2007), entre la institución y los estudiantes, esto conlleva a que la noción de límite pueda estar mal comprendida por los estudiantes, a pesar que se identifica e interpreta correctamente el límite de la función propuesto en el gráfico propuesto. Sin embargo, esta concepción carece de significado dado que no pueden interpretar con la definición propuesta por Weierstrass y de esta forma resolver la tarea solicitada. Este hecho se puede deber a que la enseñanza de esta noción por parte de la institución, se basa principalmente en el cálculo de límites de forma algebraica la cual está desprovista de significado. (Fernández, 2000).

Por otra parte, se validan las herramientas propuestas por el EOS las cuales se prevén como potentes para el análisis de contenido de tareas y respuestas, este análisis ontosemiótico (Pino-Fan, Godino & Font, 2011) permitió el desglose de objetos matemáticos primarios, que con características comunes que generaron configuraciones cognitivas de la noción. La identificación de las configuraciones que se enmarcaron en respuestas parcialmente correctas o incorrectas fueron comparados con la solución plausible correcta o también llamada significado dado por la institución matemática, cada disparidad entre la pareja estudiante-institución, se categoriza para determinar algunos de los conflictos semióticos identificados.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 97-140) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Blázquez, S. & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(3), 219-236.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. & Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(2),* 189-209.

Cornu, B. (1983). Apprentissage de la notion de limite: conpections et obstacles. (Thèse de 3ème cycle,Mathèmatiques. Universitè I de Grenoble, Grenoble, Francia.)

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne, Switzerland: Peter Lang.

Font, V. & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa ,8*(1), 67-98.

Fernández, M. (2000). Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema de límite de funciones con el uso de un asistente matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3(2)*, 171-187.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Gordillo, W. & Pino-Fan, L. (2015). Un ejemplo de análisis ontosemiótico para una tarea de antiderivada. En Vásquez, C,. Rivas, H., Pincheira, N., Rojas, F., Solar, H., Chandía, E., & Parraguez, M. (Eds.), *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX,* (pp. 170-175). Villarrica: SOCHIEM.

Pino- Fan, L., Godino J. & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178

Pino-Fan, L. & Font, V. (2015). A methodology for the design of questionnaires to explore relevant aspects of didactic-mathematical knowledge of teachers. In Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Ed.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 4, pp. 25-32). Hobart, Australia: PME.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathèmatiques,* 6(1), 5-67.