ANÁLISIS HISTÓRICO – EPISTEMOLÓGICO EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Fabián W. Romero, Flor M. Rodríguez, Sara M. Henao

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México),

Universidad Autónoma de Guerrero. (México)

fwromero@cinvestav.mx, flor.rodriguez@uagro.mx, saramarcelahenao@gmail.com

RESUMEN: Investigadores en el campo de la Educación Matemática han señalado la importancia de realizar estudios históricos-epistemológicos de los conceptos matemáticos, incluso existe una amplia discusión sobre los aportes de la historia de la matemática en los procesos de enseñanza-aprendizaje de los conceptos. En parte, esto responde a la problemática de la consideración de los conceptos sin una contextualización histórica. En este artículo, mostramos dos investigaciones cuyo objetivo fue realizar un estudio histórico-epistemológico sobre la constitución de conceptos de la matemática, a saber, las ecuaciones diferenciales ordinarias y las series trigonométricas de Fourier. Se discutirá además sobre la metodología de la investigación histórica.

Palabras clave: epistemología, ecuaciones diferenciales, serie de Fourier

ABSTRACT: Researchers in the field of Mathematics Education have pointed out the importance of performing historical-epistemological studies of mathematical concepts; there is even a wide discussion about the contributions of the history of mathematics to the teaching-learning processes of concepts. Partly, it responds to the problematic of the consideration of the concepts without a historical contextualization. In this article, we show two investigations whose objective was to make a historical-epistemological study on the construction of mathematical concepts, namely the ordinary differential equations and Fourier trigonometric series. Besides, the methodology of historical research will be discussed.

Key words: epistemology, differential equations, fourier series

Introducción

Investigadores han señalado la importancia de realizar estudios históricos-epistemológicos de en educación matemática (Smestad, B., Jankvist, U. T., & Clark, K. (2014); Clark, K. M. (2012); Jankvist (2009); Tzanakis & Arcavi (2000); Bakker & Gravemeijer (2006)). Recientemente, en el ICME 2016, realizado en la ciudad de Hamburg, Alemania, se presentaron dos grupos de discusión, el denominado *History of the teaching and learning of mathematics* y *The role of history of mathematics in mathematics education*, grupos que discuten las aportaciones que hacen el tipo de investigaciones históricas y epistemológicas no sólo a nivel teórico sino a nivel de aplicación en la formación inicial y continua de los docentes, incluyendo su impacto en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos. Otros eventos con intereses similares son el History and Pedagogical of Mathematics (HPM) y el Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática (CIHEM), entre otros.

Farmaki & Paschos (2007) discuten el papel de la historia en las clases de matemáticas, argumentan que son un factor de motivación para los estudiantes en su aprendizaje, ya que la historia contribuye a mantener el interés y el entusiasmo de los alumnos en la asignatura. Bakker & Gravemeijer (2006) refieren que la enseñanza basada en elementos históricos, devela unas matemáticas más humanas y menos atemorizantes, puesto que permite hacer conscientes a los estudiantes de que el mismo concepto matemático con el que ellos tiene dificultad, probablemente también se presentó en una determinada época para los matemáticos de antaño. Otra discusión data sobre que los estudios históricos y epistemológicos le permiten al docente evidenciar ciertos problemas en la constitución de los conceptos matemáticos, por ejemplo, Jankvist (2009) menciona que uno de tales problemas puede ser los obstáculos epistemológicos que se presentan en los procesos de aprendizaje. Asimismo Witzke, Struve, Clark, & Stoffels (2016) consideran que la historia debe ser una parte del conocimiento matemático del profesor. Además, la historia muestra los aspectos culturales y científicos que dieron origen a los conceptos, lo que dota a la matemática de un contexto específico de su génesis, lo que de acuerdo a la hipótesis de la investigación histórica, ello podría ayudar a entender aspectos actuales de la educación.

Bajo este paradigma, en este artículo presentamos, sucintamente dos ejemplos: a) una investigación cuyo objetivo fue analizar de manera sistémica la Serie Trigonométrica de Fourier (STF), bajo el marco de la teoría Socioepistemológica y la ingeniería didáctica como metodología, para proponer un diseño de intervención en el aula; b) una investigación de fuentes primarias, para conocer la constitución histórica de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), usando el método de investigación histórica.

Ejemplo 1. Construcción social de la serie trigonométrica de Fourier. (Romero, 2016)

Investigaciones realizadas en Educación Matemática sobre la STF dan cuenta de aspectos relacionados con la serie: el problema de la cuerda vibrante como antecedente del trabajo de Fourier, la determinación del estado estacionario como fenomenología intrínseca a la serie, las nociones de periodicidad y de calor, entre otros. Dichas investigaciones sólo estudian a la serie en diferentes contextos, pero no articulan los diferentes aspectos y su relación con la función trigonométrica, como momento previo de construcción social a la serie trigonométrica. Por lo tanto, el objetivo de esta investigación fue *significar las nociones matemáticas alrededor de la Serie Trigonométrica de Fourier mediante una problematización del saber matemático que dé cuenta de su construcción social.*

Para alcanzar este objetivo se usó a la Ingeniería Didáctica y a la Socioepistemología, con el propósito de acercarse al fenómeno de la apropiación del saber matemático a través de su construcción social. Así, en el análisis preliminar, se realizó una aproximación sistémica al fenómeno a través de cuatro componentes: epistemológica, cognitiva, didáctica y socio-cultural; la integración de estas componentes es lo que se conoce en Socioepistemología como la problematización del saber matemático (Reyes-Gasperini, 2011).

A continuación, se muestran algunos aspectos relacionados con la dimensión epistemológica, sin olvidar que la dimensión socio-cultural se articula con ésta, pues el principal foco de atención es “las circunstancias que hicieron posible la construcción del conocimiento matemático” (Cantoral, 2013, p. 147). De esta manera, se analizan diferentes momentos históricos: la discusión alrededor del problema de la cuerda vibrante, el trabajo de Fourier sobre la propagación de calor y el contexto de trabajo de Fourier. Abordaremos aquí los dos primeros momentos, un análisis de las cuatro dimensiones a profundidad lo encuentra en (Romero, 2016).

Momento 1. El problema de la cuerda vibrante

Este fue enunciado por B. Taylor en 1715, la discusión alrededor de su solución fue motivo de discusión por célebres matemáticos de la época como Johann Bernoulli, D’Alembert, Daniel Bernoulli y Euler. La solución presentada por D. Bernoulli como superposición de ondas, a partir de sus conocimientos musicales, provocaba que la función inicial (forma inicial de la cuerda) se pueda representar como una serie de funciones sinusoidales. La crítica de Euler a la solución de D. Bernoulli es que, además de que sus argumentos fueron completamente físicos, la función inicial debe cumplir las propiedades de ser periódica e impar (por las propiedades de la función seno), lo cual es una restricción innecesaria. Sin embargo, D. Bernoulli afirmaba que en la ecuación existen infinitos coeficientes, lo que permite escogerlos de manera tal que la igualdad se cumpla. Farfán (2012, p. 51) menciona que “el meollo de la discusión no radica en la solución en sí misma, sino en cuál de ellas es la *solución general*, así como en la metodología empleada para encontrarla”, esto debido a la definición de función de la época lo que provocó la revisión de los fundamentos del Análisis Matemático.

A partir de la solución propuesta por D. Bernoulli se aprecia que comprendía cómo se comportaba la superposición de ondas, esto es un indicador de lo esencial para la comprensión de la serie trigonométrica de Fourier, pues al saber cómo se comportan las sumas parciales se pueden *predecir* ciertas propiedades del comportamiento general de la serie, donde lo que se requiere es acercarse a la forma inicial de la cuerda (convergencia de la serie), mediante la comprensión del comportamiento de las sumas parciales.

Momento 2. El problema de la propagación del calor

Las ideas de D. Bernoulli esperaron por más de cincuenta años para ser tomadas en cuenta, esta vez por Jean Baptiste-Joseph Fourier quien, preocupado por modelar los fenómenos naturales, logra dar explicación al fenómeno de propagación del calor en forma matemática, pero congruente con las ideas físicas involucradas, aunque separadas, algo no usual en la manera de hacer matemática de la época.

Las ideas de Fourier quedan plasmadas en su libro *Théorie Analytique de la Chaleur* de 1821, donde expresa: "La Teoría que vamos a exponer tiene por objeto demostrar estas leyes; el calor, y las cuestiones del cálculo integral donde los elementos están dados por la experiencia" (Fourier, 1822, p. 1, la traducción es nuestra).

Fourier determina la ecuación diferencial que modela la propagación del calor en cuerpos sólidos, luego proporciona problemas de uso de la ecuación, en el cual considera el problema de la propagación del calor en una lámina infinita, problema en el que Fourier plantea un modelo de la propagación del calor en la Tierra (Romero, 2016). Al resolver este problema, Fourier llega la siguiente ecuación:

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + \cdots$$

La cual representa la misma situación que provocó la discusión sobre el problema de la cuerda vibrante, es una representación en serie trigonométrica de una constante, lo que logró hacer Fourier, que no hizo D. Bernoulli, fue proporcionar el cálculo de los coeficientes. Pero antes de esto vio necesario justificar dicha solución físicamente, ver que su solución es coherente con el problema físico planteado.

Esto permite ver que Fourier está interesado en "anticipar el comportamiento de la naturaleza, en modelarla" (Cantoral et al, 2006, p. 94). Fourier en todo su trabajo tiene la necesidad de comprobar que las soluciones obtenidas se adecúan a los datos empíricos y a la situación física, pero a diferencia de la tradición, los argumentos físicos no afectan lo matemático, se van dando de manera paralela, pero inicia una separación entre las ideas físicas y las ideas matemáticas. Ver detalles en Romero (2016).

Finalmente, los aspectos presentados funcionan como un ejemplo de cuestiones de interés histórico-epistemológicos a considerar desde la Socioepistemología para la problematización del saber matemático. En este caso, las prácticas de predecir, modelar e interpretar juegan un rol importante para el surgimiento de la STF.

Ejemplo 2. Estudio histórico-epistemológico de las EDO. (Henao, 2016)

Esta investigación tuvo como hilo conductor la pregunta: *¿Cuáles fueron los factores epistemológicos vinculados con el desarrollo del cálculo de variaciones y la modelación de problemas físicos, que posibilitaron el surgimiento y constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias como una disciplina en las matemáticas?*

Se consideró como marco metodológico a la investigación histórica en el campo de la educación matemática, ésta involucra principalmente tres etapas: i) Identificar y acotar una problemática, es decir la elección de un tema que será objeto de reflexión; ii) Organizar y seleccionar los datos o documentos que serán las unidades de análisis y; iii) elaborar un informe de investigación (Cohen & Manion, 2002), (en este artículo, sólo exponemos de i) y ii). En la primera, se realizó un análisis de fuentes secundarias que arrojaron evidencia sobre el surgimiento y desarrollo de las EDO. En esta etapa, se analizaron los capítulos 21 y 29 de Kline (1992) y la investigación de Nápoles (1998) y Nápoles et al. (2004). En la segunda, se realizó la selección y clasificación de fuentes primarias que fueron las unidades de análisis. Los criterios de selección de las fuentes primarias se fundamentaron en la pertinencia para la problemática y la accesibilidad de los mismos, algunas fuentes analizadas fueron Bernoulli (1690), Bernoulli (1691), Bernoulli (1694). Es importante señalar que, el método hermenéutico posibilitó la interpretación de cada uno de los documentos originales.

Del análisis de documentos de la primera y segunda etapa, podemos decir que, la historia de las matemáticas mostró que algunos de los problemas que permitieron la constitución de las EDO se originaron a finales del siglo XVII y comienzos del siglo XVIII. Los científicos de estos siglos intentaron dar respuestas a problemas de la física vinculados con el campo de la elasticidad y la astronomía, entre otros. Dichos problemas, exigían para su solución un abordaje matemático que pudiera modelar fenómenos de variación. Esta necesidad, posibilitó la emergencia de una nueva disciplina dentro de las matemáticas, las EDO. Uno de los primeros métodos, fue resolver las ecuaciones a partir de la expresión analítica de una curva. Sin embargo, fueron diversos los fracasos presentados con este método, por ello se emprendió una búsqueda para hallar métodos que permitieran solucionar EDO. Otro de los factores que influyeron en el surgimiento de las ecuaciones diferenciales se vincula con el desarrollo en el cálculo. Los aportes de Newton y Leibniz fueron fundamentales en la creación de métodos para resolverlas. Entre las primeras técnicas que aparecieron se encuentra la aproximación por funciones elementales, el cálculo de cuadraturas y la separación de variables.

Para ejemplificar, mostramos el análisis de uno de los problemas que permitieron la constitución de las EDO: *El problema de la braquistócrona*. En junio de 1696 Johann Bernoulli público un problema a la comunidad matemática en las *Acta Eruditorum*. El desafío consistía en hallar el camino *ABM* por el que una partícula móvil *M*, descendiendo por su propio peso, iría de *A* a *B* en el menor tiempo posible (ver Figura 1), los puntos *A* y *B* se encuentran en un plano vertical, a diferentes alturas y no están ubicados directamente uno encima del otro.

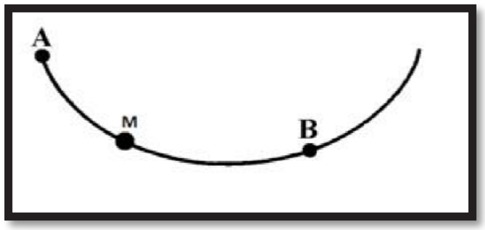

Figura 1. La braquistócrona

Johann Bernoulli llamó a esta curva *braquistócrona* (del griego braquis, corto y cronos, tiempo). En 1697 aparecieron las demostraciones de Leibniz, Jacob Bernoulli, L'Hôpital y Newton. Se encontró que la curva que soluciona el problema planteado por Bernoulli es la cicloide. La demostración de Johann Bernoulli consistió en establecer una analogía entre la curva de más breve descenso y la trayectoria que seguirá el rayo de luz en un medio plano con índice de refracción adecuadamente elegido. Los elementos fundamentales de la demostración de Johann Bernoulli fueron el principio de Fermat del tiempo mínimo, la ley de refracción de Snell y el cálculo infinitesimal. La ley de Snell establece que un rayo de luz al pasar de un medio a otro de densidad diferente se desvía de modo que la relación entre las velocidades y el seno del ángulo que forma la curva con la vertical permanece constante. Además, por Galileo se conocía que la velocidad de caída de un cuerpo es proporcional a la raíz cuadrada de la distancia desde donde cae. Ambos elementos están presentes en la demostración de Johann Bernoulli.

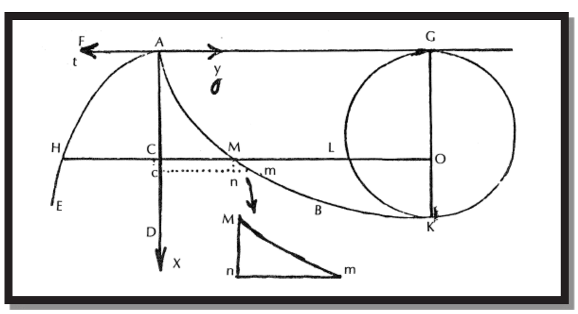

Figura 2. Solución del problema de la braquistócrona por Johann Bernoulli (Actas Eruditorum p, 201)

Johann en su demostración toma el eje *y* horizontal y el eje *x* ortogonal con la dirección positiva hacia abajo (ver Figura 2), note que esta forma de tomar los ejes es contraria a la que normalmente se utiliza. El objetivo era encontrar la curva de mínimo descenso de un punto *A* con velocidad nula hasta un punto *B* deslizándose sin rozamiento por la acción de la gravedad. Johann considera que la velocidad en cualquier punto *M* de la trayectoria depende únicamente de *x*, así pues, la braquistócrona que se busca puede identificarse con la trayectoria de un rayo de luz que parte de *A* y llega a *B*. De acuerdo a Galileo la velocidad en el punto *M* será $\sqrt{2gx}$, es decir depende únicamente de *x*, este hecho le permite a Johann establecer la analogía con la trayectoria de un rayo de luz que parte de *A* hasta *B*. Johann supone que el espacio está dividido en franjas separadas por planos horizontales de grosor infinitesimal cuyas densidades varían. En cada punto de la curva braquistócrona buscada se cumple que el seno del ángulo entre la tangente a la curva y el eje vertical es proporcional a la velocidad (ley de Snell) y ésta es a su vez proporcional a la raíz cuadrada de la altura del cuerpo que cae (segunda ley de Galileo). Bajo estas condiciones Bernoulli inicia su demostración. Ver detalles en Henao (2015).

Cabe mencionar que, a mediados del siglo XVIII, las EDO ya se habían convertido en una disciplina independiente y la resolución en un fin en sí mismo, desvinculada de los problemas del campo de la física (Kline, 1992), puesto que, ya existía un amplio campo de métodos asociados con la resolución de EDO.

■ Conclusiones

Desarrollar un análisis histórico-epistemológico, en tanto, considera las circunstancias y los medios que posibilitaron el surgimiento de los conceptos y las nociones matemáticas permite: 1) Proveer de historicidad a los conceptos matemáticos que la enseñanza usual presenta como objetos universales; 2) Proveer de historicidad a las nociones metamatemáticas y protomatemáticas, tales como el rigor, mostrando que no existe un rigor eterno y perfecto de las matemáticas y; 3) Posibilita la observación de las disparidades entre el saber científico y el enseñado, demostrando que no es cierto que los objetos de enseñanza en la escuela son copias de los objetos de la ciencia (Farfán, 2012).

De esta manera, los dos ejemplos presentados muestran cómo desde distintas posturas teóricas, se pueden realizar diferentes abordajes de las nociones y objetos matemáticos en su génesis histórica-epistemológica. Tanto para la emergencia de la STF como para el surgimiento y constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias como una disciplina en la matemática, se evidencia el papel que juega el desarrollo del cálculo y la modelación de problemas físicos, y que estos no surgieron espontáneamente, sino que son resultado de una reflexión profunda y coherente con los problemas planteados a partir del estudio de los fenómenos de la naturaleza.

Además, el recurso de la analogía como mecanismo para la resolución de problemas, evidenciado en el problema de la braquistócrona, donde se transforma un problema meramente mecánico en uno de óptica, no es un recurso para resolver un problema hoy en día. Por otra parte, en el trabajo sobre propagación de calor, el mismo Fourier plantea que dicho problema es diferente a los problemas de la mecánica racional (Fourier, 1822), razón por la cual sus argumentos matemáticos se ven separados de los argumentos físicos, pero siguen siendo coherentes los unos con los otros. Estos dos ejemplos muestras que lo que se considera "hacer matemáticas" cambia dependiendo de los problemas que se estén respondiendo, de los contextos y preocupaciones de los individuos y las sociedades.

Referencias bibliográficas

Bakker, A. & Gravemeijer, K. (2006). An historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics, 62*, 149-168.

Bernoulli, J. (1690). Analisis Problematis Antehac. *Acta Eruditorum*, 217-219.

Bernoulli, J. (1691). Solutio Problematis Funicula. *Acta Eruditorum*, 274-276.

Bernoulli, J. (1694). Modus Generalis Construen di Omnes equationes differentiales primi gradus. *Acta Eruditorum*, 435-437.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. & Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, especial, 83-102.

Clark, K. M. (2012). History of mathematics: illuminating understanding of school mathematics concepts for pre-service mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *81(1)*, 67-84. doi:10.1007/s10649-011-9361-y

Cohen, L. & Manion, L. (2002). Investigación Histórica. En *Métodos de investigación educativa* (págs. 75-101). Madrid: La Muralla.

Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización*. Barcelona: Gedisa.

Farmaki, V. & Paschos, T. (2007). Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activites. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 83-106.

Fourier, J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. París: Chez Firmin Didot, père et fils.

Henao, S. (2016). *La constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias como disciplina de la matemática: Un análisis histórico- epistemológico.* Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Janvist, U. T. (2009). On empirical research in the field of using history in mathematics education. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12(1)*, 67-101.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. Volumen 2.* Madrid: Editorial Alianza S.A.

Nápoles, J. (1998). El legado histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias, consideraciones (auto) criticas. *Boletín de matemáticas, 5*, 53-79.

Nápoles, J., Gonzáles, A., Genes, F., Basabilbaso, F. & Brundo, J. (2004). El enfoque histórico-problématico en la enseñanza de la matemática para ciencias técnicas: el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Scientiae*, *6*, págs. 41-59. Canoas.

Reyes-Gasperini, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Romero, F. (2016). *Construcción social de la serie trigonométrica de Fourier. Pautas para un diseño de intervención en el aula*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Smestad, B., Jankvist, U. T. & Clark, K. (2014). Teachers' mathematical knowledge for teaching in relation to the inclusion of history of mathematics in teaching. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *19(3-4)*, 169-183.

Tzankis, C. & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. En J. Fauvel, & J. Van Maanen (Ed.), *History in Mathematics Education* (págs. 201-240). Dordrecht: Kluwer Academic.

Witzke, I., Struve, H., Clark, K. & Stoffels, G. (2016). ÜberPro – A seminar constructed to confront the transition problem from school to university mathematics, based on epistemological and historical ideas of mathematics. *MENON: Journal of Educational Research*, *2nd Thematic Issue*, 66-93. Retrieved from http://www.edu.uowm.gr/site/system/files/uberpro_-a_seminar_constructe_scienc_en.pdf