EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DE ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE MATEMATICAS DE EDUCACION SECUNDARIA EN IDENTIFICAR LA COMPRENSION DE LA DERIVADA EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Developing prospective secondary mathematics teachers' noticing of high students' understanding of derivative

Gloria Sánchez-Matamoros[1]; Ceneida Fernández[2]; Salvador Llinares[2] y Julia Valls[2]

[1]Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Sevilla

[2]Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante

Resumen

Esta investigación estudia el efecto de un módulo de enseñanza sobre la manera en la que estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria identifican la comprensión de la derivada en estudiantes de Bachillerato. Los resultados indican que el desarrollo de esta competencia está vinculada a los elementos matemáticos de la noción de derivada que los estudiantes para profesor son capaces de considerar al identificar evidencias de la comprensión de la derivada en las respuestas de los estudiantes e interpretarlas.

Palabras clave: *aprendizaje del estudiante para profesor, analizando el trabajo de los estudiantes, desarrollo de la mirada profesional*

Abstract

This study investigates the effects of a teaching intervention on prospective secondary mathematics teachers' noticing of high students' understanding of derivative concept. Results revealed that the development of noticing of student's understanding was linked to mathematics elements of derivative identified as relevant and considered by prospective teachers when interpreting the students' problem solving.

Key words: *preservice teacher's learning, analyzing student work, development of noticing*

INTERPRETAR LA COMPRENSIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES

Observar con sentido el aprendizaje de las matemáticas es considerada una competencia relevante para el profesor (Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010; Mason, 2002), entendida como la capacidad de *identificar* evidencias de la comprensión matemática e *interpretarlas* para *decidir* cómo responder. Recientemente, algunas investigaciones están aportando información para caracterizar esta competencia y su desarrollo (Bartell, Webel, Bowen, & Dyson, 2013; Fernández, Callejo, & Márquez, 2012; Fernández, Valls, & Llinares, 2011; Fortuny, & Rodríguez, 2012; Rivas, Godino, & Castro, 2012; Sánchez-Matamoros et al., 2012; Spitzer et al., 2011). Los resultados de estas investigaciones indican que cuando los estudiantes para profesor consideran relevantes los aspectos procedimentales, entonces interpretan la comprensión vinculada a los pasos procedimentales y a la corrección de la respuesta con ausencia de explicaciones conceptuales.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). El desarrollo de la competencia de estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria en identificar la comprensión de la derivada en estudiantes de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 501-509). Bilbao: SEIEM

En este contexto, el desarrollo de la habilidad de observar el pensamiento matemático de los estudiantes es considerado un objetivo en la formación de profesores y define un objetivo de investigación. El objetivo de la investigación presentada aquí es caracterizar cómo los futuros profesores aprenden a reconocer la evidencia de la comprensión del concepto de derivada. Es decir, cómo la capacidad de observar con sentido el pensamiento matemático de los estudiantes se desarrolla en un contexto diseñado ad hoc.

Por otra parte, distintas investigaciones han mostrado la dificultad que tienen los estudiantes de bachillerato en la construcción de los significados de la derivada (Tall, 1990; Asiala, Cottrill, Dubinsky, & Schwingendorf, 1997; Baker, Cooley, & Trigueros, 2000; Sánchez-Matamoros, García, & Llinares, 2008) mostrando el papel relevante que desempeñan los sistemas de representación para dotar de significado al concepto de derivada. Con estas referencias previas nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

- ✓ ¿En qué medida los estudiantes para profesor de matemáticas identifican e interpretan la comprensión de los estudiantes de Bachillerato después de participar en un entorno de aprendizaje diseñado ad hoc?

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes son 8 estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas matriculados en una asignatura de Didáctica de la Matemática en Educación Secundaria dividida en dos bloques: un bloque sobre análisis de la enseñanza y otro bloque sobre análisis del aprendizaje matemático. Uno de los objetivos de esta asignatura es que los estudiantes para profesor empiecen a desarrollar una mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas.

Diseño del módulo de enseñanza

Para desarrollar la competencia docente de reconocer evidencias de la comprensión de la derivada, se diseñó un módulo con siete sesiones de 2 horas de duración (1 sesión por semana) (Figura 1).

En la primera y última sesión los estudiantes contestaron un cuestionario que tenían como objetivo obtener información sobre su capacidad de observar el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. Las otras cinco sesiones tenían como objetivo presentar información relativa a la demanda cognitiva de las tareas y sobre las características de la comprensión del concepto de derivada en estudiantes de bachillerato. En cada una de estas sesiones los estudiantes para profesor (EPMs) con el apoyo de información teórica resolvían en parejas tareas centradas en identificar los elementos matemáticos del concepto de derivada y la demanda cognitiva de diferentes problemas e identificar características de la comprensión de la derivada en estudiantes de Bachillerato. Al final de cada sesión había una discusión en gran grupo donde se debatía sobre la tarea realizada.

Los cuestionarios

Los cuestionarios estaban formados por tres tareas cada uno (Figura 2) siguiendo la misma estructura que investigaciones previas (Sánchez-Matamoros et al., 2012). El cuestionario inicial constaba de 3 tareas, cada tarea consistía en las respuestas de un estudiante de 1º Bachillerato (16-17 años) a tres problemas de derivada en un punto. El cuestionario final constaba de 2 tareas, cada tarea consistía en las respuestas de un estudiante de 2º Bachillerato (17-18 años) a dos problemas de la función derivada. Cada respuesta a los problemas de derivada iba acompañada de extractos de entrevistas en las que los estudiantes explicaban cómo los habían resuelto. Las respuestas de los estudiantes que configuraban el cuestionario reflejaban diferentes aspectos de la comprensión sobre la derivada proporcionados por investigaciones previas. Los estudiantes para profesor tenían que responder a tres cuestiones en cada una de las tareas. Dos de estas cuestiones en el cuestionario inicial fueron:

1. *Describe cómo ha resuelto el estudiante X cada problema, indicando los elementos del concepto de derivada utilizados y si el procedimiento usado es adecuado y por qué.*
2. *A partir de las descripciones de cómo el estudiante ha realizado los tres problemas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el estudiante X comprende el concepto de derivada?*

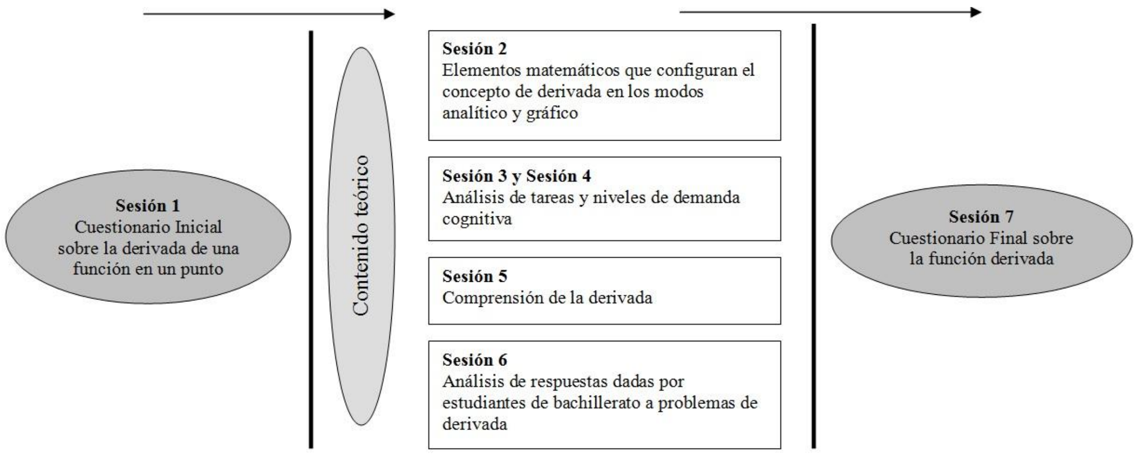


Figura 1. Esquema del diseño del módulo de derivada

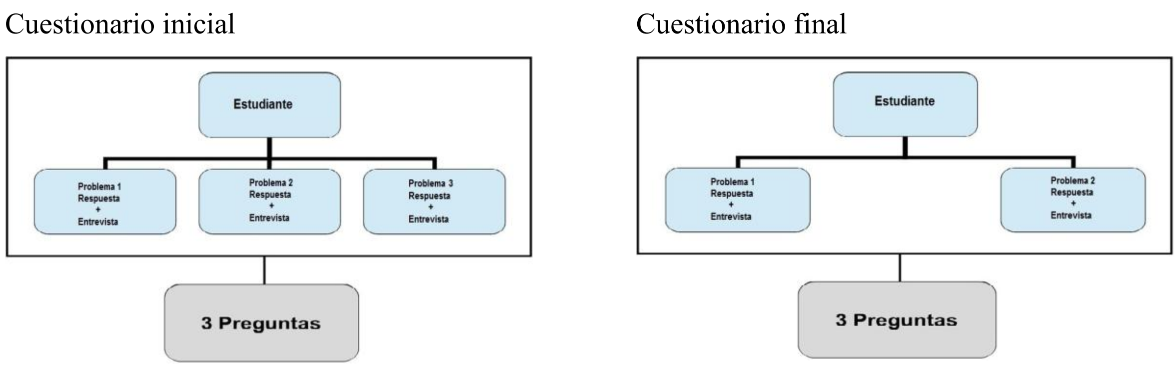


Figura 2. Estructura de las tareas en el cuestionario inicial y final

En el cuestionario final las cuestiones planteadas a los estudiantes para profesor eran las mismas excepto que hacían referencia a las respuestas a los dos problemas. Los problemas del cuestionario inicial mostraban diferentes elementos matemáticos del concepto de derivada de una función en un punto en los modos de representación analítico y gráfico que se habían mostrado relevantes en la caracterización de la comprensión de la derivada (figura 3). De esta manera el cuestionario proporcionaba diferentes respuestas que mostraban diferentes niveles de comprensión de la derivada. Así, el estudiante 1 usa elementos de la derivada de una función en un punto solo en el modo analítico (Nivel Intra). El estudiante 3 usa elementos de la derivada de una función en un punto en el modo analítico y es capaz de usar la aproximación numérica de la derivada de una función en un punto a través de la expresión analítica como límite del cociente incremental pero tiene dificultades en usar algunos elementos en modo gráfico y/o establecer algunas relaciones necesarias en algún problema (Nivel Inter). Y finalmente, el estudiante 2 usa todos los elementos de la derivada de una función en un punto en todos los modos de representación, relacionándolos cuando es necesario en la resolución de los problemas (Nivel Trans).

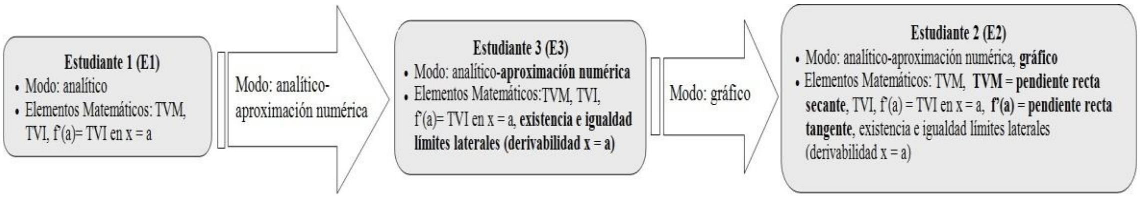


Figura 3. Caracterización de los niveles de la comprensión de los tres estudiantes de Bachillerato usados para diseñar el cuestionario inicial

Los dos problemas del cuestionario final también mostraban diferentes elementos matemáticos del concepto de función derivada en los modos de representación analítico y gráfico (figura 4) que permitían ejemplificar niveles de la comprensión de los estudiantes puestos de manifiesto por sus respuestas (Figura 5). En este cuestionario, el estudiante 1 usa elementos de la función derivada en modo analítico y no en modo gráfico (Nivel intra), el estudiante 2 usa elementos de la derivada en modo analítico y en modo gráfico sólo con carácter puntual (derivada de la función en un punto) (nivel inter) mientras que el estudiante 3 usa todos los elementos de la derivada en los diferentes modos de representación (nivel trans) (Figura 6).

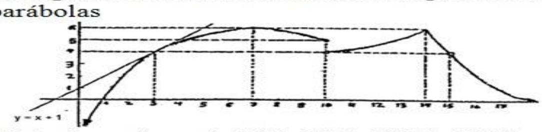
Problema 1	**Problema 2**
Sea $f(x)=\begin{cases} 2x^3+2x+a & x<1 \\ bx^2+1 & x\geq 1 \end{cases}$ Calcula a y b para que f sea derivable en x = 1	Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas  a. Obtén los valores de f'(3), f'(7), f'(10), f'(14) y f'(15). Explicando cómo los obtienes b. Realiza un esbozo de la gráfica de f'. Explica como lo has obtenido
Elementos	**Elementos**
M 1.1 Si f es derivable, entonces f es continua M 1.2 existencia e igualdad de los límites laterales de f ' en x=1 sii f ' continua en x =1	M 2.1 f '(a) = pendiente de la recta tangente a la función en x =a M 2.2 si f derivable en x =a, entonces f continua en x =a (negación) M 2.3 Si x=a extremo o punto de inflexión de la función f, entonces f '(a)=0 M 2.4 si f creciente, entonces f ' >0, y si f decreciente, entonces f ' <0 M 2.5 existencia e igualdad de los límites laterales del cociente incremental (como proceso, aproximación a través de las tablas de valores) para que exista $f'(a)$. M 2.6 punto cúspide/ anguloso: si es f continua en (a, b), derivable en (a, b)-{c}, y f´ cambia de signo entorno a x=c entonces x=c es punto anguloso o cúspide. M2.7 operador derivada: Si f es una parábola, entonces f ' es una recta.

Figura 4. Elementos matemáticos en la resolución de los problemas del cuestionario final

Análisis de datos

Los dos cuestionarios fueron diseñados para valorar antes y después del módulo cómo los EPMs reconocían la comprensión de la derivada viendo las respuestas de los estudiantes. Nosotros analizamos de forma conjunta las respuestas de cada EPM a las dos primeras preguntas de los cuestionarios (Figura 7) teniendo en cuenta los niveles de comprensión de la derivada.

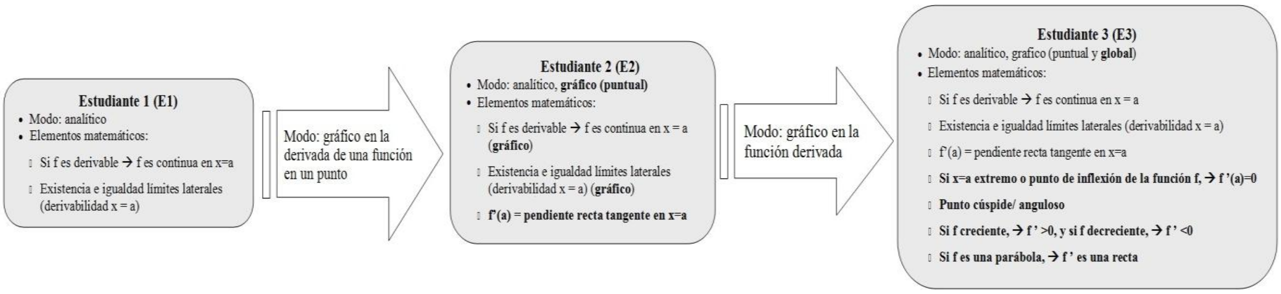
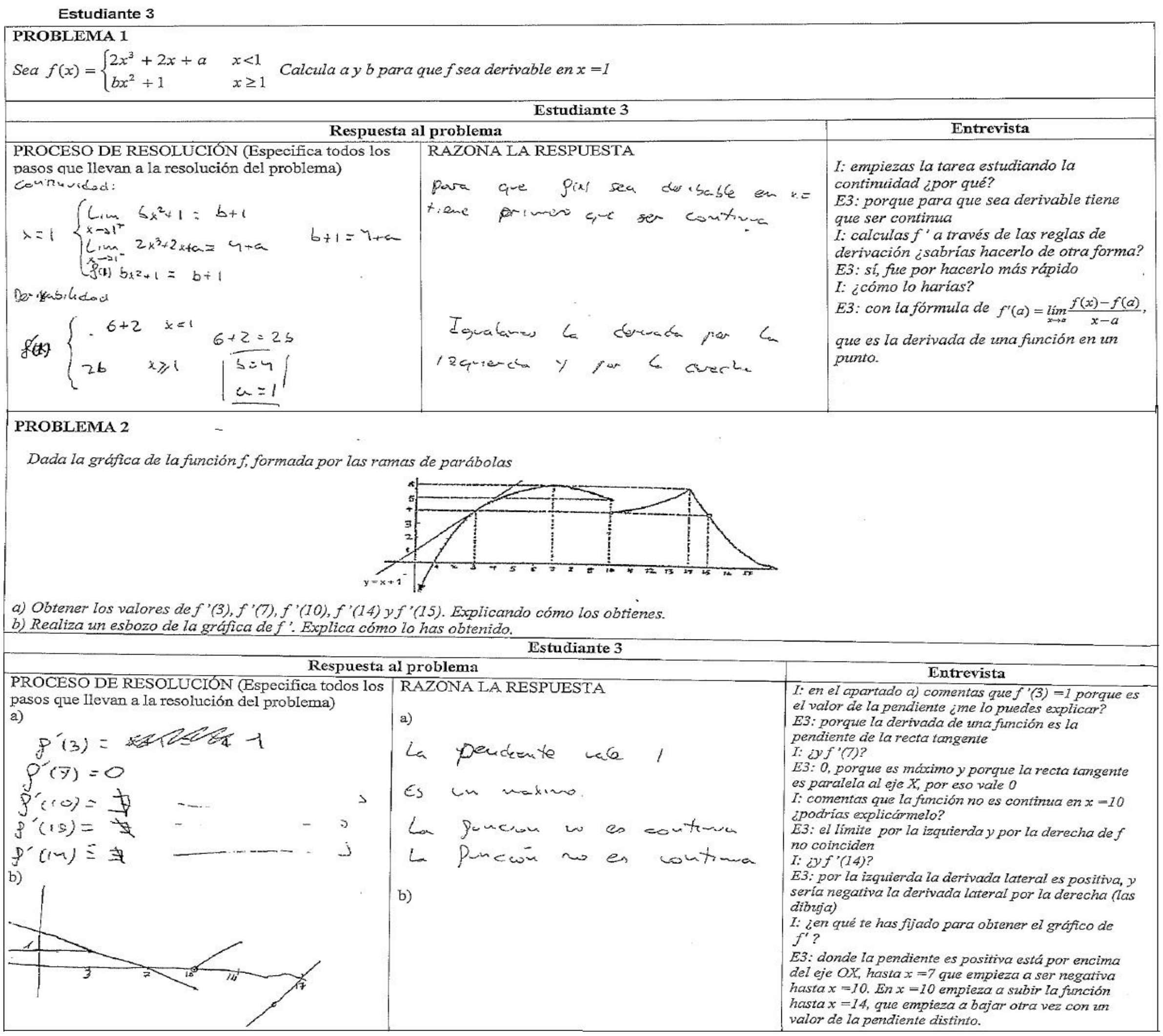


Figura 5. Caracterización de los niveles de la comprensión de los tres estudiantes de Bachillerato usado en el diseño del cuestionario final



Estudiante 3

PROBLEMA 1

Sea $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x + a & x<1 \\ bx^2 + 1 & x \geq 1 \end{cases}$ *Calcula a y b para que f sea derivable en x =1*

Estudiante 3		
Respuesta al problema		Entrevista
PROCESO DE RESOLUCIÓN (Especifica todos los pasos que llevan a la resolución del problema) Continuidad: $x=1 \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} bx^2+1 = b+1 \\ \lim_{x\to 1^-} 2x^3+2x+a = 4+a \\ f(1)\ bx^2+1 = b+1 \end{cases}$ $b+1=4+a$ Derivabilidad $f'(x) \begin{cases} 6+2 & x<1 \\ 2b & x\geq 1 \end{cases}$ $6+2=2b$ $b=4$ $a=1$	RAZONA LA RESPUESTA Para que f(x) sea derivable en x=1 tiene primero que ser continua Igualamos la derivada por la izquierda y por la derecha	*I: empiezas la tarea estudiando la continuidad ¿por qué?* *E3: porque para que sea derivable tiene que ser continua* *I: calculas f ' a través de las reglas de derivación ¿sabrías hacerlo de otra forma?* *E3: sí, fue por hacerlo más rápido* *I: ¿cómo lo harías?* *E3: con la fórmula de* $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, *que es la derivada de una función en un punto.*

PROBLEMA 2

Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas

a) Obtener los valores de f '(3), f '(7), f '(10), f '(14) y f '(15). Explicando cómo los obtienes.
b) Realiza un esbozo de la gráfica de f '. Explica cómo lo has obtenido.

Estudiante 3		
Respuesta al problema		Entrevista
PROCESO DE RESOLUCIÓN (Especifica todos los pasos que llevan a la resolución del problema) a) $f'(3) = \cancel{\quad} 1$ $f'(7) = 0$ $f'(10) = \nexists$ $f'(15) = \nexists$ $f'(14) = \nexists$ b)	RAZONA LA RESPUESTA a) La pendiente vale 1 Es un maximo. La funcion no es continua La función no es continua b)	*I: en el apartado a) comentas que f '(3) =1 porque es el valor de la pendiente ¿me lo puedes explicar?* *E3: porque la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente* *I: ¿y f '(7)?* *E3: 0, porque es máximo y porque la recta tangente es paralela al eje X, por eso vale 0* *I: comentas que la función no es continua en x =10 ¿podrías explicármelo?* *E3: el límite por la izquierda y por la derecha de f no coinciden* *I: ¿y f '(14)?* *E3: por la izquierda la derivada lateral es positiva, y sería negativa la derivada lateral por la derecha (las dibuja)* *I: ¿en qué te has fijado para obtener el gráfico de f '?* *E3: donde la pendiente es positiva está por encima del eje OX, hasta x =7 que empieza a ser negativa hasta x =10. En x =10 empieza a subir la función hasta x =14, que empieza a bajar otra vez con un valor de la pendiente distinto.*

Figura 6. Cuestionario final: Respuestas del Estudiantes 3 a los dos problemas

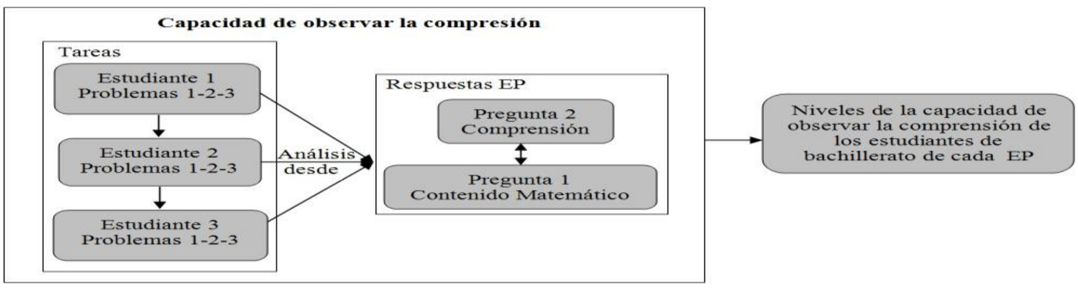


Figura 7. Esquema de análisis

Para realizar el análisis nos centramos en cómo el EPM describía la comprensión del estudiante de bachillerato del concepto de derivada y de qué manera usaba los elementos matemáticos y los modos de representación del concepto para identificar la demanda cognitiva del problema. Aplicando este procedimiento de manera sistemática a las respuestas dadas por los EPMs identificamos lo que consideraban como evidencia de la comprensión antes y después de participar en el módulo de enseñanza. En la fase 2 del análisis comparamos los resultados obtenidos desde los dos cuestionarios con el fin de generar descriptores del desarrollo. Estos nos permitieron caracterizar tres niveles de desarrollo.

- Nivel bajo: cuando los EPMs consideran la comprensión de los estudiantes como “todo o nada”.
- Nivel medio: cuando los EPMs identifican algunas características de la comprensión de los estudiantes de bachillerato en relación a algunos elementos matemáticos.
- Nivel alto: cuando los EPMs identifican las diferentes características de la comprensión de los estudiantes.

RESULTADOS

La tabla 1 muestra los cambios en la competencia de los EPMs de identificar e interpretar lo que es relevante en relación al comportamiento de los estudiantes de Bachillerato cuando resolvían los problemas de derivada.

Tabla 1. Niveles de noticing

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Cuestionario Inicial</th><th>Cuestionario Final</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Niveles de reconocimiento de la comprensión matemática</td><td>Bajo</td><td>AAC; SAP; JGM; RLS; JMI; ABPG; ARP; MV (8)</td><td>SAP; ABPG (2)</td></tr>
<tr><td>Medio</td><td>(0)</td><td>JGM; RLS; ARP; MV (4)</td></tr>
<tr><td>alto</td><td>(0)</td><td>AAC ; JMI (2)</td></tr>
</table>

El análisis de los cuestionarios inicial y final indica que en general la participación en el módulo mejoró la competencia de reconocer la comprensión, ya que 6 EPMs mejoraron en alguna medida. Esta mejora estuvo vinculada a la manera en la que los EPMs identificaban como relevante cómo los estudiantes de Bachillerato usaban las siguientes relaciones en la resolución de los problemas,

- La relación entre el límite del cociente incremental y el significado de la derivada como pendiente de la recta tangente
- La relación entre la derivabilidad de la función y su continuidad, y
- La manera en la que se usaba la información obtenida desde la función o la función derivada alrededor de los puntos de inflexión y el punto cúspide (entendido como la manera de interpretar el comportamiento de la función derivada para inferir información sobre el comportamiento de la función)

Antes del módulo

En el cuestionario inicial los 8 EPMs se referían a la comprensión de los estudiantes de Bachillerato como “o todo o nada”. 5 de los EPMs reconocieron el uso de la TVM, la TVI en x =a y la TVI = f´(a) indicando que los estudiantes conocían algunos elementos matemáticos relativos a la idea de derivada, sin embargo los EPMs no supieron relacionarlo con las evidencias de los otros estudiantes. En cierto sentido, estos EPMs reconocieron las características del nivel de comprensión intra de la derivada de una función en un punto identificando que las respuestas de alguno de los estudiantes indicaban que comprendían elementos matemáticos aislados pero sin relacionarlo con las evidencias de los otros estudiantes.

Los otros 3 EPMs relacionaron entre sí la manera en la que los estudiantes de Bachillerato estaban resolviendo los problemas y reconocieron los dos extremos de la comprensión. Es decir, identificaron que el estudiante 1 sólo era capaz de usar la representación analítica de los diferentes elementos matemáticos pero que tenía dificultades cuando la resolución del problema implicaba manejar la representación geométrica y el paso al límite del cociente incremental en la aproximación numérica, y que el estudiante 2 podía usar adecuadamente estas ideas para resolver los problemas. De esta manera, estos EPMs identificaron las características de la comprensión del nivel intra y trans pero no lo que podría ser considerado una transición entre estas dos formas de comprender, que sería el comportamiento del estudiante 3 (inter).

Por ejemplo, JGM sólo reconoce las características de la comprensión de la derivada de una función en un punto que se ponen de manifiesto en el modo analítico pero no infiere información del comportamiento del estudiante de la aproximación numérica y la necesidad de la igualdad de los límites laterales. En consecuencia, sólo identifica que el estudiante 1 (nivel intra) usa los elementos matemáticos TVM y TVI en modo analítico y se fija en los modos de representación cuando reconoce la dificultad que tiene este estudiante en el modo gráfico y las tablas: "*Ante las tres respuestas considero que el alumno no tiene una buena compresión de la derivada no relaciona los conceptos de TVM y TVI cuando se le pide las imágenes de una función como su derivada no ha sabido interpretar las gráficas ni tomar las funciones correctas. Tampoco sabe relacionar una tabla de valores con la existencia o no de derivada en un punto*".

Esta respuesta es un ejemplo de cómo los EPMs no interpretaban los comportamientos de los estudiantes de Bachillerato como rasgos de diferentes niveles de comprensión de la derivada haciendo mención genérica a los elementos matemáticos y sus relaciones.

Después del módulo

Después de participar en el módulo de enseñanza 6 EPMs fueron capaces de reconocer la existencia de diferentes niveles de comprensión de los estudiantes de bachillerato en alguna medida.

De esos 6 EPMs, 2 describieron e interpretaron las respuestas de los estudiantes de Bachillerato apoyándose en la manera en la que los estudiantes usaban los diferentes elementos matemáticos y los modos de representación para dar cuenta de los diferentes niveles de comprensión. De esta manera, estos dos EPMs reconocieron que las respuestas dadas por el estudiante 1 mostraban sus dificultades en usar los significados de la derivada en modo gráfico (nivel intra de comprensión de la idea de función derivada), que el estudiante 2 comprendía y usaba los elementos matemáticos en modo analítico y en modo gráfico con carácter puntual (derivada de una función en un punto) cuando era necesario pero tenía dificultades en usar los significados geométricos con carácter global (función derivada) (nivel inter de comprensión de la idea de derivada). Finalmente, estos dos EPMs fueron capaces de identificar al estudiante (estudiante 3) que no tenía dificultades en usar los diferentes elementos matemáticos del concepto de derivada en los diferentes modos de representación (nivel trans de comprensión del concepto de derivada).

Por último, 4 EPMs después del modulo de formación solo identificaban algunas características de la comprensión del concepto de derivada y no siendo capaces de describir claramente las diferencias en el comportamiento de los estudiantes. Esta manera de proceder fue debido a que no reconocían la diferencia en la comprensión de los estudiantes que se ponía de manifiesto en su diferente resoluciones cuando resolvían el problema que implicaba analizar el comportamiento de la función alrededor del punto cúspide (cuestionario final, problema 2, comportamiento de la función en x=14. En este sentido, al no reconocer la información que se podía derivar de la manera en la que los estudiantes resolvían este problema les impidió interpretar de manera adecuada la respuesta dada por el estudiante 3 (nivel trans). El punto cúspide supone un máximo de la función sin cambio de curvatura lo que obliga a establecer relaciones entre aproximaciones globales y puntuales, es decir, pensar conjuntamente en el comportamiento de la función en intervalos y el comportamiento puntual de la función (Baker, Cooley y Trigueros, 2000).

Por ejemplo, JGM en el cuestionario final hace un mayor uso de los diferentes elementos matemáticos al describir las respuestas de los estudiantes reconociendo las diferentes demandas de cada uno de los problemas, sin embargo, no fue capaz de identificar la información relevante procedente de la existencia del punto cúspide que explícitamente considera un máximo " ... *dice* (el estudiante) *que no existe f'(14) porque la derivada por la izquierda y por la derecha son positiva y negativa respectivamente y no se da cuenta* (el estudiante) *de que si ocurre eso es porque en x = 14 hay un máximo*. *Debería haber utilizado ese elemento de la derivada que es global analítico".* De esta manera, el hecho de que JGM confunda el punto cúspide de abscisa x=14 con un máximo condiciona la interpretación que realiza de la comprensión del estudiante 3 (nivel trans) (figura 7). JGM considera que: *"En general este alumno tiene una comprensión bastante aceptable aunque en el ejercicio* (problema) *uno le falta asimilar algunos conceptos o elementos de la derivada al igual que en el ejercicio 2 que parece que lo comprende* (el estudiante) *pero no ve que en un máximo la derivada es cero si este máximo no viene dado por un trozo de función suave".*

CONCLUSIONES

Los resultados indican que el módulo diseñado tuvo un éxito relativo en mejorar la capacidad de los estudiantes para profesor para reconocer la comprensión de la derivada puesta de manifiesto a través de las respuestas a problemas por parte de estudiantes de Bachillerato. Después del módulo, los EPMs se apoyaban en la identificación de un mayor número de elementos matemáticos lo que les permitió a la mayoría de ellos superar planteamientos superficiales. Este resultado sugiere que el desarrollo de esta competencia docente está vinculado a centrar la mirada sobre aspectos que puedan mostrar información relevante de la manera de proceder de los estudiantes de Bachillerato. La capacidad de mira con más detalle las respuestas de los estudiantes y de reconocer lo que es relevante diferenciándolo de lo que es irrelevante para el aprendizaje se convierte en indicadores de esta competencia. Finalmente, el hecho de que no todos los estudiantes para profesor que participaron en este experimento de enseñanza fueran capaces de mejorar su competencia de reconocer la comprensión de los estudiantes muestra que su desarrollo es complejo y puede requerir más posibilidades de participar en este tipo de actividades.

Reconocimientos. Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación. España, y del Proyecto emergente GRE10-10 de la Universidad de Alicante. España.

Referencias

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The development of students` graphical understanding of the derivate. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 399-431.

Baker, B., Cooley, L. & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. J*ournal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 557-578.

Bartell, T.G., Webel, C., Bowen, B., & Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 57-79

Fernández, C., Callejo, M.L., & Márquez, M. (2012). Valoración de respuestas a problemas de división-medida con fracciones por estudiantes para maestro. En A. Estepa, A. Contreras, J. Delofeu, M.C. Penalva, F.J. García, y L. Ordoñez (eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI*, (pp.219-238). Jaén: SEIEM.

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education*, *44*, 747-759.

Fernández, C., Valls, J., & Llinares, S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real: SEIEM.

Fortuny, J. M., & Rodriguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*, 23-37.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C., & Philipp, R.A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*, 169-202.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice*. *The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer.

Rivas, M.A., Godino, J.D., & Castro, W.F. (2012).Desarrollo del conocimiento sobre la enseñanza de la Proporcionalidad en futuros profesores de Primaria. *BOLEMA-Boletim de Educaçao Matemática, 26* (42B), 559-588.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *RELIME-Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-296.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., & Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesores interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de Bachillerato. La derivada de la función en un punto. En A. Estepa, A. Contreras, J. Delofeu, M.C. Penalva, F.J. García, y L. Ordoñez (eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI*, (pp.497-508). Jaén: SEIEM.

Spitzer, S.M., Phelps, Ch.M., Beyers, J.E., Johnson, D., & Sieminski, E. (2011). Developing prospective elementary teachers' abilities to identify evidence of student mathematical achievement. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(1), 67-87.

Tall D. (1989). Concept image, generic organizers, computers, and curriculum change. *For the Learning of Mathematics, 9*(3), 37-42.

Van Es, E. (2010). A framework for learning to notice student thinking. En Sherin, M. G., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (Eds), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 134-151). New York: Routledge.