USO DE MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CUADRADO DEL BINOMIO

RAFAEL ALBERTO SOLÓRZANO BUENDIA
SERGIO DANIEL FUENTES ESPINOSA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Bogotá D.C.
2016

USO DE MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CUADRADO DEL BINOMIO

RAFAEL ALBERTO SOLÓRZANO BUENDIA
SERGIO DANIEL FUENTES ESPINOSA

Trabajo de grado presentado al Departamento de Matemáticas como uno de los requisitos para optar por el título de Especialista en Educación Matemática

Director
Edwin Alfredo Carranza Vargas
Mg en Educación y TIC

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Bogotá
2016

¨Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría: en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos¨ (Acuerdo 031 de 2007. Artículo 42. Parágrafo 2.)

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado especialización
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	USO DE MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DEL CUADRADO DEL BINOMIO
Autor(es)	Solórzano Buendía, Rafael Alberto; Fuentes Espinosa, Sergio Daniel
Director	Carranza, Edwin
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2106. 80 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras claves	MATERIAL DIDÁCTICO, PROCESO DE VISUALIZACIÓN, PROCESO DE GENERALIZACIÓN, BINOMIO DEL CUADRADO.

2. DESCRIPCIÓN

El presente es un trabajo de grado para optar al título de especialista en Educación Matemática, que tiene como objetivo diseñar actividades con material didáctico concreto y virtual para estudiantes de educación acelerada de ciclo 4 (octavo y noveno) del colegio Alemania Unificada de la localidad de San Cristóbal, para la enseñanza aprendizaje del cuadrado del binomio. Se aplica una prueba piloto con tres actividades para luego analizar si los materiales que componen cada actividad efectivamente fomentan el aprendizaje del álgebra y en especial del binomio del cuadrado.

3. FUENTES

Artigas, N. (2005). *Educar chile* . From ministerio de educación de chile : www.educachile.cl / Portal.base/Web/ver

Azarquiel, G. (1993). *Ideas y actividades para enseñar algebra .* Madrid : Sintesis .

Bishop, A. (1989). Review of research on visualitation in mathematics education. *ERIC* , 7-16.

Chacon, G. (2012). Visualización y razonamiento, creando imagenes para comprender las Matemáticas. *APM* , 1-27.

Cohecha, C. (2014). *Teorema del Binomio y aplicaciones .* Universidad Nacional . Bogotá: Universidad Nacional .

Davila, S. (12 de 2006). El razonamiento inductivo y deductivo dentro del proceso investigativo en ciencias experimentales y sociales . *Laurus* , 181-200.

Davis, R. (1985). Algebraic thinking in the early grades . *Journal of the mathematical behaviour* , 195-208.

Del grande, J. (1990). Spatial sense, arithmetic teacher . *ERIC* , 14-20.
Garcia, J. (Abril de 1998). *El proceso de generalizacion desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalizacion lineal.* Retrieved 2016 de Agosto de 25 from ftp://veda.bbtk.ull.es/ccppytec/cp41.pdf

MEN. (2006). *Estandares basicos de competencias en Matematicas.* Bogota: Editores Ltda.

Polya, G. (1966). *Matematicas y razonamiento plausible.* Madrid: Editorial Tecnos.

Ponce, H. (2007). La matriz foda alternativa de diagnostico y determinacion de estrategias de intervencion en diversas organizaciones . *Ensenanza en la psicologia , 12*, 113-12.

Ricks, A. (2000). Algebra for all, using homemade algebra tiles to develop algebra and pre algebra concepts. The national council of teachers of Mathematics ball of .

Velasco, E. (2014). *Uso del material estructurado como herramienta didactica para el aprendizaje de las matematicas.* Valladolid: Magisterio de Segovia .

Vergnaud, G. (1990). la theorie des chamos conceptuels. *Recherches en didactiques des mathematiques,* , 133-170.

4. CONTENIDOS

Dentro de los contenidos desarrollados en el proyecto de grado se clasifican dentro de los siguientes apartados

Marco teórico: Precisa ideas puntuales sobre la parte histórica del cuadrado del binomio, destaca material didáctico desde su definición y uso, los procesos de visualización y generalización y el análisis FODA.

Metodología: Descripción de la metodología utilizada en el trabajo y el tratamiento de los datos.

Actividades: Aparecen las tres actividades aplicadas, junto con su rubrica.

Resultados y análisis: En este apartado se puntualiza los hallazgos y las descripciones que se dan alrededor de ellos.

Conclusiones: Cierre del trabajo contando con lo que se concluyo y las posibles acciones que se pueden tomar si se desea continuar un estudio del uso de material didáctico.

5. METODOLOGÍA

Las actividades creadas para ser aplicadas como prueba piloto a los estudiantes de ciclo 4 del colegio Alemania Unificada, fueron elaboradas con material didáctico concreto y virtual (regletas de Cuiseinare, fichas algebraicas y (Geogebra). Dichas actividades fueron registradas en video y transcritas en tablas, luego para cada actividad se describió y sistematizo las fases presentes del proceso de generalización y las habilidades del proceso de visualización.

6. CONCLUSIONES

El objetivo general de este proyecto, se centró en el diseño de actividades para potenciar el entendimiento y desarrollo del cuadrado del binomio aplicadas a los estudiantes de la IED Colegio Alemania Unificada. De acuerdo con el objetivo planteado, se describen los resultados obtenidos y se presentan a continuación las siguientes conclusiones.

En la aplicación de las actividades diseñadas, se evidenció la importancia del material didáctico para el desarrollo del concepto del cuadrado del Binomio en un plan de clase, debido a que los estudiantes estaban a la expectativa de conocer el material, manipularlo y desarrollar la actividad propuesta.

En la descripción realizada, se resalta que el estudiante identifica una expresión algebraica por medio de áreas, argumentando que el producto de la longitud de los lados da como resultado el área y una expresión algebraica.

El material didáctico contribuye a que el estudiante potencie las habilidades de visualización, debido a la pertinencia del material utilizado (regletas de Cuiseinare y cuadros algebraicos) y de su forma de presentación, como lo son los colores y formas.

Estas actividades generaron un mayor grado de entendimiento en el desarrollo de conceptos del algebra, debido a que los estudiantes exploraron y se fortalecieron en los conceptos de suma y multiplicación de expresiones algebraicas, obteniendo un mejor desempeño en la clase.

Las actividades fueron pertinentes según las descripciones realizadas en el capítulo 6, así mismo se relacionaron con los contenidos (dispuestos en los estándares de educación para la enseñanza de algebra en ciclo 4) que se dan alrededor del binomio del cuadrado, lo que indica que este tipo de estrategias más que cambiar los procedimientos de clase los enriquece y permite repensarse el ejercicio de planeación y desarrollo de actividades significativas.

Se resalta que para potenciar el uso de material didáctico las instituciones y los profesores de matemáticas deben repensarse su ejercicio como docentes al momento de plantear actividades que enriquezcan y sean significativas para el estudiante además de mencionar que ese ejercicio puede ser más efectivo y flexible si se incluyen actividades que impliquen la manipulación de material didáctico.

El trabajo serviría de insumo para futuros trabajos en los siguiente aspectos:

- Crear unidades didácticas basadas en material didáctico para potenciar el desarrollo de conceptos algebraicos.
- Reflexionar acerca del ejercicio docente, en la forma en que los temas son planeados y desarrollados en el aula de clase.
- Ampliar los campos de acción en los cuales materiales didácticos como los presentados en esta propuesta pueden generar ideas a los profesores novatos y expertos en matemáticas.
- Diseñar actividades que relacionan el interés del estudiante, con los contenidos establecidos en los estándares básicos de competencias en Matemáticas para el desarrollo de expresiones de suma y resta del cubo.
- Para futuros trabajos o consultas de este trabajo, este trabajo se puede emplear para como insumo de planeación de actividades con material didáctico de lo cual también se concluye que el manipular material didáctico favorece el pensamiento matemático en los estudiantes sin importar el nivel de entendimiento y la edad.
- El ambiente de clase cambia debido al uso del material didáctico los estudiantes encuentran mas interesante las clases cuando se hace uso de materiales concretos o computacionales.

Elaborado por:	Rafael Alberto Solórzano Buendía, Sergio Daniel Fuentes
Revisado por:	Edwin Carranza

Fecha de elaboración del Resumen:	03	10	2016

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado **Uso de material didáctico para la enseñanza y aprendizaje del cuadrado del binomio** presentado por los estudiantes:

Rafael Alberto Solórzano Buendia ***Cód. 2016182020, CC. 1032413732***
Sergio Daniel Fuentes Espinosa ***Cód. 2016182004, CC. 1013596344***

Como requisito parcial para optar al título de **Especialista en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada,** con **42** puntos.

Observaciones:

____.

En constancia se firma a los 29 días del mes de noviembre de 2016.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesor: ______________________
EDWIN ALFREDO CARRANZA VARGAS

Jurados:

Profesor: ______________________
LUIS FRANCISCO GUAYAMBUCO QUINTERO (UPN)

Profesora: Maritza Méndez Reina
MARITZA MÉNDEZ REINA (UPN)

TABLA DE CONTENIDO

1 INTRODUCCIÓN

Este trabajo presenta una serie de actividades con material didáctico creadas a partir de los requerimientos de lo que se considera pertinente para ser un trabajo de especialización ya que como se dispone en los parámetros para presentación de trabajos de grado, este en particular no busca ser investigativo ni analizar con profundidad una situación particular, solo describir y sistematizar lo que una seria de actividades enfocadas al desarrollo del cuadrado del binomio pueden generar en los estudiantes de una institución pública.

Las actividades son diseñadas por dos estudiantes de la especialización en educación matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. Las actividades fueron aplicadas a los estudiantes del colegio Alemania Unificada de la localidad de San Cristóbal en la ciudad de Bogotá, en el programa Volver a la Escuela de la Secretaria de Educación de Bogotá. Las actividades diseñadas articulan los contenidos de enseñanza propicios para estudiantes de ciclo 4 (grados octavo y noveno) y a su vez estas se encuentran dentro del marco legal según lo establecido en los estándares de competencias (Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) y en los lineamientos curriculares de matemáticas (Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006)).

El presente trabajo está soportado dentro del marco referencial el cual fue construido paso a paso para justificar las teorías, conceptos, análisis y herramientas utilizadas en el diseño de actividades enfocadas a la conceptualización, interpretación y desarrollo del cuadrado del binomio. El marco referencial inicia con un recorrido histórico para comprender el desarrollo del cuadrado del binomio en la antigüedad, desde los babilonios, griegos, pasando por indios y árabes, y termina con el trabajo desarrollado por Isaac Newton. Enseguida se presenta la conceptualización de las habilidades del proceso de visualización y las etapas del proceso de generalización que se quieren potenciar con el desarrollo de las actividades a través del material didáctico (regletas de Cuiseinare, cuadrados algebraicos y material virtual hecho en Geogebra).

La metodología del trabajo consiste, en aplicar las actividades diseñadas (prueba piloto) a una población con características similares. Esta prueba piloto luego de aplicada, será descrita y registrada en una adaptación del esquema FODA, el cual identifica las habilidades del proceso de visualización y las etapas del proceso de generalización.

También permite establecer si el conjunto de actividades fue pertinente y a su vez exitoso para los objetivos del presente trabajo.

2 JUSTIFICACIÓN

En la IED Colegio Alemania unificada se desarrolla un proyecto de Secretaria de Educación de Bogotá llamado “Volver a la Escuela” o más conocido como aceleración, en los ciclos 3 y 4 en secundaria. Dentro de la caracterización de estos estudiantes, se puede observar que antes de su inclusión al proyecto presentaban deserción académica, condición de extra edad y además no habían asistido ningún espacio académico por varios años. De acuerdo a esta caracterización, el programa dentro de sus lineamientos de aceleración secundaria, establece que en un año se deben cursar las temáticas de grado sexto y séptimo (ciclo tres), y lo mismo para octavo y noveno (ciclo 4).

Estas actividades diseñadas para el desarrollo del cuadrado del binomio están dentro de lo establecido en estándares de matemáticas, a través de las competencias descritas en el ámbito del pensamiento variacional y sistemas algebraicos analíticos.

Debido a la necesidad de abarcar en parte los lineamientos curriculares de Matemáticas propuestas por el Ministerio de Educación Nacional para grado octavo y noveno y el proyecto de la SED “educación acelerada”. En cuanto a las competencias, es necesario diseñar prácticas y actividades efectivas para que la temática sea entendida y de interés para el estudiante. Para ello el uso de material didáctico en el desarrollo de actividades y planes de clases hacen que el aprendizaje sea significativo, en donde el concepto en estudio se manifiesta en diversas representaciones que muestra el material. Según los estándares básicos de competencias en matemáticas, “los modelos y materiales físicos y manipulativos ayudan a comprender que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas o algoritmos, si no que tienen sentido, son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas.(MEN, 2006)

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GENERAL

Diseñar actividades para potenciar el entendimiento del concepto y desarrollo del cuadrado del binomio a partir de material didáctico concreto y virtual en estudiantes de la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada de la ciudad de Bogotá.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Articular los contenidos de enseñanza que se han dado alrededor de los conceptos sobre cuadrado del binomio con el uso de material didáctico.

Evaluar el desarrollo de actividades basadas en material didáctico a través de la descripción y sistematización de los procesos de visualización y generalización.

3 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

En la IED Alemania Unificada se lleva a cabo un proyecto de la Secretaría de Educación llamado "Volver a la escuela", en donde la población estudiantil que pertenece a este proyecto cursa el grado octavo y noveno en un año académico, esto se debe a que son estudiantes con antecedentes de deserción académica y repitencia, además han dejado de estudiar por un periodo largo de tiempo debido a factores socioeconómicos (desempleo de padres, hijos a temprana edad, pandillas etc.), en consecuencia se pretende abordar temáticas referentes al álgebra en un periodo corto de tiempo lo que implica que las actividades deben ser reflexivas y concisas, por esta razón con base a la experiencia se piensa que una de las inquietudes de los profesores de matemáticas, es como enseñar álgebra de forma diferente a lo que comúnmente se desarrolla en clase, en donde se piensa, se describe un algoritmo para que los estudiantes lo reiteren cientos de veces a través de la resolución de ejercicios de diferente índole lo anterior desde su práctica hasta sus aplicaciones, sin embargo por falta de articulación de las temáticas de clase con los intereses de los estudiantes, no se encuentra arraigada algunas concepciones de algebra como es el caso del cuadrado del binomio por consiguiente una relación con las demás materias y su entorno social.

De esta manera y a partir de algunas experiencias en la práctica docente se ha evidenciado en las aulas de clase el gran obstáculo que hay entre la transición de la aritmética al álgebra, en especial la dificultad de manipular variables y darle un significado a la actividad, en este punto nuestro trabajo pretende propiciar un cambio en cuanto a que el álgebra y en especial el cuadrado del binomio y los temas derivados (propiedad distributiva y cuadrado perfecto) no radican sólo en la resolución de ecuaciones, sino en la interpretación de la solución lo cual llega a acercar a los estudiantes a una relación con nuestro entorno a través de la manipulación de material concreto y virtual que permite conocer cómo desde diferentes puntos de vista los estudiantes indagan, actúan y reflexionan acerca de las estructuras conceptuales del cuadrado del binomio, de la misma manera el proyecto propicia e invita a que los profesores de matemáticas reflexionen sobre la inclusión temprana del álgebra en la escuela primaria, (Davis, 1985), (Vergnaud, 1990). Este aunque no es un trabajo de investigación si pretende ser un sustento para que los profesores de matemáticas se inicien a ver el material didáctico no solo como herramienta de clase sino como un instrumento que desde edades tempranas puede generar curiosidad y a su vez interés el los estudiantes mas pequeños.

En adición con lo que se menciona en cuanto a la inclusión temprana del álgebra es importante mencionar que, aunque las investigaciones han apuntado a potenciar habilidades interpretativas de representación, generalización y argumentación en los estudiantes, estás solo han llegado a la expresión A^2 y B^2, por lo tanto, incluir nuevas formas de representación permitirán en gran medida visualizar que el cuadrado del binomio va más allá que la expresión anterior.

4 MARCO REFERENCIAL

4.1 REFERENTES MATEMÁTICOS

El siguiente recorrido histórico se retoma como antecedente del desarrollo del binomio del cuadrado, retomado de (Cohecha, 2014).

4.1.1 Teorema del Binomio

Desde la antigüedad el teorema del binomio ha hecho parte de los grandes trabajos de las matemáticas empezando por los Babilonios hasta nuestros días, a continuación, se presenta el desarrollo y evolución del concepto del cuadrado del binomio hasta nuestros días:

4.1.2 Babilonia 1600 a.c. hasta 1000 a.c.

Las matemáticas eran dominadas por el conocimiento aritmético y de algunos estudios centrados en medidas y cálculos geométricos, por tal motivo los Babilonios empezaron a estudiar los números, en especial, los números irracionales para los cuales el sistema de representación como las tablillas (para llevar cuentas teniendo en cuenta el sistema sexagesimal) les sugería que todos los números racionales tenían una raíz cuadrada tabulada, es decir una raíz determinada ante esto obtuvieron valores aproximados por medio de la siguiente regla.

$$(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{b^2}{2a}$$

La técnica empleada por lo Babilonios se aplica de manera explícita el cuadrado del binomio.

4.1.3 Grecia 600 a.c. hasta 300 a.c.

El Filósofo y Matemático Euclides basado en los trabajos de los antiguos Babilonios y Egipcios escribió la obra los elementos, trece libros que contienen la mayor parte del conocimiento matemático hasta el siglo IV a.c, en áreas tan amplias como: Aritmética y Geometría, en esta última Euclides específicamente en el libro II compuesto por 14 proposiciones de la cual destacamos la número 4 menciona (*Álgebra geométrica*) *"Si se divide mediante un punto cualquiera una recta dada el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de las partes más el doble del rectángulo que tiene a esas partes como lados",* si la expresión anterior se representa asignando algebraicamente a los segmentos se tiene que:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

En el mismo libro también descrito en otra proposición se encuentra el cuadrado de una diferencia que dice así "si *se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la recta entera y el de uno de los segmentos tomados conjuntamente son iguales a dos veces el rectángulo comprendido por la recta entera y el segmento conocido más el cuadrado del segmento faltante"*

Para su representación se toma el segmento total y una parte de ese segmento entonces:

$$a^2 + b^2 = 2ab + (a-b)^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

4.1.4 India Antigua (900 a.c 200 d.c.)

Los Sulba Sutras (siglo VII a.c. y II d.c.) son apéndices de libros antiguos sobre matemáticas. En la India se observa una concepción del origen de las matemáticas desde nociones religiosas ya que sus conocimientos en esta área los utilizaban para el desarrollo de la construcción de templos y altares, según Dutta profesor asociado del Instituto de estadística de la India, lo que usaban para la construcción se justificaba desde las identidades algebraicas como:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \qquad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad \text{y} \quad na^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 a^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 a^2$$

4.1.5 India clásica (Hacia 400-1600)

Aryabhata (476-550 d.c.) Matemática y astrónoma quien escribió el tratado Aryabhatatiyan en ambas áreas en forma de versos, al cual se hace referencia a temas de aritmética, álgebra y trigonometría en el cual uno de sus versos dice "hay *que sustraer la suma de los cuadrados del cuadrado de la suma; la mitad de eso es el producto de los factores"* de esta forma el enunciado se expresa algebraicamente así:

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2}$$

Lo cual es correcto y para llegar a esto se utiliza el cuadrado del Binomio.

4.1.6 Arabia (642 - 1258 d.c.)

Al-Karaji (953-1029) escribe y formaliza algunos procesos matemáticos en base a su trabajo sobre el teorema del binomio, los teoremas binomiales y el triángulo de Pascal en Al - Fakhiri (tratado matemático escrito por Al-Karaji) realiza el desarrollo de $(a+b)^3$ y en otros de sus textos Al-Badi, calcula $(a-b)^3$ y $(a+b)^4$.

4.1.7 Teorema del Binomio Newton

Isaac Newton destacado por ser el más grande científico de la historia de la humanidad publicó una obra maestra *Philosophiae Naturalis Principia mathematica* (1687), en la que establece las leyes del movimiento de los cuerpos y las leyes de gravitación universal hizo contribuciones en el campo de la Óptica, la Física y adicional en matemáticas, en especial al álgebra, lo cual no es menos comparable con los aportes de los más grandes matemáticos.

Newton descubrió el binomio una noche de invierno en 1664. Aparece expuesto en dos cartas que mandó al secretario de la Royal Society of London, Henry Oldenburg, para que se la transmitiera a Leibniz, después aparece publicado por primera vez en el tratado de álgebra de Wallis (1685), atribuyendo a Newton este descubrimiento.

Newton establece la extracción de raíces cuadradas se puede obtener de este teorema

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}\,AQ + \frac{m-n}{2n}\,BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ \; + \frac{m-3n}{4n}\,DQ + \cdots \qquad \textbf{(1)}$$

Donde A, B, C, D… Son los términos inmediatos que los proceden en el desarrollo.

Lo anterior significa que los coeficientes están dados así:

$$A = \; P^{\frac{m}{n}}$$

$$B = \frac{m}{n}\,AQ = \frac{m}{n}\;\; P^{\frac{m}{n}}\,Q$$

$$C = \frac{m-n}{2n}\,BQ = \frac{m-n}{2n}\,(\frac{m}{n}\;\; P^{\frac{m}{n}}\,Q)Q = \frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n}-1)}{2}P^{\frac{m}{n}}\,Q^2$$

$$D = \frac{m-2n}{3n}\,CQ = \frac{m-2n}{3n}\,(\frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n}-1)}{2}P^{\frac{m}{n}}\,Q^2)Q = \frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n}-1)(\frac{m}{n}-2)}{3*2}P^{\frac{m}{n}}\,Q^3$$

Remplazando los coeficientes en **(1)**

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = (\,P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}\;\; P^{\frac{m}{n}}\,Q + \frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n}-1)}{2}P^{\frac{m}{n}}\,Q^2 + \frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n}-1)(\frac{m}{n}-2)}{3*2}P^{\frac{m}{n}}\,Q^3 + \cdots\;\;)$$

Factorizando

$$P^{\frac{m}{n}}\,(1+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}}\,\left(1+\frac{m}{n}\quad Q+\frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n}-1)}{2}\,Q^2+\frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n}-1)(\frac{m}{n}-2)}{3*2}Q^3+\cdots\right)$$

Simplificando se tiene

$$(1+Q)^{\frac{m}{n}} = \left(1+\frac{m}{n}\quad Q+\frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n}-1)}{2}\,Q^2+\frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n}-1)(\frac{m}{n}-2)}{3*2}Q^3+\cdots\right)$$

(2)

Que corresponde a una expresión más familiar y usada actualmente.

Aunque el cuadrado del binomio para enteros positivos era conocido mucho antes, tal como se expuso en las acciones anteriores, el interés del descubrimiento de Newton está en que lo usa para exponentes fraccionarios y negativos y en que aparece una suma infinita en vez de un desarrollo finito.

En la notación actual se escribe de la siguiente forma:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}\,a^{n-k}b^k$$

(3)

Donde $a, b\ y\ n$ pueden ser cualquier número real y los coeficientes llamados coeficientes binomiales están dados por la fórmula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

Siendo n ! el factorial de un número n natural, el cual se define como:

$$n! = \begin{cases} 1 & si\ \ n=0 \\ n(n-1)! & si\ \ n\geq 1 \end{cases}$$

Si n es un número positivo se obtiene en la fórmula (3) un desarrollo finito ya que $\binom{n}{k}$ = 0 para $k > n$, al ser cero uno de los factores del numerador que define el
coeficiente binomial, en el caso de no ser n entero positivo aparecen series infinitas

Es importante aclarar que Newton no llegó a un desarrollo del cuadrado del binomio de una forma rigurosa, solo lo planteo después de sus investigaciones sobre el cálculo de áreas bajo curvas ordenadas de la forma $(1 - x^2)^m$.

Newton, al concluir que la fórmula del binomio podría extenderse a cualquier exponente racional le fue de gran ayuda en su formulación del cálculo infinitesimal, pues con ella logró hacer desarrollos en serie de algunas funciones y generalizaciones de operaciones con series de potencias, integrar o derivar funciones racionales y obtener la cuadratura de algunas curvas como la cicloide. También concluyó que, mediante su aplicación, el cálculo de las raíces se hace más corto.

Las demostraciones rigurosas del teorema del binomio las realizaron después: McLaurin, para valores racionales de n; Salvemini y Kâstner, para valores enteros de n; Euler para valores fraccionarios de n y Niels para exponentes complejos.

El recorrido histórico permite pensar, reflexionar y plantear actividades que potencian el pensamiento algebraico que resultan ser significativas para el estudiante, no solo porque le permitan ampliar su horizonte en cuanto al aprendizaje de conceptos como el cuadrado del binomio sino porque encuentra una relación entre la evolución del ser humano y el desarrollo de las matemáticas y que dicho avance solo pudo ser posible porque están muy relacionados, estas relaciones se podrían considerar dentro de los planes de enseñanza del algebra en general.

El pensamiento algebraico se inicia con el estudio de regularidades de patrones y de la detección de algunas propiedades de estos, que llegan a ser fundamentales en la enseñanza del álgebra y a su vez consecuentes con el cálculo, haciendo que, de manera simultánea el estudio algebraico surja como una generalización del trabajo aritmético, con respecto a esto se evidencia en los estándares básicos de educación matemática la enseñanza del cuadrado del binomio en la educación media, a continuación se presenta una tabla con las temáticas que se enseñan en torno del tema del cuadrado del binomio.

Tabla No. 1 *Relación del desarrollo del cuadrado del binomio con el pensamiento variacional y sistemas algebraicos analíticos.*

Material didáctico que posibilita el desarrollo del Cuadrado del binomio	***Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.***
Regletas de Cuiseinare Fichas algebraicas	Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
Regletas de Cuiseinare Fichas algebraicas	Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
Regletas de Cuiseinare Fichas algebraicas Geogebra	Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

4.2 REFERENTES CONCEPTUALES

4.2.1 Procesos de visualización en las matemáticas

Los procesos matemáticos involucran muchas concepciones y habilidades que van desde la comunicación de ideas a través de objetos matemáticos hasta el desarrollo de propuestas desde el pensamiento crítico, de esta manera se destaca que dentro de los procesos más importantes para lograr tal fin se encuentre la visualización que ha sido objeto de investigación por muchos años así mismo se destacan los siguientes autores cuyos aportes se encuentran recopilados en el trabajo de (Chacon, (2012) quienes presentan una propuesta profunda acerca de la importancia de este proceso.

- Duval (1999). Este matemático y experto en educación matemática ha realizado varios trabajos sobre la importancia de las representaciones en el desarrollo del pensamiento matemático, ya que, según este, no hay otras formas de acceder a los objetos matemáticos si no es a través de la representación semiótica, por tal motivo el proceso de visualización cobra relevancia dentro de la construcción del conocimiento. (lenguaje e imágenes).

- Zimmermann y Cunningham (1991). Definen el proceso de visualizar desde un enfoque pedagógico, como un conjunto de representaciones, de expresiones matemáticas que deben ser abordadas directamente por lo que se resalta el hecho de realizar investigaciones de manera continua basadas en el proceso de la visualización.

- Arcavi (2003). Es la capacidad, el proceso, el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes diagramas en nuestra mente sobre el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión.

- Hitt (1998). Resalta el valor de la visualización en la resolución de problemas y la importancia de pasar de un sistema de representación a otro para lograr la visualización. Para trabajar la visualización matemática requiere que el estudiante tenga exigencias cognitivas superiores, que el pensar algorítmicamente el cual ha sido la metodología de enseñanza tradicional en la educación secundaria.

Según los autores citados anteriormente, el proceso de visualización es un concepto amplio que se puede abarcar desde un enfoque pedagógico y desde un concepto especifico, que en este caso seria, el cuadrado del binomio.

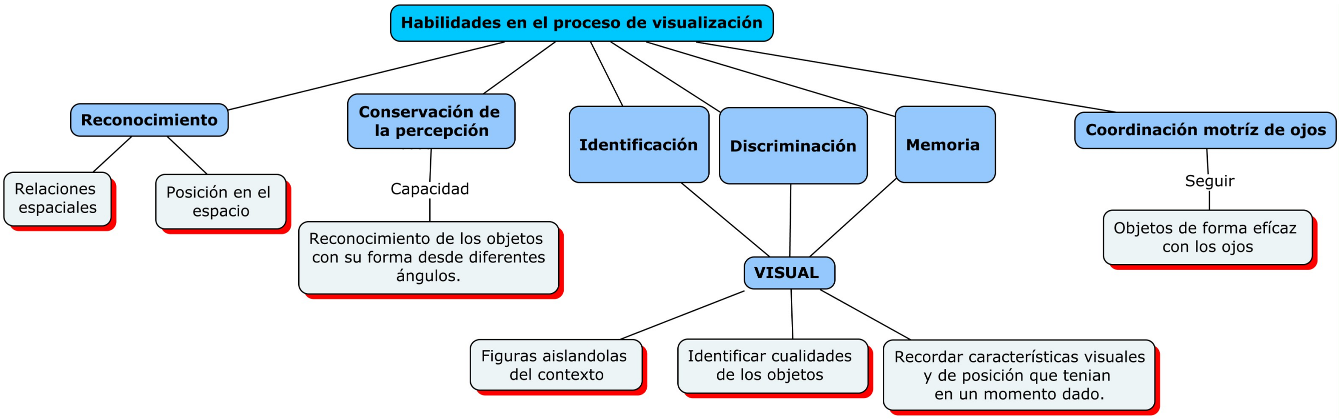
Los procesos de visualización permiten crear una imagen abstracta con relación a las representaciones del mundo real, de esta manera se pretende fortalecer la enseñanza del concepto del binomio del cuadrado a través de representaciones reales y de la manipulación de formas.

Desde lo que menciona Duval (1999), el presente trabajo de grado encuentra relevante esta mirada acerca del proceso de visualización y de cómo este puede optimizar el pensamiento matemático. A continuación, se presenta los diferentes tipos de imágenes visuales que se podrían incluir en la visualización que según (Bishop, (1989), son dos procesos:

- **Proceso visual (VP):** Este proceso comprende la conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales y también el proceso de transformación de unas imágenes a otras.

- **Interpretación de información figurativa (IFI):** Este proceso la comprensión e interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contienen.

Se destaca que Bishop no distingue entre proceso y habilidad, sin embargo, su caracterización de habilidades ayuda a precisar en cómo a partir de imaginarios se pueden abstraer conceptos matemáticos, sin embargo, para ser concretos con las habilidades de visualización se describe una relación la cual si logra distinguir los procesos de las habilidades (Del grande, 1990).



Esquema No 1. *Habilidades en el proceso de visualización*

4.2.2 Procesos de generalización en las matemáticas

La generalización ha sido un tema de interés tanto en la psicología experimental como en el campo de las matemáticas, de esta manera la generalización tiene como punto de partida las acciones que el sujeto introduce sobre los elementos de la situación a estudiar. Para Piaget y Dorfler una acción puede ser tanto material, física como mental, proceso con en el cual tales acciones se transforman en un algo abstracto. Dorfler llamó a este proceso abstracción reflexiva sin embargo fue Piaget quien lo llevó a su total entendimiento al incluir dicho concepto en la teoría de la construcción del conocimiento, dicha abstracción es nombrada por Piaget en varias ocasiones como aquella que parte de las acciones y las operaciones y no meramente de los objetos (Beth y Piaget, 1990, p. 40) (Garcia, 1998).

Polya, (1966) considera la generalización como una actividad en la que se acumulan ejemplos en la que se detecta y sintetiza una regularidad. Esta idea de generalización es la que Dorfler, nombra como generalización empírica; parte del trabajo con cosas particulares y está relacionada con la identificación de patrones.

Krutestskii (1976). Plantea que a partir de un contenido matemático se genere un proceso de generalización, estableciendo dos niveles, desde lo personal para ver algo general y conocido en lo que es particular y concreto (someter un caso particular a un concepto general conocido) y la habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo particular y aislado (deducir lo general a partir de casos concretos para formar un concepto). A su vez establece que para un estudiante es más fácil aplicar una formula conocida a un caso particular y muy diferente es decir la formula desconocida a partir de casos particulares.

De esta manera los procesos de generalización van más allá de procesos cognitivos simples, a ser procesos más profundos los cuales permiten que el sujeto llegue a un razonamiento inductivo, el cual se relaciona el entorno, para así favorecer nuevos conocimientos y a su vez la construcción de conceptos en particular álgebra.

Como menciona el grupo de investigación Azarquiel (1993), los procesos de generalización especialmente los que están involucrados en álgebra requieren de tres etapas:

a) ***Regularidad, relaciones y diferencia***
Esta etapa requiere un proceso mental donde se distingue lo que es propio de cada situación y común a todo lo que no varía, en esta etapa es necesario repasar en las figuras que se tiene refiriéndose esto a la manipulación de material como las regletas de Cuiseinare, fichas algebraicas etc.; además mostrar que sigue en una secuencia o en un proceso si es el caso.

b) ***Descripción verbal***
Esta etapa incluye la enunciación en lenguaje natural el cual permite identificar la manera más precisa de comunicar lo que se observa, en donde se busca puntualizar en lo que se encuentra.

c) ***Escribir de manera correcta***
Esta etapa comprende llevar a la forma escrita la etapa anterior, es el proceso más avanzado del proceso de generalización, se menciona que se sea de manera escrita ya que no se trata de solo escribir símbolos, que en su defecto sería simbolizar.

Por otra parte, en el trabajo de grado se consideraron estas etapas de generalización y el realizar una reflexión alrededor de cada actividad, por tal motivo se presenta el siguiente esquema que complementa el proceso de generalización al interior de las actividades con material didáctico.

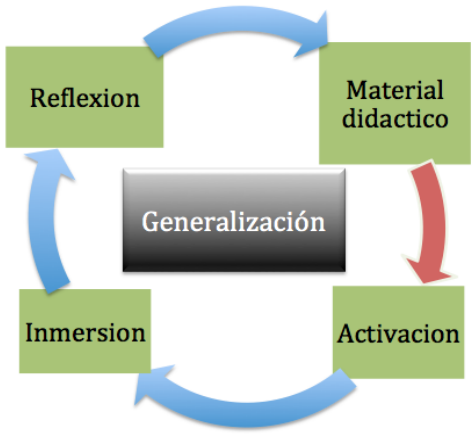


Diagrama No. 1 *proceso de generalización en los estudiantes*

4.2.3 Material didáctico

El uso de material didáctico ha cobrado mayor relevancia a partir de los años ochenta en donde se empiezan a promover nuevos métodos de enseñanza en los cuales el profesor debe involucrar los interés del estudiante y factores de su entorno, en consecuencia tanto instituciones como editoriales se han enfocado en diseñar material didáctico que logre proporcionar experiencias individuales irrepetibles que lleguen importantes para los estudiantes, ya que logran construir relaciones más complejas y relevantes que llegan a ser significativas y coherentes en el momento que se aborda alguna situación de la vida real.

De esta forma dichos materiales didácticos no deben confundirse con los materiales educativos ya que tienen una connotación diferente según Artigas, (2005) en una publicación realizada en el portal de internet de educarchile se hace una distinción entre material educativo y material didáctico siendo el primero aquel material que está destinado a las personas que enseñan a los niños y no para los niños es decir sirve de guía universal para que las personas no docentes sepan qué enseñar, mientras el segundo es un material que incide en la educación de valores, desde muy tempranas edades así mismo el material didáctico debe garantizar unos contenidos claros, llamativos y significativos para los estudiantes.

4.2.4 Recursos didácticos en las matemáticas

Didáctica de las matemáticas es una disciplina autónoma no es un instructivo de enseñanza ni una orientación para el profesor, tonado como base el informe Faure, aprender a ser (1973) en donde se incorpora la idea de un proceso permanente en donde se busca el bien común de los senadores.

Esta idea de despertar interés consiste en activar la sorpresa, la intriga la reflexión y curiosidad, por tanto, es importante que el profesor genere un ambiente adecuado con las preguntas adecuadas dirigidas a poner en controversia las ideas previas del estudiante.

La aplicación del material didáctico concreto y virtual en una clase implica una serie de procedimientos en los cuales el docente debe anticipar actitudes y aptitudes para que la práctica que preparó tenga los resultados esperados o que a su vez tome un rumbo inesperado, pero que también se obtenga como resultado los objetivos planteados.

Las ventajas de usar recursos didácticos descritos en Conocimientosweb.net, (2014) son:

a) El recurso manipulativo es siempre un medio para promover el aprendizaje de un concepto en cualquier área del conocimiento, nunca debe ser un fin en sí mismo.

b) Permite la manipulación de conceptos reduciéndose a aspectos concretos del mismo.

c) Permiten ver, tocar, coger y mover, reproduciendo acciones irreproducibles en el tablero.

d) Las construcciones y modelaciones realizadas permanecen en el tiempo para volver a ellas para algún tipo de retroalimentación.

e) Genera la motivación y despierta la creatividad en el alumno.

Limitaciones del uso de material didáctico.

a) Posee un uso limitado, debido a que la modelación o construcción se realizó para el cumplimiento de un objetivo y no para el uso de todo un programa académico.

b) El uso de material didáctico debe ser para una manipulación ágil, no debe estorbar en el momento de realizar la actividad.

4.3 Análisis FODA

Este tipo de análisis es por lo general utilizado por empresas para medir el nivel de competencia y crecimiento que se desarrolla en las diferentes dependencias, sin embargo, para este trabajo se desea modelar dicho análisis para fines educativos, para ello nos remitimos al trabajo de Ponce, (2007), el cual enfatiza en la importancia de este esquema en la Psicología.

Estas siglas provienen del acrónimo en inglés SWOT (strenghts, weaknesses, opportunities and threats), en español se refiere a fortalezas, oportunidades debilidades y amenazas.

El análisis FODA consiste en realizar una evaluación de los factores fuertes y débiles que, en su conjunto, diagnostican la situación interna de una organización, así como su evaluación externa, es decir las oportunidades y amenazas, en este caso se toma este formato para recoger las fortalezas y debilidades de las actividades objeto de estudio.

Para dicho esquema se establecen algunas condiciones o momentos de las situaciones para identificar en primera instancia las fortalezas y debilidades, se resalta que para este trabajo se tendrán en cuenta solo las fortalezas, debilidades y oportunidades que de ahora en adelante para este trabajo se abreviara como FOD, ya que no se considera que las amenazas sean pertinentes para el objetivo del trabajo.

4.3.1 Fortalezas y debilidades

Una fortaleza es un evento o situación que se ha desarrollado de manera correcta, otro aspecto identificado como fortaleza son los recursos considerados valiosos y el cómo se gestan momentos favorables, en este sentido las fortalezas para el proyecto sería que los procesos de visualización desde sus habilidades y el proceso de generalización desde sus etapas se esté evidenciado y desarrollando en cada una de las actividades.

Una debilidad se define como un factor que hace vulnerable a la organización o en este caso a la actividad, es decir, algún evento o situación que no hace posible que la actividad se desarrolle según los objetivos esperados.

Para el análisis una vez identificada ambas fortalezas y debilidades se debe proceder a la evaluación de ambas. Es importante mencionar que algunos factores tienen más preponderancia que otros en este caso tanto fortalezas como debilidades son importantes, sin embargo, se espera que las fortalezas sean mayores que las debilidades.

4.3.2 Oportunidades

Las oportunidades constituyen aquellas fuerzas ambientales de carácter externo no controlables por la actividad, pero que representan elementos potenciales de crecimiento. La fortaleza es importante ya que permite moldear las estrategias de la organización o en este caso la situación, es decir, las oportunidades para este trabajo son los factores que deben ser objeto de mejoría para así optimizar las actividades y hacer que sean más efectivas.

4.4 SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Los sistemas de representación permiten expresar de diferentes maneras y formas un mismo concepto. Si para un concepto existen diversas representaciones, mayores oportunidades de comprensión del concepto se puede obtener. El objetivo de estas representaciones es que se puedan identificar cambios de signos en el sistema de representación de los objetos matemáticos como de orden sintáctico.

Los sistemas de representaciones pueden verse como una característica singular en cada sujeto por lo cual se pueden distinguir representaciones internas y externas, entre estas modalidades de representaciones las expresa Duval (1993), en los siguientes términos: las representaciones internas (mentales) y externas no pueden verse como dos dominios diferentes, el desarrollo de la representación interna se ve más como la interiorización de la representación externa; la diversificación de representaciones de un mismo objeto o concepto (cuadrado del binomio) aumenta la capacidad cognitiva del sujeto, por consiguiente, su capacidad de pensamiento sobre ese objeto o concepto. De manera recíproca las representaciones externas, como son los enunciados en el lenguaje natural, las formulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, entro otras, son el medio por el que los individuos exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a los demás.

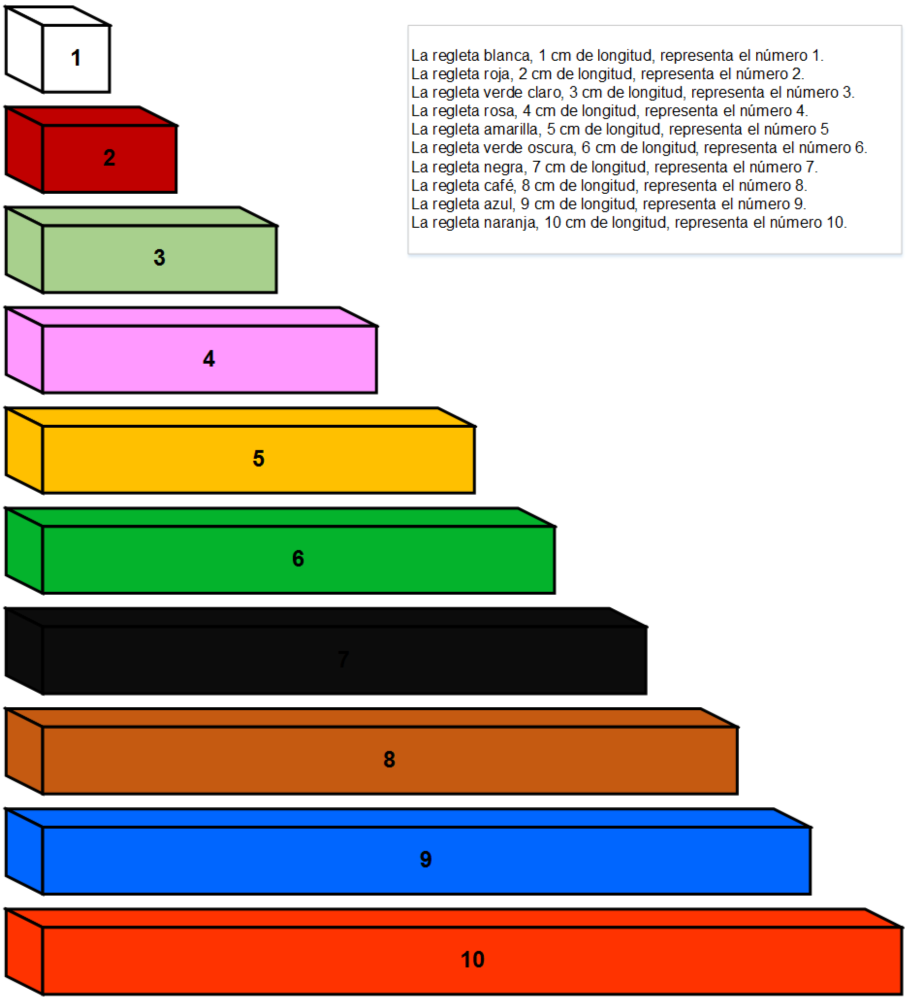
Dentro de las representaciones externas se distinguen dos tipos: las representaciones digitales, discretas de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas informáticos (Geogebra) y las representaciones analógicas, continuas de tipo grafico o figurativo cuya sintaxis viene dada principalmente por reglas de composición y convenios de interpretación (manipulación con material didáctico concreto).

4.5 REGLETAS DE CUISENAIRE

En muchas ocasiones los profesores de matemáticas encuentran dificultades cuando buscan cómo enseñar un concepto o cómo mejorar la enseñanza de un tema para los alumnos, en este sentido las regletas de Cuiseinare son un material didáctico de ayuda para la exploración de conceptos aritméticos y algebraicos.

Las regletas de Cuiseinare son un conjunto de prismas rectangulares de 1 cm^2 de base y cuya longitud oscila entre 1 y 10 cm, el material más común de fabricación es madera. Las regletas tienen diez tamaños y colores diferentes, cada regleta corresponde a un número determinado.

La regleta blanca, 1 cm de longitud, representa el número 1.
La regleta roja, 2 cm de longitud, representa el número 2.
La regleta verde claro, 3 cm de longitud, representa el número 3.
La regleta rosa, 4 cm de longitud, representa el número 4.
La regleta amarilla, 5 cm de longitud, representa el número 5
La regleta verde oscura, 6 cm de longitud, representa el número 6.
La regleta negra, 7 cm de longitud, representa el número 7.
La regleta café, 8 cm de longitud, representa el número 8.
La regleta azul, 9 cm de longitud, representa el número 9.
La regleta naranja, 10 cm de longitud, representa el número 10.



Para iniciar cualquier tipo de práctica, el estudiante debe familiarizarse con el material, aprender los colores y reconocer las cantidades representadas en el tamaño de cada regleta. Los ejercicios de ordenación de números, son ideales para la manipulación de las regletas, conceptos como mayor que o menor que, hacen que el alumno reconozca mejor el material didáctico.

4.6 FICHAS ALGEBRAICAS (ALGEBRA TILES)

Los algebra tiles es un material didáctico constituido por cuadrados y rectángulos de diferente tamaño, el número uno es la unidad representado por el cuadrado pequeño, el x^2 representado por el cuadrado grande y el rectángulo representa x, algunas distinciones de este material didáctico son: el lado del cuadrado de x^2 es igual a la longitud a la figura cuadrada de x.

Su uso se explica debido a lo fácil que resulta la manipulación, ya que estos tiles combinan conceptos algebraicos y geométricos usando un modelo de multiplicación, que ha sido muy exitoso en colegios de Estados Unidos (Eastside Union School District, Mission Collegiate Hight School y etc.). La manipulación con este material da a los estudiantes varios modos de sumar objetos concretos, en este caso los cuadrados y rectángulos, además ayuda a la solución de problemas algebraicos como: suma, resta y multiplicación de expresiones algebraicas, y brinda una estructura de referencia para los estudiantes quienes no logran abstracción de pensamiento, es decir es una forma de conocer el mundo más allá de los sentidos es el reflejo mediado de la realidad a través, en este caso de material didáctico.

4.7 GEOGEBRA

En la actualidad, los cambios científicos, tecnológicos y culturares han hecho que existan nuevos procesos de aprendizaje, los cuales generan nuevos métodos para la el entendimiento y desarrollo de conceptos como el cuadrado del binomio. Estos nuevos métodos, han llevado a posibilitar la aparición de nuevos software dinámicos, los cuales permiten generar actividades didácticas que incentivan al estudiante a descubrir regularidades, conjeturas y relaciones entre elementos geométricos. Geogebra es un software interactivo libre, creado por Markus Hohenwarter en Austria. El cual ofrece herramientas para trabajar con la mayoría de contenidos matemáticos en cualquier nivel educativo y facilita la exploración dinámica de situaciones de la vida real.

Unas de las características y ventajas del uso de Geogebra, es permitir el arrastre de figuras construidas, estas figuras pueden ser modificadas de tamaño en cuanto a las longitudes de sus lados y volver a su estado original las veces que se requiera lo cual no ocurre cuando el estudiante trabaja con lápiz y papel. A su vez permite construir elementos o cuerpos geométricos con las características que la actividad planteada lo requiera.

Para observar y revisar las actividades desarrolladas con Geogebra, el docente puede compartir en la web el recurso, el cual puede ser utilizado en línea por cualquier persona.

5 METODOLOGÍA

En la manera como se filtraron los datos, no podríamos hablar de algún tipo de investigación (cuantitativa o cualitativa) sino de un estudio descriptivo en el cual ponemos en práctica unas actividades a una población de estudiantes determinada teniendo en cuenta características comunes entre los sujetos en este caso las edades y el rendimiento académico.

De esta manera el estudio descriptivo se fundamenta en las formas de conducta y establece comportamientos concretos de los estudiantes, es así como se identifican algunas características de las actividades a través del análisis FOD[1], habilidades del proceso de visualización y etapas del proceso de generalización.

Para la planificación se menciona que al ser un trabajo para especialización no se realizó una investigación de manera rigurosa, lo cual no significa que el trabajo carezca de fuentes confiables y sólidas, por tal motivo para agrupar las descripciones de los estudiantes tomadas de la transcripción de los videos, se hace pertinente la selección de la tabla de análisis FOD, para así evidenciar los aspectos principales de cada actividad y demás atributos (debilidades, fortalezas y oportunidades), los anteriores descritos desde lo que se evidencio de cada actividad en cuanto a los procesos de generalización y visualización.

Esta prueba piloto consiste en aplicar 3 actividades a los estudiantes por grupos con material didáctico concreto y virtual, del cual tuvieron previa instrucción (2 a 3 semanas) antes, lo anterior, se realiza a un grupo específico de estudiantes a los cuales se les orienta en cuanto a la manipulación y el cuidado con el material didáctico, los objetivos para la clase y el alcance del material para responder a estos objetivos. Al finalizar cada actividad, se empieza un debate en donde se dialoga de forma crítica acerca del desarrollo de las actividades y además, se mencionan, cuáles fueron las dificultades, fortalezas y sugerencias sobre el respectivo material. Dentro de las preguntas a debatir se menciona casos particulares de cada actividad, en el caso del material concreto se menciona como la manipulación ayudo al desarrollo de cuadrado del binomio, si el uso de los cuadrados geométricos, regletas de Cuiseinare y Geogebra fueron efectivos, significativos y concisos al momento de resolver la guía de las actividades.

---

[1] Para facilidad de interpretación del siguiente trabajo FOD será la abreviación de Fortalezas, Debilidades y Oportunidades.

[2] Reconocimiento, primera de las habilidades al proceso de visualización

5.1 POBLACIÓN

La población se constituye por 40 estudiantes de dos cursos de ciclo 4 de la Institución Educativa Alemania Unificada con edades entre 15 y 20 años, previo al protocolo de iniciación de las actividades en donde se les indica las nociones generales de la manipulación a los estudiantes, se adelantan procesos de manipulación con el material en donde explícitamente se reflexiona sobre el desarrollo de operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) con cada material didáctico.

5.2 INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Los datos se recopilan por medio de las producciones escritas de los estudiantes al resolver las tareas propuestas y de grabaciones de video y audio para así evidenciar la manipulación del material didáctico con el fin de ampliar y precisar las descripciones desarrolladas por ellos.

5.3 DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO

Los dos cursos del ciclo 4 se dividen en grupos de 4 o 5 personas no se clasifica cada grupo para las grabaciones, en su lugar se toma un grupo control el cual se monitorea durante todo el periodo de clase, los demás grupos tienen las mismas actividades, pero la observación con ellos no es tan rigurosa como le es para el grupo control. Las actividades se desarrollan en 3 sesiones de clase cada una compuesta de 2 horas (1:40 minutos) en las cuales se hace énfasis en la manipulación del material didáctico y en la reflexión acerca de su uso.

Los ejercicios que privilegian las actividades son; la manipulación del material por parte de los estudiantes, los argumentos que paulatinamente surgen de los estudiantes al ir abordando la actividad, al final se inicia un debate en donde se evidencian las posibilidades y las limitantes de cada actividad. Se destaca que al final de la sesión, se pretende que los estudiantes argumenten un mejor entendimiento del Binomio del cuadrado debido al ejercicio con el material.

6 ACTIVIDADES

En este capítulo se presentan las 3 actividades descritas a aplicar a los estudiantes de ciclo 4.

Los estudiantes tuvieron la oportunidad de manipular el material con anterioridad, por lo cual, estos ya tienen unas ideas previas acerca de cómo usarlo, adicional los estudiantes tienen conocimiento en cuanto lo que significa expresión algebraica y el proceso factorización.

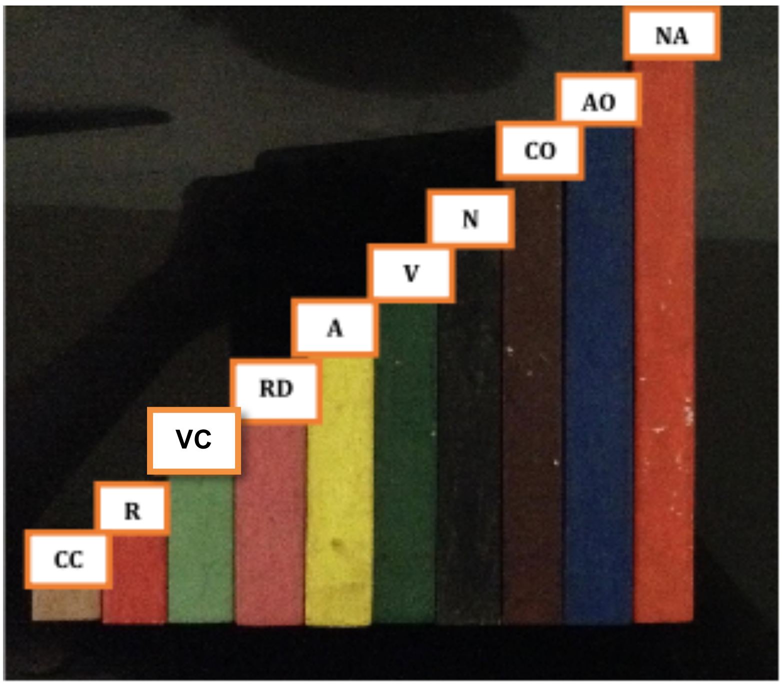
Esta actividad es la primera de una serie de actividades con material didáctico, en este caso con las regletas de Cuiseinare las cuales pretenden fortalecer el conocimiento algebraico y concretamente el cuadrado del binomio.

6.1 REGLETAS DE CUSEINAIRE

Las regletas de Cuiseinare y el cuadrado del Binomio

COLOR	Café clara (CC)	Roja (R)	Verde Claro (VC)	Rosado (RD)	Amarillo (A)	Verde (V)	Negro (N)	Café oscuro (CO)	Azul Oscuro (AO)	Naranja (NA)
VALOR NUMÉRICO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

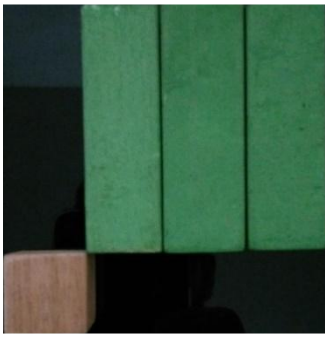
Tabla No.1 Regletas de Cuisenaire



Descripción de los valores que toman tanto (a) como (b) desde el uso de las regletas en el caso de que los valores sean: (CC (a), VC (b)). Se destaca que los valores que toman tanto a como b son longitudes.

1. Complete los espacios vacíos de la tabla con las posibles representaciones que podrían tomar según, el valor algebraico dado y la descripción para luego responder las preguntas del numeral 2 y 3 haciendo uso exclusivo del material didáctico.

Valor algebraico	*Imagen (regleta de Cuisenaire)*	*Descripción*
a		La primera regleta ilustra el número respectivo al área de la regleta CC.
b		La segunda regleta ilustra VC.
a^2		La potencia de esta representación es la superficie $(CC)^2$.

b^2		La potencia de esta regleta la superficie VC^2, lo que significa que se debe representar con una cantidad de regletas de VC.
$(a+b)^2$		Se colocan los productos de CC^2 y VC^2 En donde los espacios en negro representan lo que resulta de su desarrollo, faltando en este caso dos regletas de VC. Se desarrolla la expresión desde los paréntesis y luego la potencia, se colocan al lado de la regleta uno las regletas respectivas de VC que dejarían indicado que se suma una potencia.
$(a+b)^2 - b^2$		En este caso al operar con el $-VC^2$ Indica que se retiran las regletas que representan este resultado.

$-a^2$ **Completa** $(a+b)^2 - a^2 - b^2$		En este caso al operar con el $-a^2$ Indica que se retiran las regletas que representan este resultado.
$\frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$		Al retirar las regletas de $-CC^2\ y - VC^2$ solo quedarían las regletas que representan el termino VC. Y al dividir en 2, seria retirar una de las regletas en este caso solo quedaría una regleta VC.

Preguntas orientadoras

2. Si tiene 8 regletas de Cuiseinare (RD) y 2 regletas (R), ¿Qué suma del cuadrado estaría representando estas regletas?

Desafío matemático

3. Teniendo en cuenta los resultados de la tabla y el numeral 2 conteste y justifique lo siguiente

Si la siguiente expresión es:

$$-a^2 - b^2 = 12$$

3.1 Ilustre con las regletas de Cuiseinare este resultado y los posibles valores que podrían tomar a y b.

6.2 FICHAS ALGEBRAICAS (ALGEBRA TILES)

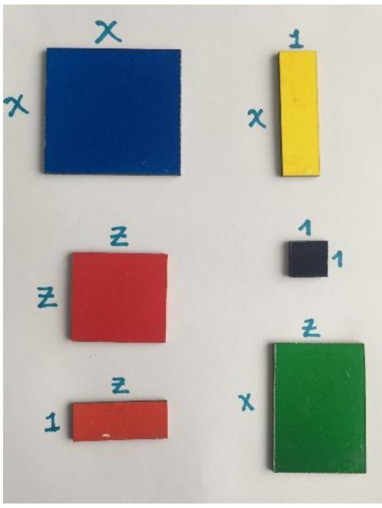
Para el desarrollo de la actividad de las fichas algebraicas, se deben tener en cuenta unos conocimientos previos desarrollados en los estudiantes. Dentro de estos conocimientos, se pueden establecer las relaciones con los números reales, la simbolización, utilización de términos algebraicos y la interpretación algebraica por medio de la representación de áreas.

Arabia y el cálculo de áreas desde la manipulación de representaciones geométricas

Introducción a la actividad

El desarrollo de las civilizaciones fue muy importante para el pensamiento matemático en la antigüedad. El inicio de las civilizaciones comenzó cuando el ser humano decidió dejar de ser nómada para establecerse en un sitio, el cual le diera el sustento necesario para sobrevivir. En la civilización Babilónica y Arábiga, el asentamiento territorial de sus habitantes generó la necesidad de medir el espacio, para que no existieran inconvenientes a nivel social entre sus habitantes. El patrón de medición que se utilizaba en ese tiempo eran las partes del cuerpo humano, como la longitud de una extremidad o el ancho de la mano. De acuerdo con esto se generó el cálculo de las primeras áreas, siendo terrenos irregulares. La representación del teorema del binomio por medio de áreas establece una relación entre el álgebra y la geometría.

Establecer la longitud de cada uno de los lados de las fichas algebraicas de la imagen para luego realizar el producto indicado.



2. De acuerdo a la imagen la medida de uno de los lados del cuadrado azul es x, por lo tanto, al calcular el área del cuadrado azul se debe realizar el producto entre la longitud de dos de sus lados $x.x = x^2$.

1. Por medio de las fichas algebraicas realizar el producto indicado aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.

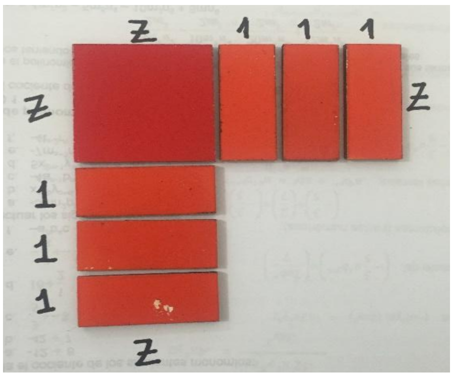
2. De acuerdo a la imagen la medida de uno de los lados del cuadrado azul es x, por lo tanto, al calcular el área del cuadrado azul se debe realizar el producto entre la longitud de dos de sus lados $x.x = x^2$.

3. La ficha amarilla representa un rectángulo, la longitud del lado más largo es x y del lado más corto es 1. Al calcular el área de esta ficha se debe realizar el producto entre las longitudes de sus lados $x.1 = x$
4. El lado del cuadrado rojo tiene como medida z, por lo tanto, al calcular el área se debe realizar el producto entre la longitud de dos de sus lados $z.z = z^2$.

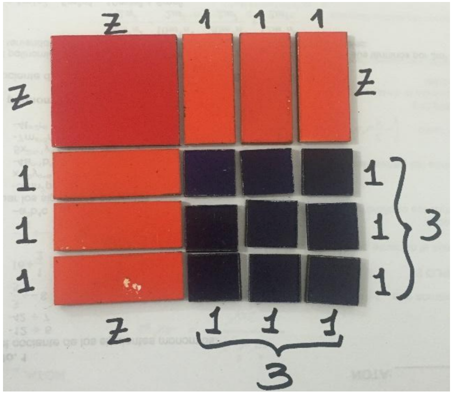
Se debe realizar el mismo proceso con las otras fichas algebraicas de la imagen.

Ejemplo: realizar el producto de la siguiente expresión $(z + 3)(z + 3)$
Para realizar el producto de la expresión $(z + 3)(z + 3)$ se debe aplicar la propiedad distributiva con respecto a la suma, por lo tanto, se inicia con el producto $z.z = z^2$ el cual es representado por el cuadrado rojo. Luego el producto $z.3 = 3z$ el cual se representa con los tres rectángulos naranjas y se ubican enseguida del cuadrado como se muestra en la figura.

Se realiza el producto $3.z = 3z$ el cual se representa con los tres rectángulos naranjas y se ubican en la parte inferior del cuadrado como se muestra en la figura.



Se continua con el último producto de $3.3 = 9$ los cuales se van representar con los cuadrados negros que representan una unidad, se ubican de manera que toda la figura represente un cuadrado, de la siguiente manera.



Al realizar la suma de todos los productos se obtiene como resultado en siguiente polinomio $z^2 + 3z + 3z + 9$.

Representar por medio de áreas el producto de los siguientes binomios, haciendo uso de las fichas algebraicas, teniendo en cuenta el ejemplo anterior.

Producto Indicado	**Representación del área a través de las regletas algebraicas**	**Expresión algebraica Resultante**
$(x + 3)(x + 3)$		
$(x + 1)(x + 1)$		
$(z + 2)(z + 2)$		

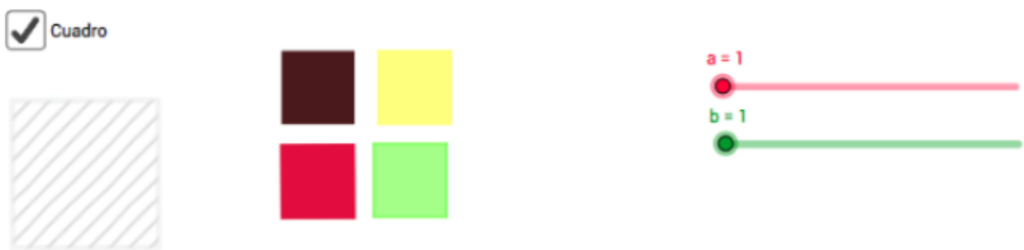
6.3 GEOGEBRA

Geogebra y la dinámica de las representaciones

Introducción a la actividad

Los procesos matemáticos que se pretenden desarrollar con la manipulación de la aplicación Geogebra son el brindar una visión más amplia de lo que representa el cuadrado del binomio desde los valores que puede tomar sus variables siendo estos enteros o números decimales; además de permitir llegar a procesos más formales (manipulación del material virtual) que en corto plazo permitan generalizar la forma del cuadrado.

A continuación, se evidencia algunos rasgos importantes de la aplicación Geogebra para posterior manipulación.



Preguntas orientadoras

Con base en la manipulación de la aplicación Geogebra responda las siguientes preguntas:

1. cómo acomodaría las representaciones (rectángulos o cuadrados de los diferentes colores) para formar el cuadrado del binomio, tomando cualquier valor que puede ser determinado en los deslizadores.

2. Organice de acuerdo sus experiencias con la actividad 1 y actividad 2, las figuras geométricas sin usar el cuadrado de referencia (blanco) los cuadrados y rectángulos y explique lo que observa.

3. ¿Cuánto miden las figuras geométricas en términos de área $a\ y\ b$?.

Desafío matemático

1. ¿Cómo se justifica la fórmula del cuadrado del binomio desde la manipulación con los cuadrados y rectángulos?. ¿ Cómo se justifica el $2ab$?.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

7 RESULTADOS Y DISCUSION

Para describir y sistematizar los resultados de los estudiantes nos enfocamos en tres aspectos; en las respuestas a las preguntas de las actividades, la manipulación del material y el tipo de comentarios que surgen luego de una reflexión en cada sesión de clase, se destaca que las intervenciones fueron grabadas en videos. Es importante señalar que en las actividades se espera que el estudiante llegue a generalizar el cuadrado del binomio y que en este proceso se detallan nociones relacionadas con conceptos que no se puede desvincular de los contenidos de enseñanza con el uso de material didáctico, por ello se decide elaborar tablas. En la columna de la izquierda se muestra los sujetos (profesor y estudiante) y en la parte de la derecha la descripción al profesor y la transcripción de lo que dice el estudiante y al lado su imagen, en el renglón siguiente se presenta la descripción en la cual se incluirán elementos del proceso de visualización y generalización, dados estos como: (fortalezas, oportunidades, debilidades y amenazas) la última etapa no será tenida en cuenta para este trabajo, por tanto se denominará como FOD, ya que desde la dinámica del trabajo las amenazas son entendidas en la misma jerarquía que las debilidades.

Las etapas del esquema FOD son enmarcadas dentro del proceso respectivo (visualización y generalización). Esto se hizo teniendo en cuenta los referentes teóricos descritos en el marco referencial, en el cual se menciona, que en el proceso de visualización se describe a través de habilidades y el proceso de generalización por medio de etapas.

7.1 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los resultados del trabajo de grado se presentan en forma de tablas, ya que los registros del desarrollo de las actividades están en video, dichas tablas son tabuladas en el capítulo de anexos, sin embargo, por efectos de justificar y verificar se tomarán las imágenes más importantes para así señalar el proceso de visualización o de generalización que involucra las acciones de los estudiantes en los momentos de la manipulación con el material.

7.1.1 Análisis actividad No. 1

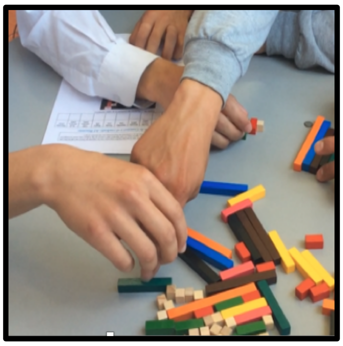


Imagen 1. *Reconocimiento de las regletas de Cuiseinare*

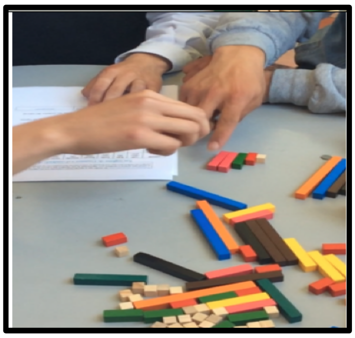


Imagen 2. *Manipulación de las regletas de Cuiseinare*

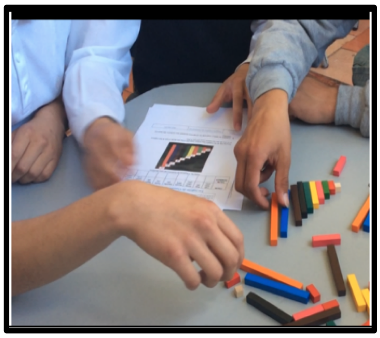


Imagen 3. *Manipulación de las regletas de Cuiseinare*

En las imágenes 1, 2 y 3 se observa que los estudiantes se encuentran en la etapa del ***reconocimiento***[2] del material didáctico, al manipular las regletas de Cuiseinare y clasificarlas por tamaño y colores, los estudiantes empiezan a vincular el tamaño con los posibles valores numéricos que podrían tomar estas, esto se logra, también al estar guiados por la longitud de la regleta, este paso del material (representación visual) a lo abstracto (valor numérico) es descrito como interpretación figurativa ***(IFI)***[3].

Otro tipo de asociación que el estudiante hace es con relación al color de las regletas en donde las regletas (CC), (R), (VC), (N), representan cantidades de valor numérico menor que los que representa las demás regletas, en este caso las más largas.

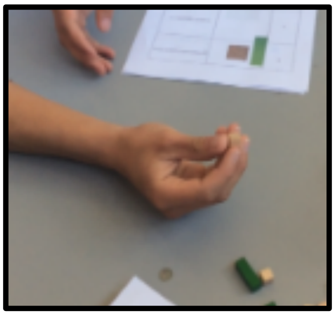


Imagen 4. *Representación de a^2 con las regletas de Cuisenaire*

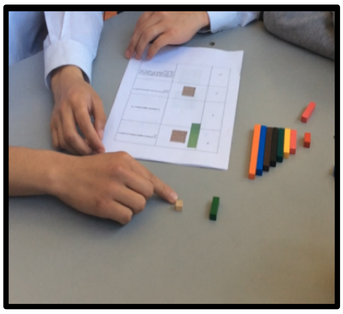


Imagen 5. *Manipulación regletas de Cuiseinare*

Imagen 6. *Manipulación regletas de Cuiseinare*

[2] Reconocimiento, primera de las habilidades al proceso de visualización
[3] IFI (interpretación de información figurativa)

En la imagen 4, la etapa de reconocimiento es evidente en el ejercicio con las regletas, ahora, los estudiantes relacionan las dimensiones de las respectivas regletas con el cuadrado de un número, es decir crean una imagen abstracta de una manipulación real, este tipo de proceso se enmarca dentro de una ***discriminación visual***[4] en donde se identifican cualidades de los objetos; (tamaño, longitud).

En la imagen 5 y 6 los estudiantes hacen acciones naturales que se transforman en algo abstracto lo anterior se logra, gracias al entorno y la previa manipulación del material lo cual se relaciona con la primera etapa de la generalización en donde la ***regularidad*** se observa desde la ***relación*** (regleta), con la acción de usar expresiones (símbolos), y la ***diferencia***[5] entre lo que varía y lo que no, es decir al observar las imágenes 5 y 6 los estudiantes distinguen que los cuadrados de a y b son representados por una regleta especifica.

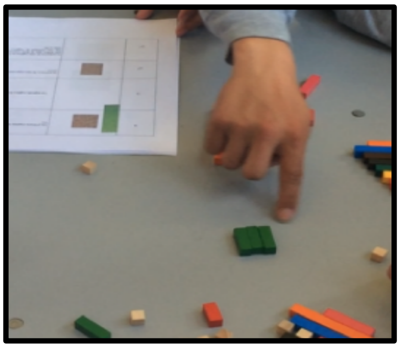


Imagen 7. *Representación de b^2 en las regletas de Cuisenaire*

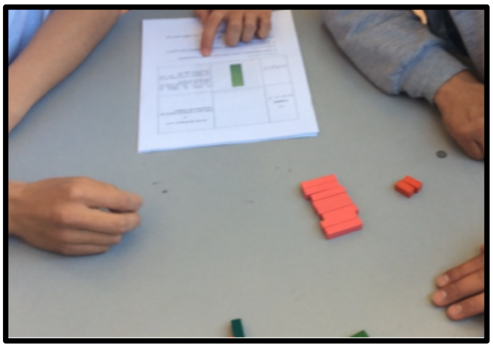


Imagen 8. *Representación regletas rosadas y rojas.*

Es importante mencionar que los medios de expresión como gestos, los movimientos y la actividad perceptual o las palabras de los estudiantes, son interpretadas dentro de una etapa inicial de ***descripción verbal***[6] luego de manera correcta los estudiantes sustituyen dichas palabras y gestos por algo más elaborado como son frases importantes, de esta forma se menciona el siguiente ejemplo de la descripción dada por un estudiante *"Porque esto equivale b y esto equivale b (señala el lado del cuadrado formado por las regletas verdes; $b \times b$, b a la dos" (Imagen 7).*

[4] Reconocimiento visual tercera de las habilidades al proceso de visualización
[5] Regularidad, relación y diferencia primer etapa al proceso de generalización
[6] Descripción verbal segunda etapa al proceso de generalización.

Los estudiantes atienden con cuidado a las instrucciones del profesor y esto lo reflejan en la forma como comunican sus ideas y manipulan el material, guiados por el primer ejercicio acuden a su ***memoria visual*** y recuerdan características visuales y de posición en cuanto a las regletas esta etapa se describe en el primer ***proceso visual (PV)***[7]***.*** Lo anterior se evidencia en la siguiente descripción realizada por un estudiante ***"****Se divide una y una (separan las dos regletas, haciendo referencia que queda una sola regleta"*

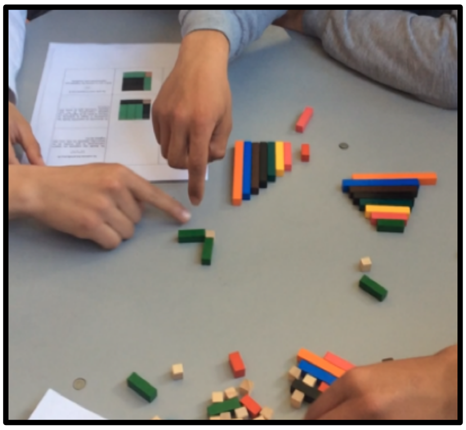


Imagen 9. *Representación de* $(a + b)$ *en las regletas de Cuiseinare*

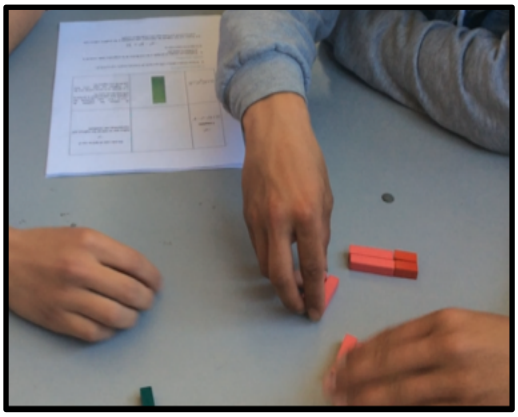


Imagen 10. *Manipulación regletas Cuiseinare*

Imagen 9, en esta etapa al proceso de generalización del cuadrado del binomio los estudiantes ya reconocen la relación entre las longitudes de a y b manipulando el material, en esta parte "*se evidencia en el siguiente fragmento del estudiante* (E_1, E_2 y E_3)*.*

E_1 *Se colocan los productos de verde claro a la dos y café claro a la dos Este y este (ubican la regleta ver y la regleta café clara para iniciar a formar el cuadrado).*

E_2 *Más este*

P_1 *Este que resultado sería*

E_3 $a + b$

[7] Proceso visual (PV), Conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes.

P_1 *Muéstreme el a y muéstreme el b*

E_3 *El a*

E_1 *El b"*

Al observar este fragmento se puede verificar que el lenguaje usado por el estudiante trasciende más allá de uno ordinario es decir reflexiona y justifica las representaciones del material desde una concepción matemática, esta capacidad de conservar las formas originales, es decir sin importar la posición o el tipo de representación que se esté pidiendo, el estudiante ya identifica que las regletas toman, para ellos, unos valores específicos. También se determina dentro de esta concepción matemática la adaptación de un contexto, el cual, está dentro de la habilidad de la ***conservación de la percepción***[8] en donde el estudiante se hace una imagen dinámica en su mente, es decir en la que alguno de los objetos, es este caso las regletas de Cuiseinare se desplaza.

Para esta misma dinámica mental los estudiantes acuden a un proceso visual (PV), al cual se menciona en algunos apartados al análisis, este proceso está inmerso en casi todas las etapas y es porque tiene una relación fuerte con el proceso de visualización y en particular con la memoria visual.

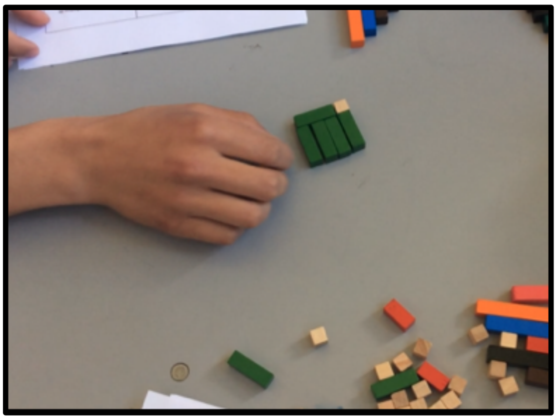


Imagen 11. *Representación de $(a+b)^2$ con las regletas de Cuisenaire*

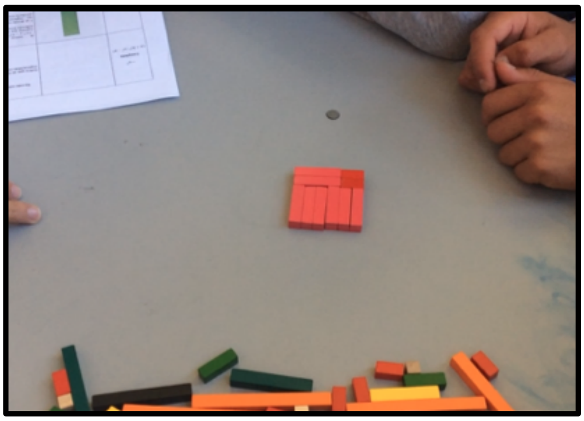


Imagen 12. *Representación de $(a+b)^2$ con regletas rosadas y rojas*

[8] Conservación de la percepción habilidad en el proceso de visualización.

La imagen 11 y 12 son evidencia del desarrollo del cuadrado del binomio resultó ser satisfactorio para los estudiantes en cuanto a logra entenderlo no desde su formulación, es decir $(a+b)^2$, sino desde su representación con las regletas, de esta forma se cumple que al observar las regletas de Cuiseinare los estudiantes por medio de la manipulación encontraron características que definió la expresión misma al cuadrado del binomio (imagen 11), de esta forma se evidencian varios procesos tanto de visualización como de generalización, para el primero se destaca entre los que se han mencionado la ***discriminación visual***[9] donde se identifican cualidades de los objetos (regletas de Cuiseinare), en este caso el estudiante al formar un cuadrado con las regletas *(imagen 11),* se puede evidenciar que el complementar con las regletas de color verde da cuenta de un proceso consistente en cuanto al empleo de la misma estructura, es decir de resolución de una expresión algebraica desde el concepto del cuadrado del binomio, lo que indica que expresa la relación para un cálculo.

En cuanto a la generalización, se denota que los estudiantes van más allá de un proceso cognitivo simple y pasan a un razonamiento inductivo[10] en donde la manipulación con el material los ayuda a constituir una estructura representada en la formación del binomio del cuadrado con las regletas, estos eventos pueden ser enmarcados dentro del proceso ***regularidad relaciones y diferencia***[11]***.***

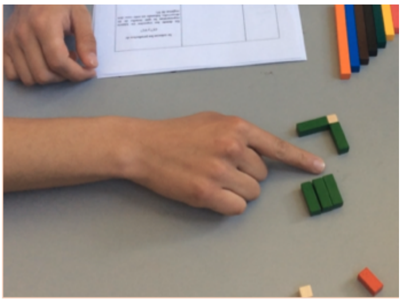


Imagen 13. *Reconocimiento* $(a+b)^2 - b^2$ *con las regletas de Cuisenaire*

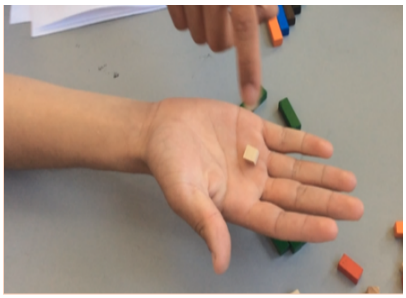


Imagen 14. *Reconocimiento de* $-a^2$ *con las regletas de Cuisenaire*

[9] Discriminación visual. habilidad del proceso de visualización.
[10] Razonamiento inductivo. Según Bacon las observaciones se hacen sobre fenómenos particulares y luego sobre estos se hace una inferencia en general.
[11] Regularidad relaciones y diferencia. Segunda etapa al proceso de generalización.

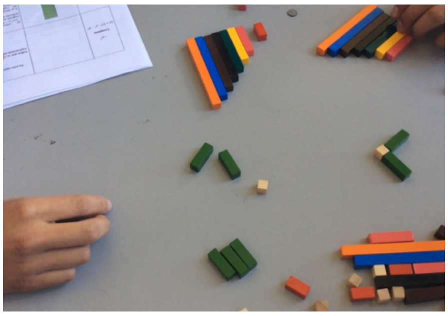


Imagen 15. *Reconocimiento ab*

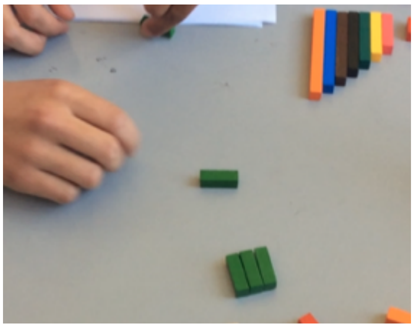


Imagen 16.D*istincion de dos regletas*

El estudiante de la representación anterior Imagen 13, deduce cuál sería la expresión final de la relación entre las regletas (VC) y (CC), esto puede ser evidenciado en la transcripción que sigue:

De la imagen 13.

$\boldsymbol{E_1}$:*Menos verde claro a la dos, quítele, verde claro a la dos,*
P_1*¿Cuál sería* $-b^2$ *?*

E_2:*Estos tres (Señala el cuadrado formado por las tres regletas de color verde y las retira de la construcción)*

P_1*¿Por qué? O sea, es un cuadrado* $b + b$

$\boldsymbol{P_1}$:*Mas no*

E_1 b x b

E_2*y se les resta listo.”*

De la imagen 15.

P_1*¿Y que nos queda? (ellos observan las regletas que quedaron)* $a + b$*”.*

De la imagen 16.

P_1*¿Qué les va quedando?*

P_1*Tienen que mirar que les va quedando Estaba así,*

E_1*¿no?* P_1*Pero le quitaron ¿qué?*

E_2*a^2*

P_1¿Qué les quedo?

E_1*Estos (señalan las dos regletas verdes)"*

Dichos comentarios se ilustran en las imágenes 14,15 y 16 donde según comentarios de los estudiantes y las observaciones de clase, se puede pensar que, la familiarización temprana con el material didáctico, la repetición de cálculos: suma, resta y multiplicación, en donde para cada operación los estudiantes debían buscar un arreglo diferente con las regletas de Cuiseinare de esta manera también se incluye los cálculos mentales (refiriéndose a la idea de comparar las regletas y reconocer la más grande o pequeña) así, se permite decir que las representaciones concretas fortalecen la comprensión y manipulación de conceptos como el cuadrado del binomio. Desde este punto de vista en este último ejercicio de la actividad No. 1 los estudiantes;

a) Logra relacionar el ***proceso visual*** con el concepto matemático (cuadrado del binomio) al retirar las regletas, reconocen la propiedad de restar $-b^2\ o\ -a^2$ y esto lo denotan a través de las regletas, esta acción de restar con las representaciones concretas se logra debido al **reconocimiento** y la manipulación constante en donde se ensayan posibles combinaciones con el material (**identificación y memoria** ambas de tipo visual), de forma verbal también se denota el dominio del lenguaje que va adquiriendo el estudiante, lo que plantea una conexión entre lo escuchado y visto, se destaca que el lenguaje verbal da cuenta del proceso de generalización. .

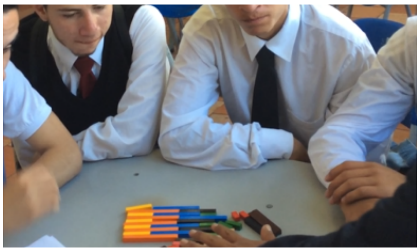
b) Discriminar las características comunes de los objetos los cuales son vistos como las regletas se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir además les puede ser asignado una variable según sea el caso particular) y los asocia a una situación (cuadrado del binomio) ***relación de regularidad***.

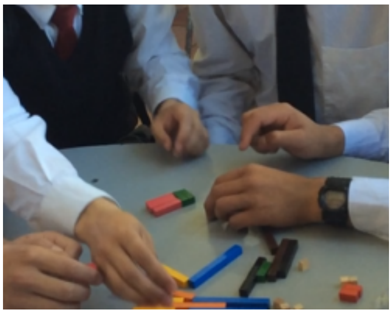
c) Aunque la simbolización no está presente en este trabajo no se percibe como ausente al proceso de generalizar ya que según Piaget y Dopler dicho proceso puede ser una acción tanto material, física como mental, en este sentido el estudiante al llegar al desarrollo del cuadrado del binomio, como regla general desde su justificación verbal está generalizando de forma empírica, es decir el estudiante halla mayor sentido cuando la construcción de un concepto viene dada por la previa manipulación que momento a momento nos lleva a una consolidación de saberes que se traducen en una formulación abstracta.

En la parte de la socialización de lo que se realizó durante la clase se puede mencionar que las descripciones verbales en ocasiones carecen de lenguaje matemático adecuado y los estudiantes utilizan su lenguaje coloquial para explicar características de los objetos y su relación con la situación particular, esto se evidencia en la siguiente tabla.

7.1.1.2 Socialización actividad No. 1

Tabla 2. Socialización de los estudiantes

Evidencia fotográfica	Comentarios
 Imagen 17. Socialización de la actividad 2	P_1Bueno ya terminada la actividad ¿cómo les pareció la actividad? E_4Pues estuvo un poco complicada por no saber la cantidad (el estudiante argumenta que la actividad al principio estaba compleja por no conocer los valores de las regletas)
 Imagen 18. Socialización de la actividad 2	E_1Ósea, porque no teníamos clara cuál era la cantidad de cada una de las fichas. E_2El valor, pero uno ya sabiendo el valor, como que uno ya tiene más idea puede resolver la actividad. E_2Es algo didáctico y lo podemos ilustrar mejor. E_4Si, lo aprende de la forma didáctica.

 Imagen 19. Socialización de la actividad 2	P_1Por ejemplo, yo les puedo decir ármense un cuadrado con las fichas rosadas y verdes, ¿Cómo harían ahí? E_1Rosadas y verdes (toman todas las regletas rosadas y verdes y realizan el cuadrado indicando la longitud de cada uno de los lados del cuadrado)
 Imagen 20. Socialización de la actividad 2	P_1Entonces esa es la suma del binomio al cuadrado

Con base en las descripciones y la tabla anterior se elabora la presenta tabla que enmarca los puntos principales de esta, la primera actividad.

Tabla 3. Descripciones destacadas de la actividad 1.

DESCRIPCIONES DESTACADAS	
FORTALEZAS	**DEBILIDADES**
Los estudiantes manipulan y reconocen el material.	Los estudiantes no llegan a evidenciar de forma escrita los hallazgos.
Los colores de las regletas les permite asociar cantidades (números naturales)y así definir objetos abstractos.	Agentes externos como el ruido y el espacio para realizar el ejercicio, dificulta el desarrollo del taller.

<table>
<tr><td>La memoria de los estudiantes y su reconocimiento visual los lleva a indagar aún más por las características del material.</td><td>Los estudiantes mencionan no entender algunas partes escritas del taller, como ejemplo: al momento de empezar a completar la primera tabla, no les es claro cómo llenar los espacios en blanco.

Reducir instrucciones evita que los estudiantes lo encuentren tediosa la activad con el material didáctico.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>OPORTUNIDAD</u>

Diseñar más actividades que involucren la manipulación de material concreto (regletas de Cuiseinare) para fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje alrededor de los conceptos de algebra.</td></tr>
</table>

Tabla No. 4 Habilidades del proceso de visualización
actividad No. 1

<table>
<tr><th colspan="2">HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN</th><th>.
ACTIVIDAD 1. (Las regletas de Cuiseinare)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Reconocimiento</td><td>Los estudiantes reconocen el material y asocian conceptos matemáticos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conservación de la percepción</td><td>Al disponer de forma diferente las regletas los estudiantes reconocen que se guardas las mismas características.</td></tr>
<tr><td>Discriminación</td><td rowspan="3">VISUAL</td><td>Identifican el tipo de regletas que deben utilizar para formar un cuadrado, discriminándolas por tamaño y color.</td></tr>
<tr><td>Identificación</td><td>Identifican que los objetos matemáticos (regletas) tienen características en común.</td></tr>
<tr><td>Memoria</td><td>De acuerdo a una manipulación previa los estudiantes se familiarizan con el material y logran afrontar la actividad con mayor facilidad.</td></tr>
</table>

Coordinación motriz ojos	Coordinan la manipulación del material con el desarrollo del binomio del cuadrado.

Tabla No. 5 Etapas del proceso de Generalización

GENERALIZACIÓN	
Actividad No 1. (*Regletas de Cuiseinare*)	
PROCESOS	**DESCRIPCIÓN**
Regularidad relaciones y diferencia	Proceso mental donde se distingue lo que es propio de cada situación, esto se logra desde la observación inicial del material y las pre concepciones de los estudiantes. Esta primer mirada del proceso se podría interpretar como la etapa de la observación del ver como el material se comporta, se manipula y por último se justifica para dar la explicación a un evento particular.
Descripción verbal	La discriminación verbal es otro tipo de lenguaje el cual podríamos observar que los estudiantes asocian sus hallazgos con un discurso del cual estos se apropian de algunos conceptos algebraicos para hacer analogías entre la forma del binomio del cuadrado y la organización espacial de las regletas en donde siempre se forma un cuadrado con las regletas.
Escribir de manera correcta	En esta actividad el expresar reglas o características por escrito no son necesarias ya que el generalizar no solo es expresar de forma simbólica sino también de forma verbal los hallazgos.

7.1.2 Análisis actividad No. 2 (Fichas algebraicas-algebra tiles)

Los estudiantes con previa instrucción del profesor tuvieron un primer acercamiento con material didáctico, actividad No. 1 (regletas de Cuiseinare), ahora con la aplicación de la actividad 2 se pretende exteriorizar, llegar a la formulación del cuadrado del binomio con fichas algebraicas (algebra tiles), lo que indica que la **conservación de la percepción**[12] subyace a los procesos de visualización y generalización en las tablas No. 2 y 3.

Los pasos que involucran el proceso de visualización se ven como un conjunto de acciones particulares que llevan a un entendimiento más global en este sentido las actividades propuestas están conectadas como complemento una de otra, buscando favorecer en particular unas habilidades (visualización) y unas etapas (generalización), para así lograr el desarrollo del cuadrado del binomio.

En el caso de la actividad No. 2 se pretende seguir favoreciendo las habilidades de visualización y las etapas de la generalización, pero se hace énfasis en este caso del lenguaje simbólico el cual no fue riguroso en la primera actividad.

Imagen 21. Reconocimiento del material didáctico

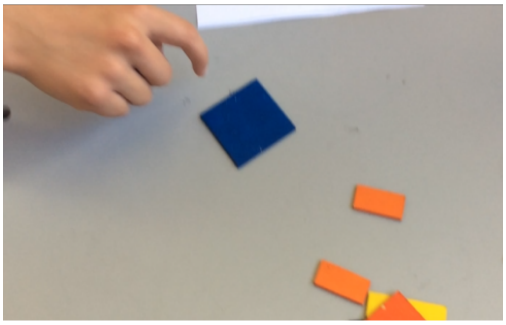


Imagen 22. Representación de x^2 con las fichas algebraicas

En la imagen 21 y 22 el proceso de visualización y generalización se enriquece en la medida que en que el estudiante utiliza diferentes representaciones para un caso en particular, al observar el material, los estudiantes básicos de competencias en matemáticas[13] mencionan que a través de la manipulación con este tipo de material didáctico los estudiantes deben llegar a encontrar un concepto matemático, lo anterior se determina teniendo en cuenta la primer sesión en donde los estudiantes al final de la actividad ya percibían que al tener o recibir otro material didáctico concreto o virtual, debían llegar a la compresión y desarrollo de un concepto matemático.

[12] Conservación de la percepción habilidad al proceso de visualización.

[13] En los estándares básicos de competencia matemática el uso de material didáctico se interpreta desde el proceso de modelación el cual se define como: "*modelo figurativo gráfico o tridimensional que representa la realidad de forma esquemática que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender".*

Los análisis se describen desde el desarrollo de los ejercicios propuestos ya que antes es un momento de activación en donde el estudiante replica las instrucciones de la guía con el material didáctico.

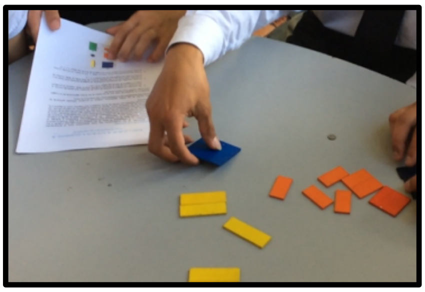


Imagen 23. Representación de x^2con las fichas algebraicas

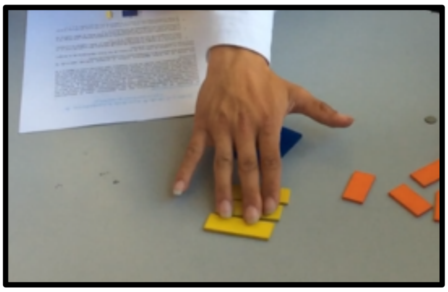


Imagen 24. Representación de 3x con las fichas algebraicas

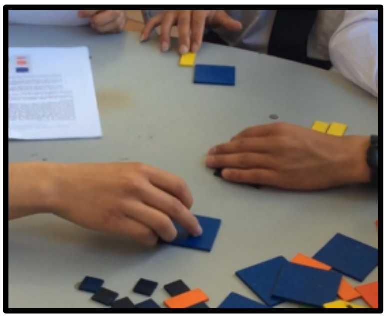


Imagen 25. Representación de x^2con las fichas algebraicas.

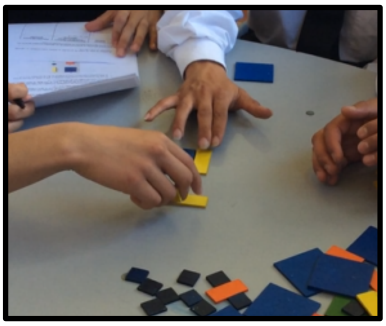


Imagen 26. Representación de x.1=x con las fichas algebraicas

Los estudiantes manipulan el material y asocian los valores de x como de y con los lados de las representaciones geométricas esto se evidencia en lo siguiente:

Imagen No 23

$E_1 x^2$ *Equivale a azul (el estudiante afirma que la ficha azul es* x^2*)*

Imagen No 24

E_2*3 amarillas equivalen a* $3x$ *(el estudiante toma tres fichas amarillas y las organiza sobre la mesa)*

Imagen No 25

E_2*La siguiente es* $(x+1)(x+1)$*Mmmm Bueno entonces* $x.x=x^2$ *que es la azul (realiza el procedimiento de la operación y identifica que la ficha que necesita es la azul).*

E_1*(Toma la ficha azul identificando su valor)*

Imagen No 26
E_2*Y el* $x.1=x$ *es la ficha amarilla*

E_1*(toma la ficha amarilla y la ubica enseguida del cuadrado azul).* Los estudiantes logran asociar los lados de los cuadrados con las variables realizando inferencias de posibles valores o ubicaciones (***conservación de la percepción***)[14] que podrían tener las fichas al momento de armar el cuadrado del binomio, en esta instancia se reconoce el proceso de **IFI**[15] . El trabajo realizado con anterioridad con las regletas de Cuiseinare le brindó herramientas al estudiante para saber que al momento de manipular el material debía reconocer una regularidad que lo llevará a resolver la situación en este caso la construcción al cuadrado.

El ***reconocimiento***[16] y la ***memoria visual***[17] hacen parte al proceso de visualización, estas habilidades fueron activadas o fomentadas con la primera actividad lo que indica que los procesos con el material didáctico se ven como complementarios al proceso de aprendizaje.

Además, se menciona que la manipulación para este ejercicio por parte de los estudiantes resulta ser significativa y menos compleja que con la primera actividad (regletas de Cuiseinare) ya que el material siendo de forma cuadrada y rectangular les facilita el armar un "cuadrado" usando las fichas.

---

[14] Conservación de la percepción: Reconoce las características al objeto así este cambie de posición o ángulo.
[15]IFI (Interpretación de información figurativa proceso de la visualización en donde se interpreta representaciones visuales para extraer su información.
[16] Reconocimiento: Habilidad que permite identificar correctamente las características de las relaciones entre objetos.
[17] Memoria visual: Habilidad para recordar las características visuales y de posición que tiene un objeto

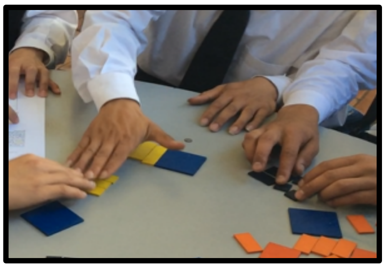


Imagen 27. Representación de x+3 con las fichas algebraicas

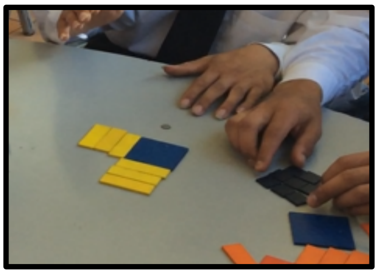


Imagen 28. Construcción de la representación de $(x+3)^2$ con las regletas algebraicas

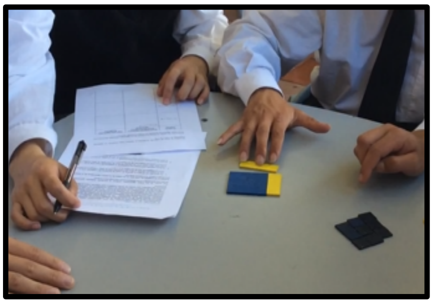


Imagen 29. Construcción del cuadrado $(x+1)(x+1)$

Los estudiantes siguen las instrucciones de la guía, en esta instancia lo simbólico cobra un valor importante ya que los estudiantes interpretan que los lados de las figuras tienen una representación simbólica para llegar a la construcción de binomio del cuadrado.

Imagen No 27

P_1*Entonces un lado al cuadrado tiene que medir ¿Cuánto? (el profesor realiza una pregunta a los estudiantes)*

$E_2 x+3$ *que sería así*

Imagen No 28

Entonces por el otro lado debe medir lo mismo porque se supone que es un cuadrado (el estudiante asimila que los lados del cuadrado miden lo mismo)

Imagen No 29

E_3 *Y se haría la misma igual, es decir la misma amarilla (el estudiante toma la otra ficha amarilla y la ubica enseguida del cuadrado azul).*

En esta parte de la actividad los estudiantes reconocen los valores correspondientes para cada una de las expresiones que deben construir, lo que evidencia un manejo completo del material didáctico es decir lo manipulan de manera natural, esto podría deberse a la ***discriminación e identificación visual***[18] habilidades (proceso de visualización) que se fomentaron en la primera actividad (regletas de Cuiseinare),

Dichos procesos de visualización a su vez se relacionan con las etapas al proceso de generalización, en este caso, la observación, ***el reconocimiento de regularidades*** nos permiten pensar que el estudiante ya analiza el material como un todo y lo descompone de tal forma que responde a un ejercicio propuesto (el cuadrado del binomio), de esta manera se menciona que la descripción verbal es evidente, pero es importante mencionar que en este caso la descripción se convierte en algo simbólico-verbal.

El lenguaje simbólico-verbal se percibe en este trabajo como evidencia de un proceso complejo, en el cual el estudiante asocia lenguaje matemático, en este caso las incógnitas o variables con su lenguaje formal (lenguaje cotidiano) esto da cuenta de que el proceso de generalizar no se concluye o finaliza, solo al escribir una fórmula, sino que esta parte puede ser también concluida al momento en que el estudiante formaliza sus hallazgos dentro de un lenguaje simbólico-verbal.

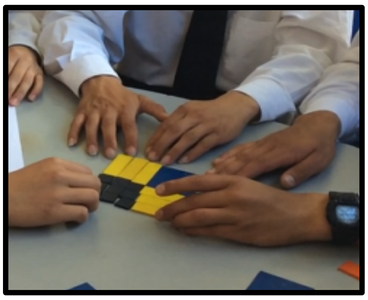


Imagen 30. Representación de (x+3)2 con las regletas algebraicas

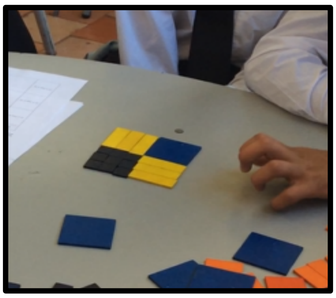


Imagen 31. Representación de (x+3)2 con las regletas algebraicas

[18] Discriminación e identificación visual: Habilidades del proceso de visualización siendo el primero la habilidad que permite comparar objetos identificando sus semejanzas y diferencias. El segundo, habilidad de reconocer una figura aislándola de su contexto.

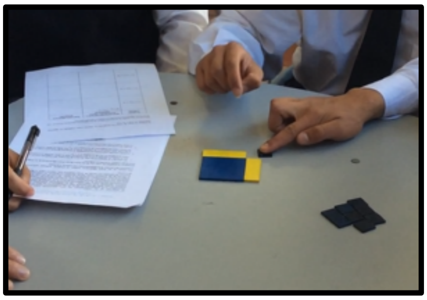


Imagen 32. Representación de $(x+3)^2$ con las regletas algebraicas

Los estudiantes continúan el desarrollo de la guía, al igual que con las regletas los estudiantes tratan de acomodar fichas para que sus lados correspondan con el cuadrado naranja, esto evidencia que con base a la manipulación previa con las regletas de Cuiseinare en la actividad uno, los estudiantes ya identifican la relación de los lados de las fichas con la formación de un cuadrado.

Imagen No 30

E_1Y lo que falta es $3.3 = 9$ que se ponen estas pequeñitas.

E_3 E_4(los estudiantes toman las fichas algebraicas que representan unidad y las ubican en la parte faltante del cuadrado para completar la construcción).

Imagen No 27

E_4*Profe entonces este cuadrado representa* $(x+3)^2$

Imagen No 31

E_2*Y una por una (el estudiante afirma que la ficha faltante debe ser la representación de uno por uno).*

E_3*Que sería esta chiquitica.*

E_4*(el estudiante toma con su índice una ficha que representa la unidad y la arrastra hasta la construcción del cuadrado)*

En esta parte de la actividad, los estudiantes reconocen que algunas fichas pueden tomar el lugar faltante y así obtener el binomio del cuadrado, en este caso las fichas negras se ubican, dentro dos habilidades la primera ***coordinación motriz de los ojos*** y ***conservación de la percepción.*** En esta instancia se resalta que al momento en que el estudiante empieza a realizar inferencias y lo hace de forma correcta, esto ocasiona una sensación de éxito en él y lo prepara para que llegue con éxito a la etapa en que debe manejar y manipular las expresiones algebraicas (lenguaje matemático).

El encontrar otras maneras de ubicar las fichas y ser reemplazadas por otras son eventos que en la primera actividad no son tan visibles ya que las regletas solo varían en su longitud, pero su ancho es siempre igual en cambio con los cuadrados donde su ancho y longitud varían este tipo de inferencias puede ser más notables llevando al estudiante a procesos de raciocinio más eficaces lo que puede ser visto como la inmersión eficaz al material.

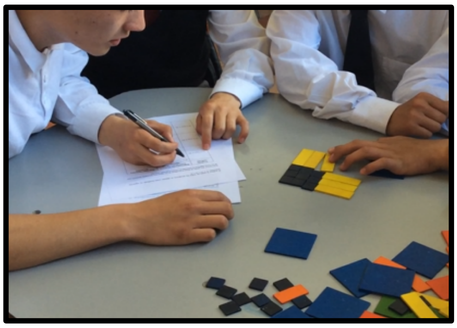


Imagen 33. Representación de $(x+3)^2$ con las regletas algebraicas

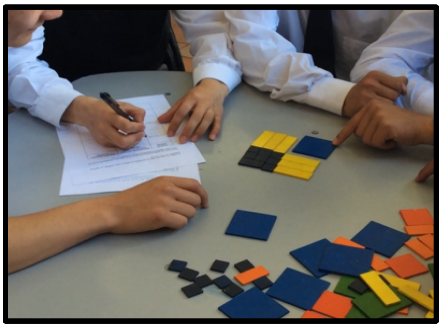


Imagen 34. Análisis de las expresiones algebraicas resultantes con las fichas

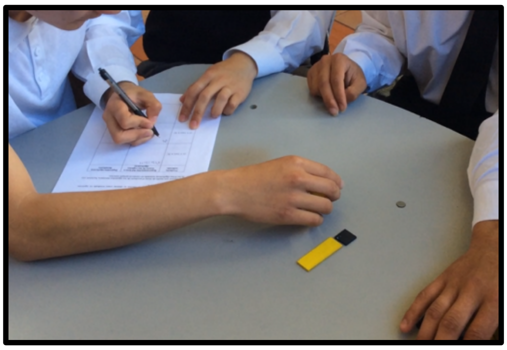


Imagen 35. Registro en la hoja de actividad 2

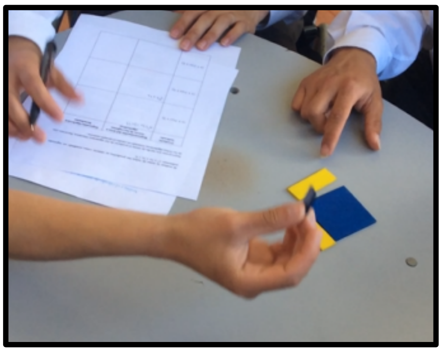


Imagen 36. Representación de 1 con las fichas algebraicas

En esta última etapa de la actividad en donde los estudiantes deben pasar de las representaciones a un lenguaje matemático, se evidencia que la manipulación les brindó a estas nuevas herramientas al momento de formular.

Los estudiantes empiezan a compilar sus descripciones verbales ya a un lenguaje escrito, esto evidencia la tercera etapa al proceso de generalización ***escribir de manera correcta***[19]

Imagen No. 33

E_2*¿Más cuánto? (El estudiante va registrando los resultados)*

$E_3 3x$ *(menciona y señala las fichas que representa* $3x$

Imagen No 34

E_2*Hay que escribir las expresiones resultantes (el estudiante toma un esfero y propone a sus compañeros que le colaboren analizando los resultados).*

E_4*Esta es* x^2 *(señala el cuadrado azul que representa* x^2)

Imagen No 35

P_1*Escriba la expresión algebraica resultante del cuadrado*
E_4*Entonces* x^2

E_3*Esta amarilla es* x *porque* $x.1 = x$

E_1*Hay dos amarillas escriba de una vez*

Imagen No 36

[19] Escribir de manera correcta. Etapa avanzada al proceso de generalización donde se escriba de forma sucinta lo que se encontró en las fases anteriores.

E_1 Y esta es una por una y ahí se complementa el cuadrado. (el estudiante toma una ficha que representa uno y le pide al estudiante que registre el valor en la actividad).

La simbolización se hace evidente en esta última etapa los estudiantes luego de una manipulación rigurosa en donde el estudiante manipulo de varias formas el material didáctico apropiándose de los valores que podrían tomar los cuadrados con diferentes ejercicios, de esta manera los estudiantes se convencen de que la representación al cuadrado es correcta y empiezan a escribir la forma que debería estar enmarcada como parte del desarrollo del binomio al cuadrado, esto se logra volviendo en el proceso de formación al cuadrado esto se evidencia en la forma como el estudiante describe cada ficha como una parte de la solución de una fórmula.

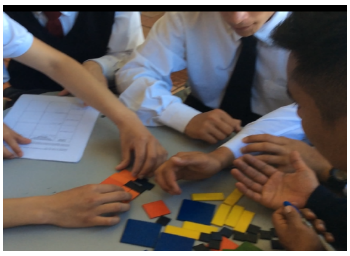
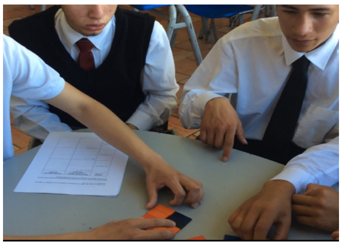
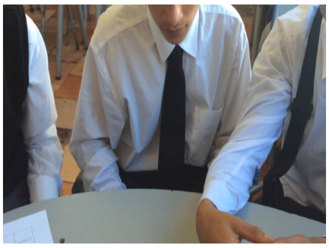
Lo anterior se enmarca dentro de lo que menciona Azarquiel (1993), en cuanto a que el reconocimiento de lo general desempeña un papel ideal como la condición previa de la expresión. dicha expresión en esta actividad se observa como las etapas que subyacen a la generalización. El estudiante utiliza gestos movimientos luego expresiones verbales con lenguaje cada vez más específico y por último escribe de manera correcta la fórmula.

Las etapas de generalización mencionadas no pueden darse sin el desarrollo paulatino al proceso de visualización que en esta última etapa de la actividad no se menciona ya que se encuentran ya inmersos en el ejercicio mismo, esto indica que las ***habilidades de visualización***[20] fueron favorecidas o desarrolladas en el curso de la primer actividad y parte de la segunda, haciéndose ya evidente y natural en los ejercicios posteriores.

[20] Habilidades de visualización. Se encuentran descritas en el capítulo 3. Marco teórico en el esquema No 2.

7.1.2.1 Análisis socialización actividad 2.

Tabla No. 6 Socialización actividad 2.

Evidencia fotográfica	Comentarios
 *Imagen 37. Socialización actividad 2*	P_1*¿Cómo les pareció esta actividad? ¿más fácil que con las regletas de cuisenaire?.*
 *Imagen 38. Socialización actividad 2*	E_3*Más fácil* P_1*¿Por qué te pareció más fácil?* E_3*Porque con las regletas de cuisenaire tocaba sumarle los cuadritos* E_3*Si, tocaba armar las áreas*
 *Imagen 39. Socialización actividad 2*	P_1¿Cómo les parece el trabajo con este material? E_4Muy bueno, es una nueva forma de aprender E_1Es mejor que estar copiando en el cuaderno

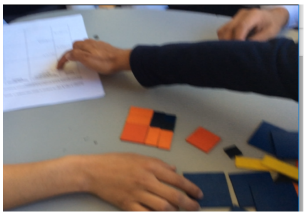
 *Imagen 40. Socialización actividad 2*	P_1¿se formaron los cuadrados con los dos materiales? Es decir, con las regletas de Cuiseinare y las fichas algebraicas. E_1Si profe, se formaban casi de la misma forma, la diferencia es que con las regletas tocaba armar las áreas.

Tabla No. 7 Descripciones destacadas actividad 2.

DESCRIPCIONES DESTACADAS	
<u>FORTALEZAS</u>	**<u>DEBILIDADES</u>**
• Las fichas algebraicas reflejan la relación entre los componentes del binomio del cuadrado. • Su manipulación es más sencilla que con las regletas de Cuiseinare. • La formación de cuadrado del binomio se denota de mejor forma, a través de la manipulación con cuadrados el estudiante identifica por sus dimensiones y longitud, que al final debe formar una figura simétrica, por lo cual la forma del material soporta mucho la idea. • Se facilita la simbología, ya que todo el tiempo se manejan variables (y, x y z). • El conectar las fichas algebraicas con el desarrollo del cuadrado del binomio es efectivo ya que al final de la actividad deben obtener un cuadrado.	• Los estudiantes no asocian iniciando de forma efectiva los cuadrados con áreas. • El material limitado impide que los estudiantes piensen más allá de cierto número de fichas. • Las actividades fuera del aula llegan durante los días ordinarios, en ocasiones a desviar a aquellos estudiantes. • La manipulación del material es frecuente en dos o tres estudiantes de los cuatro que conforman el grupo. • El tiempo al ser rígido no es suficiente para que los estudiantes alcancen la compresión del concepto cuadrado del binomio, por lo tanto se deben brindar más tiempo.

• Se ve el cuadrado geométrico como una estructura que representa valores de potencias. • Los estudiantes asocian las formas y colores con las expresiones algebraicas.	• En los cursos numerosos se hace difícil el manejo de material didáctico, esto se observó en la actividad con las regletas de Cuiseinare y los cuadrados algebraicos.
OPORTUNIDAD El trabajo brinda la oportunidad de trabajar en grupos, sin embargo, para garantizar procesos de aprendizaje con cada estudiante se aconseja realizarlo de forma individual. Los grupos para trabajo con el material didáctico son de 3 o 4 personas ya que con más integrantes la actividad pierde su objetivo que es fortalecer los procesos de enseñanza aprendizaje en el desarrollo del cuadrado del binomio. El material didáctico optimiza y favorece la comunicación no verbal, permitiendo al estudiante re pensar acerca del concepto algebraico (cuadrado del binomio) y sus implicaciones con material concreto.	

Tabla No. 8 Habilidades del proceso de visualización actividad No. 2

HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN	**DESCRIPCIÓN**
	ACTIVIDAD 2. (*fichas algebraicas)*
Reconocimiento	Los estudiantes reconocen las variables como números, al manipular los cuadrados geométricos los estudiantes mencionan que el cuadrado geométrico que representa x^2puede ser un numero.
Conservación de la percepción	Los estudiantes a pesar de movilizar las fichas algebraicas en la mesa reconocen sus características.

Discriminación	VISUAL	Los estudiantes favorecen su discriminación visual debido al contacto constante con el material
Identificación		Los estudiantes reconocen algunas características en común que deben ser con todos las fichas algebraicas como la relación de lados.
Memoria		Los estudiantes reconocen características del primer material con el segundo material (al juntar cuadrados o regletas deben formar un cuadrado).
Coordinación motriz ojos		Los estudiantes manipulan y posicionan los cuadrados de diferente forma y superponen unos con otros, pero aun así saben que propiedad y característica están haciendo.

Tabla No. 9 Etapas del proceso de generalización

GENERALIZACIÓN	
Actividad No 2. (*Fichas algebraicas)*	
PROCESOS	**DESCRIPCIÓN**
Regularidad relaciones y diferencia	Los estudiantes reconocen y predicen valores solo al observar las fichas algebraicas, además que relacionan su vocabulario formal con el lenguaje matemático. La observación con el segundo material es más eficiente y profunda, lo que permite que los estudiantes hagan inferencias de forma rápida y eficaz.
Descripción verbal	El trabajo con las fichas algebraicas posibilita que los estudiantes asocien con mayor facilidad las imágenes mentales de la realidad con la posibilidad de interpretar esas imágenes con números o en este caso variables. Esta interpretación de imágenes a símbolos se hace de manera reflexiva, es decir recrean diferentes situaciones de forma más realista que al momento de hacerlo al escribirlo o mostrarlo como comúnmente se muestra.

Escribir de manera correcta	Los estudiantes logran desde un lenguaje verbal llegar a un lenguaje escrito, donde efectivamente estos expresan sus ideas con lenguaje Matemático. El ejercicio con cuadrados hace observable que los lados se pueden, ya sea, multiplicar o relacionar con las demás operaciones básicas.

7.1.3 Análisis de la actividad No. 3 Geogebra

La tercera actividad se plantea con material virtual el cual permite con mayor facilidad la manipulación de los valores que podría tomar las variables en el binomio del cuadrado, además se fomenta el proceso de visualización y en específico las habilidades de ***reconocimiento espacial, conservación de la percepción y coordinación de ojos***

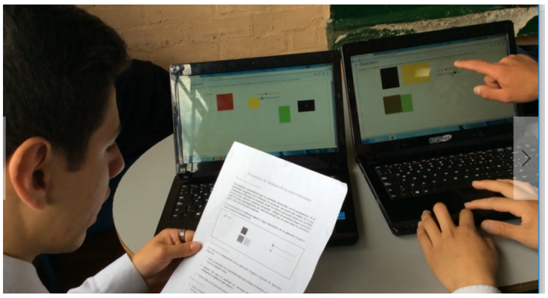


Imagen 41. Introducción a la actividad 3

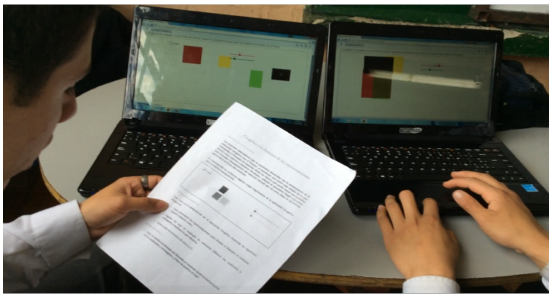


Imagen 42. Reconocimiento del recurso digital hecho en Geogebra

Imagen No 41

E_2E_3*(El estudiante lee el enunciado de la actividad tres, los otros estudiantes interactúan con el recurso digital hecho en Geogebra)*

Imagen No 42

E_2*¿Cómo acomodar la representación para formar el binomio del cuadrado, tomando cualquier valor?*

La manipulación del material concreto en comparación con el virtual radica en la accesibilidad que tienen los estudiantes de manipular objetos virtuales la facilidad de uso, la máxima interactividad en donde los cambios de valores son reflejados inmediatamente lo que permite a los estudiantes ver al instante los cambios en las representaciones rectangulares y/o cuadradas que se van generando en el programa, la ventaja de ofrecer múltiples ejercicios, en este caso, la facilidad de cambiar valores para a y b que hacen parte de la expresión de $(a + b)^2$.

Al momento de comenzar la actividad los estudiantes exploran el programa sin instrucción alguna, manipulan los cuadrados en el programa de Geogebra, este proceso intuitivo se puede manifestar en ellos debido a:

- La manipulación previa con material concreto ya inmerso en el pensamiento del estudiante.

- El contacto con el material concreto (regletas de Cuiseinare y cuadrados geométricos) permite que el estudiante logra relacionar el lenguaje ordinario con el lenguaje matemático.

- Geogebra al ser un material didáctico virtual despierta el interés y curiosidad del estudiante hacienda que la actividad sea más significativa para estos.

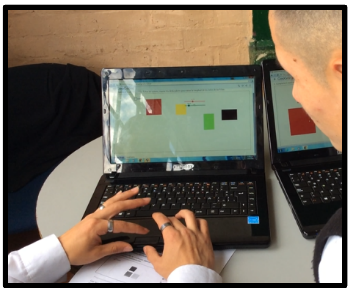


Imagen 44 Desarrollo de la actividad 3.

Imagen 43. Desarrollo de la actividad 3

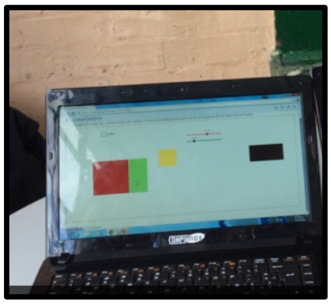


Imagen 45. Desarrollo de la actividad 3

Imagen No 43

E_2*Ósea, se supone que moviendo esto se les da el valor a los cuadros (el estudiante inicia a mover los deslizadores y observa que los tamaños de los cuadrados van cambiando a medida que le cambia los valores)*

E_2*Ese es a*

Imagen No.44

E_1*Se supone que se debe armar un binomio del cuadrado (el estudiante mueve los deslizadores).*

E_2*Darle diferentes valores*

E_1*¿Qué valores le daría usted? (el estudiante le pregunta a su compañero que valores les daría a los deslizadores para realizar la actividad).*

Imagen No. 45

E_2Bueno, entonces primero este. (El estudiante evidencia que debe realizar las mismas construcciones que hizo con los otros materiales didácticos).

E_1Luego colóquele el rectángulo verde al lado.

El material didáctico virtual amplia el campo de acción del estudiante con respecto al tema de la clase. Se menciona que este material didáctico trabaja la forma simbólica, y permite que los estudiantes resuelvan problemas relacionados con el cuadrado del binomio sin necesitar un proceso intermediado, en este punto las actividades con materiales previos fomentaron procesos de visualización y generalización que en esta última actividad se manifiestan en cuanto a la interpretación y formulación.

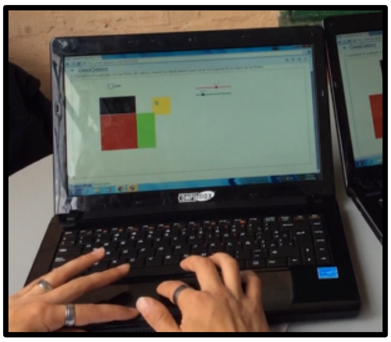


Imagen 46. Desarrollo de la actividad 3

Imagen 47. Desarrollo de la actividad 3

Imagen 48. Desarrollo de la actividad 3

Imagen 49. Desarrollo de la actividad 3

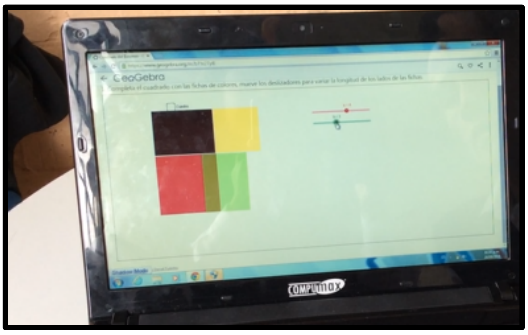


Imagen 50. Desarrollo de la actividad 3

Imagen No 46

E_2*Bueno, entonces primero este. (el estudiante evidencia que debe realizar las mismas construcciones que hizo con los otros materiales didácticos).*

E_1*Luego colóquela el rectángulo verde al lado.*

Imagen No 47

E_1Este va debajo o arriba

E_2(el estudiante arrastra el rectángulo negro y lo ubica según la indicación de su compañero)

Imagen No 48

E_2Se dice que este es **a** donde representa $a = 4$ (el estudiante señala el deslizador)

Imagen No 49

E_1Entonces si cambiamos b por 3

E_2Mm mire se agrandan los cuadrados

Los estudiantes continúan con la manipulación de los deslizadores, esta etapa es el ***reconocimiento***[21] luego de un ejercicio en el cual el estudiante manipula tanto cuadrados como los valores de las variables descritas en los deslizadores, luego de una instrucción guiada que menciona acerca de la relación de los valores que va cambiando y el comportamiento de los cuadrados, el estudiante empieza a inferir que de la misma forma que paso con las regletas de Cuiseinare y los cuadrados geométricos el aumento de la longitud de los rectángulos o cuadrados en la representación tiene que ver con los lados de las figuras.

Tal vez sean evidentes otras características del proceso de visualización y generalización, pero se destaca que los análisis de las tres actividades deben verse como un solo análisis, ya que estas son complemento una de la otra.

Tabla No. 10 Descripciones destacadas actividad No. 3

DESCRIPCIONES DESTACADAS	
FORTALEZAS	**DEBILIDADES**
● Geogebra permite afianzar la manipulación de los estudiantes de material didáctico. ● Los estudiantes asocian de forma correcta los colores de las representaciones rectangulares y/o cuadradas con la formación del cuadrado del binomio. ● La aplicación permite el trabajo con números decimales lo que amplia y hace que el estudiante reflexione acerca de estos valores. ● En una era global, los jóvenes	● La capacidad de los computadores en ocasiones (si es obsoleto) reduce la respuesta de los programas lo que en algunos momentos hace que el estudiante pierda el objetivo de la clase. ● La manipulación con material virtual, simplifica algunos procesos que se pueden dar y analizar de forma diferente en el aula de clase. ● Si los recursos tecnológicos son limitados el contacto con el material virtual solo se logra con algunos estudiantes.

[21] *El reconocimiento es la primer habilidad que se desarrolla o se evidencia en el proceso de visualización y es la que en constante mejora esta, debido al cambio de material.*

<table>
<tr><td>vienen empoderados con el manejo de materiales u objetos virtuales.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>OPORTUNIDAD</u>

Fomentar el trabajo con parejas beneficia a los estudiantes ya que este tipo de contacto debe ser realizado conociendo el grado de entendimiento de esta.

Este tipo de materiales permite ver la dimensionalidad de las figuras, así como su fácil manipulación.</td></tr>
</table>

Tabla No. 11 Habilidades del proceso de visualización
actividad No. 3

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN</th><th>DESCRIPCIÓN</th></tr>
<tr><th>ACTIVIDAD 3. (Geogebra)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Reconocimiento</td><td>El estudiante de forma instantánea, reconoce y caracteriza los elementos del material virtual.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conservación de la percepción</td><td>Detrás de las imágenes los estudiantes deducen y ratifican los valores, estos con fichas algebraicas.</td></tr>
<tr><td>Discriminación</td><td rowspan="3">VISUAL</td><td>Los estudiantes reconocen los detalles del material como ejemplo, la relación de los deslizadores con el tamaño de los cuadrados y como al variar los cuadrados cambian en razón de esa varianza.</td></tr>
<tr><td>Identificación</td><td>Los estudiantes identifican que el tamaño de los cuadrados en todos los casos no cambia en la misma razón, es decir mientras unos pueden aumentar los otros quedan disminuir en tamaño.</td></tr>
<tr><td>Memoria</td><td>Identifica algunas características de la manipulación con el primer y segundo material, con la manipulación del material virtual, como ejemplo el tener que formar siempre un cuadrado.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Coordinación motriz ojos</td><td>Los estudiantes movilizan y rotan los cuadrados y rectángulos además de cambiar su color sin embargo esto no ocasiona que confundan las propiedades de las figuras.</td></tr>
</table>

Tabla No. 12 Etapas del proceso de visualización
actividad No. 3

GENERALIZACIÓN	
Actividad No 3. (*Geogebra)*	
PROCESOS	**DESCRIPCIÓN**
Regularidad relaciones y diferencia	Los estudiantes relacionan de forma efectiva el material didáctico con el desarrollo del binomio del cuadrado, debido a que el primer acercamiento con el programa ellos tratan de acomodar las figuras de tal modo que obtengan un cuadrado, esta situación demuestra que la regularidad y la relación está presente en ellos debido a un trabajo riguroso de las anteriores actividades. Se hace distinción de las características que definen al concepto del binomio, en este caso los estudiantes reconocen que los deslizadores representan las variables y que su cambio es directamente proporcional al cambio de las figuras.
Descripción verbal	Los estudiantes hacen una descripción desde su lenguaje verbal de nociones matemáticas y de los cambios que ocurren al manipular el material, esto permite que el estudiante no pierda cosas al momento de escribir o simbolizar los hallazgos.
Escribir de manera correcta	Los estudiantes, aunque no registran los hallazgos de forma escrita ya que la actividad es pensada para culminar los procesos de las dos anteriores actividades, en algunos momentos los estudiantes ven la necesidad de registrar de forma escrita los hallazgos para así verificar que se cumple el desarrollo del binomio del cuadrado.

8 CONCLUSIONES

El objetivo general de este proyecto, se centró en el diseño de actividades para potenciar el entendimiento y desarrollo del cuadrado del binomio, estas aplicadas a los estudiantes de la IED Colegio Alemania Unificada. De acuerdo con el objetivo planteado, se analizaron los resultados obtenidos y se presentan a continuación las siguientes conclusiones.

En la aplicación de las actividades diseñadas, se evidenció la importancia del material didáctico para el desarrollo de un concepto en un plan de clase, debido a que los estudiantes estaban a la expectativa de conocer el material, manipularlo y desarrollar la actividad propuesta.

En el análisis realizado, se obtiene que el estudiante identifica una expresión algebraica por medio de áreas, argumentando que el producto de la longitud de los lados da como resultado el área y una expresión algebraica.

El material didáctico contribuye a que el estudiante potencie las habilidades de visualización, debido a la pertinencia del material utilizado (regletas de Cuiseinare y cuadros algebraicos) y de su forma de presentación, como lo son los colores y formas.

Estas actividades generaron un mayor grado de entendimiento en el desarrollo de conceptos del algebra, debido a que fortaleció y resolvió dudas en los conceptos de suma y multiplicación de expresiones algebraicas, obteniendo un mejor desempeño en la clase por parte del estudiante.

Las actividades fueron pertinentes según los análisis realizados en el capítulo 8, así mismo se relacionaron con los contenidos (expresiones algebraicas, factorización y expansiones) que se dan alrededor del cuadrado del binomio, lo que indica que este tipo de estrategias más que cambiar los procedimientos de clase los enriquece y permite repensarse el ejercicio de planeación y desarrollo de actividades significativas.

Se resalta que para potenciar el uso de material didáctico las instituciones y los profesores de matemáticas deben repensarse su ejercicio como orientadores del conocimiento y que ese ejercicio puede ser más efectivo y flexible si se incluyen actividades que impliquen la manipulación de material.

El trabajo serviría de insumo para futuros trabajos en los siguientes aspectos:

- Crear unidades didácticas basadas en material didáctico para potenciar el desarrollo de conceptos algebraicos.

- Reflexionar acerca del ejercicio docente, en la forma como los contenidos son planeados y desarrollados en el aula de clase.

- Ampliar los campos de acción en los cuales materiales didácticos como los presentados en esta propuesta pueden generar ideas a los profesores novatos y expertos en matemáticas.

- Diseñar actividades que relacionan el interés del estudiante, con los contenidos establecidos en los estándares básicos de competencias en Matemáticas para el desarrollo de expresiones de suma y resta del cubo.

- Para futuros trabajos o consultas de este trabajo este trabajo se puede emplear para como insumo de planeación de actividades con material didáctico de lo cual también se concluye que el manipular material didáctico favorece el pensamiento matemático en los estudiantes sin importar el nivel de entendimiento y la edad.

9 BIBLIOGRAFIA

Artigas, N. (2005). *Educar chile*. ministerio de educacion de chile. Recuperado de: http: / / www.educachile.cl / Portal.base/Web/ver

Azarquiel, G. (1993). *Ideas y actividades para enseñar algebra .* Madrid : Sintesis .

Bishop, A. (1989). Review of research on visualitation in mathematics education. Traducido por *ERIC* , 7-16. Conferencia anual del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática (PME-12), Veszprem, Hungría.

Chacon, G. (2012). Visualización y razonamiento, creando imagenes para comprender las Matematicas. *APM* , 1-27.

Cohecha, C. (2014). *Teorema del Binomio y aplicaciones .* Universidad Nacional . Bogota: Universidad Nacional .

Conocimientosweb.net (2014). Regletas de Cuseinare.

Davila, S. (12 de 2006). El razonamiento inductivo y deductivo dentro del proceso investigativo en ciencias experimentales y sociales . *Laurus* , 181-200.

Davis, R. (1985). Algebraic thinking in the early grades . *Journal of the mathematical behaviour* , 195-208.

Del grande, J. (1990). Spatial sense, arithmetic teacher . *ERIC* , 14-20.

Duval, R. (1993). En lecturas en didáctica de la matemática: Escuela Francesa. México: sección de matemática educativa del CINVESTAV-IPN

Garcia, J. (Abril de 1998). *El proceso de generalizacion desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalizacion lineal.* Retrieved 2016 de Agosto de 25 from ftp://veda.bbtk.ull.es/ccppytec/cp41.pdf

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representación de nuevas tecnologías y curriculum. Revista en Educación matemática. volumen 10(2) P. 23-24

Krutestskii (1976). The Psychology of Mathematical Abilities inSchoolchildren'. (Traducido al español por J. Kilpatrick y I. Wirszup). Universidad de Chicago.

MEN. (2006). *Estandares básicos de competencias en matemáticas.* Bogota: Editores Ltda.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: Editorial Tecnos.

Ponce, H. (2007). La matriz foda alternativa de diagnostico y determinacion de estrategias de intervencion en diversas organizaciones . *Enseñanza en la psicologia , 12*, 113-12.

Ricks, A. (2000). Algebra for all, using homemade algebra tiles to develop algebra and pre algebra concepts. The national council of teachers of Mathematics.

Faure, E. (1973). Aprender hacer, la educación del futuro. Alianza editorial primera edición.

Velasco, E. (2014). *Uso del material estructurado como herramienta* didáctica *para el aprendizaje de las matematicas.* Valladolid: Magisterio de Segovia .

Vergnaud, G. (1990). la theorie des chamos conceptuels. *Recherches en didactiques des mathematiques,* , 133-170.

10 ANEXOS

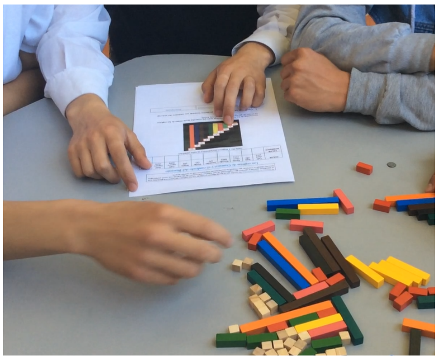
Los siguientes son los anexos al trabajo de grado en donde se incluyen las transcripciones de las actividades, esto como sustento y evidencia al trabajo realizado.

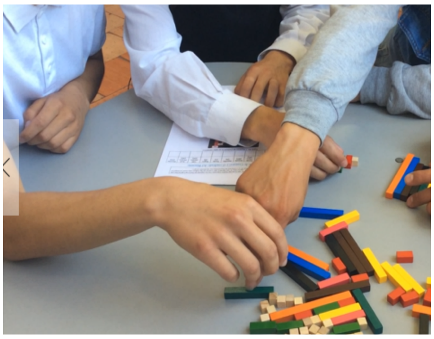
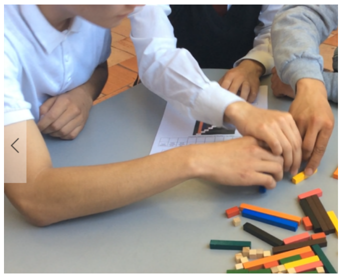
VIDEO No 1. ACTIVIDAD 1. REGLETAS DE CUISENAIRE

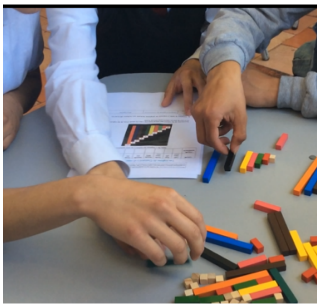
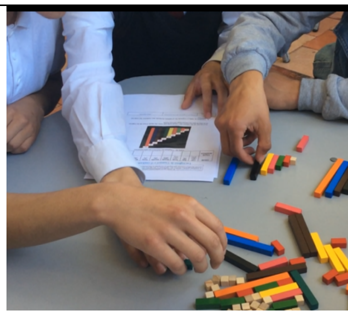
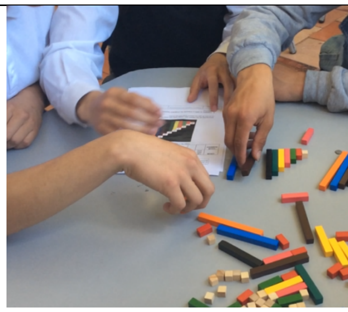
Se realiza la transcripción del video 1 en donde se presenta el desarrollo de la actividad con las regletas de Cuiseinare. Esta actividad fue aplicada a cuatro estudiantes del colegio Alemania Unificada del ciclo 4 de Aceleración grupo 4-01.

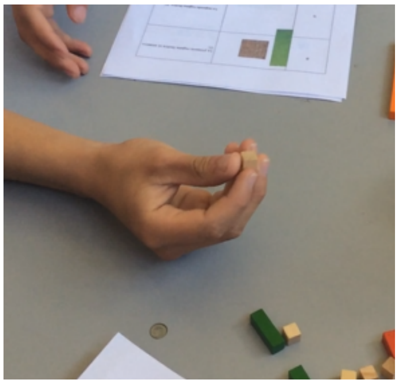
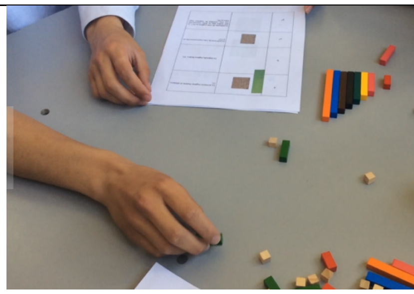
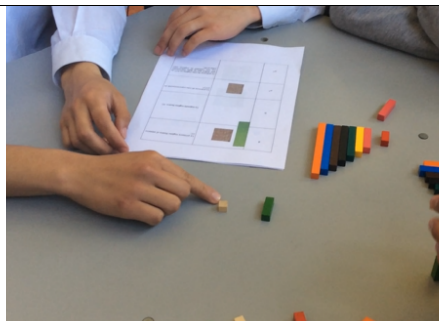
Para la transcripción de los videos se categoriza de la siguiente forma:

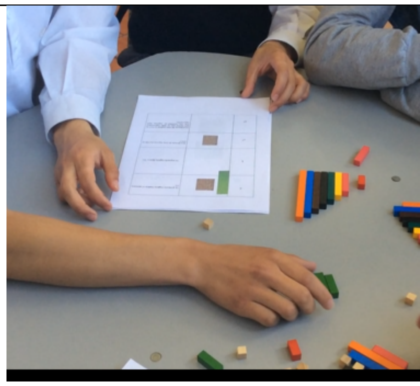
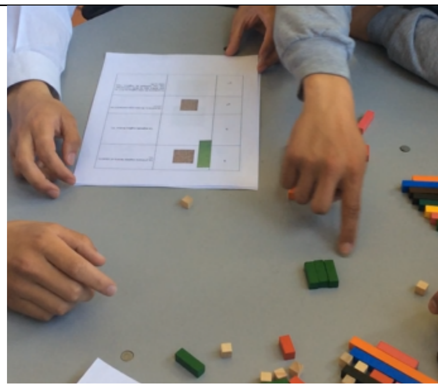
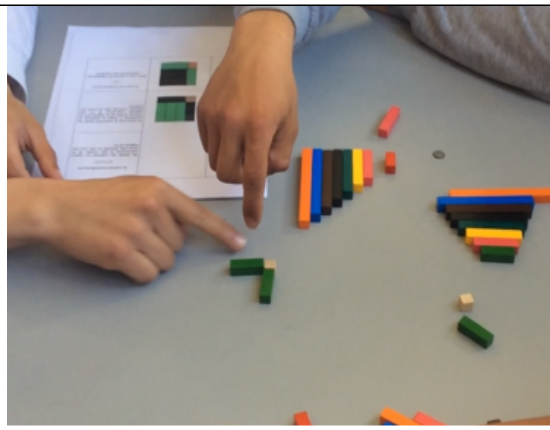
Estudiante= E
Profesor= P

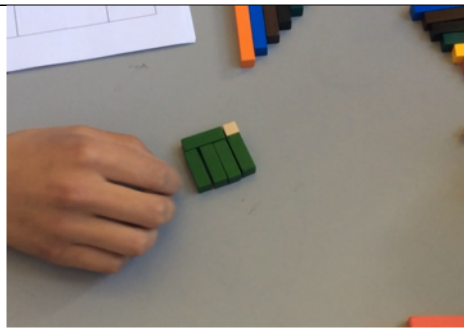
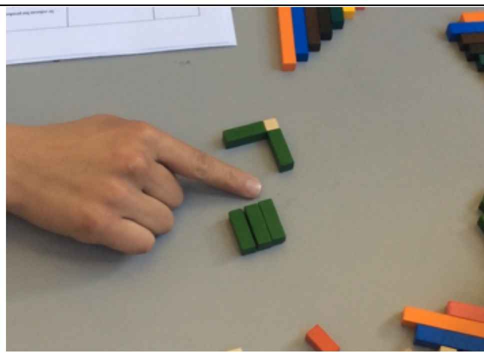
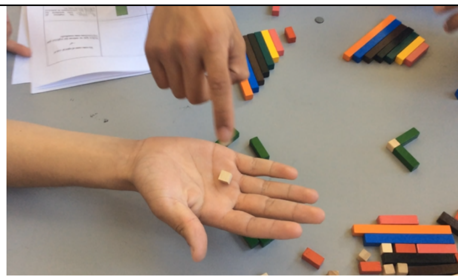
<table>
<tr><th>Sujeto</th><th>Característica</th><th>Imagen</th></tr>
<tr><td>E_2</td><td>Esto es café claro (el estudiante señala en la guía la regleta que representa café claro)</td><td rowspan="2">
Imagen 1. Reconocimiento de las regletas de Cuiseinare</td></tr>
<tr><td>E_1</td><td>Primero es café claro, después rojo. (el E_1 estudiante toma la regleta color café claro y la separa de las demás regletas, luego toma la regleta rosada, creyendo que es la regleta roja, el estudiante E_2 lo corrige tomando la regleta roja y la coloca enseguida de la regleta café claro)</td></tr>
</table>

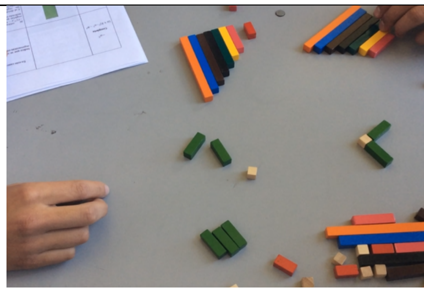
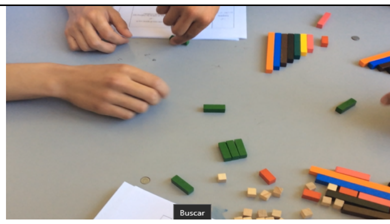
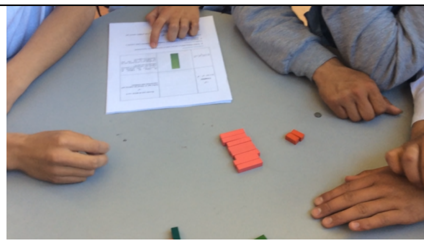
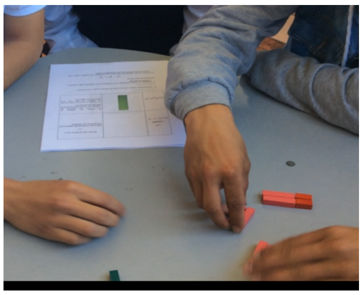
E_2	Después verde (Toma la regleta verde y la coloca al lado de la regleta roja)	 Imagen 2. *Manipulación regletas de Cuiseinare*
E_2 E_3	Después rosado, ahí si rosado Pero ya esta (Sujeta la regleta rosada y la ubican enseguida de la fila, dos estudiantes ubican cada uno una ficha rosada y se percatan que hay dos en la fila, por lo tanto, uno de ellos retira una de las regletas rosadas)	 Imagen 3. *Manipulación regletas de Cuiseinare*
E_3	Amarillo (toma la ficha amarilla y la ubica en la escalera que se está formando con las otras regletas)	 Imagen 4. *Manipulación regletas de Cuiseinare*

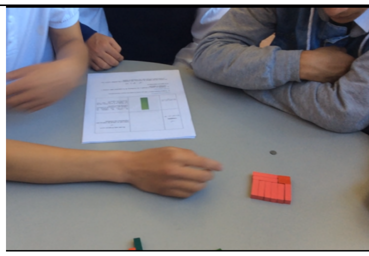
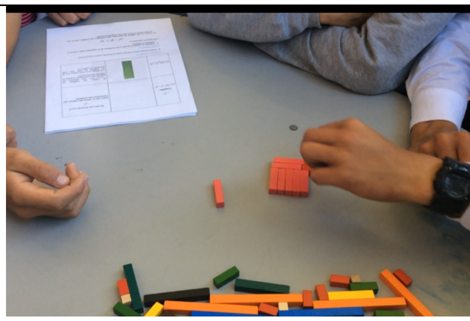
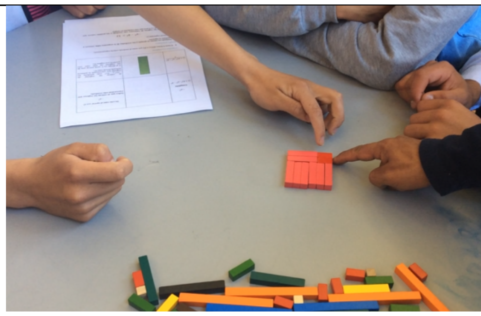
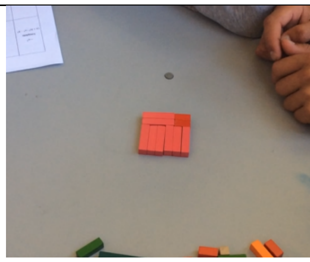
E_1 E_3	Azul va como por acá (el estudiante toma la regleta azul, creyendo que era la regleta siguiente, un estudiante se percata de cuál es la regleta siguiente) Azul va como de ultimas	 Imagen 5. *Manipulación regletas de Cuiseinare*
E_3 E_2 E_3	El negro El verde No si primero el verde (ubica la regleta verde oscura)	 Imagen 6. *Manipulación regletas de Cuiseinare*
E_3 E_2	Después café oscuro (toma la regleta café y la ubica enseguida de la regleta negra) Azul	 Imagen 7. *Manipulación regletas de Cuiseinare*
E_3	Naranja	 Imagen 8. *Manipulación regletas de Cuiseinare*

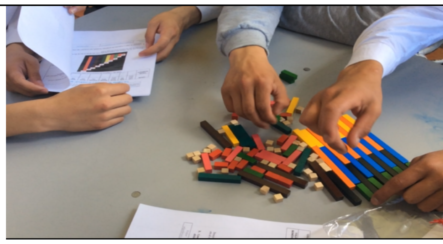
E_2	Continúa leyendo la actividad.	
E_2 E_1 E_3	La primera regleta es café claro (toma una regleta café claro y la manipula) Que es esta a x a (inicia a jugar con la regleta)	 Imagen 9. *Representación de a^2 en las regletas de Cuiseinare*
E_2 E_1	La segunda regleta ilustra verde claro La potencia de esta representación representa Café claro a la dos. Toma la regleta verde y la ubica enseguida de la regleta café claro.	 Imagen 10. *Reconocimiento regleta verde*
P_1 E_1 E_4 P_1	¿Por qué es a^2? Porque mide **a** por **a** tiene sus lados iguales (señala los lados de la regleta) Lado por lado Listo	 Imagen 11. *Manipulación de las regletas Cuiseinare*

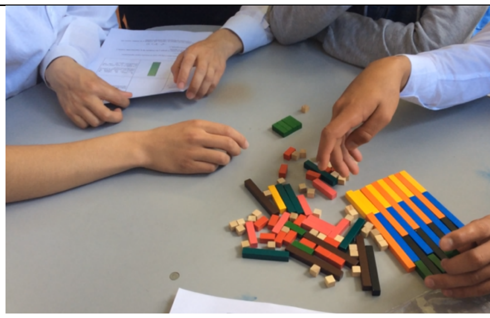
E_2 P_1 E_3 P_1	La potencia de esta regleta es verde claro a la 2 verde claro a la dos ¿Cómo sería ahí entonces? b x b que estos son los dos lados (muestra el lado de la regleta verde y busca las regletas de ese mismo color) Armen el cuadrado, ¿a ver cómo sería el b x b? (Toman dos fichas verdes y con la que ya tenían separada, arman un cuadrado)	 Imagen 12. *Manipulación de regletas Cuiseinare*
P_1 E_3 E_4 P_1	¿Muéstreme por qué es b x b? Porque esto equivale b y esto equivale b (señala el lado del cuadrado formado por las regletas verdes) b x b Listo b a la dos	 Imagen 13. *Representación de b^2en las regletas de Cuisenaire*
E_2 E_1 E_3 P_1 E_1 P_1 E_1 E_3	Se colocan los productos de verde claro a la dos y café claro a la dos Este y este (ubican la regleta ver y la regleta café clara para iniciar a formar el cuadrado) Mas este Este que resultado seria a + b Muéstreme el a y muéstreme el b El a El b	 Imagen 14. *Representación de $(a + b)$ en las regletas de Cuisenaire*

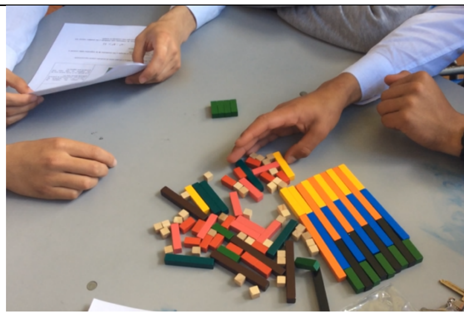
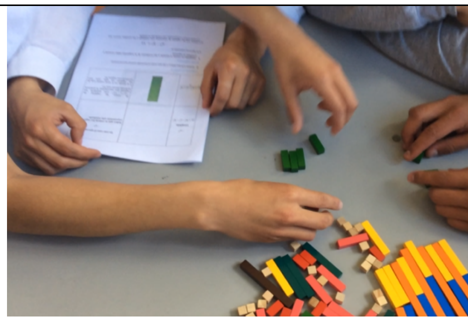
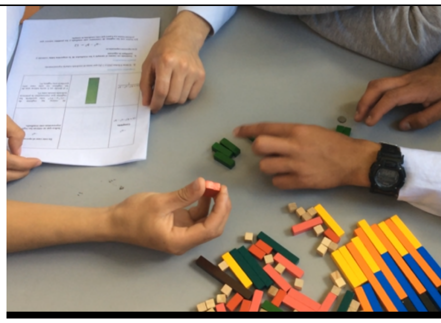
P_1 E_1 E_2 E_3 P_1	Árgmeme el $(a+b)^2$, árgmeme el cuadrado, esto seria $(a+b)^2$ Cuadrado Cuadrado Cuadrado (Unen los cuadrados compuestos por las cinco regletas verdes la regleta café clara) Listo, perfecto que sigue	 Imagen 15. *Representación de* $(a+b)^2$*con las regletas de Cuisenaire*
E_2 E_1 P_1 E_1 E_1 E_2 P_1	Menos verde claro a la dos Quítele, verde claro a la dos, ¿Cuál seria $-b^2$? Estos tres (Señala el cuadrado formado por las tres regletas de color verde y las retira de la construcción) ¿Por qué? Ósea, es un cuadrado b + b Mas no b x b y se les resta listo	 Imagen 16. *Reconocimiento* $(a+b)^2-b^2$*con las regletas de Cuisenaire*
P_1 E_1, E_3	¿Y que nos queda? (ellos observan las regletas que quedaron) a + b	
P_1 E_1 P_1 E_3	¿Cuál regleta representa a^2? Miramos Esta (el estudiante toma la regleta café clara, haciendo referencia a la que representa a^2) ¿Por qué? Sus lados son iguales a x a	 Imagen 17. *Reconocimiento de* $-a^2$*con las regletas de Cuisenaire*

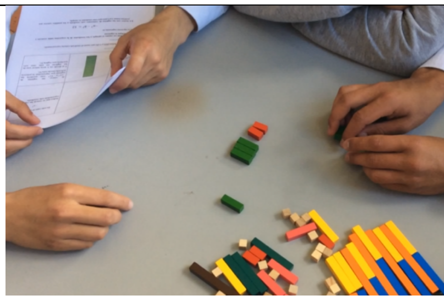
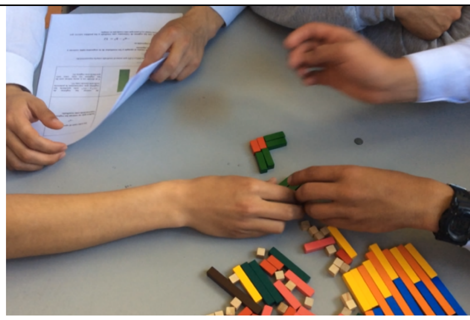
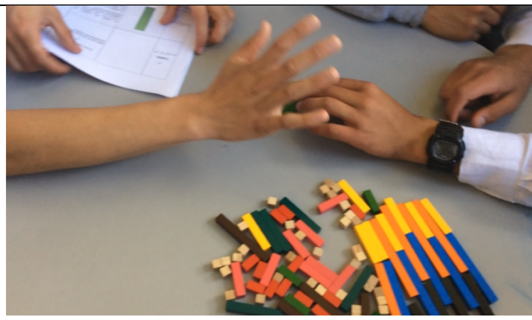
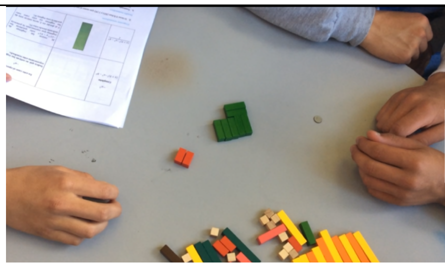
	(muestran los lados de la regleta café claro)	
P_1 E_1 P_1 E_1 ,E_3 P_1 E_1	¿Qué les va quedando? Tienen que mirar que les va quedando Estaba así, ¿no? Pero le quitaron ¿qué? a^2 ¿Qué les quedo? Estas (señalan las dos regletas verdes)	 Imagen 18. *Reconocimiento* ab
E_1	Se divide una y una (separan las dos regletas, haciendo referencia que queda una sola regleta)	 Imagen 19. *División de dos regletas*
 E_2 E_1 E_3	**Preguntas orientadoras** Si tienen ocho fichas rosadas y dos rojas ¿que suma al cuadrado estaría representando? Ocho rojas (toman ocho fichas rosadas y las dos rojas) Dos rojas Entonces seria de la siguiente manera	 Imagen 20. *Representación regletas rosadas y rojas*
E_3	Un cuadrado, entonces sería estas así (intentan formar el cuadrado de diferentes formas, hasta que llegan a la forma que se requiere presentar)	 Imagen 21. *Manipulación regletas Cuiseinare*

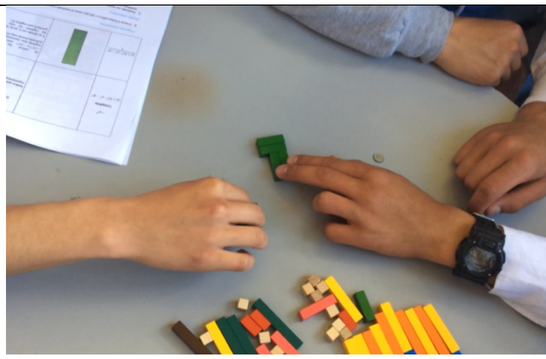
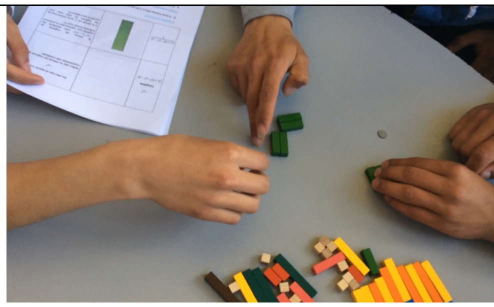
E_4 E_3	Estas seria b x b (establecen que b es rosado) Y las otras cuatro vendrían encajando acá para formar un cuadrado	 Imagen 22. *Representación de* $(a+b)^2$*con regletas rosadas y rojas*
P_1 E_1 P_1	Cuanto mide, haber muéstreme en ese cuadrado rosado más rojo (señalan un lado del cuadrado y hacen referencia que un lado es compuesto por color rosado y rojo) ¿Rosado más rojo? Si No deja la ficha como estaba No ahí está bien.	 Imagen 23. *Representación de* $(a+b)^2$*con regletas rosadas y rojas*
E_1 P_1 E_2 P_1 E_3	Rosado más rojo Primero por este lado (señalan el lado de la figura construida, mostrando el lado) Rosado más rojo ¿y por el otro lado cuanto debe medir? Lo mismo, rosado más rojo	 Imagen 24. *Representación de* $(a+b)^2$*con regletas rosadas y rojas*
P_1 E_2 P_1 E_4	¿Y el total cuanto tiene que ser? Rosado más rojo por rosado más rojo Cuanto tiene que ser (Señala un lado del cuadrado, en donde se encuentra color rojo y rosado) Rosado más rojo al cuadrado Claro hasta ahí	 Imagen 25. *Representación de* $(a+b)^2$*con regletas rosadas y rojas*

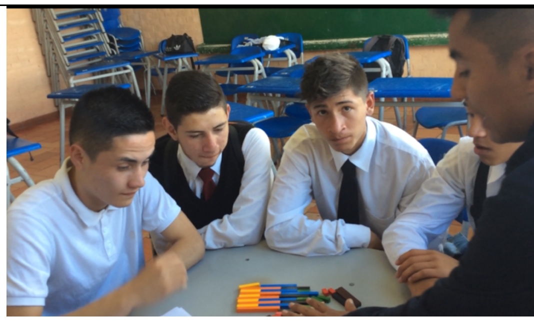
E2	Desafío matemático teniendo en cuenta el ejemplo y los resultados de la tabla anterior conteste y justifique lo siguiente. Si la siguiente expresión es $-a^2 - b^2 = 12$ (el estudiante lee el siguiente ejercicio de la actividad, los estudiantes escuchan atentamente observando las regletas	 Imagen 26. *Estudiantes*
P1 E2 P1	Bueno, pero, ¿qué pasa ahí? Bueno dice: ilustre con las regletas de Cuiseinare este resultado y los posibles valores que pude tomar a y b para que esta condición se cumpla. (el estudiante vuelve y lee el enunciado estando pendiente de lo que debe realizar con las regletas) Hay que buscar algo que cuando yo le quite esos dos cuadrados me dé como resultado 12. (el profesor aclara el ejercicio haciendo referencia que los estudiantes deben construir un cuadrado para quitarle un algo)	 Imagen 27. *Manipulación de las regletas de Cuiseinare*
P1 E3	Que en las regletas de Cuiseinare les puede dar 12. 3 por (atentamente, un estudiante analiza que 4 fichas verdes que representan tres dan como resultado doce, por lo tanto, ellos saben que uno	 Imagen 28. *Manipulación de regletas de Cuiseinare*

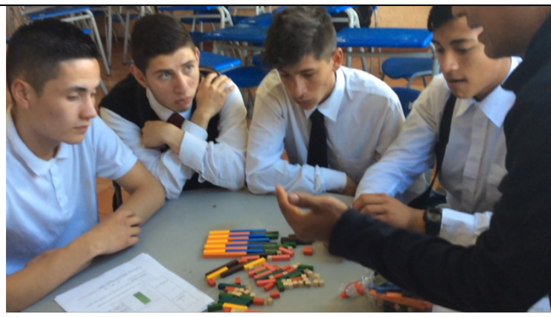
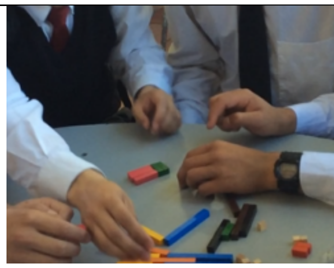
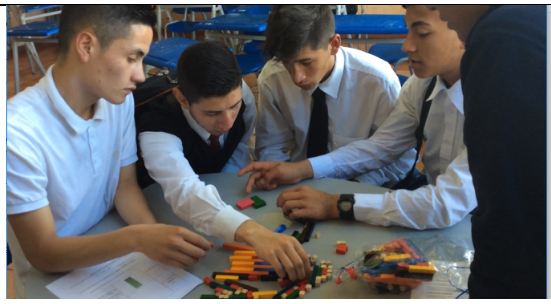
P1	de los colores para armar el cuadrado es el verde) 3 por ¿Cuánto?	
E1 E3 E1	3 x 4, serian cuatro Ya, ya las tengo listas Serian cuatro figuritas de estas. (toman cuatro fichas de color verde y las ordenan una seguida de la otra)	 Imagen 29. *Manipulación de las regletas de Cuiseinare*
P1 E1 E3 E2 E3 E1 E4	Pero ¿cómo las organizarías para quitarles $-a^2 - b^2$? Se supone que a viene siendo estos dos (señala las regletas verdes formado un cuadrado y las rojas formando también el cuadrado) No porque si lo podemos convertir (intentan cambiar las dos fichas rojas con las que formaron el cuadrado con cuatro fichas café claro) Se pueden utilizar iguales Da lo mismo Si se puede dejar así Falta otra	 Imagen 30. *Análisis y manipulación con las regletas de Cuiseinare*

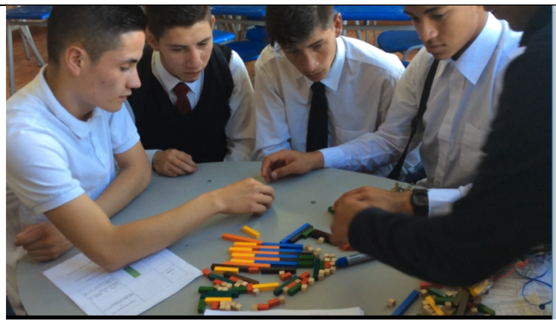
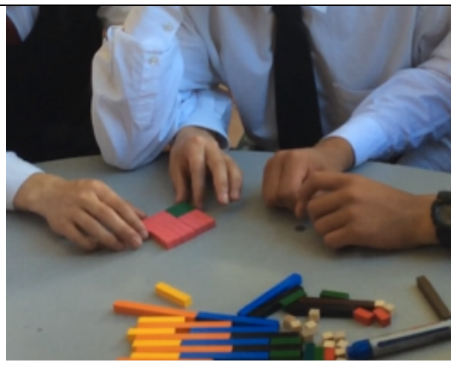
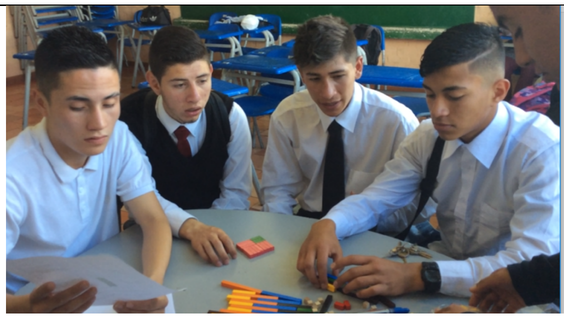
E_2 P_1 E_3 P_1	No porque estas dos son a (señalan las fichas rojas) Tiene que sobrar 12, ¿Qué les da 12 acá? Esto es cuatro (haciendo referencia a las cuatro fichas verdes) Eso es lo que tiene que sobrar quitándole que, $-a^2 - b^2$	 Imagen 31. *Análisis y manipulación con las regletas de Cuiseinare*
E_1 P_1	Serian dos rojas, esto representa a^2 (un estudiante toma las dos regletas rojas y deduce que representan a^2) Dos rojas, entonces le tiene que quitar eso	 Imagen 32. *Representación de a^2con regletas rojas*
P_1 E_1 P_1	¿Y qué seria b^2? Estos tres (cuando se les pregunta cual es b^2 ellos señalan tres regletas verdes que forman el cuadrado) Pero entonces tendría que quedar 12	 Imagen 33. *Representación de b^2* con regletas verdes
E_4 E_1	Por eso 3, 6, 9, 12 (un estudiante cuenta las cuatro regletas) Vea a (muestra una regleta roja)	 Imagen 34. *Análisis y manipulación con las regletas de Cuiseinare*

E_1 P_1	Tengo $a^2 - b^2$ (haciendo referencia a los dos cuadrados armados) Bueno listo, entonces con esas ármeme el cuadrado.	 Imagen 35. *Análisis y manipulación con las regletas de Cuiseinare*
P_1 P_1 E_1 P_1	Y si le hace falta fichas complete. Exacto como lo tiene Darío tiene idea (el estudiante toma las cuatro regletas que representan doce y inicia a completar el cuadrado) Y ahí completa Mmmm ya	 Imagen 36. *Representación de* $(a+b)^2 - b^2$ *con las regletas de Cuiseinare*
P_1 E_1 E_3	¿Ahora quítele quién? ¿Qué le tiene que quitar? Espere, espere (el estudiante toma unas fichas y su compañero le pide que tenga calma para saber que se debe restar del cuadrado) Si son cuatro	 Imagen 37. *Manipulación con las regletas de Cuiseinare*
E_1	Ahí hay un cuadrado ¿no? Entonces. Tiene que quitarle $-a^2$ entonces al principio como se dijo esto representaba a^2 y se le quita a^2 (retiran las regletas rojas que representan a^2)	 Imagen 38. *Representación de* $(a+b)^2 - a^2$ *con las regletas de Cuiseinare*

E_2 E_1 E_4	Y se le quita b^2 (retiran las tres regletas de color verde que representan b^2) Y se le quita b^2 Entonces se le quita esto No, no, no es el de esta parte (un estudiante retira tres regletas de color verde, y el otro compañero indica que no retire esas si no las otras)	 Imagen 39. *Representación de* $(a+b)^2 - a^2 - b^2$ *con las regletas de Cuiseinare*
E_1 E_3 E_4	Cualquier parte Si no importa (se dan cuenta que al retirar las tres regletas verdes de diferentes formas da el mismo resultado) Bueno digamos que quedaría así, lo mismo entonces nos quedan estas así.	 Imagen 40. *Representación de* $ab + ab$ *con las regletas de Cuiseinare*
E_1 P_1	Mire 3, 6, 9 y 12 (realizan el conteo de las fichas que quedaron) Listo, ese es el resultado	 Imagen 41. *Manipulación con las regletas de Cuiseinare*

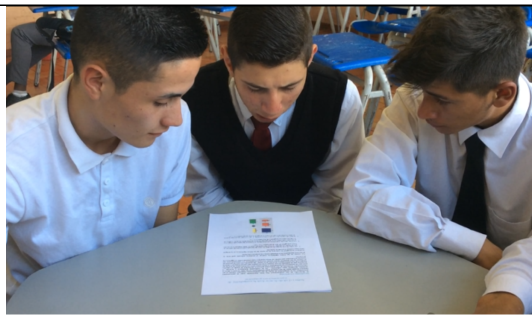
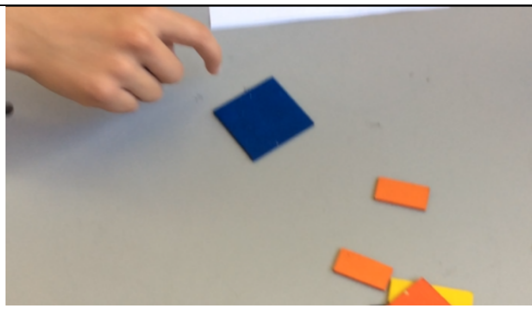
Sujeto	**Característica**	**Imagen**
P_1 E_4	Bueno ya terminada la actividad ¿cómo les pareció la actividad? Pues estuvo un poco complicada por no saber la cantidad (el estudiante argumenta que la actividad al principio estaba compleja por no conocer los valores de las regletas)	 Imagen 42. *Socialización actividad 1*

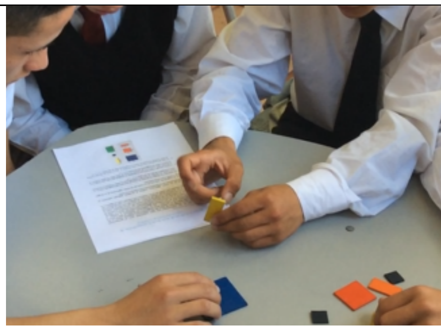
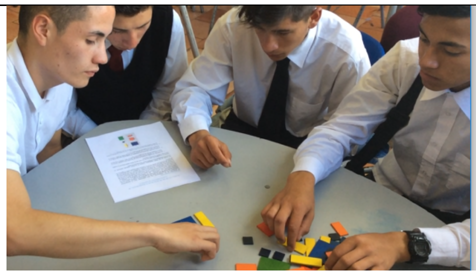
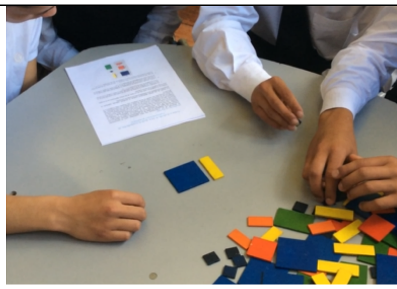
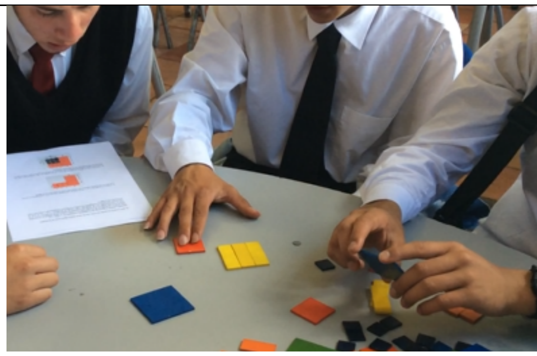
E_2 E_1 E_2 E_4	Ósea, porque no teníamos clara cuál era la cantidad de cada una de las fichas. El valor, pero uno ya sabiendo el valor, como que uno ya tiene más idea puede resolver la actividad. Es algo didáctico y lo podemos ilustrar mejor. Si, lo aprende de la forma didáctica.	 Imagen 43. *Socialización actividad 1*
P_1 E_3 E_1	Listo, entonces ustedes les puede dar una cantidad por un lado más otra cantidad y pueden armar el cuadrado. Sí, claro Desde que se tenga el valor exacto de cada ficha	 Imagen 43. *Socialización actividad 1*
P_1 E_3	Por ejemplo, yo les puedo decir ármenme un cuadrado con las fichas rosadas y verdes, ¿Cómo harían ahí? Rosadas y verdes (toman todas las regletas rosadas y verdes y realizan el cuadrado indicando la longitud de cada uno de los lados del cuadrado)	 Imagen 44. *Manipulación regletas de Cuiseinare*
E_4 E2	Faltan dos Esto va así	 Imagen 45. *Manipulación regletas de Cuiseinare*

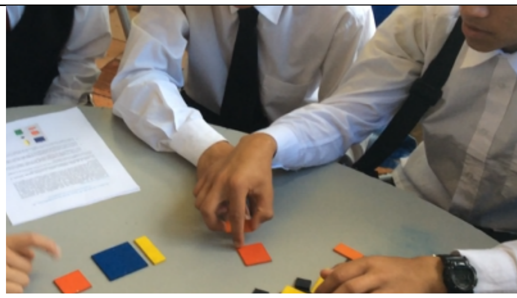
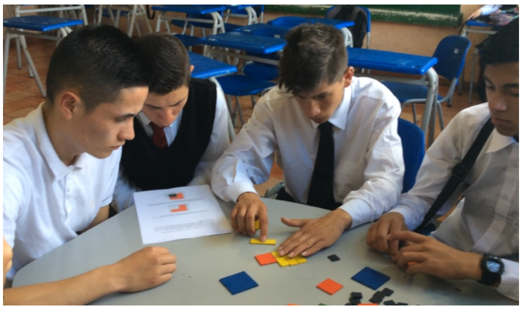
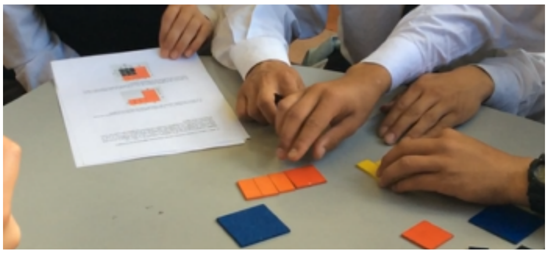
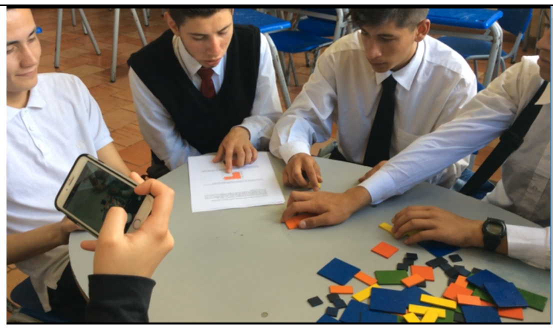
E_1 E_4	Falta una rosada Faltan dos (en el proceso de construcción del cuadrado se dan cuenta que en la figura les hace falta dos regletas)	 Imagen 46. *Manipulación regletas de Cuiseinare*
P_1	Dos rosadas (el profesor saca el otro paquete de regletas y les entre las demás regletas rosadas)	 Imagen 47. *Manipulación regletas de Cuiseinare*
P_1	Entonces esa es la suma del binomio al cuadrado	 Imagen 48. *Representación de* $(a+b)^2$*con las regletas de Cuisenaire*
P_1 E_3 E_2 E_3 P_1	¿Qué les pareció difícil en la guía? El punto 3.1 Al quitar Al quitar para que nos diera exactamente 12 Bueno listo	 Imagen 49. *Culminación actividad 1*

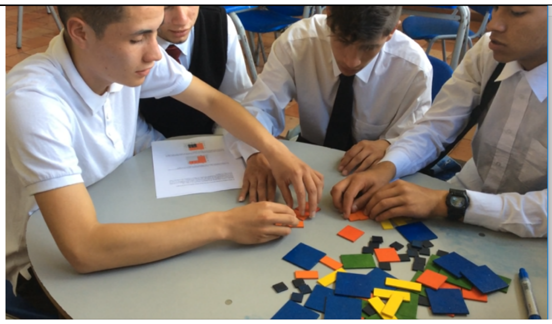
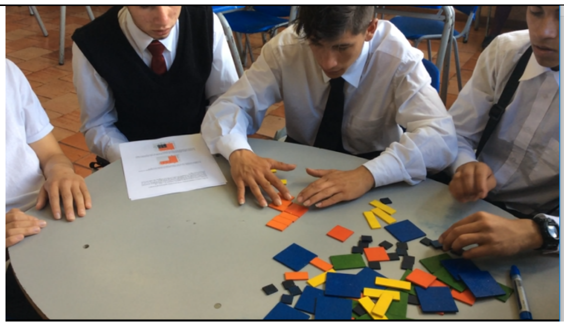
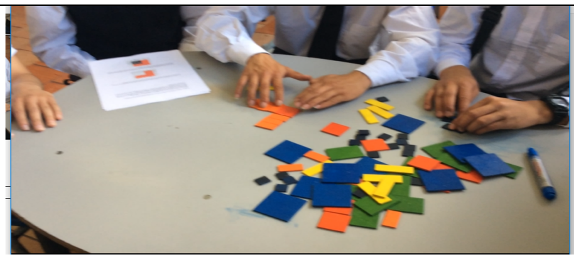
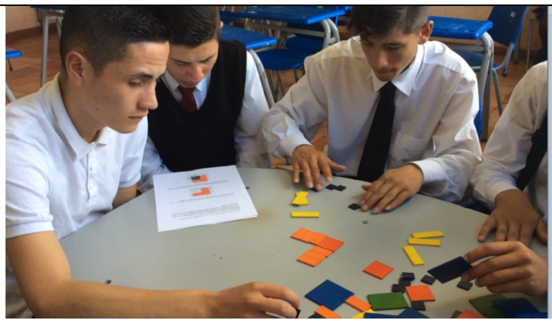
VIDEO No 2. ACTIVIDAD 2. FICHAS ALGEBRAICAS

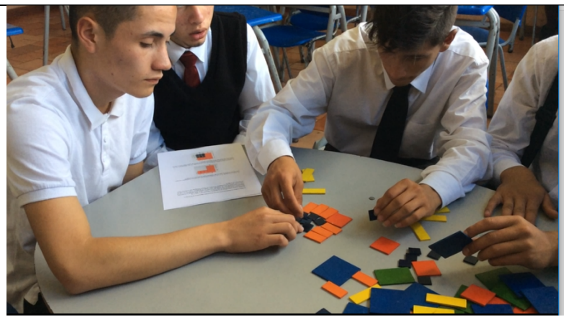
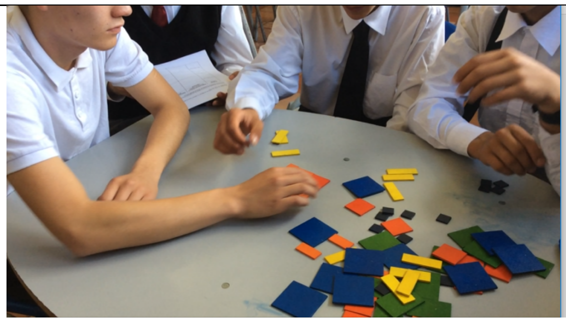
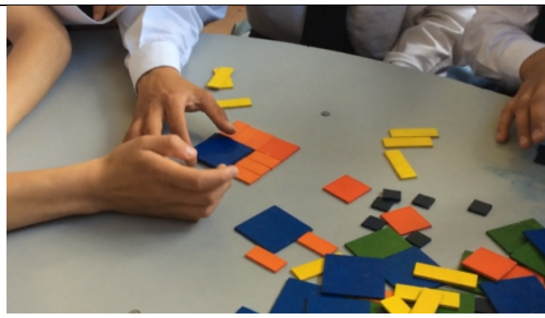
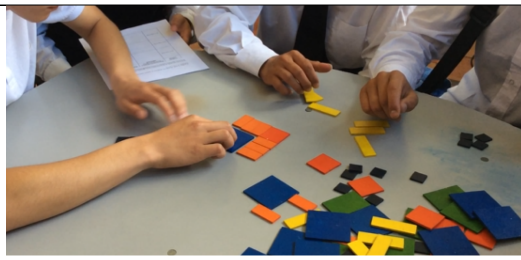
Se realiza la transcripción del video 2 en donde se presenta el desarrollo de la actividad con las regletas de Cuiseinare. Esta actividad fue aplicada a cuatro estudiantes del colegio Alemania Unificada del ciclo 4 de Aceleración grupo 4-01.

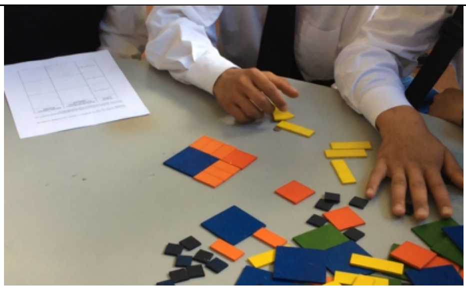
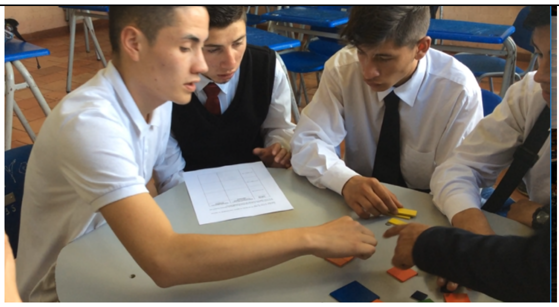
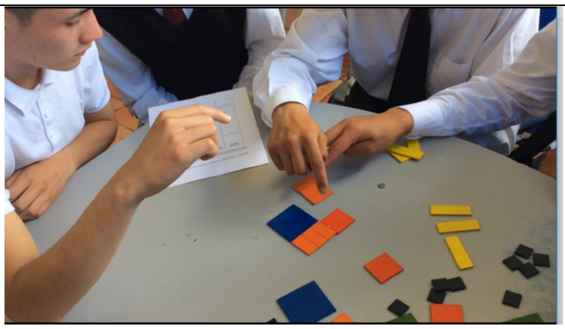
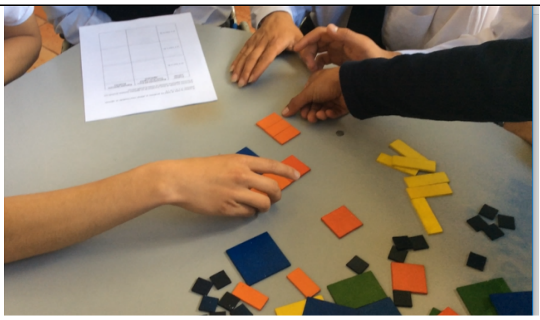
Sujeto	Característica	Imagen
E_2	El estudiante lee el enunciado de la actividad 2. (el estudiante realiza la lectura de la actividad dos, mientras sus compañeros están manipulando las fichas algebraicas)	 Imagen 50. *Introducción a la actividad 2*
E_2 E_3	De acuerdo a la imagen, la medida de los lados de una de los cuadrados es x. ósea esta azul es de lado x. (el estudiante toma el cuadrado azul y afirma que cada lado del cuadrado es x) Esta equivale a x.	 Imagen 51. *Reconocimiento del material didáctico*
E_1	x por x, que es x^2(el estudiante señala cada lado del cuadrado indicando que la longitud de sus lados es x, y señala toda el área del cuadrado conjeturando que es x^2).	 Imagen 52. *Representación de x^2 con las fichas algebraicas*

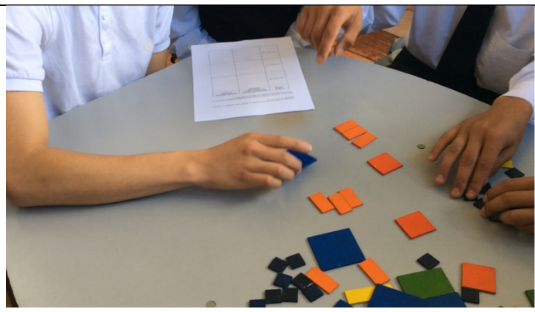
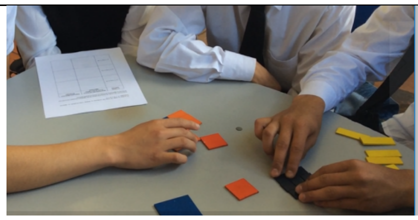
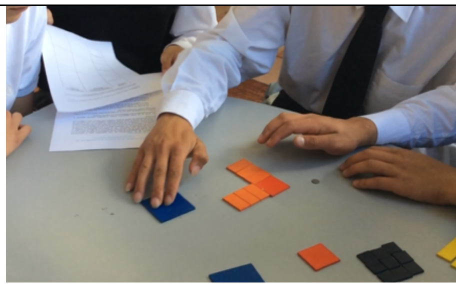
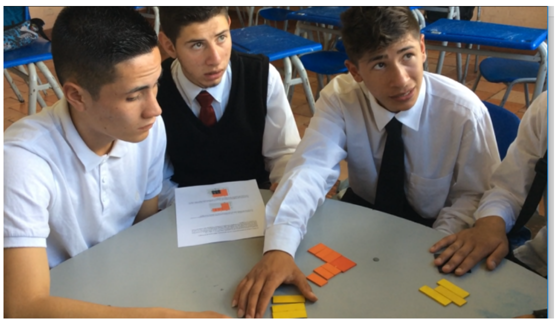
E_2 E_3	Segundo, la ficha amarilla representa un rectángulo, la longitud de un lado es X y del lado más corto es 1. (El estudiante toma la ficha amarilla y señala los lados que el estudiante ha nombrado anteriormente)	 Imagen 53. *Representación de $x.1 = x$ con las fichas algebraicas*
E_1	X por 1 (el estudiante señala el lado largo de la ficha, estableciendo que es x y luego señala el lado largo teniendo en cuenta que es 1).	 Imagen 54. *Manipulación de las fichas algebraicas*
E_1	Al calcular el área de esta ficha se debe realizar el producto entre las longitudes de sus lados es decir x por 1 es igual a x	 Imagen 54. *Manipulación de las fichas algebraicas*
E_2	Se debe realizar el mismo proceso con las otras fichas algebraicas de la imagen. (a continuación, el estudiante procede a leer el ejemplo y los otros compañeros están atentos a realizar la construcción con las fichas) realizar el producto de la siguiente expresión $(z+3)(z+3)$. Para realizar este producto se debe aplicar la propiedad distributiva con respecto a la suma, por lo tanto, se inicia con el producto de $(z.z = z^2)$.	 Imagen 55. *Manipulación de las fichas algebraicas*

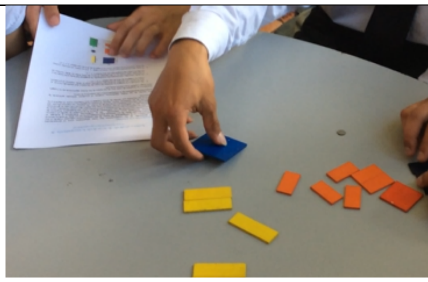
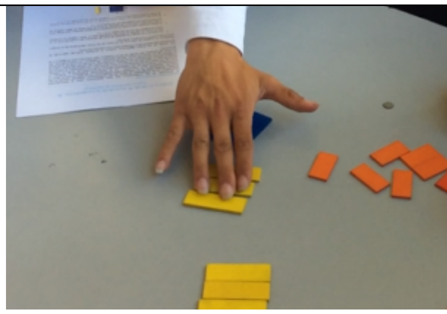
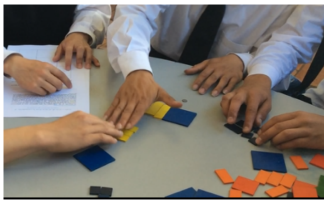
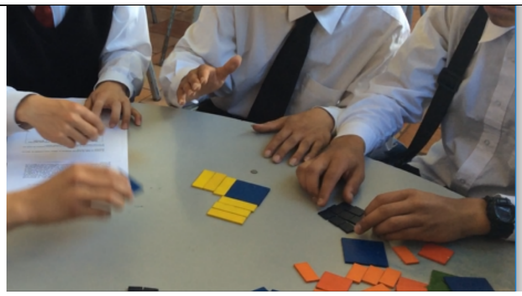
E_2 E_3	El lado de cuadrado rojo, tiene como medida z (El estudiante toma un cuadrado rojo, y señala que cada uno de los lados tiene una longitud z y afirma que el producto de sus lados es z^2)	 Imagen 56. *Representación de z^2con las fichas algebraicas*
E_2 E_3	Luego el producto $z.3 = 3z$ el cual se representa con los rectángulos naranjas. (El estudiante toma tres rectángulos amarillos y los organiza de manera que queden enseguida del cuadrado que representa z^2, pero se percata que la longitud del lado más largo del rectángulo amarillo no coincide con la longitud del cuadrado)	 Imagen 57. *Representación de $3z$ con las fichas algebraicas*
E_4	(Retira los rectángulos amarillos y toma tres rectángulos naranjas, colocándolos enseguida del cuadrado anteriormente mencionado)	 Imagen 58. *Manipulación con las fichas algebraicas*
E_2	Ósea, debe quedar algo así (el estudiante señala la imagen que se encuentra en la guía y compara con la construcción que está en la mesa)	 Imagen 59. *Reconocimiento de una expresión algebraica por medio de áreas*

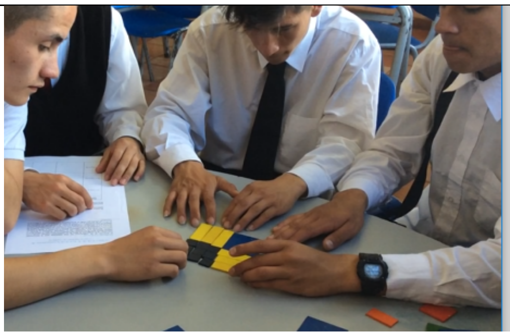
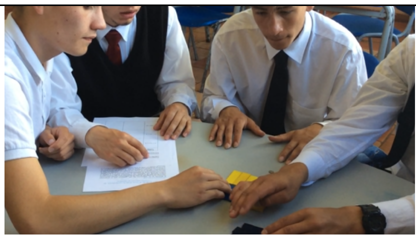
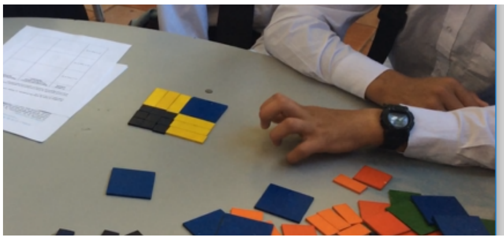
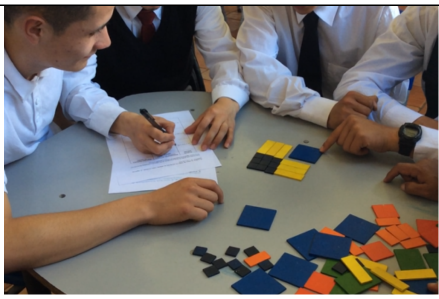
E_1	Z (toma el cuadrado de nuevo tratando de desarmar lo que ya estaba hecho y volver a realizar el ejercicio), Tres al lado ¿No?	 Imagen 60. *Manipulación con las fichas algebraicas*
E_3	Seria así (toma tres rectángulos naranjas y trata de ubicarlos, pero observa que la forma en que está tratando de ubicarlos no concuerda)	 Imagen 61. *Construcción de la expresión* $(z+3)^2$ *con las fichas algebraicas*
E_2 E_3	No, así no va (corrige la posición de los rectángulos y los ubica de forma correcta)	 Imagen 62. *Construcción de la expresión* $(z+3)^2$ *con las fichas algebraicas*
E_2 E_3 E_4	Se continua con el último producto $3.3 = 9$ los cuales se deben representar con los cuadrados negros que representan una unidad. (los estudiantes toman varios cuadrados negros)	 Imagen 63. *Construcción de la expresión* $(z+3)^2$ *con las fichas algebraicas*

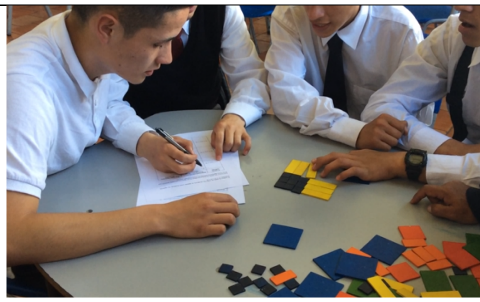
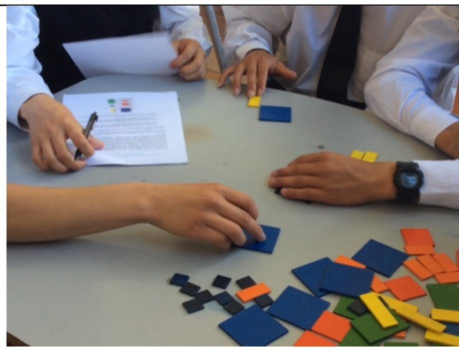
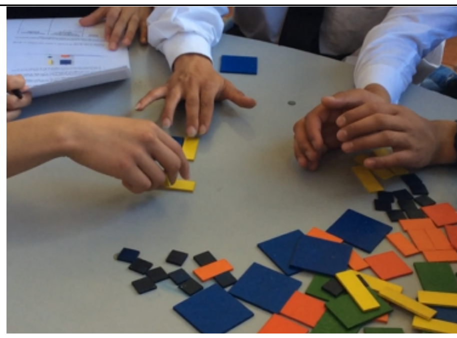
E_1 E_1 E_3	Se completa la figura. (Toman los cuadrados negros que representan la unidad y completan la figura)	 Imagen 64. *Construcción de la expresión* $(z+3)^2$ *con las fichas algebraicas*
E_1	(Terminan de completar la figura)	 Imagen 65. *Representación de la expresión* $(z+3)^2$ *con las fichas algebraicas*
E_4 E_3	Se puede reemplazar por esta. (el estudiante se da cuenta que toda el área formada por los cuadrados de unidad se puede reemplazar por el cuadrado azul, sobreponiendo el cuadrado azul) Mmmm si también	 Imagen 66. *Manipulación de las fichas algebraicas*
E_1	(Retira los cuadrados negros y ubica el cuadrado azul)	 Imagen 67. *Manipulación de las fichas algebraicas*

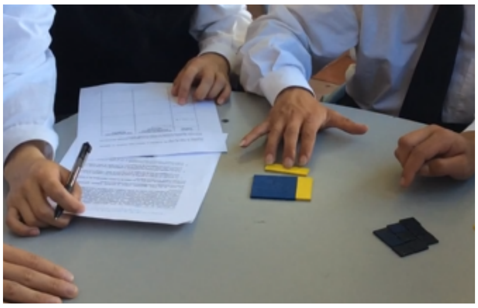
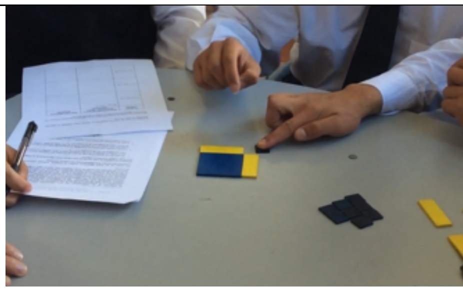
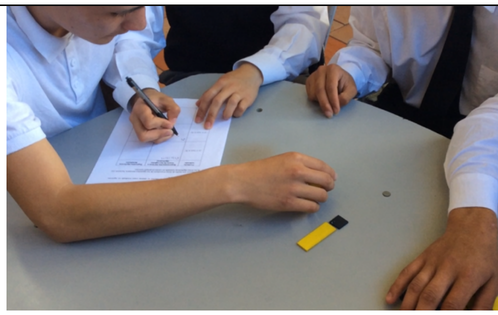
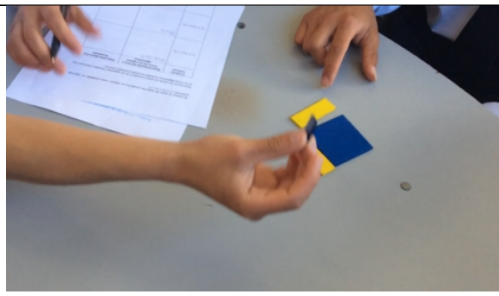
	(el estudiante continúa leyendo) Al realizar la suma de todos los productos se obtiene como resultado el siguiente polinomio $z^2 + 3z + 3z + 9$	 Imagen 68. *Manipulación de las fichas algebraicas*
P1 E1 P1 E3	¿En dónde esta z^2? z^2(el estudiante señala el cuadrado naranja) ¿Por qué z^2? Porque $z.z$ (el estudiante muestra cada uno de los lados del cuadrado)	 Imagen 69. *Socialización de la figura obtenida*
P1 E4	Ahora $+3z$ (el estudiante separa del cuadrado la representación de $3z$)	 Imagen 70. *Socialización de la figura obtenida*
P1	Es esta porque 1, 2, 3 (el profesor indica la región de $3z$)	 Imagen 71. Análisis y *socialización de la figura obtenida*

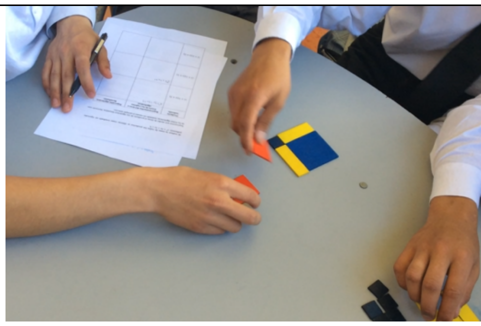
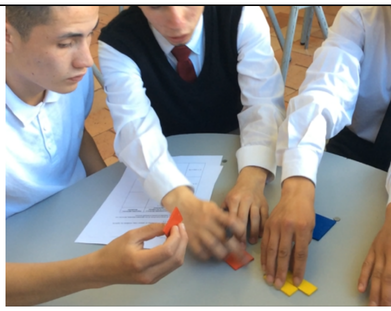
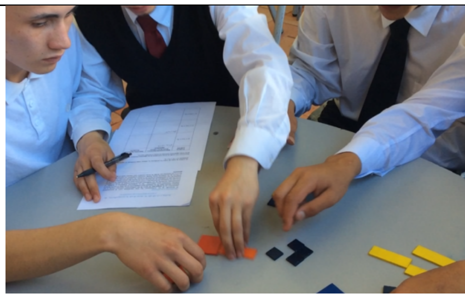
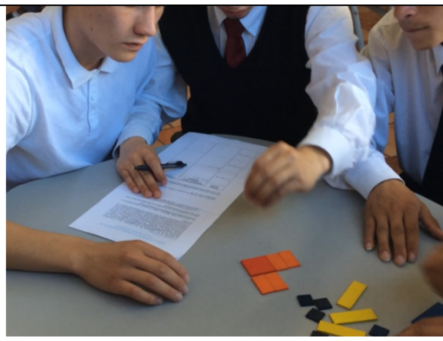
E_2 E_1	La otra igual que presenta $3z$ ¿no? más nueve que sería este cuadrado. (El estudiante toma el cuadrado, haciendo referencia que es lo que corresponde a 9)	 Imagen 72. *Manipulación con las fichas algebraicas*
E_2	(el estudiante lee la actividad que le fue asignada, mientras tanto los otros estudiantes siguen manipulando e material)	 Imagen 73. *Manipulación con las fichas algebraicas*
E_2 E_3	La primera es $(x+3)(x+3)$, entonces … Se cambia y se coloca tres fichas	 Imagen 74. *Reconocimiento y manipulación de las fichas algebraicas*
P_1 E_1 P_1 E_1	Bueno, acuérdese que un lado debe medir ¿Cuánto? $(x+3)$ ¿Y el otro lado? $(x+3)$	 Imagen 75. *Reconocimiento y manipulación de las fichas algebricas*

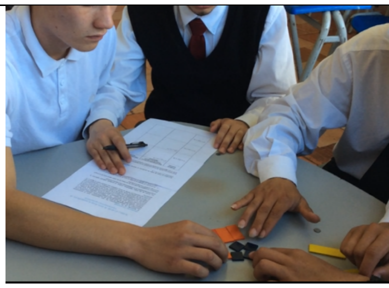
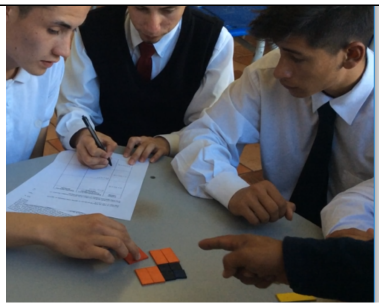
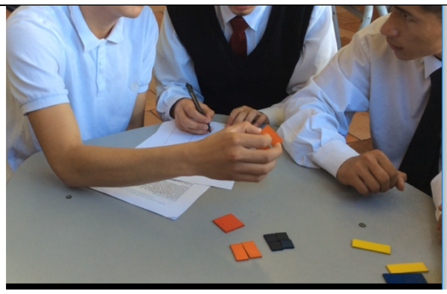
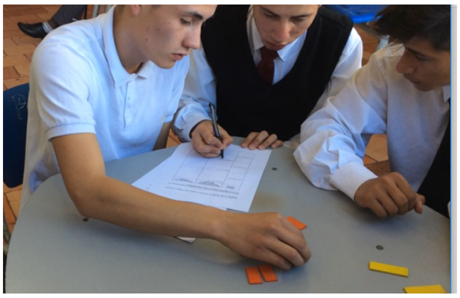
E_3	x^2 Equivale a azul (el estudiante afirma que la ficha azul es x^2)	 Imagen 76. *Representación de x^2con las fichas algebraicas*
E_3	3 amarillas equivalen a $3x$ (el estudiante toma tres fichas amarillas y las organiza sobre la mesa)	 Imagen 77. *Representación de $3x$ con las fichas algebraicas*
P_1 E_2	Entonces un lado al cuadrado tiene que medir ¿Cuánto? (el profesor realiza una pregunta a los estudiantes) $x + 3$ que sería así	 Imagen 78. *Representación de $x + 3$ con las fichas algebraicas*
E_2	Entonces por el otro lado debe medir lo mismo porque se supone que es un cuadrado (el estudiante asimila que los lados del cuadrado miden lo mismo)	 Imagen 79. *Construcción de la representación de $(x + 3)^2$ con las regletas algebraicas*

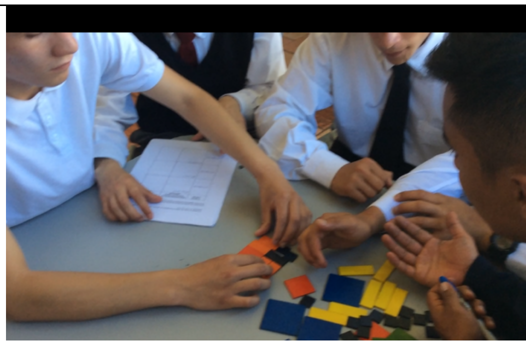
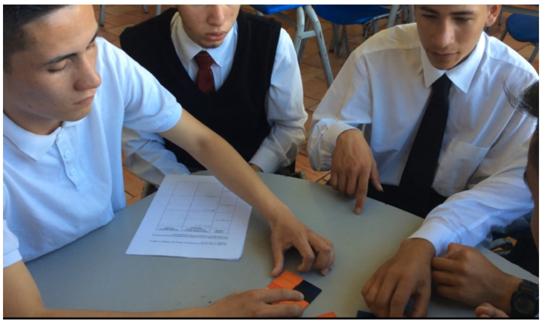
E_1 E_1 E_4	Y lo que falta es $3.3 = 9$ que se ponen estas pequeñitas (los estudiantes tomas las fichas algebraicas que representan unidad y las ubican en la parte faltante del cuadrado para completar la construcción)	 Imagen 80. *Representación de* $(x+3)^2$ *con las regletas algebraicas*
E_1	Profe esas fichas pequeñitas, se pueden reemplazar por este cuadrado. (El estudiante se percata que las 9 fichas que representan unidad se pueden reemplazar por un cuadrado más grande)	 Imagen 81. *Manipulación de las fichas algebraicas*
E_4	Profe entonces este cuadrado representa $(x+3)^2$	 Imagen 82. *Representación de* $(x+3)^2$ *con las regletas algebraicas*
E_2 E_4	Hay que escribir las expresiones resultantes (el estudiante toma un esfero y propone a sus compañeros que le colaboren analizando los resultados) Esta es x^2 (señala el cuadrado azul que representa x^2)	 Imagen 83. *Análisis de las expresiones algebraicas resultantes con las fichas*

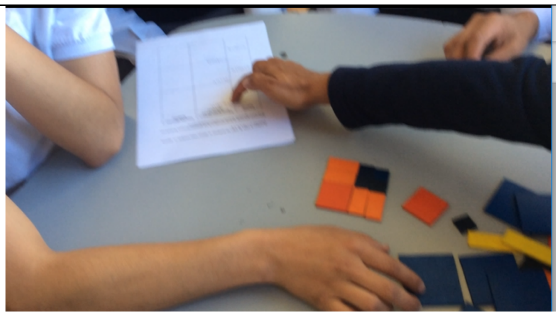
E2 E3	¿Mas cuánto? (El estudiante va registrando los resultados) $3x$ (menciona y señala las fichas que representa $3x$)	 Imagen 84. *Observación y registro en la actividad 2*
E3 E2 E4	Entonces toca sumar otra vez $3x$ (el estudiante toma registro de la siguiente expresión algebraica) Mas $3.3 = 9$	
P1	Bueno, continúen con la otra	
E2 E1	La siguiente es $(x + 1)(x + 1)$ Mmmm Bueno entonces $x.x = x^2$ que es la azul (realiza el procedimiento de la operación y identifica que la ficha que necesita es la azul) (toma la ficha azul identificando su valor)	 Imagen 85. *Representación de x^2con las fichas algebraicas*
E2 E1	Y el $x.1 = x$ es la ficha amarilla (toma la ficha amarilla y la ubica enseguida del cuadrado azul)	 Imagen 86. *Representación de $x.1 = x$ con*

		las fichas algebraicas
E_3	Y se haría la misma igual, es decir la misma amarilla (el estudiante toma la otra ficha amarilla y la ubica enseguida del cuadrado azul).	 Imagen 87. *Construcción del cuadrado* $(x+1)(x+1)$
E_2 E_3 E_4	Y una por una (el estudiante afirma que la ficha faltante debe ser la representación de uno por uno) Que sería esta chiquitica (el estudiante toma con su índice una ficha que representa la unida y la arrastra hasta la construcción del cuadrado)	 Imagen 88. *Ubicación de la ficha faltante para el cuadrado* $(x+1)(x+1)$
P_1 E_4 E_3 E_1	Escriba la expresión algebraica resultante del cuadrado Entonces x^2 Esta amarilla es x porque $x.1 = x$ Hay dos amarillas escriba de una vez	 Imagen 89. *Registro en la hoja de actividad 2*
E_1	Y esta es una por una y ahí se complementa el cuadrado. (el estudiante toma una ficha que representa uno y le pide al estudiante que registre el valor en la actividad)	 Imagen 90. *Representación de 1 con las fichas algebraicas*

P_1 E_2	Bueno, continúen con la siguiente La siguiente representación es la de $(z+2)(z+2)$	
E_1 E_3	(simultáneamente cuando E_1 está leyendo la actividad, los estudiantes toman cada uno, una ficha algebraica color naranja que representa z^2)	 Imagen 91. *Representación de z^2con las fichas algebraicas*
E_2 $E_!$ E_2	Es esta (el estudiante señala una ficha de color naranja) Esta también (hace referencia a que él ya tiene esa misma ficha Mire lado por lado (él aclara porque es z^2)	 Imagen 92. *Discusión acerca de z^2*
E_2	Mas $2z$ que son esas fichas naranjas que están ahí (el estudiante toma dos fichas naranjas, reconociendo que representan $2z$)	 Imagen 93. *Representación de $2z$*
E_2 E	Y vuelve y se repite $2z$ Acá están las otras dos fichas naranjas (el estudiante toma dos fichas naranjas)	 Imagen 94. *Construcción de $(z+2)(z+2)$ con las fichas algebraicas*

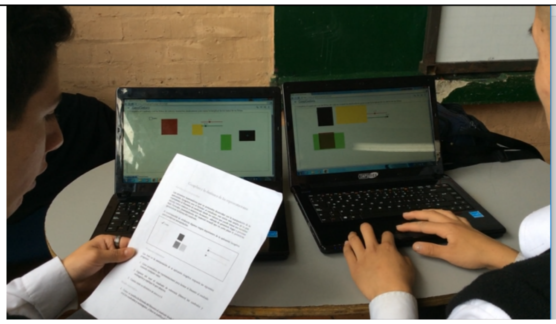
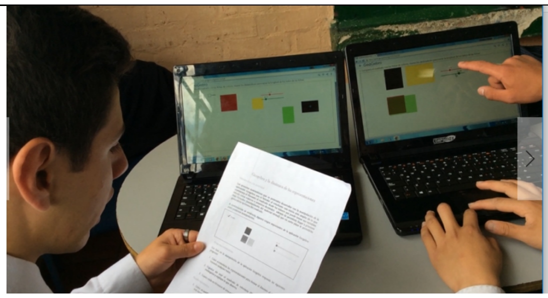
E_2 E_1 E_3	Y dos por dos que sería cuatro (los estudiantes toman cuatro fichas que representa la unidad)	 Imagen 95. *Construcción de* $(z+2)(z+2)$ *con las fichas algebraicas*
P_1 E_1	Anota la expresión algebraica que dan como resultado Listo, entonces primero z^2 (el estudiante toma el cuadrado y señala que esa ficha representa z^2 y E_2 hace registro atentamente)	 Imagen 96. *Representaciones algebraicas por medio de las fichas*
	Más $z.2 = 2z$ Pero anótelo dos veces (el estudiante toma las fichas que representa $2z$ y analiza que esta expresión se repite dos veces)	 Imagen 97. *Representaciones algebraicas por medio de las fichas*
E_1	Más cuatro (el estudiante señala las fichas que representa la unidad en donde se representa $2.2 = 4$)	 Imagen 98. *Representaciones algebraicas por medio de las fichas*

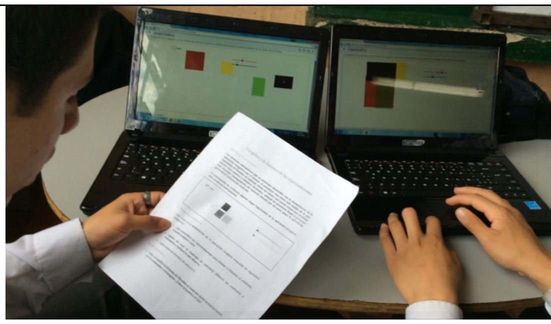
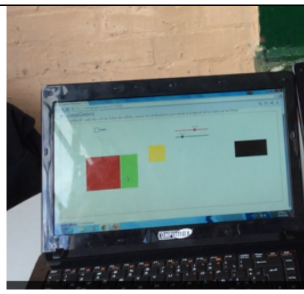
Sujeto	Característica	Imagen
P_1	¿Cómo les pareció esta actividad? ¿más fácil que con las regletas de Cuiseinare?	 Imagen 99. *Socialización de la actividad 2*
E_3 P_1 E_3 E_2	Más fácil ¿Por qué te pareció más fácil? Porque con las regletas de Cuiseinare tocaba sumarle los cuadritos Si, tocaba armar las áreas	 Imagen 100. *Socialización de la actividad 2*
P_1 E_4 E_1	¿Cómo les parece el trabajo con este material? Muy bueno, es una nueva forma de aprender Es mejor que estar copiando en el cuaderno	 Imagen 101. *Socialización de la actividad 2*
P_1 E_1	¿se formaron los cuadrados con los dos materiales? Es decir con las regletas de Cuiseinare y las fichas algebraicas Si profe, se formaban casi de la misma forma, la diferencia es que con las regletas tocaba armar las áreas.	

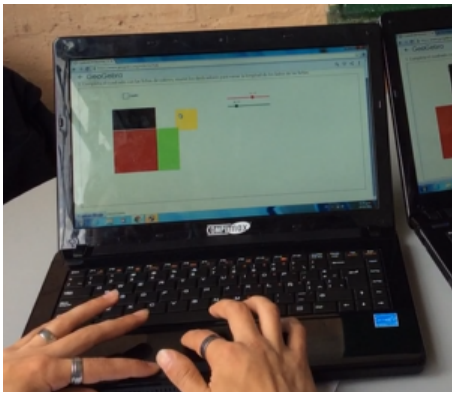
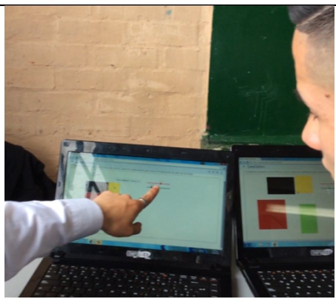
P_1 E_3 E_2 P_1	Pasar del material didáctico a la forma escrita ¿es difícil? No profe es más fácil, las áreas se expresan más fácil Solo se tiene que guiar por los lados de las fichas Listo, muy bien	 Imagen 102. *Socialización de la actividad 2*

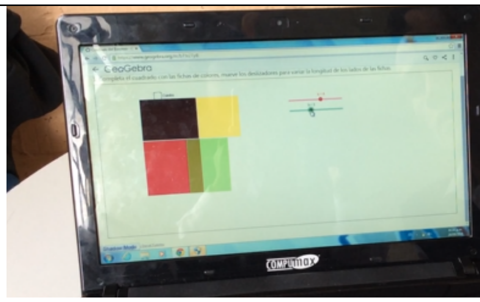
VIDEO No 3. ACTIVIDAD 3. GEOGEBRA

Se realiza la transcripción del video 3 en donde se presenta el desarrollo de la actividad con las regletas de Cuiseinare. Esta actividad fue aplicada a cuatro estudiantes del colegio Alemania Unificada del ciclo 4 de Aceleración grupo 4-01.

Sujeto	Característica	Imagen
E_2	El estudiante lee el enunciado de la actividad 3	 Imagen 103. *Introducción a la actividad 3*
E_2 E_3	(El estudiante lee el enunciado de la actividad tres, los otros estudiantes interactúan con el recurso digital hecho en Geogebra)	 Imagen 104. *Reconocimiento del recurso digital hecho en Geogebra*

E_2	¿Cómo acomodaría la representación para formar el binomio al cuadrado, tomando cualquier valor?	 Imagen 105. *Reconocimiento del recurso digital hecho en Geogebra*
E_2 E_1	Ósea, se supone que moviendo esto se les da el valor a los cuadros (el estudiante inicia a mover los deslizadores y observa que los tamaños de los cuadrados van cambiando a medida que le cambia los valores) Ese es a	 Imagen 106. *Desarrollo de la actividad 3*
$E_!$ E_2 E_1	Se supone que se debe armar un binomio al cuadrado (el estudiante mueve los deslizadores) Darle diferentes valores ¿Qué valores le daría usted? (el estudiante le pregunta a su compañero que valores les daría a los deslizadores para realizar la actividad)	 Imagen 107. *Desarrollo de la actividad 3*
E_2 E_1	Bueno, entonces primero este. (el estudiante evidencia que debe realizar las mismas construcciones que hizo con los otros materiales didácticos) Luego colóquele el rectángulo verde al lado.	 Imagen 107. *Desarrollo de la actividad 3*

E1 E2	Este va debajo o arriba (el estudiante arrastra el rectángulo negro y lo ubica según la indicación de su compañero)	 Imagen 108. *Desarrollo de la actividad 3*
E1 E2	(el estudiante arrastra el cuadrado amarillo que es la representación restante) Listo quedo completo el cuadrado	 Imagen 109. *Desarrollo de la actividad 3*
E1	Entonces este seria $a + b$ (el estudiante señala la pantalla indicando de cada uno de los lados del cuadrado mide $a + b$)	 Imagen 110. *Desarrollo de la actividad 3*
E2	Se dice que este es **a** donde representa a**=4** (el estudiante señala el deslizador)	 Imagen 111. *Desarrollo de la actividad 3*

E_2	Y b donde representa el 2 (señala la parte del cuadrado equivalente a b)	 Imagen 112. *Desarrollo de la actividad 3*
E_1 E_2	Entonces si a=4 y b=2, cada lado del cuadrado debe medir 6 Entonces $6x6 = 36$	
E_1 E_2	Entonces si cambiamos b por 3 Mm mire se agrandan los cuadrados	 Imagen 113. *Desarrollo de la actividad 3*