

DIFICULTADES Y ERRORES EN EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN DE UNA
SECUENCIA GRÁFICO-NUMÉRICA.

ALBA CAROLINA NAVAS POLANCO

HEIMAR ANDRÉS MOLINA LINARES

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ, 2016

DIFICULTADES Y ERRORES EN EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN DE UNA
SECUENCIA GRÁFICO-NUMÉRICA

ALBA CAROLINA NAVAS POLANCO

HEIMAR ANDRÉS MOLINA LINARES

Trabajo de Grado para optar al grado de Especialista en Educación Matemática

Asesora

CLAUDIA MARCELA VARGAS GUERRERO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ, 2016

“Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría: en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos”.

(Acuerdo 031 del 2007. Artículo 42. Parágrafo 2.)

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Construyendo la Pedagogía</i>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 4 de 62	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Dificultades y errores en el proceso de generalización de una secuencia gráfico-numérica.
Autor(es)	Navas Polanco, Alba Carolina; Molina Linares, Heimar Andrés.
Director	VARGAS Guerrero Claudia Marcela.
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2016. 59p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	GENERALIZACIÓN, SECUENCIA GRÁFICO-NUMÉRICA, ERRORES, DIFICULTADES.

2. Descripción
<p>Este trabajo se encuentra en la modalidad de Trabajo de Grado asociado al interés profesional del estudiante. Pretende describir las dificultades y errores que presenta un grupo de estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Distrital San Francisco en el proceso de generalización de una secuencia gráfico-numérica. Para ello se aplicó una prueba piloto en el segundo semestre del año 2016 y se realizó el análisis a partir de las respuestas dadas por algunos estudiantes. Finalmente se presentan algunas conclusiones.</p>
3. Fuentes
<p>Se consultaron libros, tesis de grado, artículos, entre otros, referentes a la generalización, dificultades y errores en este proceso. Las fuentes más destacadas para la realización del trabajo de grado fueron: Cuartas J. (2015); García, C., Juan, A., (1998); Godino, J. & Font, V. (2000); Grupo Azarquiel (Alonso, et al, 1993); Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1999); Merino, E. (2012); Mora, L. (2012).</p>

4. Contenidos

El trabajo de grado se encuentra organizado de la siguiente forma:

Inicialmente, se presenta la introducción, justificación, objetivo general y objetivos específicos. Luego se expone el marco teórico en el que se aborda el proceso de generalización, las fases del proceso de generalizar, las dificultades en el proceso de generalizar una secuencia y referentes sobre los errores.

Seguidamente se encuentra la metodología donde se menciona el contexto del grupo de estudiantes del Colegio San Francisco I.E.D., el diseño y aplicación de la prueba piloto.

Posteriormente se registra el análisis de las respuestas dadas por cinco estudiantes de grado séptimo escogidos de la Institución Educativa San Francisco durante el proceso de generalizar una secuencia gráfico-numérica, resaltando las dificultades y errores cometidos durante este proceso.

Finalmente, se mencionan algunas conclusiones respecto a las dificultades y errores cometidos por los estudiantes en el proceso de generalizar una secuencia gráfico-numérica.

5. Metodología

La metodología que se utilizó para elaborar este trabajo de grado fue de tipo cualitativo – descriptivo. Las fases del estudio fueron: 1. Documentación. 2. Diseño de una prueba piloto. 3. Aplicación de una prueba piloto. 4. Análisis de las respuestas dadas por los estudiantes. 5. Conclusiones

6. Conclusiones

En la primera fase del proceso de generalización, para la secuencia gráfico numérica presentada en la prueba piloto, los estudiantes realizan diversas interpretaciones, algunas de las cuales los conducen a no focalizarse en la variación de palillos a medida que construyen las demás figuras de la secuencia, producto de las transformaciones de la secuencia presentada, de una observación inadecuada o que la secuencia no les representa algo. Además, los estudiantes encuentran variedad de características de tal configuración de palillos que no los conduce a determinar el patrón de la secuencia, por ejemplo, relacionan con un cuadrado la distribución de los palillos, perciben configuraciones inapropiadas (formas de un ocho).

Ningún estudiante de este grupo de seleccionados para el análisis, expresa la característica suficiente en la secuencia de figuras presentada. Solamente tres estudiantes expresan que la característica común es la conformación de cuadrados con los palillos de las figuras, lo cual es una características necesaria mas no suficiente. Los otros dos estudiantes señalan características irrelevantes, de tipo anecdótico. En general, las características mencionadas por este grupo de estudiantes no favorecen la búsqueda y la descripción del patrón en la secuencia gráfico-numérica.

La búsqueda de la cantidad de palillos para la Figura 20 y la Figura 100 generó dificultad en los

estudiantes dado que exigía elaborar mejores planteamientos de razonamiento y/o las estrategias de conteo que no fueron las más acertadas para obtener la cantidad de palillos correcta. Por ejemplo, algunos estudiantes eligieron solamente por el conteo de segmentos de la representación gráfica o la superposición de figuras para realizar el conteo, algunos estudiantes optaron por proponer multiplicaciones pero no lograron concretar acertadamente el proceso, algunos estudiantes adoptaron la noción de proporcionalidad relacionando la posición de la figura y la cantidad de palillos de la figura (linealidad) la cual no encaminaba a la determinación correcta de la cantidad de palillos. Lo anterior genera dificultad para consolidar el patrón de la secuencia y para escribir la afirmación que permita hallar la cantidad de palillos para cualquier figura de la secuencia gráfico-numérica.

Por otra parte, la elaboración de este trabajo de grado genera reflexión en el quehacer educativo del docente dado que los autores han replanteado su visión de la concepción de la enseñanza del álgebra en las instituciones educativas consultando y proponiendo alternativas para generar pensamiento algebraico en los estudiantes. Además, el presente estudio motiva a los autores para revisar el plan de estudios y compartir a los demás docentes del área de matemáticas de las instituciones educativas donde actualmente laboran la inclusión desde grados inferiores de actividades similares a la abordada en el presente trabajo de grado.

Elaborado por:	NAVAS Polanco Alba Carolina, MOLINA Linares Heimar Andrés.
Revisado por:	VARGAS Guerrero Claudia Marcela.

Fecha de elaboración del Resumen:	11	12	2016
--	----	----	------



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Educadora de Educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado **Dificultades y errores en el proceso de generalización de una secuencia gráfico-numérica** presentado por los estudiantes:

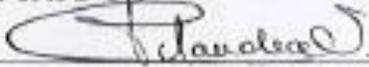
Heimar Andrés Molina Linares Cód. 2016182012, C.C. 80.165.682

Alba Carolina Navas Polanco Cód. 2016182014, C.C. 52.121.632

Como requisito parcial para optar al título de **Especialista en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada**, con **44** puntos.

En constancia se firma a los 22 días del mes de febrero de 2017.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesor: 
Claudia Vargas Guerrero (UPN)

Jurados: Profesor: 
María Nubia Soler (UPN)

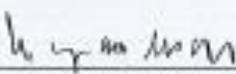
Profesora: 
Luis Francisco Guayambuco (UPN)

Tabla de contenido

1. INTRODUCCIÓN.....	12
2. JUSTIFICACIÓN	13
3. OBJETIVOS.....	15
3.1. OBJETIVO GENERAL.....	15
3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	15
4. MARCO TEÓRICO.....	16
4.1 EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN.	16
4.2 FASES EN EL PROCESO DE GENERALIZAR PATRONES.....	19
4.2.1 Ver.....	19
4.2.2 Describir	20
4.2.3 Escribir.....	20
4.3 DIFICULTADES DURANTE EL PROCESO DE GENERALIZAR	21
4.4. DE LOS ERRORES.....	23
5. METODOLOGÍA	25
5.1 DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN	25
5.2 DISEÑO Y DESCRIPCIÓN DE LA PRUEBA PILOTO	27
5.3 APLICACIÓN DE LA PRUEBA PILOTO.	30
5.4 METODOLOGÍA DE INDAGACIÓN	31
6. ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	33
6.1 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL PROCESO DE GENERALIZACIÓN DE ROCIO	33
6.2 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL PROCESO DE GENERALIZACIÓN DE ALEJANDRO	35
6.3 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL PROCESO DE GENERALIZACIÓN DE FELIPE	36
6.4 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL PROCESO DE GENERALIZACIÓN DE MAYER.....	38
7. CONCLUSIONES	40
BIBLIOGRAFÍA.....	42
ANEXOS.....	45

LISTA DE TABLAS

	Pág.
TABLA 1. Relación entre las preguntas de la prueba piloto, las fases de generalización y las dificultades.	27
TABLA 2. Nomenclatura de las dificultades del proceso de generalizar.	32

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
ANEXO 1. PRUEBA PILOTO	45
ANEXO 2. RESPUESTAS DE ROCIO A LA PRUEBA PILOTO	48
ANEXO 3. RESPUESTAS DE ALEJANDRO A LA PRUEBA PILOTO	51
ANEXO 4. RESPUESTAS DE FELIPE A LA PRUEBA PILOTO	54
ANEXO 5. RESPUESTAS DE MAYER A LA PRUEBA PILOTO	57

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
FIGURA 1. Fases de la luna	15
FIGURA 2. Ejemplo 1 de secuencia gráfico-numérica.	22
FIGURA 3. Ejemplo 2 de secuencia gráfico-numérica.	22
FIGURA 4. Ejemplo 3 de secuencia gráfico-numérica.	23
FIGURA 5. Comparativo pruebas SABER Matemáticas 2014 – 2015 Colegio San Francisco IED.	26
FIGURA 6. Secuencia gráfico-numérica de la prueba piloto.	27
FIGURA 7. Representación de Rocío de las figuras de las posiciones 5 y 6	35
FIGURA 8. Proceso de conteo de Rocío para calcular la cantidad de palillos necesarios para construir la figura 100.	34
FIGURA 9. Figuras 5 y 6 de la secuencia dibujadas por Alejandro	35
FIGURA 10. Cantidad de palillos necesarios para construir la figura 20 y 100 según Alejandro.	36
FIGURA 11. Figuras 5 y 6 de la secuencia dibujadas por Felipe	37
FIGURA 12. Procedimiento de Mayer para calcular la cantidad de palillos de la figura 20 y 100.	38

1. INTRODUCCIÓN

Este documento reporta los resultados de un estudio en el cual se realizó una indagación de tipo exploratorio y descriptivo sobre las dificultades y errores de un grupo de estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Distrital San Francisco en el proceso de generalización de una secuencia gráfico-numérica. Este estudio se considera pertinente debido a que la generalización es considerada como un acercamiento favorable al álgebra (Radford, 2010) y por ende, la identificación y la descripción de las dificultades y errores que surgen en este proceso puede resultar útil para comprender las actuaciones de los estudiantes.

En este trabajo de grado se optó por elegir como población objeto de estudio a un grupo de estudiantes de séptimo grado, quienes desde el punto de vista curricular han tenido la oportunidad de relacionarse con ideas de índole aritmético-geométrico y donde el grado de escolaridad es transitorio entre la aritmética y el álgebra.

Para abordar el estudio, primero se realizó una revisión teórica respecto a las fases que conforman el proceso de generalización (Alonso, et al, 1993) y las dificultades que surgen en el mismo (Alonso, et. al. 1993 y Mora, 2012). Posteriormente, se diseñó una prueba piloto donde los estudiantes abordaron una actividad de generalización de una secuencia gráfico-numérica. Luego, se identificaron las dificultades y los errores de los estudiantes a partir de sus respuestas a la prueba piloto.

Como resultado del análisis de la prueba piloto realizada por los estudiantes, se asociaron a cada una de las etapas del proceso de generalización, o al menos a las que fueron observables en la población elegida, las dificultades y los errores evidenciados en la actividad.

2. JUSTIFICACIÓN

Una ruta de aprendizaje hacia el álgebra que ha tomado fuerza en los últimos años, desde diversos estudios en Didáctica del Álgebra, está relacionada con el acercamiento al álgebra a través de actividades encaminadas hacia la generalización de patrones. Este tipo de actividades se considera una forma acertada de introducir el álgebra a nivel escolar ya que posibilita un acercamiento de los estudiantes hacia situaciones de variación, noción muy relacionada con el desarrollo del pensamiento algebraico y la interpretación de letras en contextos matemáticos (Radford, 2010).

Adicionalmente, existe un consenso en la comunidad de investigadores en Didáctica del Álgebra respecto a la necesidad de potenciar el desarrollo del razonamiento algebraico desde los primeros años de escolaridad como resultado de un proceso paralelo y continuo dentro del trabajo aritmético y geométrico que se inicia en los primeros años y que encuentra en el proceso de generalización un terreno propicio para ello. Al respecto, Godino (2000) destaca la importancia que desde la educación infantil se realice el estudio de patrones numéricos, geométricos y de cualquier otro tipo. Sessa (2005) propone una introducción al álgebra a través de la generalización, mediante actividades de producción de fórmulas en situaciones aritméticas o geométricas. Blanton y Kaput (citado por Molina, 2009) proponen promover en el aula la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y, de este modo, cultivar hábitos de pensamiento algebraico.

En concordancia con estas propuestas, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) en aras de una reestructuración conceptual y metodológica del álgebra escolar, recalcan la posibilidad de promover procesos de generalización a través de situaciones que requieran el estudio de la variación y el cambio, de las regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente, como elementos asociados al pensamiento algebraico. Así mismo, el documento de Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2003) resalta la importancia del pensamiento algebraico en la escuela, y muestra cómo el desarrollo del pensamiento variacional se puede potenciar antes de octavo grado, centrado en el estudio de las regularidades y patrones.

Por otra parte, aunque la generalización sea un acercamiento propicio al álgebra, no puede omitirse el hecho de que el desarrollo del pensamiento algebraico provoca rupturas que se convierten en dificultades en el proceso de construcción del conocimiento matemático (Socas, 1998). Estas dificultades, en general, no se pueden evitar ya que forman parte del proceso normal de construcción del conocimiento matemático.

Abrate (2006) afirma que el estudio de errores en matemáticas ha sido un tema de interés en la comunidad de educadores matemáticos. Su relevancia radica en que a través del reconocimiento y análisis de los errores surgen ideas para indagar las razones que los originan, hacer inferencias sobre los factores que los provocaron y, con ello, plantear propuestas para atenderlos de manera

pertinente. A su vez, la descripción y análisis de los errores cometidos por los estudiantes provee información valiosa acerca de cómo se construye el conocimiento matemático proporcionando al docente un conocimiento pertinente para la toma de decisiones en sus acciones del quehacer educativo. Por tanto, las dificultades pueden verse como una oportunidad para mejorar las prácticas de enseñanza.

Para los estudiantes de grado séptimo es importante la identificación de los errores en el proceso de generalización porque los motiva a ser más precavidos en las próximas actividades, a pensar y repensar en sus ideas y argumentos, el error puede estar presente y se puede visualizar cuando se socializa entre los participantes del proceso, conciben que a través del ensayo y del error se construye conocimiento matemático, valide y/o compruebe las ideas o las estrategias planteadas porque allí puede encontrar errores o aciertos.

Por lo tanto, al propiciar el desarrollo del pensamiento algebraico a través de actividades de generalización es pertinente identificar y prever las dificultades que pueden presentarse en este proceso porque permite enriquecer el conocimiento del docente cuando aborde actividades de esta índole y encaminar a los estudiantes para que logren desarrollar procesos de generalización.

3. OBJETIVOS

3.1. OBJETIVO GENERAL

Describir las dificultades y errores que presentan los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Distrital San Francisco en el proceso de generalización de una secuencia gráfico-numérica.

3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Consultar referentes bibliográficos que permitan caracterizar el proceso de generalización e identificar algunas dificultades y errores que se presentan en este proceso.
- Elaborar y aplicar una prueba piloto en la cual los estudiantes desarrollen una actividad de generalización de una secuencia gráfico-numérica.
- Identificar las dificultades y los errores que presentan los estudiantes durante el proceso de generalización.

4. MARCO TEÓRICO

En este apartado se presentan los elementos teóricos que dan sustento al estudio de los errores en el proceso de generalización. Los referentes teóricos están orientados en tres direcciones. En primer lugar, se reúnen los referentes asociados al proceso de generalización y sus fases. Después, se aborda el estudio de las dificultades, recalcando las dificultades mencionadas por Alonso, et. Al (1993) y Mora (2012). Finalmente, se exponen los referentes relacionados con el proceso de generalización de secuencias y las posibles dificultades que se pueden presentar durante este proceso.

4.1 EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN.

La generalización de patrones está presente en muchos contextos.. Por ejemplo, en las ciudades, para controlar y regular el paso de peatones y de vehículos se han instalado semáforos en las intersecciones de calles y carreras. Así, durante la hora pico, en algunas avenidas principales de Bogotá, el semáforo tarda 30 segundos en verde, 2 segundos en amarillo y 40 segundos en rojo (. Seguidamente, 2 segundos en amarillo, 30 segundos en verde, 2 segundos en amarillo y 40 segundos en rojo. Luego, vuelve y repite el mismo patrón durante un lapso de tiempo o durante todo el día. Para un peatón, un conductor, un vendedor o un malabarista que se dedica a trabajar en el paso peatonal, identificar el patrón que determina el cambio de semáforo es de interés dado que muchas acciones, tareas o compromisos se organizan teniendo en cuenta el tiempo transcurrido entre cada cambio.

Otro ejemplo que involucra la generalización de patrones, se evidencia en algunos almanaques que incluyen las siguientes convenciones:

Figura 1. Fases de la luna.



Las anteriores convenciones representan las fases de la luna. Haciendo un seguimiento a las fechas de cada mes, se puede observar que este patrón de cambio se mantiene y cada fase se

conserva aproximadamente siete días en el calendario. De esta manera, tenemos que la naturaleza nos muestra un modelo que inicialmente percibimos de forma particular pero que trasciende para convertirse en una generalidad y que usualmente se registra en los calendarios para personas dedicadas a la agricultura.

Los anteriores ejemplos nos ilustran situaciones que implica consolidar información de casos particulares para agruparlos en un marco más general. De esta manera, la acción de obtener una propiedad común a partir de las relaciones que se obtienen en los casos particulares nos conlleva a pensar en el proceso de generalización, proceso relevante en la actividad matemática.

Alonso, et al (1993) afirma que “la generalización es uno de los procesos esenciales de la actividad matemática y de los que más a menudo se ponen en juego” (p. 27). Sessa (2005) respalda esta idea al indicar que “la generalización está en el corazón de la matemática” (p. 71). La generalización, según Smith y Smith. (1977) “es una abstracción en la cual un conjunto de objetos con propiedades similares se representa por una clase genérica. Es el más importante mecanismo para modelar el mundo real, permitiéndonos ir gradualmente desde lo específico a lo general. La generalización nos permite movernos desde observaciones de propiedades específicas de objetos hasta un modelo que representa esos objetos por una clase genérica” (p.3).

En Educación Matemática, algunos autores también señalan una idea similar de generalización. Por ejemplo, Mason (1989 citado por Esquinas, 2008 p. 107), alude que “el proceso de generalizar significa descubrir alguna ley general que indique: qué parece ser cierto (una conjetura); por qué parece ser cierto (una justificación) y dónde parece que es cierto, esto es, un planteamiento más general del problema”. Para Sessa, (2005) generalizar es un proceso que consiste en encontrar características que unifican y que permiten reconocer a un conjunto de objetos o problemas. Además, señala que la generalización es una posible vía de entrada al álgebra, tanto para expresar la generalidad como para proveer un mecanismo de validación de conjeturas.

Sessa (2005) también menciona algunas de las dificultades que suelen surgir cuando se introduce a los estudiantes al álgebra escolar mediante el planteamiento de ecuaciones. Ante esto, la autora propone abordar el álgebra escolar por la vía de la generalización a través de diversos problemas que permitan producir fórmulas para contar colecciones. La iniciación al álgebra escolar desde este punto de vista, permite que los estudiantes determinen la solución de un problema por medio de diferentes procedimientos que los conlleva a modelar situaciones como reflejo de un proceso de conteo e introducir la noción de fórmula como medio que valida la generalización.

Igualmente, Zazkiz y Liljedahl (2002) defienden la idea de trabajar con patrones matemáticos para introducir el concepto de variable, argumentando que tradicionalmente, éste se introduce como incógnita de una ecuación, dejando de lado su naturaleza definitoria de fenómenos de variación. Cuando los estudiantes exploran patrones, las variables surgen como resultado de un proceso en el cual se realizan acciones como detectar similitudes y diferencias, clasificar, etiquetar, buscar algoritmos, conjeturar, argumentar, establecer relaciones numéricas entre componentes o bien, a generalizar los datos y relaciones matemáticas.

Sessa (2005) propone una introducción al álgebra a través de la generalización, mediante actividades de producción de fórmulas en situaciones aritméticas o geométricas

“Al presentar nosotros la generalización como una posible vía de entrada al álgebra, estamos pensando en esta herramienta como bien adaptada para poder tanto expresar la generalidad como proveer un mecanismo de validación de conjeturas [...] (Sessa, 2005, p. 71)

Godino (2000) destaca la importancia del desarrollo del pensamiento algebraico desde la educación infantil:

Ciertamente no se trata de impartir un "curso de álgebra" a los alumnos de educación infantil y primaria, sino de desarrollar el pensamiento algebraico [...] incluye el estudio de los patrones (numéricos, geométricos y de cualquier otro tipo), [...], y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos.

Así pues, el trabajo con patrones, proporciona a los estudiantes la oportunidad de observar y verbalizar sus generalizaciones y de registrarlas simbólicamente conformando una útil y concreta base para la manipulación.

Es importante mencionar que el proceso de generalización estará influenciado por las herramientas o medios que los estudiantes utilicen para inspeccionar dicha generalidad. En su actividad, los estudiantes no sólo requieren reconocer la generalidad sino también contar con formas de expresarla. Esto plantea la necesidad de incorporar secuencias para el reconocimiento de patrones. Beckmann (citado por Cuartas, 2015) define una secuencia como una lista de elementos que están ubicados en un orden específico. También Collins (citado por Castro, 1995) afirma que “Una secuencia es un número de cosas o acontecimientos que se presentan uno detrás del otro en un orden fijado o de acuerdo con un patrón definido, por lo general moviéndose en etapas hacia un resultado particular”

Existen diversos tipos de secuencias entre los cuales se pueden reconocer principalmente las secuencias numéricas, secuencias geométricas y secuencias gráfico-numéricas (Mora L., p.5):

- Las secuencias numéricas son aquellas que están dadas por valores numéricos en las que se establecen relaciones entre sus valores para obtener el patrón numérico.
- Las secuencias geométricas son aquellas que utilizan las figuras geométricas sobre las cuales hay que hacer un tipo de razonamiento respecto a sus propiedades.
- Las secuencias gráfico-numéricas son aquellas que están dadas por una serie de dibujos (pueden ser triángulos, rectángulos, cuadrados, círculos) que se caracterizan por estar organizados de cierto modo y que obedecen a un patrón entre las figuras dadas. Por lo general, en las secuencias gráfico-numéricas se muestran tres o cuatro términos de la secuencia con el fin de determinar el siguiente término, el término general de secuencia a través de una expresión que permita determinar el número o la cantidad de elementos del lugar n de la secuencia.

Así pues, una de las hipótesis sobre la cual se construye este trabajo de grado es que el uso de secuencias gráfico-numéricas es una herramienta que ayuda al estudiante a efectuar la transición

de la aritmética al álgebra. Mason (1988) señala que la visualización y la manipulación de figuras pueden encaminar a los estudiantes a la construcción de expresiones algebraicas. Explorar patrones a partir de secuencia de figuras (secuencias gráfico-numéricas) es un recurso visual que toma fuerza para determinar patrones y permite entablar cierta conexión entre la secuencia de figuras, la secuencia numérica y la regla de generalización.

La generalización de patrones a partir del estudio de secuencias gráfico-numéricas requiere de la manipulación de figuras e implica percibir el elemento posterior a uno dado en un conjunto ordenado de elementos, que surge del análisis de la sucesión de figuras y de la conexión entre lo que se ve y lo que está generalizando. Adicionalmente, a la identificación o descubrimiento del patrón que rige esta secuencia, es primordial expresar el patrón recurriendo al lenguaje verbal o una posible expresión que relacione la posición que ocupa cada una de las figuras dentro de la secuencia y el patrón de cambio de la secuencia.

Para ello, Mason (1988) propone las siguientes etapas a seguir durante el proceso de generalización: ver, decir, registrar y prueba de validez de las fórmulas:

“Ver” hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación. [...] “Decir” ya sea a uno mismo o a alguien en particular, es un intento de articular, en palabras, esto que se ha reconocido. “Registrar” es hacer visible el lenguaje, lo cual requiere un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita (incluyendo los dibujos). (p.17). [...] “La validez de la fórmula puede ser probada de diferentes maneras”. [...] En primer lugar, ésta se puede probar mediante su aplicación directa en los casos en los cuales podemos saber la respuesta por otros medios. En segundo lugar, puede ser probada haciendo los cálculos para nuevas figuras que estén dentro de un rango [...]. En tercer lugar, chequeando la consistencia interna. (p.22-23)

De manera similar, el Grupo Azarquiel (Alonso, et al, 1993) señala que el proceso de generalización requiere de tres fases: La visión de la regularidad, la diferencia o la relación (ver), su exposición verbal (describir) y su expresión escrita de la manera más concisa posible (escribir). El Grupo Azarquiel no considera la cuarta etapa mencionada por Mason (1988).

A continuación se presentan las fases del proceso de generalizar con base a lo expuesto por el Grupo Azarquiel.

4.2 FASES EN EL PROCESO DE GENERALIZAR PATRONES.

4.2.1 Ver

“Ver un patrón” consiste en identificar y reconocer entre lo que es propio de cada situación o ejemplo y lo que es común a todos ellos. Aunque en ocasiones y dependiendo de la situación, la visualización pueda ser un proceso rápido e intuitivo para los sujetos, hay otras situaciones en las que este mismo proceso se puede complejizar a tal punto que se requiera hacer un análisis de las

situaciones planteadas, estudiando sus características o propiedades, de manera que se manipule la información y se pueda llegar al reconocimiento del patrón.

“Ver” juega un papel importante durante el proceso de generalización, ya que permite el primer acercamiento hacia la secuencia de figuras que se le presentan. La información que proporciona los elementos visuales será una herramienta fundamental para la detección del patrón.

La etapa de “ver ” hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación, es decir, ver algo en común o preguntarse qué es lo que tienen igual, identificar los factores para producir una regla que se pueda trabajar. “Ver” requiere prestar atención a los detalles en la secuencia de figuras para determinar los aspectos que cambian o se mantienen iguales y ver lo general a través de lo particular. Esto implica enfocarse en la información relevante y organizarla de forma adecuada.

El acercamiento a través de secuencias geométricas constituye una forma amena y atractiva para el estudio de las generalizaciones donde la fase de ver es el primer paso fundamental. La representación visual impacta de manera inmediata el razonamiento y ayuda a interiorizar más rápidamente en las tareas o acciones de generalizar.

4.2.2 Describir

“Describir un patrón” consiste en expresar la regularidad percibida en lenguaje natural y de manera oral. En este caso, la comunicación será fundamental para verbalizar las relaciones, conjeturas y preguntas que surgen cuando se está detectando la regla o patrón.

La descripción obliga a realizar una organización de las ideas para generar la verificación de conjeturas o la reformulación de las mismas y aunque pueden estar llenas de contradicciones o lagunas, es fundamental comunicar las conjeturas de forma oral, con el fin que sean objeto de reflexión, discusión, revisión y perfeccionamiento. Las conjeturas elaboradas permiten validar las relaciones que surgen a partir de las secuencias de las representaciones geométricas. Las ideas o afirmaciones elaboradas ayudan a construir la simbología que se representará a través de posibles expresiones algebraicas.

La transición del “ver” al “describir” tiene cierto nivel de dificultad, ya que exige el uso de un lenguaje claro, comprensible, entendible para expresar la regularidad o el patrón.

4.2.3 Escribir

“Escribir un patrón” requiere un mayor esfuerzo ya que exige una expresión que sea precisa, completa y suficiente para enunciar lo observado. Implica una variedad de formatos que pueden ser escritos, dibujos, gráficos, tablas o una combinación de éstas (dibujos apoyados con palabras). Es ideal llegar a una expresión simbólica, pero llegar a esta necesita un nivel de comprensión avanzado por parte del estudiante, tanto de la situación que se quiere describir como de la aplicación de la simbología matemática. Es una progresión gradual la que se ve desde las expresiones verbales hasta las expresiones puramente simbólicas y aunque es deseable que el estudiante llegue al manejo comprensivo de las expresiones simbólicas también lo es que siempre

relacione lo que expresa con la descripción verbal y mantenga un significado de lo que comunica algebraicamente.

Esta etapa requiere un movimiento hacia los símbolos. El “escribir” es una fase avanzada del proceso de generalización, ya que expresar una regla simbólicamente por escrito, suele ser difícil. Según determinan varias investigaciones, el registro o escritura del patrón que se determina a partir de la secuencia es la fase de mayor dificultad porque exige expresar la regularidad o patrón a través de símbolos.

4.3 DIFICULTADES DURANTE EL PROCESO DE GENERALIZAR.

Cuando se proponen actividades de generalización de patrones, es posible que el tránsito por las etapas propuestas por Alonso, et al (1993) no resulte del todo fácil. Por ejemplo, es posible que exista dificultad para abstraer la regla o dificultad para generar la expresión algebraica que subyace en la secuencia gráfico-numérica.

Warren (2005) informa sobre dificultades que han experimentado estudiantes al acercarse al estudio del álgebra y, en particular, a la generación de expresiones algebraicas a partir de la exploración visual de patrones. Este estudio se enfocó en dos aspectos: Describir secuencias en términos de la posición y encontrar el término de una posición cualquiera, reconociendo que las dificultades que presentaron los estudiantes se deben a las limitadas experiencias que tienen con secuencias aritméticas.

Durante las últimas décadas distintas investigaciones, han centrado su atención en analizar dificultades asociadas al aprendizaje y enseñanza del álgebra en la escuela. Estas investigaciones han reportado que algunas dificultades surgen en el paso de la aritmética al álgebra, en ocasiones porque el álgebra se presenta de manera abrupta, es decir, sin procesos que medien de manera paulatina en la transición de la aritmética al álgebra. Por ejemplo, Socas, Camacho y Hernández señalan que el aprendizaje del álgebra genera dificultades a los estudiantes debido a la complejidad de sus objetos, a los procesos de pensamiento algebraico, al desarrollo cognitivo de los estudiantes, a los métodos de enseñanza y a las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra.

Alonso, et al (1993) plantea algunos errores y dificultades en la generalización de secuencias. Igualmente, Mora (2012) enuncia algunas de las dificultades más comunes para los estudiantes al llevar a cabo procesos de generalización para sucesiones dadas. Dado que el interés primordial del trabajo de grado es describir el estudio de dificultades y errores que comenten los estudiantes en el proceso de generalizar secuencias gráfico-numéricas, a continuación relacionamos las dificultades enunciadas en estas referencias:

- **Dificultad 1:** “Encontrar la forma de abordar el problema, principalmente cuando los estudiantes nunca han tenido un acercamiento al estudio de secuencias” (Mora, 2012, p.20). La falta de familiaridad con este tipo de actividades o el desconocimiento puede ocasionar que para el estudiante la secuencia no les represente algo o no focalicen en la “variación o cambio” de los elementos de la secuencia. Ante esta dificultad, el Grupo

Azarquiel (Alonso, et al, 1993) indica que es vital realizar un tratamiento didáctico adecuado para no paralizar iniciativas durante mucho tiempo.

Por ejemplo si se tiene la secuencia de la Figura 2, y se le pide a un estudiante que determine la cantidad de triángulos de la posición 10, es posible que no plantee una estrategia que lo lleve a la resolución de este problema.

Figura 2. Ejemplo 1 de secuencia gráfico-numérica



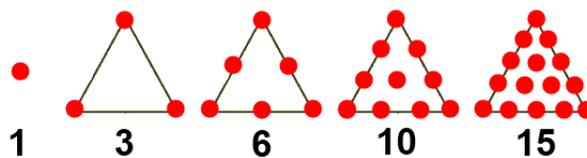
- **Dificultad 2:** “Al utilizar configuraciones geométricas, es posible que al observarlas, se encuentre gran variedad de características de tales configuraciones, que pueden resultar difíciles de guardar en la memoria, de relacionar, clasificar o identificar cuáles son las más importantes para disponer de una solución” (Mora, 2012, p.20). Por ejemplo en la figura 3 se ve una representación gráfico numérica en la que la secuencia aumenta de a 2 cuadros tanto vertical como horizontalmente, pero no es suficiente con que el estudiante sume 4 cuadritos por posición, sino que debe tener en cuenta que la configuración empieza con 3 cuadritos y a partir de ahí se suman 4 por cada posición adicional.

Figura 3. Ejemplo 2 de secuencia gráfico-numérica.



- **Dificultad 3:** “Proponer características irrelevantes, de tipo anecdótico, para describir lo observado en una secuencia” (Mora, 2012, p.20). Por ejemplo, indicar que la figura 4 corresponde a triángulos formados por puntos.

Figura 4. Ejemplo 3 de secuencia gráfico-numérica



- **Dificultad 4:** “Confundir características necesarias con características suficientes de las sucesiones de figuras” (Mora, 2012, p.20).
- **Dificultad 5:** “El intento de establecer una regla, (...), es muy probable que resulte infructuoso” (Alonso, et al, 1993, p. 43). Así pues, se considera que si el estudiante no percibe o identifica el patrón en la secuencia gráfico-numérica no describirá de forma precisa lo relevante en la secuencia.
- **Dificultad 6:** “Dificultad para encontrar términos generales para las sucesiones y lograr expresarlos de manera simbólica, utilizando un lenguaje matemático apropiado” (Mora, 2012, p.20). Así pues, es posible que durante el proceso de generalizar los estudiantes no logren empoderarse del patrón o la regularidad en la sucesión que les permita formular enunciados, operaciones, procedimientos o estrategias bien fundamentadas y los conlleve a determinar la “regla” para cualquier término de la sucesión.
- **Dificultad 7:** “Dificultades en la representación simbólica en lenguaje matemático de la expresión general hallada. Estos son conocidos como errores de traducción (del lenguaje natural o verbal al lenguaje simbólico de las matemáticas)” (Mora, 2012, p.21). Por ejemplo, puede darse que dada la sucesión de números naturales 1,2,4,8,16,32,64,... el estudiante determine que los términos de la sucesión se construyen a partir de la relación “ser el doble del anterior” y cuando intenta expresarlo a través de la representación simbólica, escriba $2 + n$.

4.4. DE LOS ERRORES.

Los errores son una excelente herramienta que permite reestructurar el pensamiento de los estudiantes y realimentar el proceso de enseñanza-aprendizaje para consolidar un conocimiento y brindar mayor eficiencia en la construcción del conocimiento (Rico, 1995).

Los errores cometidos por los estudiantes, la regularidad con que éstos aparecen y las características comunes, son algunos de los elementos que permiten hacer inferencias acerca de los procesos mentales de los estudiantes y de las conexiones conceptuales o procedimentales que

ellos realizan. Durante esta acomodación de nuevos conocimientos, los errores aparecen en el trabajo de los estudiantes especialmente cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben (Rico, 1995).

Entendemos que el error tendrá distintas procedencias, pero siempre se considerará como un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como consecuencia de falta de conocimiento o por desatención.

Matz (1980) señala que “los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación” (p.94). Por lo general, los estudiantes a través de su proceso de enseñanza han desarrollado un conocimiento que le permite afrontar las nuevas tareas, en este caso, de índole matemático. La asimilación de un nuevo conocimiento debe ser relevante y claramente interpretado por el estudiante. Este conocimiento nuevo no siempre se añade al anterior, sino que genera una reestructuración nueva del conocimiento en su conjunto.

Podemos jerarquizar los errores que se cometen. Por ejemplo, errores por falta de atención y/o concentración, errores de índole procedimental y errores conceptuales por fallas en el conocimiento, desconocimiento de propiedades, nociones mal fundamentadas o imaginarios erróneos de los conceptos matemáticos. Algunos autores consideran deseables los errores pero vigilados muy de cerca. Para ello, se debe permitir al estudiante que cometa los errores con el fin de generarle reflexión, reestructuración cognitiva y un nuevo estado de aprendizaje.

En la revisión teórica que se realizó, no se evidencian investigaciones que hayan apuntado a identificar errores en el proceso de generalización.

5. METODOLOGÍA

A continuación se describen los aspectos metodológicos del presente trabajo de grado. En general, el estudio es de tipo cualitativo descriptivo y fue desarrollado en tres etapas a saber:

- En la primera etapa, se realizó una búsqueda de libros, documentos, trabajos y publicaciones relacionados con el proceso de generalización, con las dificultades y errores que comente los estudiantes durante el proceso de generalizar. Tal información teórica permite fundamentar el trabajo de grado y contrastar algunos de estos elementos con los resultados obtenidos al aplicar la prueba piloto.
- En la segunda etapa, se diseñó una prueba piloto (secuencia de preguntas abiertas a partir de una secuencia gráfico-numérica). Esta se aplicó a un grupo de estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Distrital San Francisco, en el cual uno de los autores del presente trabajo de grado es el docente titular de la asignatura de matemáticas.
- En la tercera etapa, se realizó la descripción y el análisis de los resultados obtenidos, y a partir de ellos se construyeron las conclusiones del presente trabajo de grado.

A continuación se realiza una descripción de la población objeto de estudio, las características de la prueba piloto aplicada y la forma como se efectuó el análisis de los resultados de dicha prueba.

5.1 DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN

La prueba piloto se aplicó a un grupo de estudiantes de grado séptimo del Colegio San Francisco I.E.D. Esta institución se encuentra ubicada en la localidad 19, Ciudad Bolívar, de la ciudad de Bogotá, Colombia. El colegio ofrece el servicio educativo en dos jornadas, mañana y tarde, y cuenta con tres sedes.

Algunas familias de la población escolar atendida en la actualidad, provienen de regiones rurales de Colombia. En general, la comunidad pertenece a los estratos 1, 2 y 3. En la dinámica social de las familias de los estudiantes es común encontrar madres cabeza de familia, abuelas criando nietos, embarazos en adolescentes, violencia intrafamiliar, jóvenes trabajadores, jóvenes vinculados en actividades ilícitas, entre otros.

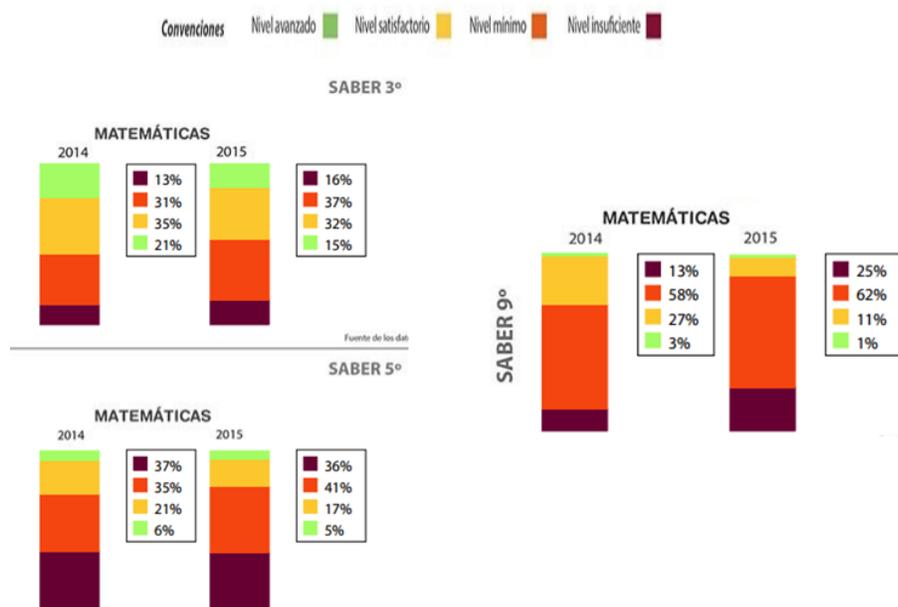
Aunque existen dificultades, la mayoría de los padres se encuentran interesados en la educación de los hijos. Los estudiantes conviven en un clima estudiantil donde se promueve la sana convivencia, se incentiva la participación en actos culturales como la semana cultural franciscana y los docentes vienen promoviendo el modelo pedagógico enseñanza para la comprensión.

De acuerdo con la nueva herramienta de medición de la calidad educativa generada por MEN, el Índice Sintético de Calidad Educativa (ISCE) en básica primaria es 4,06. Esta valoración es menor que la valoración promedio de la Entidad Territorial (6,32) y menor con respecto a la

valoración promedio a nivel Nacional (5,42). El ISCE en básica secundaria es 3,93. Esta valoración está por debajo de la valoración promedio de la Entidad Territorial (6,03) y menor que la valoración promedio a nivel Nacional (5,27).

A continuación se muestra el desempeño de los estudiantes en las pruebas externas SABER para matemáticas durante los últimos dos años:

Figura 5. Comparativo pruebas SABER Matemáticas 2014 – 2015 Colegio San Francisco IED.



La intensidad horaria de Matemáticas para grado séptimo (comprende las asignaturas de Aritmética, Geometría, Estadística) es de 4 horas semanales de 55 minutos cada hora. Algunos estudiantes de grado séptimo son comprometidos con las tareas y actividades propuestas en el aula de clase. En general, no existe la cultura de realizar tareas académicas en casa. Además, algunos estudiantes son apáticos por las dificultades que presentan para cumplir los objetivos de clase, por desmotivación y/o desinterés. Durante el presente año escolar se abordaron temáticas relacionadas con aritmética, geometría y estadística. El docente tiene autonomía para proponer los saberes, la metodología y las diferentes actividades que se aplican durante la clase.

Anualmente se realiza la planeación de las asignaturas, pero casi nunca se cumple con todo lo presupuestado en ellas dado que existen proyectos transversales y programas de entidades externas que reducen el tiempo efectivo de clase durante el año escolar. Por lo tanto, se da prioridad a que las temáticas que se alcancen a abordar sean estudiadas con rigor sin pretensión de cumplir estrictamente lo planeado.

En el plan de estudios de matemáticas para grado séptimo para este año no se habían propuesto actividades de generalización, pero como los estudiantes de grado séptimo, al ingresar a octavo,

empezarán el estudio del álgebra, se consideró viable aplicar una actividad relacionada con generalización de patrones gráficos-numéricos, dado que son una vía adecuada para aproximar a los estudiantes a situaciones de variación que favorecen el desarrollo del pensamiento algebraico

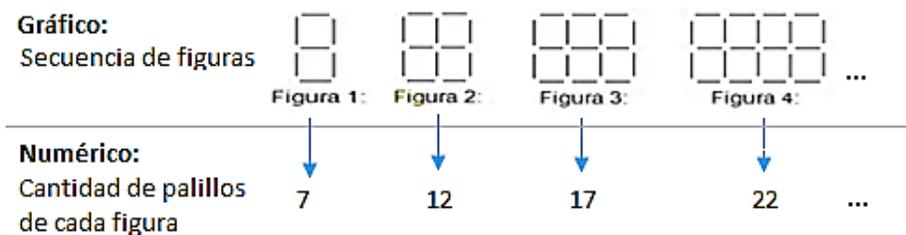
La prueba piloto se aplicó a 30 estudiantes de grado séptimo del Colegio San Francisco I.E.D, en el mes de Noviembre, cuando estaba próxima la finalización del año escolar. Para realizar el análisis, se seleccionaron las pruebas desarrolladas por cuatro estudiantes: Rocío, Alejandro, Felipe y Mayer¹. Más adelante se indicarán los criterios de selección de estos estudiantes.

5.2 DISEÑO Y DESCRIPCIÓN DE LA PRUEBA PILOTO

Las preguntas formuladas en la prueba piloto tienen como propósito que los estudiantes se vean envueltos en una actividad de generalización, que a su vez permita evidenciar las dificultades y errores que comenten los estudiantes durante este proceso.

Para construir la prueba piloto, primero se seleccionó una secuencia que diera la posibilidad a los estudiantes de realizar un conteo en cada una de las figuras de la secuencia, de tal forma que el conteo conllevara a asignar a cada figura una cantidad. También se buscó que la secuencia fuera, en lo posible, de fácil interpretación y que permitiera distintas formas de realizar el conteo y por lo tanto, distintas estrategias o procedimientos para generalizar. La secuencia gráfico numérica escogida se muestra en la Figura 6. Siendo el primer acercamiento de los estudiantes al proceso de generalizar, se decidió que los estudiantes tuvieran a su disposición palillos para construir las primeras figuras.

Figura 6: Secuencia gráfico numérica de la prueba piloto.



En cuanto a los posibles ítems, se elaboró una propuesta de las posibles preguntas que fuesen acordes a las fases del proceso de generalización (ver, describir, escribir) y permitiera determinar y/o evidenciar los posibles errores que comenten los estudiantes durante el desarrollo de la prueba piloto. (Ver anexo 1)

En la siguiente tabla, se tienen las preguntas y la respectiva fase del proceso de generalizar:

¹ Seudónimos

Tabla 1. Relación entre las fases del proceso de generalización y las preguntas de la prueba piloto.

FASES DEL PROCESO DE GENERALIZAR	PREGUNTAS DE LA PRUEBA PILOTO												
Ver	<p>1. Usando los palillos, construya la Figura 1. ¿Cuántos palillos se necesitaron para construir la Figura 1?</p> <p>2. Usando los palillos, construya la Figura 2 ¿Cuántos palillos se necesitaron para construir la Figura 2?</p> <div style="text-align: center;">   </div> <p style="text-align: center;">Figura 1: Figura 2:</p>												
Ver - Describir	<p>3. Daniel, estudiante de grado séptimo, ha construido la siguiente secuencia de figuras usando los palillos</p> <div style="text-align: center;">     </div> <p style="text-align: center;">Figura 1: Figura 2: Figura 3: Figura 4:</p> <p>a. Usando los palillos construya la Figura 5 y la Figura 6. Luego dibújelas.</p> <p>b. Suponga que quiere dictar a un compañero los pasos para construir la Figura 7. Escriba lo que le diría para construir la Figura 7.</p> <p>c. Escriba la “característica común” en la secuencia de figuras. Es decir, escriba con sus propias palabras de forma clara y precisa lo que usted observa en la secuencia de figuras construidas con el fin de descubrir la(s) característica (s) común(es).</p>												
Describir	<p>4. Para construir la Figura 20 ¿Cuántos palillos se necesitan? Escriba la estrategia o los procedimientos que usa para determinar su respuesta.</p>												
Describir	<p>5. Escriba la cantidad de palillos que se utilizarían para la Figura 100. Justifique su respuesta.</p>												
Describir - escribir	<p>6. A continuación tenemos los procedimientos elaborados por tres estudiantes para determinar la cantidad de palillos en la Figura 100.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th data-bbox="581 1703 813 1745">Estudiante 1</th> <th data-bbox="813 1703 1045 1745">Estudiante 2</th> <th data-bbox="1045 1703 1373 1745">Estudiante 3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="581 1745 813 1776">$7 + 5(100) =$</td> <td data-bbox="813 1745 1045 1776">$5(100) + 2 =$</td> <td data-bbox="1045 1745 1373 1776">$7 + 5(100 - 1) =$</td> </tr> <tr> <td data-bbox="581 1776 813 1808">$7 + 500 =$</td> <td data-bbox="813 1776 1045 1808">$500 + 2$</td> <td data-bbox="1045 1776 1373 1808">$7 + 5(99) =$</td> </tr> <tr> <td data-bbox="581 1808 813 1850">507</td> <td data-bbox="813 1808 1045 1850">502</td> <td data-bbox="1045 1808 1373 1850">$7 + 495 = 502$</td> </tr> </tbody> </table>	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	$7 + 5(100) =$	$5(100) + 2 =$	$7 + 5(100 - 1) =$	$7 + 500 =$	$500 + 2$	$7 + 5(99) =$	507	502	$7 + 495 = 502$
Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3											
$7 + 5(100) =$	$5(100) + 2 =$	$7 + 5(100 - 1) =$											
$7 + 500 =$	$500 + 2$	$7 + 5(99) =$											
507	502	$7 + 495 = 502$											

	¿Cuál de las operaciones corresponde con el procedimiento o estrategia elaborado por usted? Si ninguna operación corresponde con lo realizado por usted, escriba la que corresponde con su estrategia propuesta.						
Escribir	7. Escriba una oración o una expresión que permita determinar la cantidad de palillos para construir cualquier figura de la secuencia.						
Escribir	<p>8. A continuación tenemos la expresión simbólica realizada por los tres mismos estudiantes para determinar la cantidad de palillos de cualquier figura. Esta escritura surgió a partir de lo propuesto por los estudiantes en el numeral 6.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Estudiante 1</th> <th>Estudiante 2</th> <th>Estudiante 3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">$7 + 5(n)$</td> <td style="text-align: center;">$5n + 2$</td> <td style="text-align: center;">$7 + 5(n-1)$</td> </tr> </tbody> </table> <p>¿Cuál de las expresiones corresponde con su enunciado y/o expresión elaborada por usted en el numeral 7? Justifique.</p> <p>Si ninguna expresión es similar a lo realizado por usted, escriba su expresión simbólica.</p>	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	$7 + 5(n)$	$5n + 2$	$7 + 5(n-1)$
Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3					
$7 + 5(n)$	$5n + 2$	$7 + 5(n-1)$					

A continuación, algunas consideraciones sobre los ítems de la prueba piloto:

Las preguntas 1 y 2 buscan que los estudiantes reconozcan las dos primeras figuras de la secuencia, perciban que pueden hacer uso de los palillos para construir las figuras de la secuencia y se focalicen en el conteo de palillos para cada una de las figuras de la secuencia. Es posible que para determinar el conteo de palillos de las figuras, algunos estudiantes no realicen las construcciones y establezcan la cantidad de palillos a partir de la observación de las figuras en la hoja, lo cual es válido. Lo fundamental es que los estudiantes perciban que tienen una herramienta a su disposición que les puede ser muy útil en alguna oportunidad del desarrollo del taller, aunque para posteriores preguntas, es bastante probable que el uso de los palillos sea ineficiente para dar respuesta a los interrogantes planteados.

Estas preguntas están asociadas a la fase ver dado que los estudiantes tienen el primer acercamiento hacia las dos primeras figuras de la secuencia y deben obtener información que le permitan determinar características propias de la conformación de las figuras, aspectos de cambio o invariantes e ir visualizando lo general a través de lo particular.

La pregunta 3 tiene como propósito que el estudiante realice un reconocimiento de las cuatro primeras figuras de la secuencia, preste atención a los detalles comunes, construya mentalmente una continuidad a partir de la secuencia de las figuras que observa y escriba las características

comunes identificadas. Por tanto, está asociada a las fases ver y describir del proceso de generalización. Teniendo como premisa que es el primer acercamiento de los estudiantes hacia el proceso de generalizar una secuencia, la intención es evidenciar las dificultades y/o errores que comenten los estudiantes cuando perciben, visualizan y plantean las posteriores figuras de la secuencia, las características que identifican en la secuencia y cómo estas lo conducen a la identificación o no del patrón de la secuencia gráfico-numérica.

Las preguntas 4 y 5 encaminan al estudiante a organizar ideas, generar procedimientos o estrategias para solucionar un problema y proponer conjeturas que lo conduzcan a ver un patrón en la secuencia. Estas preguntas corresponden a la fase “describir” dado que el estudiante debe descubrir el patrón de la secuencia gráfico-numérica y describir con lenguaje natural dicho patrón. Aunque los estudiantes recurran a distintos tipos de representación o estrategias, es importante aclarar que el presente trabajo de grado no se acentúa en el estudio de las estrategias de los estudiantes. Recordemos que la transición del “ver” al “describir” tiene cierto nivel de dificultad, ya que exige el uso de un lenguaje claro, comprensible, entendible para expresar la regularidad o el patrón.

La pregunta 6 se cataloga como una pregunta de transición entre la fase de “describir” y “escribir”. Se presentan tres posibles operaciones que representan la forma de determinar la cantidad de palillos de la Figura 100. La intención es permitirle al estudiante que perciba correspondencia entre sus ideas, procedimientos, estrategias y las posibles operaciones presentadas en la tabla, generando reflexión e invitando al estudiante a confirmar o realizar una representación similar que le permitan consolidar una conjetura final.

La pregunta 7 conlleva a los estudiantes a la fase del registro (fase avanzada en el proceso de generalizar) que exige la elaboración de un enunciado o una expresión que conduzca a una ley general que permita determinar la cantidad de palillos de cualquier figura de la secuencia. Se pretende explorar el registro que hacen los estudiantes para formular sus oraciones o enunciados que patentes la forma de determinar la cantidad de palillos para cualquier figura.

Es muy probable que los estudiantes no realicen un registro con lenguaje simbólico para la secuencia, pero la pregunta 8 pretende dar cierre al proceso de generalización mostrando al estudiante algunas posibles expresiones simbólicas para la secuencia gráfico-numérica. Las respuestas de los estudiantes en la pregunta 8 no serán abordadas en el análisis, pero esta información es un insumo fundamental cuando se realice la socialización ya que permite orientar a los estudiantes hacia el lenguaje simbólico para posteriores procesos de generalización de secuencias gráfico-numéricas.

5.3 APLICACIÓN DE LA PRUEBA PILOTO.

La prueba piloto fue aplicada a 30 estudiantes de IED San Francisco en 3 sesiones de trabajo con los estudiantes.

En la primera sesión, se entregó a cada estudiante la prueba piloto por escrito y se solicitó que respondieran las preguntas de forma individual. Además, los estudiantes dispusieron de cierta cantidad de palillos, como recurso para apoyarse en la solución de la prueba.

La aplicación de la prueba piloto se efectuó de forma individual a fin de adquirir información personalizada del proceso que realiza cada estudiante y evitar que durante un trabajo de parejas o grupal primen las ideas de algún estudiante y se pierda información valiosa acerca de las dificultades y errores de cada uno.

A medida que los estudiantes avanzaban en la solución de las preguntas, el docente establecía comunicación con los estudiantes sobre inquietudes en sus registros o claridad en los procedimientos, tratando de no persuadir sus respuestas. En cambio, el docente trataba de generar más interrogantes en los estudiantes o indagar sobre los procedimientos elaborados por los estudiantes sin determinar si eran correctos o incorrectos.

Al finalizar la primera sesión, se revisaron los avances registrados por los estudiantes con el fin de establecer similitudes en las respuestas dadas y predeterminar un posible grupo de estudiantes que se escogerían para el posterior análisis.

En la segunda sesión los estudiantes recibieron nuevamente la prueba piloto para que respondieran las preguntas faltantes. Además, se realizaron preguntas a algunos estudiantes sobre la forma de proceder en el proceso de generalización de la secuencia, cuando la revisión de lo realizado en la primera sesión mostraba que lo registrado no era de fácil interpretación.

En la tercera sesión, se realizó una socialización general de las respuestas dadas por los estudiantes en la prueba piloto. Dado que las actividades académicas del Colegio San Francisco, en mes de Noviembre se encontraban en su finalización, la socialización se realizó a veinte estudiantes que participaron de la prueba piloto, distribuidos en dos grupos, el mismo día. Durante la socialización, se dio relevancia a la participación de los estudiantes y en conjunto se fueron validando o refutando las respuestas dadas por los estudiantes, con el fin de dar cierre a la actividad propuesta y aportar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes. De esta sesión no se recogieron registros ni de audio ni de video, por lo cual no se realiza un análisis a los resultados de esta sesión.

5.4 METODOLOGÍA DE INDAGACIÓN

El análisis realizado a las respuestas de los estudiantes a la prueba piloto está enmarcado en un estudio descriptivo de tipo cualitativo, el cual permite realizar una interpretación de los datos recolectados de acuerdo con unas categorías de análisis.

Como se mencionó anteriormente, aunque se aplicó la prueba a 30 estudiantes de séptimo del Colegio San Francisco I.E.D., solo se seleccionaron a cuatro de ellos. Para su selección se efectuaron los siguientes pasos:

- Se realizó lectura de cada una de las respuestas dadas por los estudiantes.

- Con la información leída, se organizaron las pruebas conformando dos conjuntos de pruebas: los estudiantes que tuvieron dificultades y los que no tuvieron dificultades.
- Del grupo que presentó dificultades, se seleccionaron al azar los cuatro estudiantes cuyas respuestas se analizaron.

Para la identificación de las dificultades se propone la siguiente nomenclatura para referenciar las dificultades enunciadas en el marco teórico:

Tabla 2. Nomenclatura de las dificultades del proceso de generalizar.

NOMENCLATURA	DIFICULTAD
D1	Encontrar la forma de abordar el problema, principalmente en la introducción al aprendizaje del proceso.
D2	Al utilizar configuraciones geométricas, es posible que al observarlas, se encuentre gran variedad de características de tales configuraciones, que pueden resultar difíciles de guardar en la memoria, de relacionar, clasificar o identificar cuáles son las más importantes para disponer de una solución.
D3	Proponer características irrelevantes, de tipo anecdótico.
D4	Confundir características necesarias con características suficientes de las sucesiones de figuras.
D5	Dificultad para establecer el patrón o la regularidad en la secuencia de figuras o en secuencia de las sucesiones
D6	Encontrar términos generales para las sucesiones y lograr expresarlos de manera simbólica, utilizando un lenguaje matemático apropiado.
D7	Dificultades en la representación simbólica en lenguaje matemático de la expresión general hallada, a pesar de ser totalmente comprendida.

Dado que en la revisión de la literatura no se encontró evidencia documental de los errores que se presentan durante el proceso de generalización, no se incluyen categorías de análisis a priori para su identificación.

6. ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación presentamos apartes de las respuestas dadas por los estudiantes escogidos al responder las preguntas de la prueba piloto, y que fueron de interés para identificar los errores y reconocer las dificultades de los estudiantes en el proceso de generalización de una secuencia gráfico-numérica, mostrando un análisis descriptivo del desempeño general de cada estudiante e identificando los errores y dificultades en el tránsito del proceso de generalizar.

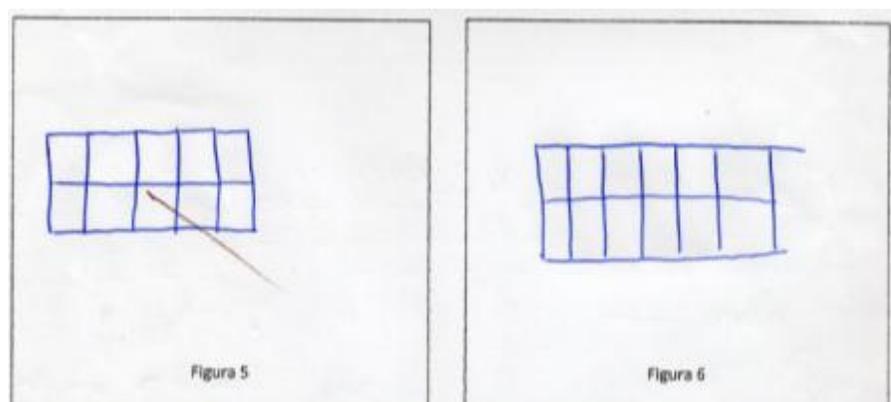
A continuación se presenta el análisis realizado a las respuestas de cinco estudiantes a la prueba piloto: Rocío (Anexo II)

6.1 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL PROCESO DE GENERALIZACIÓN DE ROCÍO

Rocío logra contar adecuadamente la cantidad de palillos que contienen las primeras dos figuras de la secuencia y efectuar una representación muy cercana a la quinta y sexta figura de la secuencia. No obstante, en su reporte escrito se presentan dos hechos que es pertinente resaltar.

Por una parte, cuando Rocío efectúa el conteo de la cantidad de palillos de la primera figura de la secuencia, escribe 8 en lugar de 7. Luego, tacha la respuesta errónea y escribe la respuesta correcta. Por otra parte, para representar de forma gráfica el quinto y sexto elemento de la secuencia (figuras posteriores de la secuencia presentada a los estudiantes), Rocío realiza una sutil transformación en la representación, dado que une los palillos en sus extremos. (Ver *Figura 7*). Consideramos que estos dos aspectos están asociados al hecho de que el patrón que empieza a ver Rocío está asociado a un aumento en la cantidad de cuadrados que conforma cada figura, siendo esto una característica irrelevante para caracterizar la secuencia (D3).

Figura 7. Representación de Rocío de las figuras de las posiciones 5 y 6.



Cuando a Rocío se le solicita describir la forma cómo se construye la séptima figura de la secuencia, indica que “*contando los palitos para llegar a la Figura 7*” y cuando se le pide escribir la característica común, reporta “*a cada figura se le va aumentando dos cuadritos para formar cada figura*”.

En este caso, Rocío tiene dificultades para determinar el patrón de formación de la secuencia puesto que aún no percibe alguna relación respecto a la diferencia de palillos entre dos figuras consecutivas de la secuencia, ni entre el número de la figura y la cantidad de palillos de la misma. Solamente señala que se debe hacer un conteo, lo cual no es suficiente para construir la figura solicitada (D5). Además, se evidencia que para Rocío la característica más relevante es el aumento de formas cuadradas en la configuración de las figuras, lo cual si bien es correcto, no permite hallar una regularidad respecto al aumento de la cantidad de palillos de la secuencia gráfico-numérica (D2).

Posteriormente, para determinar la cantidad de palillos de la vigésima y la centésima figura de la secuencia, Rocío plantea como estrategia efectuar un dibujo que le permita realizar el conteo de los palillos que conforman la figura. En el caso de la Figura 100, su conteo inicialmente la lleva a afirmar que la figura tiene 510 palillos. Posteriormente, concluye que la centésima figura tiene 502 palillos (ver Figura 8).

Figura 8. Proceso de conteo de Rocío para calcular la cantidad de palillos necesarios para construir la figura 100.



De acuerdo con el docente, durante la ejecución de la prueba Rocío solamente escribe como respuesta “510” sin justificar su respuesta ni reportar el procedimiento. Por esta razón, el docente le cuestiona si está segura de la cantidad escrita. La estudiante afirma que realizó el conteo de palillos de la Figura 20 (el cual fue de 102 palillos), y para agilizar el conteo, opta por multiplicar la cantidad de segmentos de la Figura 20 por 5 y obtiene 510 palillos. Posteriormente, Rocío opta por el conteo (1 en 1) dedicando el tiempo suficiente y obteniendo 502. Corrige en la hoja de respuestas y no plantea otra forma de abordar la situación.

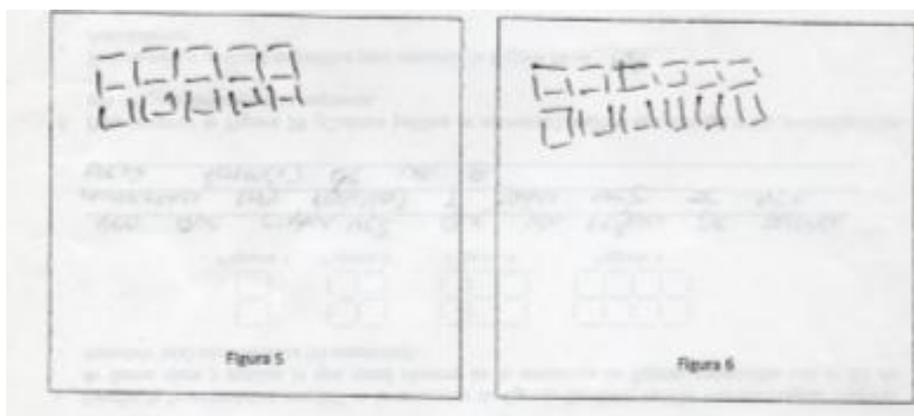
Rocío encontró una forma de abordar el problema: dibujar las figuras y contar los palillos que la conforman. No obstante, dado que la regularidad que había identificado no incluía información relevante para determinar la cantidad de palillos de una figura, no le fue posible construir una estrategia que le permitiera efectuar el conteo de forma más rápida (D1).

Al solicitarle que redacte la oración que permita determinar la cantidad de palillos para construir cualquier figura de la secuencia, Rocío registra lo siguiente: “*Se necesitan 600 palillos para construir cualquier figura de la secuencia*”. Este error parece ser atribuido al significado que le asocia Rocío a la palabra cualquiera. Así pues, se tiene que Rocío no logra describir el patrón ni redactar una oración pertinente en la fase de “escribir”. Esto se debe en últimas a que ella no establece el patrón en la secuencia de figuras, y por tanto, no registró una conjetura acorde con la secuencia gráfico-numérica (D6).

6.2 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL PROCESO DE GENERALIZACIÓN DE ALEJANDRO

Alejandro cuenta acertadamente la cantidad de palillos de las dos primeras figuras de la secuencia. Sin embargo, cuando dibuja la quinta y sexta figura de la secuencia comete un error (Figura 9), el cual consiste en construir más palillos en cada una de las figuras de los que realmente tienen.

Figura 9. Figuras 5 y 6 de la secuencia dibujadas por Alejandro.

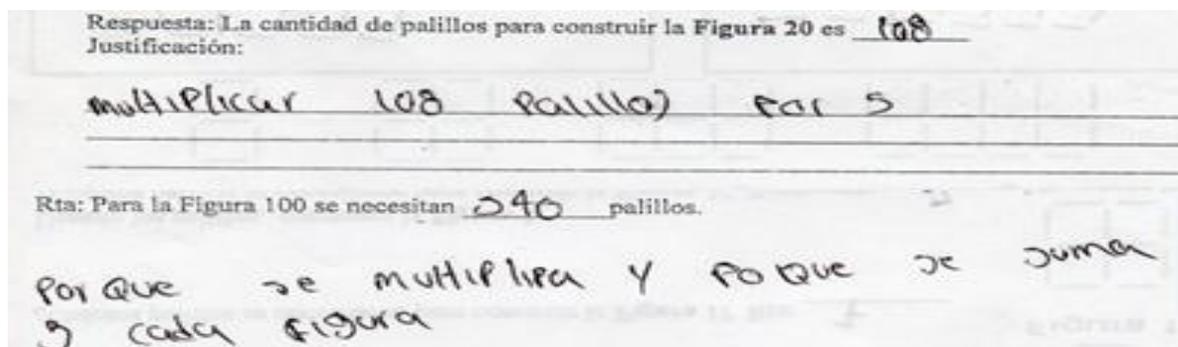


El error que se evidencia en la construcción de la quinta y sexta figura de la secuencia, puede derivarse del hecho de que Alejandro está observando información irrelevante o poco útil en la figura (D2 y D3). Esto se evidencia en la respuesta que suministra acerca de la característica común que observa en la secuencia: “veo que cada vez que la figura se suma [aumenta una posición], aumenta los palillos y cada vez se ven más formas de un 8”. Por lo tanto, se tiene además que Alejandro no ha establecido una forma efectiva para abordar la situación, y por ende, tiene complicaciones durante las otras fases del proceso de generalización (D1).

Para determinar la cantidad de palillos en la Figura 20 y la Figura 100, Alejandro reestructura su razonamiento cuando intenta establecer la cantidad de palillos. Sin embargo, aunque registra que en la secuencia de figuras se aumenta 5 palillos, no determina la cantidad correcta de palillos para la Figura 20 y la Figura 100. Registra que se debe efectuar una multiplicación, pero se desconoce

el segundo factor para determinar el producto obtenido (Ver Figura 10). Solamente, cuando en la pregunta 6 se le pide validar o refutar un conjunto de operaciones realizadas para hallar la cantidad de palillos de la Figura 100, se observa que para determinar la cantidad de palillos de esta figura, lo que hizo fue multiplicar por 5 la cantidad de palillos que tiene la Figura 20.

Figura 10. Cantidad de palillos necesarios para construir la Figura 20 y 100 según Alejandro.



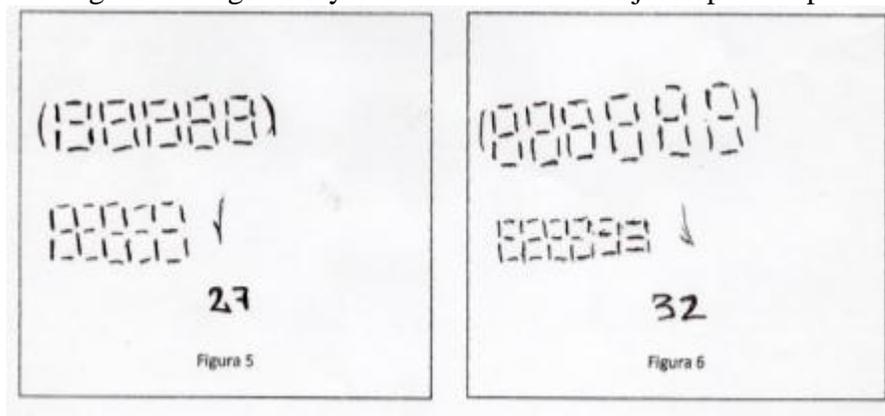
Se interpreta que al involucrar en sus respuestas el número 5, Alejandro ha identificado un patrón: el aumento en la cantidad de palillos entre una figura y su consecutivo es de 5 palillos. No obstante, la regularidad encontrada solo incluye información necesaria más no suficiente para caracterizar a la secuencia (D4).

En la redacción de la oración que permita determinar la cantidad de palillos para construir cualquier figura de la secuencia, Alejandro afirma: “Aumentar en cada figura 5 palillos”. Así pues, se tiene que registra el patrón que encontró, pero no redacta una conjetura que permita determinar la cantidad de palillos para cualquier figura de la secuencia (D6).

6.3 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL PROCESO DE GENERALIZACIÓN DE FELIPE

Felipe efectúa el conteo de los palillos de las dos primeras figuras de la secuencia sin inconveniente alguno. Luego, al construir la quinta y sexta figura de la secuencia comete un error: dibujar 5 ochos en la figura 5, y 6 ochos en la figura 6. No obstante, el estudiante se da cuenta de su error y corrige el dibujo realizado (ver Figura 11).

Figura 11. Figuras 5 y 6 de la secuencia dibujadas por Felipe.



En este caso de Felipe es más notorio que en el caso de Alejandro la configuración en “formas de 8” que observan en la secuencia. Aunque Felipe reconstruye de forma correcta la representación gráfica de la Figuras 5 y la Figura 6, en la siguiente pregunta el estudiante señala que la diferencia de palillos entre dos figuras consecutivas de la secuencia son 7 palillos (cantidad de palillos de la Figura 1), cuando en realidad son 5. Es decir, para Felipe la secuencia de figuras se genera al repetir seguidamente la configuración de la Figura 1.

Por tanto, se evidencian dos dificultades. Primero, visualizar y hacer énfasis en la forma de ochos que tienen los elementos que conforman cada figura, lo cual es una característica irrelevante para determinar un patrón de formación (D3). Segundo, encontrar un patrón de formación que relacione correctamente el aumento en la cantidad de palillos entre dos figuras consecutivas (D5).

Para determinar la cantidad de palillos de la Figura 20, Felipe establece su razonamiento a partir de la cantidad de palillos de la Figura 5, afirmando que la cantidad de palillos para la Figura 5 son 35, pero sin fijarse que él mismo registró que eran 27 palillos. La cantidad de 35 palillos la obtiene al considerar que la Figura 5 se obtiene de repetir cinco veces la Figura 1, conformada por siete palillos, es decir, la Figura 5 tiene $5 \cdot 7 = 35$ palillos. Seguidamente, efectúa las siguientes multiplicaciones $35 \cdot 5 = 175$ y $175 \cdot 4 = 700$, para concluir que la Figura 20 tiene 700 palillos.

En este caso, el planteamiento propuesto por Felipe tiene presente que siendo la Figura 20 la configuración en estudio, siendo $20 = 4 \cdot 5$ y que según él la Figura 5 tiene 35 palillos, entonces la cantidad de palillos de la figura 20 se obtiene de la operación $35 \cdot (5 \cdot 4) = 700$. En este caso se continúa evidenciando dificultades para encontrar el patrón de formación (D5).

En la redacción de la oración que permita determinar la cantidad de palillos para construir cualquier figura de la secuencia, Felipe afirma: “Que cada figura tiene siete palillos”. Así pues, el patrón erróneo que asumió como válido en todo el desarrollo de la prueba no le permite construir una conjetura que permita encontrar la cantidad de palillos para cualquier figura de la secuencia (D6).

6.4 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL PROCESO DE GENERALIZACIÓN DE MAYER

Mayer responde correctamente las preguntas 1 y 2. Además, realiza correctamente la representación gráfica de la Figura 5 y la Figura 6. Sin embargo, Mayer también se enfoca solamente en la forma cuadrada de la configuración de los palillos. Para construir la Figura 7, Mayer afirma: “Le digo que realice la Figura 6 y le agregue dos cuadros más a la derecha”. Como se había indicado en anteriores análisis, esto corresponde a identificar información irrelevante en la construcción de la figura (D3).

Al solicitarle que escriba lo que observa en la secuencia de figuras construidas, el estudiante registra lo siguiente: “Parece como si fuera una escalera horizontalmente y tiene el mismo tamaño y la misma medida cada cuadro”. En este caso, tenemos que el estudiante percibe dos cosas distintas para la misma secuencia de figuras, y ambas percepciones no son características esenciales para determinar el patrón (D3).

A partir de la Figura 5, Mayer planea una relación directamente proporcional entre la cantidad de palillos de la Figura 5 y su posición, con la cantidad de palillos de la Figura 20 y su respectiva posición. Dado que la Figura 5 está conformada por 27 palillos, el estudiante propone multiplicar esta cifra por 4 ya que la cantidad de palillos de la Figura 20 será cuatro veces la cantidad de palillos de la Figura 5 (ver Figura 12). Se observa que con esta misma idea de proporcionalidad, el estudiante 5 determina la cantidad de segmentos de la Figura 100. Este es un error que consiste en asumir que la variación entre la posición y el valor numérico asignado a dicha posición se comporta de forma directamente proporcional.

Figura 12. Procedimiento de Mayer para calcular la cantidad de palillos de la Figura 20 y 100.

4. Para construir la Figura 20 ¿Cuántos palillos se necesitan? Escriba la estrategia o los procedimientos que usa para determinar su respuesta.

Respuesta: La cantidad de palillos para construir la Figura 20 es 108

Justificación:

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 4 \\ \hline 108 \end{array}$$

Se multiplica el número de palillos de la figura 5 por 4 = 108

5. Escribe la cantidad de palillos que se utilizarían para la Figura 100. Justifique su respuesta.

Rta: Para la Figura 100 se necesitan 540 palillos.

$$\begin{array}{r} 108 \\ \times 5 \\ \hline 540 \end{array}$$

En el registro de la oración que permita determinar la cantidad de palillos para construir cualquier figura de la secuencia, Mayer escribe: “Se le suma de a 5 palillos para construir la figura que sigue”. Aunque al finalizar el proceso de generalización percibe el patrón de la secuencia gráfico-numérica, no expresa una afirmación que sea precisa para determinar términos generales de la secuencia (D6).

7. CONCLUSIONES

En la primera fase del proceso de generalización, para la secuencia gráfico numérica presentada en la prueba piloto, los estudiantes realizan diversas interpretaciones, algunas de las cuales los conducen a no focalizarse en la variación de palillos a medida que construyen las demás figuras de la secuencia, producto de las transformaciones de la secuencia presentada, de una observación inadecuada o que la secuencia no les representa algo. Además, los estudiantes encuentran variedad de características de tal configuración de palillos que no los conduce a determinar el patrón de la secuencia, por ejemplo, relacionan con un cuadrado la distribución de los palillos, perciben configuraciones inapropiadas (formas de un ocho).

Ningún estudiante de este grupo de seleccionados para el análisis, expresa la característica suficiente en la secuencia de figuras presentada. Solamente tres estudiantes expresan que la característica común es la conformación de cuadrados con los palillos de las figuras, lo cual es una características necesaria mas no suficiente. Los otros dos estudiantes señalan características irrelevantes, de tipo anecdótico. En general, las características mencionadas por este grupo de estudiantes no favorecen la búsqueda y la descripción del patrón en la secuencia gráfico-numérica.

La búsqueda de la cantidad de palillos para la Figura 20 y la Figura 100 generó dificultad en los estudiantes dado que exigía elaborar mejores planteamientos de razonamiento y/o las estrategias de conteo que no fueron las más acertadas para obtener la cantidad de palillos correcta. Por ejemplo, algunos estudiantes eligieron solamente por el conteo de segmentos de la representación gráfica o la superposición de figuras para realizar el conteo, algunos estudiantes optaron por proponer multiplicaciones pero no lograron concretar acertadamente el proceso, algunos estudiantes adoptaron la noción de proporcionalidad relacionando la posición de la figura y la cantidad de palillos de la figura (linealidad) la cual no encaminaba a la determinación correcta de la cantidad de palillos. Lo anterior genera dificultad para consolidar el patrón de la secuencia y para escribir la afirmación que permita hallar la cantidad de palillos para cualquier figura de la secuencia gráfico-numérica.

La dificultad que más se evidenció en las respuestas de los estudiantes fue la de contar incorrectamente los palillos en las posiciones avanzadas de las secuencias. Cuando contaban posiciones bajas, establecían una estrategia apropiada para contar palillos, pero en el momento de contar en posiciones avanzadas la olvidaban y no la aplicaban.

Por otra parte, la elaboración de este trabajo de grado genera reflexión en el quehacer educativo del docente dado que los autores han replanteado su visión de la concepción de la enseñanza del álgebra en las instituciones educativas consultando y proponiendo alternativas para generar pensamiento algebraico en los estudiantes. Además, el presente estudio motiva a los autores para revisar el plan de estudios y compartir a los demás docentes del área de matemáticas de las

instituciones educativas donde actualmente laboran la inclusión desde grados inferiores de actividades similares a la abordada en el presente trabajo de grado.

Como parte de este proceso de reflexión, al comienzo de año electivo 2017, los autores del presente trabajo de grado expusieron en reuniones de área de sus respectivas la necesidad de realizar un acercamiento al álgebra, en los cursos de primaria, a través de la generalización. Aunque varios profesores mostraron preocupación por la falta de dominio propio del tema y de estrategias a experimentar, se puede abordar el problema desde las reuniones de área semanales, realizando intercambio de saberes profesionales de los diferentes docentes en el campo matemático, en los componentes pedagógico, didáctico y disciplinar, es necesario que los docentes de educación básica posean una formación especializada en el álgebra escolar para la implementación desde grados de básica primaria.

Por otra parte, las actividades planteadas les permitieron a los estudiantes estar inmersos en una actividad novedosa para ellos, que les permitió poner en juego diversas habilidades desarrolladas durante su espacio de formación básica. La actividad, aunque pareciera sencilla por los conteos, exigía otras habilidades matemáticas como la observación de regularidades, la percepción de características relacionales de los diferentes pasos del patrón y la comunicación clara de las ideas que surgen a raíz de la aplicación del instrumento sugerido.

Gracias a iniciativas como esta, los próximos estudiantes de grado octavo, tendrán una visualización más amplia y contextualizada del álgebra escolar y no se verá simplemente desde su parte operativa sino que se visualizará también como el conteo de patrones con las actividades de generalización propuestas..

BIBLIOGRAFÍA

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo. 1ª ed. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Alonso, F., Barbero, C., Fuentes, I., Azcárate, A., Dozagarat, J., Gutiérrez, S., Ortiz, M., Rivière, V. y De Veiga, C. (1993). *Ideas y actividades para enseñar Álgebra*. Grupo Azarquiel. Editorial Síntesis. España.

Cuartas J. (2015). Maneras de generalizar patrones lineales a partir de secuencias gráfico-numéricas por niños de quinto grado. Universidad de Antioquia Facultad de Educación Medellín.

García, B., Silvia, S., (2011). Rutas de acceso a la generalización como estrategia de resolución de problemas utilizada por estudiantes de 13 años. Colombia. Universidad Pedagógica Nacional.

García, C., Juan, A., (1998). El proceso de Generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal. España: Universidad de la Laguna.

Godino, J. & Font, V. (2000). Razonamiento Algebraico y su Didáctica para maestros. Universidad de Granada. Recuperado de: <http://ddm.ugr.es/personal/jdgodino/manual/ralgebraico.pdf>.

Hernández, J., Socas, M., Camacho, M. Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la Enseñanza Secundaria. Localización: Revista interuniversitaria de formación del profesorado, ISSN 0213-8646, N° 32, 1998 (Ejemplar dedicado a: Didáctica de las Matemáticas para los profesores de Educación Secundaria / coord. por Luis Rico Romero), págs. 73-86

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1999). Rutas hacia el álgebra. Raíces del álgebra (Cecilia Agudelo, Tr. y Ed.). Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Primera edición en inglés, 1985).

MEN. (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Santa Fe de Bogotá, Colombia.

MEN (2003). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Santa Fe de Bogotá. Colombia.

Merino, E. (2012). Patrones y Representaciones de Alumnos de 5° de Educación Primaria en una Tarea Generalización. Universidad de Granada, Granada, España.

Merino, E., Cañadas, M. C. & Molina, M. (Septiembre, 2012). Estrategias y representaciones usadas por un grupo de alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización.

En J. Cardeñoso (Coordinador), Trabajo presentado en el grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico del XVI Simposio de la SEIEM, Jaén, España.

Mink, D. (2010). *Strategies for teaching Mathematics*. Huntington Beach: Shell Education.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156

Mora, L. (2012). *Álgebra en primaria*. Programa de Transformación de la Calidad Educativa del MEN en convenio con la Universidad Pedagógica Nacional.

Palarea, M. Socas, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. I seminario Nacional sobre lenguaje y matemática. Disponible en <http://revistasuma.es/IMG/pdf/16/091-098.pdf>

Palarea, M. (1998). La adquisición del lenguaje algebraico y la detención de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años. Tesis doctoral. Departamento de análisis Matemático. Universidad de la Laguna. España.

Palarea, M., María de las M., La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Números*. Revista de la didáctica de las matemáticas. Volumen 40. Diciembre de 1999, páginas 3-28.

Radford, L . 2010. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, páginas 37-62.

Ramírez R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. Tesis doctoral. Universidad de Granada. Departamento de didáctica dela matemática. Granada

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de la Matemática. Kilpatrick, J.; Gómez, P.; Rico, L. *Educación Matemática*. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de Problemas. Evaluación. Historia. Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 69 – 108.

Rojas, G., Pedro, J., Rodríguez, B., Jorge & Romero, C., Jaime, H., (1999). *La transición Aritmética-Álgebra*. Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Grupo PRETEXTO.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra*. Orígenes y perspectivas. Buenos Aires, Argentina: libros del Zorzal.

Socas, M. & otros. (1996). *Iniciación al álgebra*. Madrid, Ed. Síntesis.

Socas, M. (1997): Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria, cap. 5., pp. 125-154, en RICO, L., y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Ed. Horsori, Barcelona.

Socas, M., y Palarea, M. (1997): “Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar”, en Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas. Barcelona, Editorial Graó, 14, pp. 7-24.

Velasco, E. (2012). Uso de material estructurado como herramienta didáctica para el aprendizaje de las matemáticas. Tesis de grado. Escuela Universitaria de Magisterio. Universidad de Valladolid.

Vergel, R. Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico 1 Generalization Processes and Algebraic Thinking Processos de generalização e pensamento algébrico.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 379-402.

ANEXOS

ANEXO 1. PRUEBA PILOTO



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Especialización en Educación Matemática
Trabajo de grado
2016-2

TALLER DE GENERALIZACIÓN

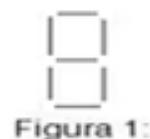
NOMBRE: _____ Curso: _____, Edad: _____

PRIMERA PARTE: FORMA INDIVIDUAL

Responda las preguntas de la primera parte de forma individual

1. Usando los palillos, construya la **Figura 1**

a. ¿Cuántos palillos se necesitaron para construir la **Figura 1**? Rta: _____



2. Usando los palillos, construya la **Figura 2**

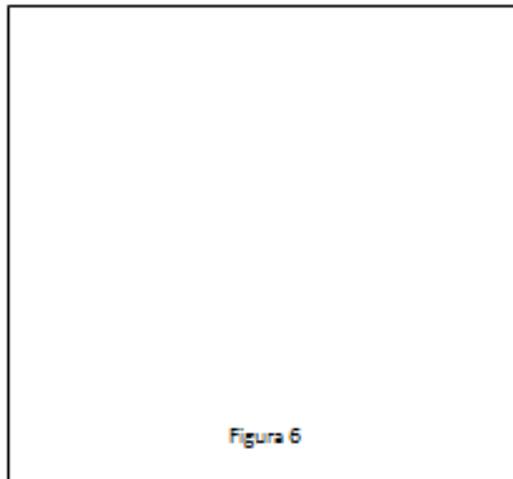
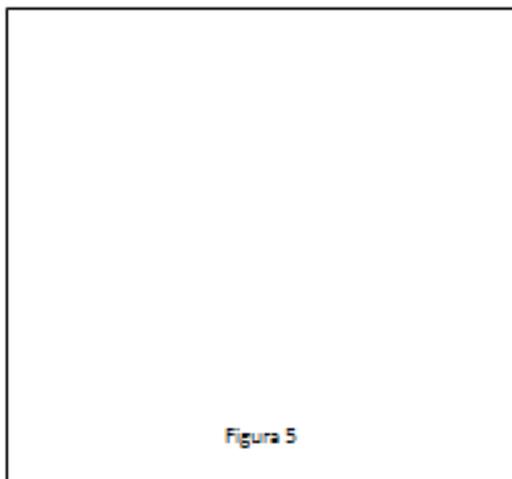
a. ¿Cuántos palillos se necesitaron para construir la **Figura 2**? Respuesta: _____



3. Daniel, estudiante de grado séptimo, ha construido la siguiente secuencia de figuras usando los palillos



a. Usando los palillos construya la **Figura 5** y la **Figura 6**. Luego dibújelas en el espacio indicado.



- b. Suponga que quiere dictar a un compañero los pasos para construir la **Figura 7**. Escriba de forma clara lo que le diría para construir la **Figura 7**.

- c. Escriba la “característica común” en la secuencia de figuras. Es decir, escriba con sus propias palabras de forma clara y precisa lo que usted observa en la secuencia de figuras construidas con el fin de descubrir la(s) característica (s) común(es).



4. Para construir la **Figura 20** ¿Cuántos palillos se necesitan? Escriba la estrategia o los procedimientos que usa para determinar su respuesta.

Respuesta: La cantidad de palillos para construir la **Figura 20** es _____
Justificación:

5. Escriba la cantidad de palillos que se utilizarían para la **Figura 100**. Justifique su respuesta.

Rta: Para la **Figura 100** se necesitan _____ palillos.

6. A continuación tenemos los procedimientos elaborados por tres estudiantes para determinar la cantidad de palillos en la **Figura 100**.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
$7 + 5(100) =$ $7 + 500 =$ 507	$5(100) + 2 =$ $500 + 2 =$ 502	$7 + 5(100 - 1) =$ $7 + 5(99) =$ $7 + 495 =$ 502

¿Cuál de las operaciones corresponde con el procedimiento o estrategia elaborado por usted?, Si ninguna operación corresponde con lo realizado por usted, escriba la que corresponde con su estrategia propuesta.

7. Escriba una oración o una expresión que permita determinar la cantidad de palillos para construir cualquier figura de la secuencia.

8. A continuación tenemos la expresión simbólica elaborada por los tres mismos estudiantes para determinar la cantidad de palillos de cualquier figura. Esta escritura surgió a partir de lo propuesto por los estudiantes en el numeral 6.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
$7 + 5(n)$	$5n + 2$	$7 + 5(n - 1)$

¿Cuál de las expresiones permite determinar la cantidad de palillos para construir cualquier figura de la secuencia? Justifique

Si ninguna expresión corresponde según su criterio ¿Cuál es la expresión simbólica?

ANEXO 2. RESPUESTAS DE ROCIO A LA PRUEBA PILOTO


UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de Educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
 DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
 Especialización en Educación Matemática
 Trabajo de grado
 2016-2

TALLER DE GENERALIZACIÓN

NOMBRE: ROCIO **Curso:** 704 **Edad:** 2

PRIMERA PARTE: FORMA INDIVIDUAL

Responda las preguntas de la primera parte de forma individual

- Usando los palillos, construya la **Figura 1**
 - ¿Cuántos palillos se necesitaron para construir la **Figura 1**? Rta: 8 7


 Figura 1

- Usando los palillos, construya la **Figura 2**
 - ¿Cuántos palillos se necesitaron para construir la **Figura 2**? Respuesta: 12


 Figura 2

- Daniel, estudiante de grado séptimo, ha construido la siguiente secuencia de figuras usando los palillos

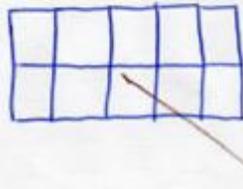

 Figura 1

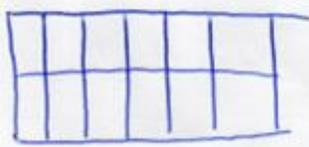

 Figura 2


 Figura 3


 Figura 4

- Usando los palillos construya la **Figura 5** y la **Figura 6**. Luego dibújelas en el espacio indicado.


 Figura 5


 Figura 6

- b. Suponga que quiere dictar a un compañero los pasos para construir la **Figura 7**. Escriba de forma clara lo que le diría para construir la **Figura 7**.

Contando los palillos para ~~se~~ llegar
A la figura 7

- c. Escriba la "característica común" en la secuencia de figuras. Es decir, escriba con sus propias palabras de forma clara y precisa lo que usted observa en la secuencia de figuras construidas con el fin de descubrir la(s) característica(s) común(es).



Acada figura se le fue aumentando
dos cuadrillos para formar cada figura

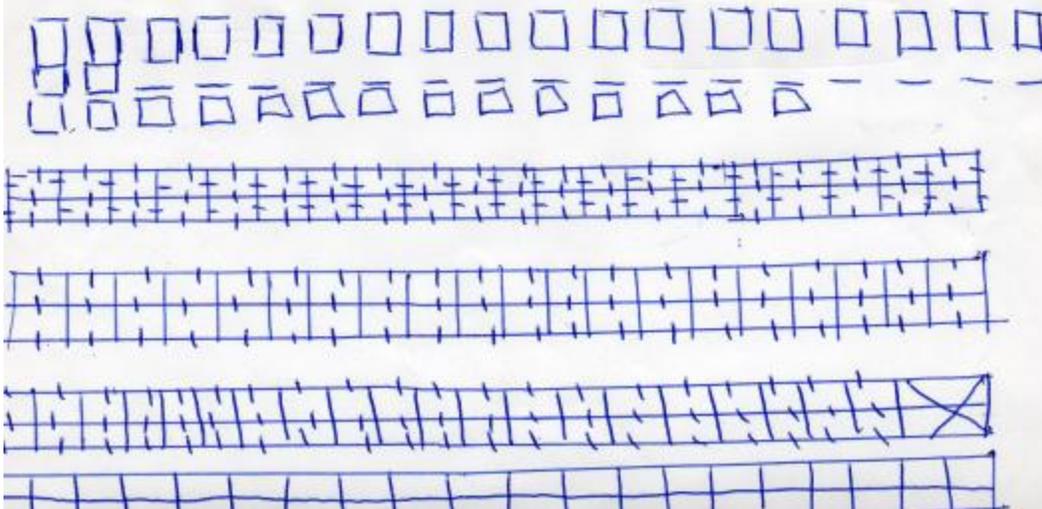
4. Para construir la **Figura 20** ¿Cuántos palillos se necesitan? Escriba la estrategia o los procedimientos que usa para determinar su respuesta.

Respuesta: La cantidad de palillos para construir la **Figura 20** es 102
Justificación:

Cuenta los palitos hasta llegar al número 20
para formar la figura 20, los palitos son 102

5. Escriba la cantidad de palillos que se utilizarían para la **Figura 100**. Justifique su respuesta.

Rta: Para la Figura 100 se necesitan ~~510~~
502 palillos.



6. A continuación tenemos los procedimientos elaborados por tres estudiantes para determinar la cantidad de palillos en la **Figura 100**.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
$7 + 5(100) = 507$ $7 + 500 = 507$ 507	$5(100) + 2 = 502$ $500 + 2 = 502$ 502	$7 + 5(100-1) = 502$ $7 + 5(99) = 502$ $7 + 495 = 502$

¿Cuál de las operaciones corresponde con el procedimiento o estrategia elaborado por usted?. Si ninguna operación corresponde con lo realizado por usted, escriba la que corresponde con su estrategia propuesta.

meise el dibujo y lo conte y me salieron 507 palitos para la figura 100

7. Escriba una oración o una expresión que permita determinar la cantidad de palillos para construir cualquier figura de la secuencia.

Se necesitan 507 palitos para construir cualquier figura de la secuencia

8. A continuación tenemos la expresión simbólica elaborada por los tres mismos estudiantes para determinar la cantidad de palillos de cualquier figura. Esta escritura surgió a partir de lo propuesto por los estudiantes en el numeral 6.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
$7 + 5(n)$	$5n + 2$	$7 + 5(n-1)$

¿Cuál de las expresiones permite determinar la cantidad de palillos para construir cualquier figura de la secuencia? Justifique

yo escogí la figura 1 porque me pareció más fácil que las otras dos

Si ninguna expresión corresponde según su criterio ¿Cuál es la expresión simbólica?

(para la figura mil yo aña ~~me~~ mil x 5)
y le sumo 7

$$80 \times 5 = 400$$

Por ejemplo para la figura 20
yo multiplico 20 por 5 = 400 y
le sumo 7 lo que da 407

ANEXO 3. RESPUESTAS DE ALEJANDRO A LA PRUEBA PILOTO



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Especialización en Educación Matemática
Trabajo de grado
2016-2

TALLER DE GENERALIZACIÓN

NOMBRE: ALEJANDRO Curso: 701, Edad: 19

PRIMERA PARTE: FORMA INDIVIDUAL

Responda las preguntas de la primera parte de forma individual

1. Usando los palillos, construya la **Figura 1**
 - a. ¿Cuántos palillos se necesitaron para construir la **Figura 1**? Rta: 7
2. Usando los palillos, construya la **Figura 2**
 - a. ¿Cuántos palillos se necesitaron para construir la **Figura 2**? Respuesta: 12
3. Daniel, estudiante de grado séptimo, ha construido la siguiente secuencia de figuras usando los palillos



Figura 1



Figura 2

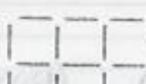


Figura 3

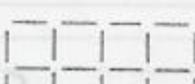


Figura 4

 - a. Usando los palillos construya la **Figura 5** y la **Figura 6**. Luego dibújelas en el espacio indicado.

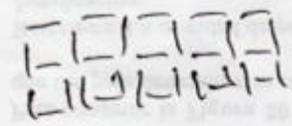


Figura 5

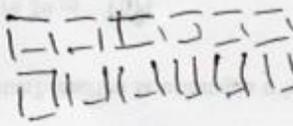


Figura 6

- b. Suponga que quiere dictar a un compañero los pasos para construir la **Figura 7**. Escriba de forma clara lo que le diría para construir la **Figura 7**.

Yo le diría que utilizara palillos y

- c. Escriba la "característica común" en la secuencia de figuras. Es decir, escriba con sus propias palabras de forma clara y precisa lo que usted observa en la secuencia de figuras construidas con el fin de descubrir la(s) característica(s) común(es).



Figura 1



Figura 2

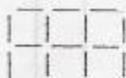


Figura 3

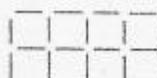


Figura 4

veo que cada vez que una figura se suma aumenta los palillos y cada vez se va una forma de un 8

4. Para construir la **Figura 20** ¿Cuántos palillos se necesitan? Escriba la estrategia o los procedimientos que usa para determinar su respuesta.

Respuesta: La cantidad de palillos para construir la **Figura 20** es 108

Justificación:

multiplicar los palillos por 5

5. Escribe la cantidad de palillos que se utilizarían para la **Figura 100**. Justifique su respuesta.

Rta: Para la **Figura 100** se necesitan 240 palillos.

Por que se multiplica y por que se suma
y cada figura

6. A continuación tenemos los procedimientos elaborados por tres estudiantes para determinar la cantidad de palillos en la **Figura 100**.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
$7 + 5(100) =$ $7 + 500 =$ 507	$5(100) + 2 =$ $500 + 2 =$ 502	$7 + 5(100 - 1) =$ $7 + 5(99) =$ $7 + 495 =$ 502

¿Cuál de las operaciones corresponde con el procedimiento o estrategia elaborado por usted?. Si ninguna operación corresponde con lo realizado por usted, escriba la que corresponde con su estrategia propuesta.

ninguna $108 + 108 + 108 + 108 + 108$ el resultado va hacer

7. Escriba una oración o una expresión que permita determinar la cantidad de palillos para construir cualquier figura de la secuencia.

Aumentar en cada figura 5 palillos

8. A continuación tenemos la expresión simbólica elaborada por los tres mismos estudiantes para determinar la cantidad de palillos de cualquier figura. Esta escritura surgió a partir de lo propuesto por los estudiantes en el numeral 6.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
$7 + 5(n)$	$5n + 2$	$7 + 5(n-1)$

¿Cuál de las expresiones permite determinar la cantidad de palillos para construir cualquier figura de la secuencia? Justifique

estudiante 2 me parece mas precisa

Si ninguna expresión corresponde según su criterio ¿Cuál es la expresión simbólica?

ANEXO 4. RESPUESTAS DE FELIPE A LA PRUEBA PILOTO



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Especialización en Educación Matemática
Trabajo de grado
2016-2

TALLER DE GENERALIZACIÓN

NOMBRE: FELIPE Curso: 7º 2., Edad: 14

PRIMERA PARTE: FORMA INDIVIDUAL

Responda las preguntas de la primera parte de forma individual

1. Usando los palillos, construya la **Figura 1**
 - a. ¿Cuántos palillos se necesitaron para construir la **Figura 1**? Rta: 7.



Figura 1

2. Usando los palillos, construya la **Figura 2**
 - a. ¿Cuántos palillos se necesitaron para construir la **Figura 2**? Respuesta: 12



Figura 2

3. Daniel, estudiante de grado séptimo, ha construido la siguiente secuencia de figuras usando los palillos



Figura 1



Figura 2

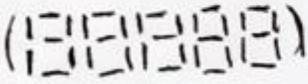


Figura 3



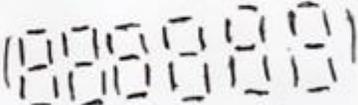
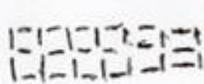
Figura 4

 - a. Usando los palillos construya la **Figura 5** y la **Figura 6**. Luego dibújelas en el espacio indicado.




27

Figura 5

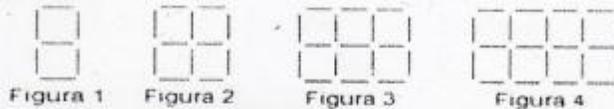
32

Figura 6

- b. Suponga que quiere dictar a un compañero los pasos para construir la **Figura 7**. Escriba de forma clara lo que le diría para construir la **Figura 7**.

yo le diría que cada figura se suma dos cuadrados o sea 7 palillos y le diría que cada cuadrado tiene 7 palillos y hace el pedrillo hacer eso

- c. Escriba la “característica común” en la secuencia de figuras. Es decir, escriba con sus propias palabras de forma clara y precisa lo que usted observa en la secuencia de figuras construidas con el fin de descubrir la(s) característica(s) común(es).



yo observo que cada figura va aumentando de 7 palillos.

4. Para construir la **Figura 20** ¿Cuántos palillos se necesitan? Escriba la estrategia o los procedimientos que usa para determinar su respuesta.

Respuesta: La cantidad de palillos para construir la **Figura 20** es 700
Justificación:

yo sume los palillos de la figura 5 y la figura 5 tiene 35 palillos y hay multiplicar por 5 y me dio 175 y 175 multiplicar por 4 y me dio 700.

5. Escriba la cantidad de palillos que se utilizarían para la **Figura 100**. Justifique su respuesta.

Rta: Para la **Figura 100** se necesitan 2800 palillos.

yo multiplico: sume y me dio

$$\begin{array}{r}
 700 \\
 700 \\
 700 \\
 700 \\
 \hline
 2800.
 \end{array}$$

6. A continuación tenemos los procedimientos elaborados por tres estudiantes para determinar la cantidad de palillos en la **Figura 100**.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
$7 + 5(100) =$ $7 + 500 =$ 507	$5(100) + 2 =$ $500 + 2 =$ 502	$7 + 5(100 - 1) =$ $7 + 5(99) =$ $7 + 495 =$ 502

¿Cuál de las operaciones corresponde con el procedimiento o estrategia elaborado por usted?. Si ninguna operación corresponde con lo realizado por usted, escriba la que corresponde con su estrategia propuesta.

yo multiplico ~~70~~ 100 y me da 700
y despues sumo 7 veces por 700
y da 2800.

7. Escriba una oración o una expresión que permita determinar la cantidad de palillos para construir cualquier figura de la secuencia.

que cada figura tiene 7 palillos.

8. A continuación tenemos la expresión simbólica elaborada por los tres mismos estudiantes para determinar la cantidad de palillos de cualquier figura. Esta escritura surgió a partir de lo propuesto por los estudiantes en el numeral 6.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
$7 + 5(n)$	$5n + 2$	$7 + 5(n-1)$

¿Cuál de las expresiones permite determinar la cantidad de palillos para construir cualquier figura de la secuencia? Justifique

el estudiante 2 porque suma
7.

Si ninguna expresión corresponde según su criterio ¿Cuál es la expresión simbólica?.

ANEXO 5. RESPUESTAS DE MAYER A LA PRUEBA PILOTO


UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Escuela de Educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
 DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
 Especialización en Educación Matemática
 Trabajo de grado
 2016-2

TALLER DE GENERALIZACIÓN

NOMBRE: MAYER **Curso:** 701, **Edad:** 15
15

PRIMERA PARTE: FORMA INDIVIDUAL

Responda las preguntas de la primera parte de forma individual

- Usando los palillos, construya la **Figura 1**
 - ¿Cuántos palillos se necesitaron para construir la **Figura 1**? Rta: 7


Figura 1
- Usando los palillos, construya la **Figura 2**
 - ¿Cuántos palillos se necesitaron para construir la **Figura 2**? Respuesta: 12


Figura 2
- Daniel, estudiante de grado séptimo, ha construido la siguiente secuencia de figuras usando los palillos


Figura 1


Figura 2


Figura 3


Figura 4

 - Usando los palillos construya la **Figura 5** y la **Figura 6**. Luego dibújelas en el espacio indicado.


Figura 5


Figura 6

- b. Suponga que quiere dictar a un compañero los pasos para construir la **Figura 7**. Escriba de forma clara lo que le diría para construir la **Figura 7**.

Le digo que realice la Figura 6 y le añada
dos cuadrados más a la derecha.

- c. Escriba la "característica común" en la secuencia de figuras. Es decir, escriba con sus propias palabras de forma clara y precisa lo que usted observa en la secuencia de figuras construidas con el fin de descubrir la(s) característica(s) común(es).



parece como si fuera una escalera horizontalmente
y tiene el mismo tamaño y la misma medida cada
cuadrado.

4. Para construir la **Figura 20** ¿Cuántos palillos se necesitan? Escriba la estrategia o los procedimientos que usa para determinar su respuesta.

Respuesta: La cantidad de palillos para construir la **Figura 20** es 108

Justificación:

$$\begin{array}{r} 27 \\ 4 \\ \hline 108 \end{array}$$

se multiplica el número de palillos de la figura
6 por 4 = 108

5. Escriba la cantidad de palillos que se utilizarían para la **Figura 100**. Justifique su respuesta.

Rta: Para la **Figura 100** se necesitan 540 palillos.

$$\begin{array}{r} 108 \\ \times 5 \\ \hline 540 \end{array}$$

6. A continuación tenemos los procedimientos elaborados por tres estudiantes para determinar la cantidad de palillos en la **Figura 100**.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
$7 + 5(100) =$ $7 + 500 =$ 507	$5(100) + 2 =$ $500 + 2 =$ 502	$7 + 5(100 - 1) =$ $7 + 5(99) =$ $7 + 495 =$ 502

¿Cuál de las operaciones corresponde con el procedimiento o estrategia elaborado por usted?. Si ninguna operación corresponde con lo realizado por usted, escriba la que corresponde con su estrategia propuesta.

tomamos el resultado de la figura numero 20 y la multiplicamos por 5.

7. Escriba una oración o una expresión que permita determinar la cantidad de palillos para construir cualquier figura de la secuencia.

se le suma de 5 palillos para construir la figura que sigue

8. A continuación tenemos la expresión simbólica elaborada por los tres mismos estudiantes para determinar la cantidad de palillos de cualquier figura. Esta escritura surgió a partir de lo propuesto por los estudiantes en el numeral 6.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
$7 + 5(n)$	$5n + 2$	$7 + 5(n - 1)$

¿Cuál de las expresiones permite determinar la cantidad de palillos para construir cualquier figura de la secuencia? Justifique

El estudiante numero 1 porque para que al sumar la primera figura de 7 y si se le suma 5 da las figuras numero 2...

Si ninguna expresión corresponde según su criterio ¿Cuál es la expresión simbólica?.