PROPUESTA DE ACTIVIDADES PARA ABORDAR PROBLEMAS DE MEZCLAS EN UN CURSO DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE EL APOYO DE SOFTWARE LIBRE "GEOGEBRA"

LUIS ALBERTO JAIMES CONTRERAS

Cód. 2012182023

RAFAEL FELIPE CHAVES ESCOBAR

Cód. 2012182014

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BOGOTÁ, COLOMBIA

2012

PROPUESTA DE ACTIVIDADES PARA ABORDAR PROBLEMAS DE MEZCLAS EN UN CURSO DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE EL APOYO DE SOFTWARE LIBRE "GEOGEBRA"

LUIS ALBERTO JAIMES CONTRERAS
RAFAEL FELIPE CHAVES ESCOBAR

Trabajo de grado presentado como requisito para optar el título de Especialista en Educación Matemática

MAGISTER ALBERTO DONADO

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ, COLOMBIA
2012

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Propuesta de actividades para abordar problemas de mezclas en un curso de ecuaciones diferenciales mediante el apoyo de software libre "Geogebra".
Autor(es)	Chaves Escobar Rafael Felipe; Jaimes Contreras Luis Alberto.
Director	Alberto Donado
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional. 2012. 79p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA, REPRESENTACIONES EJECUTABLES, REGISTRO LENGUAJE NATURAL, REGISTRO ALGEBRAICO, ECUACIÓN DIFERENCIAL, RAZÓN DE CAMBIO, PROBLEMAS DE MEZCLAS.

2. Descripción

El objetivo de este trabajo es elaborar una propuesta de actividades que permita realizar traspasos del registro lenguaje natural al algebraico mediante representaciones ejecutables y preguntas que pretenden orientar al estudiante durante el desarrollo de la misma, con el fin de proporcionar herramientas para plantear la ecuación diferencial que se ajusta a un problema de mezclas. Antes de presentar la propuesta se realizó un pilotaje a un grupo de 21 estudiantes de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas inscritos al proyecto curricular de Tecnología en Obras Civiles e Ingeniería Civil, dicho pilotaje permitió identificar algunas dificultades de los estudiantes en el momento de desarrollar las actividades, lo cual permitió realizar algunos ajustes para presentar la propuesta final.

3. Fuentes

Se consultaron 11 documentos, dentro de estas, 1 tesis doctoral, 1 libro de ecuaciones diferenciales y un libro de cálculo. A continuación se mencionan los más relevantes:

De las Fuentes Maximiliano, Arcos L. José & Navarro R. Carlos. (2010). Impacto en las Competencias Matemáticas de los Estudiantes de Ecuaciones Diferenciales a Partir de una Estrategia Didáctica que Incorpora la Calculadora. Formación Universitaria, Vol. 3(3), 33-44.

Dullius, M. M. (2009). Enseñanza y aprendizaje en ED con abordaje gráfico, numérico y analítico. *Tesis Doctoral* . Burgos, España.

Duval, Raymond (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la RSME, Vol. 9.1, 143-168.

Guzmán, Ismenia (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. Relime, Vol. 1, Núm. 1, 5 – 21.

MEN, (2004). Pensamiento Variacional y Tecnologías computacionales.

Morales L. Yuri & Salas H. Oscar. (2010). Incorporación de la tecnologia para la enseñanza y aprendizaje de las ED ordinarias. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,6* , 155-172.

Nápoles Valdés, J. E., González Thomas, A., Brundo, J. M., Genes, F., & Basabilbaso, F. (2004). El enfoque histórico problémico en la enseñanza de la matemática para ciencias técnicas: el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Acta Scientiae,6* , 41-59

Lupiañez, J.L. (2000). Nuevos Acercamientos a la Historia de la Matemática a través de la Calculadora TI-92, Universidad de Granada, Granada.

Vasco, Carlos. (2006). Pensamiento Variacional y modelación matemática. Universidad del Valle, Universidad de Manizales.

Zill Dennis & Cullen Michael. (2008). Matematicas avanzadas para ingenieria, vol 1. Ecuaciones diferenciales Tercera Edición, Editorial McGraw-Hill.

4. Contenidos

El referente didáctico inicia con la teoría de las *Representaciones semióticas y cambios entre registros* desarrollada por R. Duval, donde se resalta la importancia de los signos y lo que estos pueden llegar a representar (Guzmán I., 1998), así mismo se hizo referencia a las conversiones entre diferentes registros de representación (Lupiañez, 2000) mencionando la importancia no de tener el mejor sistema de representación sino de proporcionar al estudiante diferentes herramientas para representar los contenidos matemáticos (Duval, 2006). En cuanto al pensamiento variacional se sabe que desde la escuela surge la idea de trabajar con situaciones de cambio lo cual se puede evidenciar en los lineamientos curriculares propuestos por el ministerio de educación nacional (MEN). En lo que respecta a este tipo de pensamiento también se consideró los aportes realizados por Vasco (2006) quien lo describe como actividades mentales referentes al cambio, apoyadas en diferentes representaciones. Por otra parte en lo que refiere a las representaciones ejecutables esta propuesta pretende aportar una alternativa diferente al enfoque de enseñanza tradicional mediante la implementación de recursos tecnológicos (De las Fuentes, 2010). En ese sentido Dullius (2009) menciona que estos recursos permiten al estudiante interactuar con una representación de una ED que describe un problema de mezclas.

En el referente conceptual se abordan temas correspondientes a razón de cambio, definición, clasificación y orden de una ED, presentado algunos ejemplos de problemas que permiten ser modelados por una ED, también se menciona lo relacionado a modelos matemáticos, y las etapas por las que se debe pasar para concluir la construcción del mismo, en particular la modelación de problemas de mezclas.

5. Metodología

En la propuesta se contemplan 3 actividades que el estudiante debe desarrollar con el fin de que logre plantear la ED que se ajusta al problema de mezclas dado, de tal forma que ésta no represente solo una expresión algebraica, sino que por el contrario esta expresión represente la visualización del suceso expresado en lenguaje natural.

6. Conclusiones

En situaciones en las que se presenta más de una variable dependiente y no necesariamente del tiempo, se relaciona con un fenómeno de no congruencia de registros según la teoría de las representaciones semióticas, lo que puede ser motivo para que se presente un mayor porcentaje de fracaso al realizar el traspaso del registro lenguaje natural al algebraico.

Al desarrollar la propuesta se encontraron dificultades en temas que son considerados prerrequisitos de la asignatura, que impiden que la implementación de recursos tecnológicos contribuya al estudiante a tener éxito en el traspaso de registros.

Dificultades encontradas durante la implementación en la tercera actividad de la propuesta coinciden con Guzmán R. Ismenia (1998) quien menciona que en la mayoría de casos los estudiantes prefieren expresar la respuesta en el mismo registro en el cual esta planteada la pregunta.

Elaborado por:	Chaves Escobar Rafael Felipe; Jaimes Contreras Luis Alberto.
Revisado por:	Alberto Donado

Fecha de elaboración del Resumen:	6	11	2012

CONTENIDO

pág.

INTRODUCCIÓN 11

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 13

2. JUSTIFICACIÓN 14

3. OBJETIVOS 16

3.1 Objetivo General 16

3.2 Objetivos Específicos 16

4. MARCO REFERENCIAL 17

4.1 Marco Didáctico 18

4.1.1 Representaciones semióticas y cambios entre registros 18

4.1.2 Pensamiento variacional 20

4.1.3 Representaciones ejecutables 21

4.2 Marco Conceptual 23

4.2.1 Razón de cambio 23

4.2.2 Definición, clasificación y orden de una ED 24

4.2.3 Modelo Matemático 24

4.2.4 Problemas de mezclas 28

5. METODOLOGIA 29

5.1 Primera Actividad 29

5.2 Segunda Actividad 31

5.2.1 Primera parte 31

5.2.2 Segunda parte 34

5.3 Tercera Actividad 37

5.3.1 Problema 1 37

5.3.2 Problema 2 40

5.3.3 Problema 3 41

6. IMPLEMENTACIÓN 43

7. RESULTADOS	46
7.1 Actividad 1	46
7.2 Actividad 2	47
7.2.1 Primera parte	47
7.2.2 Segunda parte	49
7.3 Actividad 3	53
7.3.1 Problema 1	53
7.3.2 Problema 2	54
7.3.3 Problema 3	55
8. PROPUESTA FINAL	57
9. CONCLUSIONES	59
RECOMENDACIONES	61
BIBLIOGRAFIA	62
ANEXO A	64
ANEXO B	72

LISTA DE TABLAS

pág.

Tabla 1 48

Tabla 2 48

Tabla 3 50

Tabla 4 50

Tabla 5 51

Tabla 6 51

Tabla 7 52

Tabla 8 54

Tabla 9 55

LISTA DE FIGURAS

pág.

Figura 1. Pasos del proceso de modelación 27
Figura 2. Primera actividad 30
Figura 3. Applet 1 31
Figura 4. Applet 2 34
Figura 5. Applet 3 38
Figura 6. Applet 4 40
Figura 7. Applet 5 42
Figura 8. Errores cometidos por los estudiantes al resolver la pregunta 6 50
Figura 9. Errores cometidos por los estudiantes al resolver la pregunta 2 51
Figura 10. Errores cometidos por los estudiantes al resolver la pregunta 3 52
Figura 11. Errores cometidos por los estudiantes al resolver la pregunta 5 52
Figura 12. Errores cometidos por estudiantes al resolver la pregunta 3, act. 3 54

LISTA DE DIAGRAMAS

pág.

Diagrama 1. Número de preguntas acertadas 46

Diagrama 2. Desempeño en la actividad 1 47

Diagrama 3. Éxito y fracaso en la primera parte, actividad 2 47

Diagrama 4. Éxito y fracaso en la segunda parte, actividad 2 49

Diagrama 5. Éxito y fracaso en el problema 1, actividad 3 53

Diagrama 6. Éxito y fracaso en la problema 2, actividad 3 55

Diagrama 7. Éxito y fracaso en la problema 3, actividad 3 56

INTRODUCCIÓN

Debido a nuestra experiencia docente en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas en el campo de las matemáticas hemos observado que una de las razones por las cuales los estudiantes incurren en pruebas académicas (situación condicional para le conservación del cupo, a la que un estudiante llega debido al bajo rendimiento académico) y en consecuencia desertan de la carrera que están estudiando es por los cursos de matemáticas que se imparten en las distintas carreras que ofrece la Universidad, uno de los cursos causante de esta deserción es el curso de ecuaciones diferenciales (ED). Por esta razón una de nuestras principales preocupaciones es y será buscar estrategias didácticas que permitan a los estudiantes superar las dificultades que presentan en la comprensión y el aprendizaje de diferentes conceptos matemáticos, y por ende en los procesos cognitivos requeridos para la aplicación de estos conceptos en situaciones reales, como, por ejemplo, el plantear una ED que modele un problema de mezclas.

El presente trabajo de grado se realizó desde la línea de didáctica del cálculo, y presenta una propuesta de actividades que puede ser implementada para abordar los problemas de mezclas en un curso de ED. Estas actividades buscan que el estudiante plantee una ED que se ajuste al problema dado. Para ello se proporciona una serie de herramientas que se espera, permitan al estudiante realizar cambios entre registros de representación de un lenguaje natural a un lenguaje formal logrando así integrar los enfoques, algebraico y lengua natural.

Para complementar el desarrollo de las diferentes actividades que se presentan en esta propuesta se incorpora el uso de software libre “Geogebra” el cual servirá como una herramienta de visualización de la que se espera acerque al estudiante al planteamiento de una ED que modele diferentes problemas de mezclas.

Cabe resaltar que el título que en principio se considero es: “Propuesta de actividades para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en la solución de problemas de mezclas, con variables separables, mediante el apoyo de software libre “Geogebra”, y fue modificado por las siguientes razones: en primer lugar no todo problema de mezclas se modela por medio de una ED que se resuelve por el método de variables separables, en segundo lugar como se menciona anteriormente se pretende que el estudiante por medio de las actividades que se plantean este en facultad de proponer la ED que se ajuste al problema de mezclas dado, ya que la principal dificultad de los estudiantes para abordar este tipo de problemas esta en el planteamiento de la ED.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Desde la experiencia docente en cursos de Ecuaciones Diferenciales las dificultades que presentan los estudiantes cuando se les enfrenta a un problema matemático, en particular un problema de mezclas, se debe a que no reconocen ni diferencian constantes, parámetros, variables, cambio de una variable respecto a otra, y mucho menos plantean una ecuación que las relacione. Por tal motivo surge la necesidad de presentar una propuesta de actividades con el apoyo de software libre que proporcione al estudiante algunas herramientas que potencialice el razonamiento de estos al abordar un problema de este tipo y lo conduzca a plantear la ED que lo modele.

Lo anterior conduce a plantear la siguiente pregunta: ¿Cómo elaborar una propuesta de actividades para abordar problemas de mezclas en un curso de ecuaciones diferenciales que permita realizar cambios de representación en los registros gráfico, algebraico y lenguaje natural con el apoyo de software libre *geogebra*?

2. JUSTIFICACIÓN

La pedagogía viene realizando grandes aportes con el propósito de mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje en la educación; sin embargo, según Morales Lopez y Salas Huertas (2010) en el estudio de las ED actualmente “predomina el enfoque algebraico como reflejo de la primera forma que se tuvo de resolver estos problemas” y que algunos docentes emplean como estrategia didáctica.

Para Nápoles Valdés, González Thomas, Brundo, Genes, y Basabilbaso (2004) en la enseñanza de las ED algunos conceptos relacionados con límite, derivación e integración son evadidos u ocultados con fórmulas o algoritmos, lo cual impide la comprensión precisa del concepto llevando al estudiante, y en ocasiones a los docentes, a concebir la fórmula como el concepto en sí mismo. En libros de ED cuando se abordan los modelos lineales de primer orden, como crecimiento y decaimiento, fechado por carbono, ley de newton sobre enfriamiento y calentamiento, mezclas, etc. por lo general se le da al estudiante la ED que permite modelar este tipo de situaciones, presentándola como una fórmula, impidiendo la comprensión precisa del concepto como lo menciona Nápoles et al. (2004). Pero muy poco se trabaja sobre la forma como se construye esta ecuación diferencial, sobre cómo se realiza ese cambio de registro verbal al registro algebraico.

Para Duval (2006) en las transformaciones de las representaciones semióticas cuando se une un enunciado con una representación visual se pueden desarrollar dos funciones: “economía de memoria para tener en cuenta todos los elementos que se relacionan, o heurística para encontrar el teorema”. La computadora puede facilitar la unión de este enunciado y su representación visual ya que como menciona Villarreal (2003) la computadora privilegia el pensamiento visual, y la imagen en el caso de la matemática es punto de apoyo a las nuevas tecnologías intelectuales que no rechaza lo verbal o algebraico.

Ahora bien, justificada la necesidad de incluir los recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza aprendizaje de las ED, sabemos que desafortunadamente nuestro país no invierte en educación una cifra significativa. Por tal motivo es posible que encontremos universidades públicas que no tengan la capacidad de adquirir la licencia de funcionamiento de determinado software que sea aplicable para la enseñanza de las ED, lo cual dificulta integrar los enfoques algebraico y geométrico con la ayuda de recursos tecnológicos. Es por esto que este trabajo pretende plantear una propuesta de actividades que integre los enfoques algebraico, gráfico y lenguaje natural, con el apoyo de software libre, la cual podría ser implementada en cualquier universidad pública, sin generar costos significativos en su presupuesto.

En una encuesta aplicada a estudiantes del programa de construcciones civiles de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, los estudiantes debían elegir de los siguientes modelos: “Dinámicas de población, decaimiento radioactivo, ley de enfriamiento y calentamiento de Newton, difusión de una enfermedad y mezclas” dos de los cuales a su consideración representan mayor aplicabilidad en su formación como ingenieros civiles. Los modelos con mayor porcentaje de elección fueron: Mezclas y ley de enfriamiento y calentamiento de Newton, razón por la cual se elige el modelo de mezclas para trabajar en la propuesta.

Por los motivos expresados, es necesario diseñar una propuesta de actividades para abordar los problemas de mezclas en un curso de ED que permita realizar cambios de representación en los registros gráfico, algebraico y lengua natural mediante la ayuda de software libre “Geogebra”, esperando así reducir la dificultad que presentan los estudiantes al momento de plantear la ED que modela un problema de mezclas.

3. OBJETIVOS

3.1 OBJETIVO GENERAL

Presentar una propuesta de actividades para abordar problemas de mezclas en un curso de ecuaciones diferenciales con el apoyo de software libre, la cual permita realizar cambios de representación en los registros, algebraico y lengua natural.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Generar una primera actividad que permita identificar razones de cambio en diferentes situaciones reales.

- Crear una segunda actividad que involucre el traspaso entre registros de representación como el gráfico, algebraico y lengua natural, con el objeto razón de cambio.

- Elaborar una tercera actividad que contenga diversos problemas de mezclas.

- Proporcionar herramientas que permitan construir la ecuación diferencial que se ajuste al problema dado.

4. MARCO REFERENCIAL

La propuesta de actividades que se presenta en este trabajo se fundamenta en dos marcos, el didáctico y el matemático. En el marco didáctico se presentan algunos aspectos de la teoría de las representaciones semióticas y el cambio entre registros desarrollada por Raymond Duval, implementada en cada una de las actividades de la propuesta enfatizando en el traspaso entre dos tipos de registros, lenguaje natural y algebraico (o formal); en segundo lugar el pensamiento variacional, presente en el análisis de cada una de las situaciones que se exponen, como el llenado de una tanque cilíndrico, tanque en forma de cono o incluso en los problemas de mezclas. Por último se tiene en cuenta lo que concierne a las representaciones ejecutables utilizadas mediante *applets* que sirven de apoyo visual para interactuar de forma dinámica con los problemas y situaciones planteadas en la propuesta, lo cual se convierte en una herramienta mediadora para la transición de un registro a otro (De las Fuentes, 2010).

En cuanto al marco matemático se tiene previsto mencionar la definición de la derivada como razón de cambio usada para representar la rapidez con la que cambia una variable respecto a otra en una situación dada. Se presenta también la definición de ED, clasificación y orden, con el fin de presentar el instrumento principal que se ajusta a los problemas de mezclas presentados en esta propuesta. Siguiendo con este orden, se describe qué es un modelo matemático, debido a que se esta trabajando con problemas de mezclas que requieren de un modelo (una ED) para su solución. Finalmente se presentan 3 tipos de problemas que son modelados con la misma ED, estos son: cuando la rapidez de entrada de un líquido es igual a rapidez de salida, rapidez de entrada mayor que la rapidez de salida y rapidez de entrada menor que la rapidez de salida.

4.1 MARCO DIDÁCTICO

4.1.1 *Representaciones semióticas y cambios entre registros.* Estos constructos teóricos son propios del enfoque Ontosemiótico desarrollado por Raymond Duval y que se fundamenta en la noción semiótica de registro. Un registro está constituido por signos como: trazos, símbolos, íconos, etc. Estos registros están asociados a una representación que puede ser de dos maneras: interna, relacionada a las imágenes mentales que un individuo puede tener de un objeto y externa, referentes a lo que éste puede percibir con los sentidos. Por consiguiente, los registros son medios de expresión y de representación tales como notaciones algebraicas, gráficas o menciones verbales caracterizados por sus respectivos sistemas semióticos.

Para R. Duval las representaciones semióticas *"son aquellas en las cuales la producción no puede hacerse sin el cambio de un sistema semiótico: así las representaciones semióticas pueden ser producciones discursivas (en lenguaje natural, en lenguaje formal) o no discursivas (figuras, gráficos, esquemas…)"* (Guzmán, 1998, p.6). Teniendo en cuenta esto Duval plantea tres aspectos, en los cuales se enmarcan las intenciones, posibilidades e intereses que se persiguen a la hora de hacer uso de los símbolos. En primer lugar se encuentra la determinación de la importancia que tienen los signos y lo que estos pueden llegar a representar, en segundo lugar la fenomenología, es decir, lo que se quiere aprender y el tercero está relacionado a la utilidad que prestan estos signos (Guzmán, 1998).

Cabe resaltar que no debe confundirse el registro de representación con el significado del objeto matemático; por ejemplo, en un problema expresado verbalmente como*: Un tanque con forma de cono circular recto invertido es* *llenado con agua a razón de 7 $\frac{p^3}{min}$, si la altura del tanque es de 12 pies, el radio de la base es de 6 pies, y el tanque posee un orificio en su parte inferior por el cual sale agua a una razón de 3 $\frac{p^3}{min}$, entonces ¿Qué expresión algebraica describe la cantidad de agua que hay en un tiempo t?*; resulta usual que, los estudiantes fracasen al pasar del registro lenguaje natural al algebraico por diversos factores, entre otros, porque pueden creer que la forma del recipiente influye en la cantidad de agua que se encuentra en él en un instante de tiempo determinado, desconociendo que cuando se tiene una velocidad de entrada V_E y una de salida V_S, de líquido en un recipiente cualquiera, es decir, sin importa la forma, la cantidad de líquido en cualquier instante de tiempo esta dado por $C(t) = (\mathrm{V_E} - \mathrm{V_s})\mathrm{t}$ (expresado en el registro del lenguaje natural: La cantidad de líquido en cualquier instante, suponiendo un volumen inicial de cero, es igual al producto de la diferencia entre las velocidades de entrada y salida por el tiempo).

En el contexto de la educación matemática, situaciones como la anterior llevan a generar cuestionamientos del tipo, ¿Cómo aprender a cambiar de registro? y ¿Cómo aprender a no confundir el objeto con el registro de representación que se tiene del mismo?; para dar respuesta a estos interrogantes en primer lugar se debe tener en cuenta que cada vez que nos enfrentamos a un problema matemático se requiere para su solución tener claro los diferentes registros de representación, las relaciones que se pueden establecer entre ellos y la funcionalidad de los mismos. En consecuencia, dentro de estos registros se llevan a cabo transformaciones de las representaciones en el mismo registro donde fueron creadas. De igual manera es posible realizar conversiones entre diferentes registros de representación, es decir transformaciones de una representación a otra que no necesariamente pertenece al mismo registro (Lupiañez, 2000).

La coordinación entre registros de representación juega un papel importante en el proceso de aprendizaje debido a que si esta no se tiene en cuenta es posible que, al elegir dos representaciones diferentes, signifiquen dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso en el caso de que sean dos representaciones diferentes de un mismo objeto; en otras palabras, la clave para el traspaso entre diversas representaciones depende precisamente de esta coordinación, la cual no esta condicionada por la comprensión conceptual sino por el desarrollo mismo de estos traspasos. Así, la escogencia del mejor sistema de representación semiótico no es lo que importa para la enseñanza de las matemáticas, sino que los estudiantes sean capaces de relacionar varias maneras de representar los contenidos matemáticos Duval, 2006). Por lo tanto, se espera que con las actividades de la propuesta, sea posible vincular el registro de representación algebraico con el de lenguaje, deseando no confundir un registro con otro.

4.1.2 *Pensamiento variacional.* En los Lineamientos Curriculares en Matemáticas surge explícitamente la idea del pensamiento variacional con el fin de profundizar en lo referente al aprendizaje y el tratamiento de funciones como modelo de situaciones de cambio. Se pretende con esta forma de pensamiento que se reconozca de manera natural diferentes situaciones de cambio de tal forma que sea capaz de modelarlos y transformarlos.

Específicamente, el pensamiento variacional *"es la capacidad para darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas"* (MEN, 2004, p.17).

Para Vasco (2006, p.138) el pensamiento variacional "*se describe como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante* *a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad"*.

Por consiguiente el pensamiento variacional, desde la perspectiva presentada es aquel que involucra toda actividad mental referente al cambio, apoyado en diferentes representaciones como pueden ser gráficas, algebráicas, numéricas, entre otras. Este permite a su vez analizar y estudiar, lo que cambia, lo que es constante e incluso los patrones que se repiten en ciertos procesos.

Diversas situaciones reales que son modeladas desde el punto de vista matemático relacionadas al cambio tienen que ver con el tiempo. Se considera que existe cambio y variación cuando cualquier situación que se da se transforma con el transcurso del tiempo. El modelo de estas situaciones puede ser de dos tipos, el primero cuando el tiempo se considera de forma constante (en este caso la variación es continua y las representaciones que se utilizan son funciones de variable real) y el segundo cuando el tiempo es considerado en cada instante (esto es variación discreta y las representaciones que se utilizan son sucesiones de funciones enteras) (MEN, 2004, p.18). Para la presente propuesta se debe considerar que los problemas de mezclas tienen dependencia del tiempo y por lo tanto se deben tener en cuenta las anteriores consideraciones toda vez que se modelan precisamente desde las ED.

4.1.3 *Representaciones ejecutables.* Toda representación que emplea un recurso tecnológico, sea una calculadora, una computadora o en su defecto un software se denomina una *representación ejecutable* debido a la forma dinámica en que representa un objeto matemático y en el sentido que permite manipular y trasformar directamente un objeto. Estas representaciones según Lupiañez (2000) son portadoras de la potencialidad de simular acciones cognitivas con independencia de quién sea el usuario de la calculadora, o en su defecto del recurso tecnológico empleado.

La inclusión de nuevas tecnologías en el aula ha contribuido a mitigar muchas dificultades asociadas a los procesos de aprendizaje de los estudiantes, en particular el hecho de que los estudiantes, en la resolución de ciertos problemas, no asocien de una forma coherente los conceptos matemáticos requeridos para la resolución con los algoritmos asociados a los mismos. Lo anterior se puede deber al enfoque de una enseñanza tradicional que manejan la mayoría de los profesores de matemáticas y a la escasez en el manejo e implementación de recursos tecnológicos (De las Fuentes, 2010).

Según Dullius (2009, p.6) el uso de estos recursos tecnológicos propicia al estudiante a interactuar con una representación del modelo científico (en este caso una ED) que describe el fenómeno de interés (problemas de mezclas) y dispone al mismo de la oportunidad de observar, explorar y analizar el comportamiento de las ED, dando mayor importancia al aprendizaje de estas en la interpretación y aplicación más no en la solución analítica.

Las ventajas que tiene incorporar nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas repercuten en el aprendizaje de los estudiantes debido a dos razones fundamentales:

1. Proporcionan gran variedad de representaciones de los objetos y relaciones matemáticas en diferentes registros semióticos.
2. Permiten la conversión de un registro a otro.

Por las razones anteriores se implementa en esta propuesta el software libre “Geogebra”, que se caracteriza por integrar de forma dinámica la geometría y el algebra, esperando que sirva como apoyo al estudiante durante el desarrollo de las actividades de la propuesta y contribuya a que este plantee la ED que modele el problema de mezclas dado.

4.2 MARCO CONCEPTUAL

4.2.1 *Razón de cambio.* Swokowski (1989, p.112) define la razón de cambio como sigue:

DEFINICIÓN 4.2.1.1 Sea $w = g(t)$, donde g es derivable y t representa el tiempo.

i. *La **tasa (o razón) media de variación** de $w = f(t)$ en el intervalo $[t, t+h]$ es*

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h}$$

ii. *La **tasa (o razón) de variación** de $w = f(t)$ con respecto a t es*

$$\frac{dw}{dt} = g'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}$$

Según ii de la definición 4.2.1.1, si la variable t cambia, entonces w cambia a razón de dw/dt unidades por unidad de cambio de t. Por ejemplo, supónganse que se llena un vaso con agua, a medida que el tiempo pasa el volumen V de agua en el vaso aumenta, por lo tanto se puede afirmar que el volumen V es una función del tiempo t. La derivada dV/dt es la tasa de variación (o razón de cambio) del volumen con respecto al tiempo.

4.2.2 *Definición, clasificación y orden de una ED.* Zill (2008, p.5) define una ecuación diferencial como sigue:

DEFINICIÓN 4.2.2.1 Se dice que una ecuación diferencial (ED) es cualquier ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

En otras palabras, encontrar una función $y(x)$ representa el mismo problema que encontrar una función $y(x)$ que satisfaga la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

A esto se le llama ecuación diferencial, ya que es una ecuación que involucre una función desconocida y que está siendo derivada. Algunos ejemplos son:

Ejemplo 4.2.2.1 Decaimiento Radioactivo: $\frac{dA}{dt} = kA$

Lo anterior significa que la velocidad $dA/d\,t$ con que el núcleo de una sustancia decae es proporcional a la cantidad (el número de núcleos) $A(t)$ de la sustancia remanente en el tiempo t.

Ejemplo 4.2.2.2 Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Donde k es una constante de proporcionalidad, T (temperatura) es una función de la variable independiente t (tiempo) y T_m (temperatura del ambiente) es una constante.

Las ED se pueden clasificar en dos tipos:

i. Si una ED contiene únicamente derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria** (EDO).

Ejemplo 4.2.2.3 $y' + 9x = 0$ donde y denota la diferenciación de y con respecto a x.

Ejemplo 4.2.2.4 $\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy}{dx} - y = 9$ donde y es una función de la variable independiente x.

ii. Una ecuación en la que se presentan las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se denomina **ecuación diferencial parcial** (EDP). Ejemplo 5.

Ejemplo 4.2.2.5 La ED $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$

El orden de una ED viene dado por la derivada de mayor orden, cuyos coeficientes son diferentes de cero. Por ejemplo las ecuaciones de los ejemplos 1, 2 y 3 son de primer orden mientras que las ecuaciones de los ejemplos 4 y 5 son de segundo orden.

En esta propuesta se tienen en cuenta ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden como modelos de problemas de mezclas.

DEFINICIÓN 4.2.2.2 (Zill, 2008, p.52). *Se dice que una ecuación diferencial de la forma $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$ es una **ecuación lineal** en la variable dependiente y.*

Es pertinente mencionar que $a_1(x), a_0(x)$ y $g(x)$ son funciones de la variable independientes x y que $a_0(x) \neq 0$. Si se divide a ambos lados de la ecuación $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$ por $a_1(x)$ se obtiene la ecuación estándar de una ecuación lineal, esta es:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

4.2.3 *Modelo matemático* Se sigue de Zill (2008, p.21) la definición de modelo matemático como sigue:

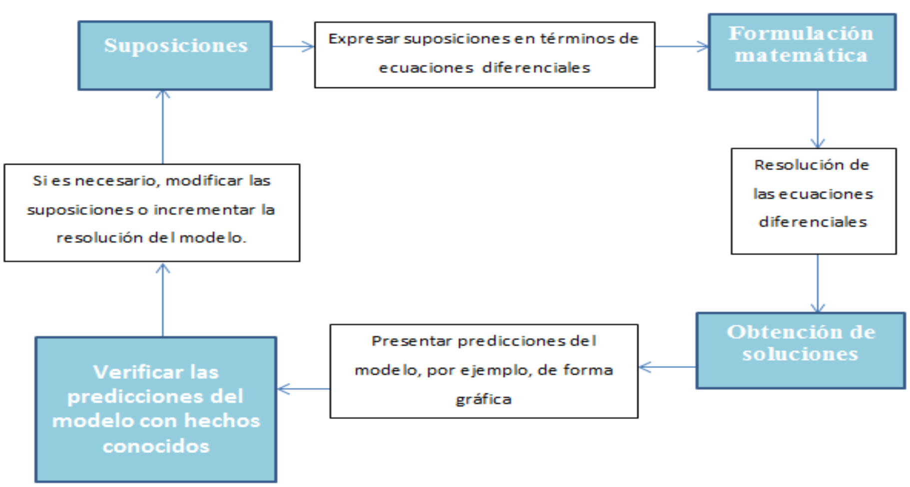
DEFINICIÓN 4.2.3.1 Con frecuencia se requiere describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno real, ya sea físico, sociológico, o incluso económico, en términos matemáticos. La descripción matemática de un sistema o fenómeno se denomina ***modelo matemático****, el cual se construye con ciertos objetivos en mente.*

Por ejemplo, se quiere saber la cantidad de sal presente en un tanque que contiene cierta cantidad de fluido en un tiempo t cuando se bombea salmuera al tanque con igual velocidad a como se bombea la solución (perfectamente mezclada) hacia afuera.

La construcción de un modelo matemático de un sistema pasa por diferentes etapas, inicia con la *identificación de las variables* responsables del cambio que se produzca en el sistema, aunque no todas se tengan en cuenta en el modelo debido a que en condiciones ideales se pueda despreciar alguna (Zill, 2008, p.21). En este primer paso se especifica el **nivel de resolución** del modelo. A continuación, se *formula un conjunto de premisas razonables* o hipótesis acerca del sistema que intenta describir, teniendo en cuenta además cualquier ley empírica aplicable al sistema.

Debido a que las suposiciones que se plantean de un sistema con frecuencia implican *una tasa de cambio* de una o más variables, la representación matemática de todas estas suposiciones pueden implicar una o más ecuaciones que involucren *derivadas*. En el caso particular, en los problemas de mezclas, el modelo matemático es una ED o un sistema de ED. Una vez formulada la ED o si es el caso un sistema de ED, el paso a seguir es intentar resolverlo. Si se puede resolver, entonces se considera que el modelo es razonable siempre y cuando la solución encontrada sea consistente con los datos proporcionados por las condiciones del sistema. Esta solución del sistema presenta lo que se conoce como **estado del sistema**. Desde luego, si los resultados dados por la solución no concuerdan con los datos proporcionados por las condiciones del sistema, se debe considerar replantear el modelo, incrementar la resolución del sistema o formular premisas alternativas sobre los elementos causantes del cambio en el sistema. Los pasos del proceso de modelación se muestran en el siguiente diagrama:

Figura 1. Pasos del proceso de modelación



Tomada de Zill (2008, p.21)

Es claro que incrementar la resolución implica que se eleve la complejidad del modelo matemático y aumente la probabilidad de que no sea posible obtener una solución explícita.

4.2.4 **Problemas de mezclas** Los problemas de mezclas aluden comúnmente a la siguiente descripción:

Considere un tanque con una cantidad inicial de V_0 *galones de salmuera que contiene* A_0 *lb de sal. Otra solución, que contiene* A_1 *lb de sal por galón, es vertida en el tanque a razón de* V_1 *gal/min. Simultáneamente la solución que se encuentra en el tanque sale a una razón de* V_2 *gal/min. El problema es encontrar la cantidad* A *de sal en el tanque en cualquier instante.*

Estos problemas contemplan 3 casos:

a. Cuando la rapidez de entrada de la solución es mayor a la rapidez de salida de la solución.
b. Cuando la rapidez de entrada es menor que rapidez de salida de la solución.
c. Cuando la rapidez de entrada es igual a la rapidez de salida de la solución.

Cualquiera de los casos anteriores obedece al modelo general dado por la ED:

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix} Velodidad\ de \\ entrada\ de\ sal \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Velocidad\ de \\ salida\ de\ sal \end{pmatrix} = R_{entrada} - R_{salida}$$

Cabe resaltar que la ED anterior permite modelar los casos a, b y c. De acuerdo a esto lo que cambia de un problema a otro son las condiciones iniciales de cada problema.

5. METODOLOGIA

En la solución de problemas de mezclas que son modelados por una ED se requiere que el estudiante tenga claridad en el manejo de la derivada como una razón de cambio, de tal manera que le permita identificar constantes, parámetros, y variables que dependan entre sí. Por tal razón, en la propuesta se contemplan 3 actividades que el estudiante debe desarrollar con el fin de que logre plantear la ED que se ajusta al problema de mezclas dado, de tal forma que ésta no represente solo una expresión algebraica, sino que por el contrario esta expresión represente la visualización del suceso expresado en lenguaje natural.

5.1 PRIMERA ACTIVIDAD

En esta actividad (figura 2) se pretende que el estudiante identifique razones de cambio que en la mayoría de casos dependen del tiempo, y que pueda mejorar el tránsito entre el registro lengua natural y algebraico en diferentes situaciones reales. Para ello se elaboró una tabla en la que se le pide al estudiante leer situaciones como "*Cuando llenas un vaso con gaseosa, ¿qué tan rápido cambia el nivel de líquido al llenar el vaso?"* y relacionarlas con una expresión de la forma $\frac{dh}{dt}$ donde *h* representa el nivel y *t* el tiempo.

Figura 2. Primera actividad

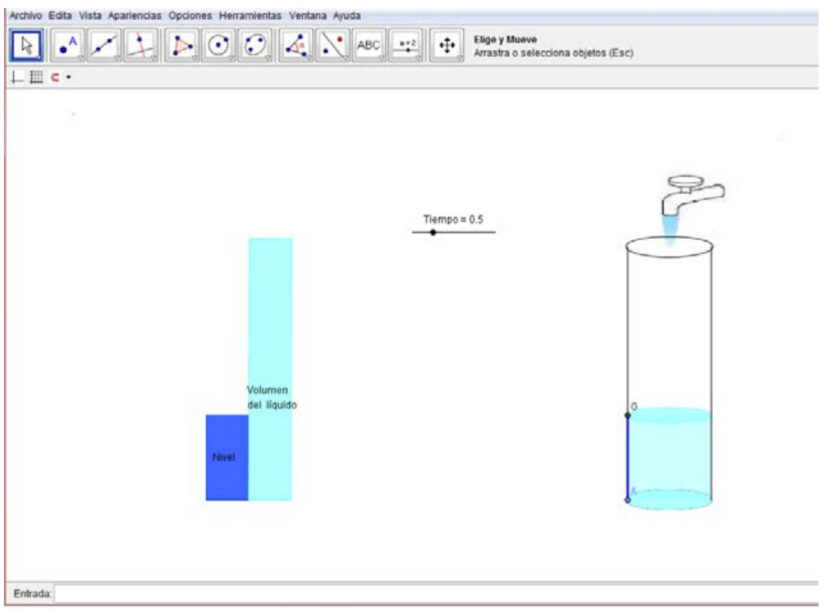
Contexto	Variable dependiente	Variable independiente	Lenguaje natural	Expresión algebraica
Cuando llenas un vaso con gaseosa, ¿qué tan rápido cambia el nivel de líquido al llenar el vaso? 	Nivel: h	Tiempo: t	Rapidez con la que varía el nivel del líquido al llenar el vaso	$\frac{dh}{dt}$
Un pollo es sacado del horno, y colocado sobre la mesa ¿con que rapidez se enfría? 			Rapidez del cambio de la temperatura al sacar el pollo del horno	
Como cambia el vértice superior de una montaña de arena de forma triangular generado al vaciar una volqueta. 			Rapidez con la que cambia la posición del vértice, superior de una montaña de arena	
El radio de un círculo aumenta a velocidad constante ¿Qué tan rápido aumenta su área? 			Razón de cambio del área de un circulo	
Un niño que está elevando una cometa observa su alejamiento horizontal a medida que su cuerda se va soltando (suponga que la cuerda se mantiene recta) ¿Cómo varia la altura de la cometa? 			Rapidez con la que varia la altura de la	

En esta actividad el estudiante lee un contexto en el que debe identificar variables dependientes e independientes, esperando que esto facilite la escritura de la derivada en la notación de Leibniz. De ese contexto se extrae una expresión dada en lenguaje natural y teniendo en cuenta la dependencia de las variables el estudiante debe escribirla como una expresión algebraica. Se espera que esta primer actividad sirva como base a las actividades posteriores en las cuales es necesario que el estudiante al leer el enunciado identifique en qué parte del enunciado se está haciendo referencia a una razón de cambio, y no tenga inconvenientes en expresar la información dada en lenguaje natural como una expresión algebraica.

5.2 SEGUNDA ACTIVIDAD

5.2.1 Primera parte (Situación 1) Se encuentra una situación en la que es necesario que el estudiante identifique en qué momento del enunciado se está hablando de razón de cambio. El enunciado es el siguiente *¿Qué expresión algebraica describe la rapidez con la que sube el nivel n de líquido en un tanque cilíndrico vertical de radio r, si llenamos aquel a una razón de 3* m^3*/min?*, el cual va acompañado de un applet el cual se muestra en la siguiente figura.

Figura 3. Applet 1



Este applet contiene un deslizador llamado *Tiempo* el cual al moverlo permite visualizar como cambia el nivel y volumen de líquido en el cilindro, además de la imagen dinámica del llenado del cilindro se utiliza un diagrama de barras, todo con el objetivo de mostrar como las variables nivel y volumen dependen del tiempo (lo cual es necesario para utilizar adecuadamente la notación de Leibniz) y además que se relacionan proporcionalmente. Después de que el estudiante ha leído el enunciado y observado el applet se plantean las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo interpreta la frase "Qué tan rápido sube el nivel de líquido", en términos matemáticos?

Esta pregunta más que guiar, permite verificar si la actividad 1, le permite al estudiante realizar el traspaso del registro lenguaje natural al gráfico, ya que la respuesta que esperamos es $\frac{dx}{dt}$ donde x es el nivel de líquido y t el tiempo.

2. ¿Qué variables y parámetros puede identificar? ¿Cuáles variables son dependientes y cuales son independientes?

Las variables y parámetros que se espera, el estudiante identifique con la ayuda del applet son:

- *Variables dependientes:* nivel de líquido y volumen
- *Variable independiente:* tiempo
- *Parámetro:* Radio

3. Escribe una función que relacione las variables dependientes y parámetros encontrados en el punto anterior.

El estudiante cuenta con la fórmula que permite hallar el volumen del cilindro en función del radio y la altura $\boldsymbol{V = \pi r^2 h}$, y lo que esperamos es que copie la fórmula en este punto, en lo cual no debería tener mayor dificultad si realizó adecuadamente el punto anterior.

4. Encuentra la expresión que permite identificar la rapidez con la que sube el nivel del líquido con respecto al tiempo.

Esta pregunta se conecta con la pregunta 1 de esta segunda actividad (primera parte), y además con el trabajo realizado en la actividad 1, ya que el estudiante debe tomar la expresión *“rapidez con la que sube el nivel del líquido con respecto al tiempo”* y expresarla como $\frac{dh}{dt}$, es decir, realizar un cambio de registro, y posteriormente derive la función dada como respuesta en la pregunta 3 utilizando la notación de Leibniz; de esta forma la expresión que le estudiante obtiene es $\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$, y despejando tenemos que $\frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{1}{\pi r^2}$

5. ¿Qué información del enunciado puede remplazar en la ecuación que obtiene?

Teniendo en cuenta que en el enunciado se da la razón de llenado del tanque, la cual esperamos que el estudiante interprete como $\frac{dV}{dt} = 3\frac{m^3}{min}$, solo deberá remplazar esta información en la expresión dada en la repuesta anterior.

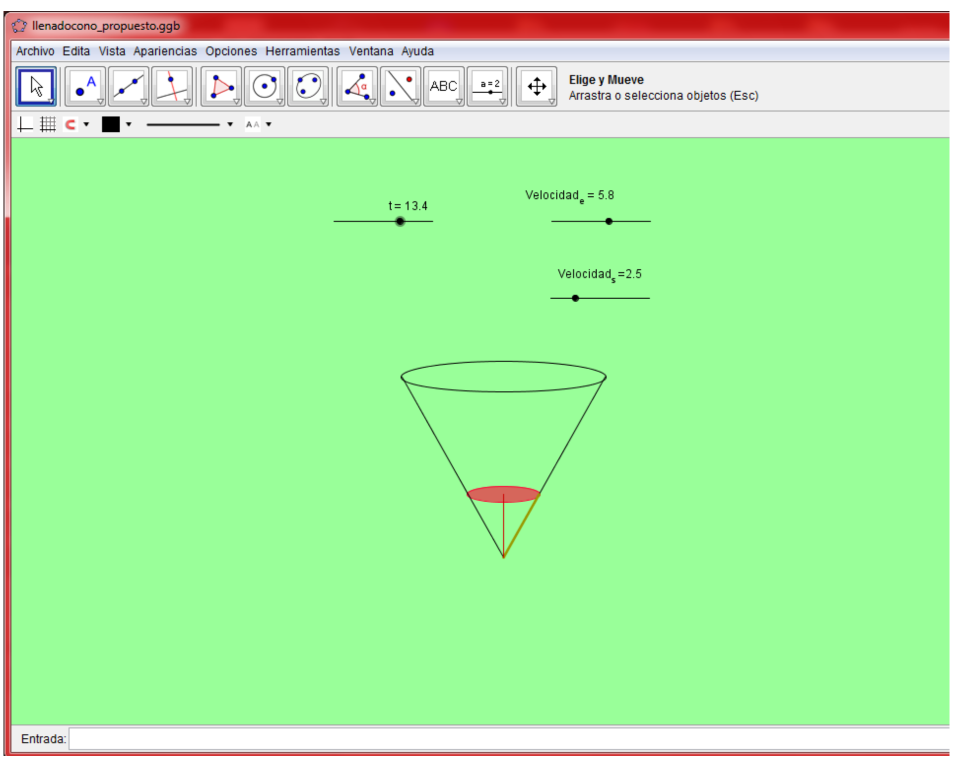
6. Con lo desarrollado en los puntos anteriores ¿puede dar respuesta a la pregunta formulada en la situación 1?

Aunque parezca redundante, es necesario realizar esta pregunta ya que según pilotajes realizados podemos encontrar estudiantes que responden adecuadamente la pregunta 5 y no se dan cuenta que esta expresión da respuesta a lo que pide el enunciado del problema.

Cada una de estas preguntas se elaboró con la intención de indicar al estudiante a base de cuestionamientos una forma de llegar a la solución del enunciado, y se contó con el apoyo de la experiencia adquirida por el estudiante, tanto en el curso previo de cálculo diferencial como en el desarrollo de la actividad 1.

5.2.2 Segunda parte (Situación 2) Busca acercar al estudiante a un tipo de razonamiento que debe tener al resolver problemas de mezclas, y es el de cómo se comporta la cantidad de líquido en un recipiente cuando se tienen sus velocidades de entrada y salida. El enunciado de esta actividad es el siguiente: "*Un tanque con forma de cono es llenado con agua a razón de 7* $\frac{p^3}{min}$ *, si la altura del tanque es de 12 pies, el radio de la base es de 6 pies, y el tanque posee un orificio en su parte inferior por el cual sale agua a una razón de 3* $\frac{p^3}{min}$ *, entonces responda:"* este enunciado va acompañado de unas preguntas que buscan nuevamente guiar al estudiante en el proceso de solución e inducirlo al razonamiento que debe utilizar para abordar situaciones de este tipo; para responder estas preguntas también contarán con la ayuda de un applet que se muestra en la figura 4.

Figura 4. Applet 2



En el applet encontramos tres deslizadores y una figura cónica, la cual muestra al estudiante qué ocurre con la cantidad de líquido en el cono a medida que pasa el tiempo; esta cantidad de líquido depende de la velocidad de entrada y salida que ellos pueden manipular con los deslizadores. Lo que esperamos que el estudiante logre con el desarrollo de esta actividad es que deduzca que la cantidad de líquido en tiempo t se puede expresar de la forma $C_l = (V_e - V_s)t$, que sería nuevamente un traspaso del registro lenguaje natural al algebraico con la ayuda del registro gráfico. A continuación presentaremos las preguntas que el estudiante debe responder y el ¿Por qué? de cada una de estas preguntas.

1. **¿Qué variables cambian a medida que cambia el tiempo?**

Esta pregunta busca que el estudiante inicie la actividad partiendo adecuadamente de la dependencia de las variables, nivel y volumen, donde esta última variable será relevante para desarrollar los puntos siguientes. Además, suponemos que si tiene claridad al elegir estas variables que dependen del tiempo utilizará adecuadamente la notación de Leibniz.

2. **¿Cuál es la expresión algebraica que describe la cantidad de agua que hay en el tanque en un tiempo *t*?**

Para responder esta pregunta es fundamental el apoyo visual del applet ya que este le permite observar cómo aumenta la cantidad de líquido mientras avanza el tiempo; además, cuenta con un cuadro de texto que le proporciona el valor de la cantidad de agua que hay en un momento determinado; con todas estas herramientas esperamos que el estudiante deduzca que la cantidad de líquido en cualquier instante de tiempo se puede expresar de la forma $C_l = (V_e - V_s)t$ donde C_l representa la cantidad de líquido, V_e y V_s, velocidad de entrada y salida respectivamente.

3. **¿Cuáles datos son pertinentes y cuáles no, para dar respuesta a la pregunta 2?**

En algunas ocasiones los estudiantes pierden tiempo, considerando información innecesaria para llegar a la solución del problema; con esta pregunta buscamos que el estudiante identifique qué tipo de información es relevante en un problema de llenado y vaciado de un recipiente, cuando queremos saber la cantidad de líquido que hay en un determinado instante de tiempo, esperamos que datos como la altura del tanque o el radio de la base se encuentren dentro de los datos no pertinentes para abordar el problema por parte de los estudiantes.

4. **¿Influye la forma del recipiente, al hallar la cantidad de líquido que hay en el tanque en cualquier instante de tiempo? ¿Por qué?**

El applet, y las preguntas anteriores deben ayudar a la conjetura de que independientemente de la forma y tamaño del recipiente la cantidad de líquido en un determinado instante de tiempo está dado por $C_l = (V_e - V_s)t$.

5. **Establezca una función que defina la cantidad de agua en un instante de tiempo para cualquier recipiente.**

Esta pregunta se realiza para verificar que el estudiante generalizó la expresión para cualquier tipo de recipiente.

6. **¿Qué expresión obtiene al derivar con respecto al tiempo la función establecida en el punto 5?**

La función que permite modelar un problema de mezclas es $\frac{dC_l}{dt} = V_e - V_s$

donde V_e y V_s son las velocidades de entrada y salida de la sustancia; en la situación abordada en esta actividad no se realizaron mezclas pero sí se realizó el proceso de entrada y salida de líquido en un recipiente el cual consideramos que es uno de los factores que el estudiante debe comprender para abordar un problema de mezclas.

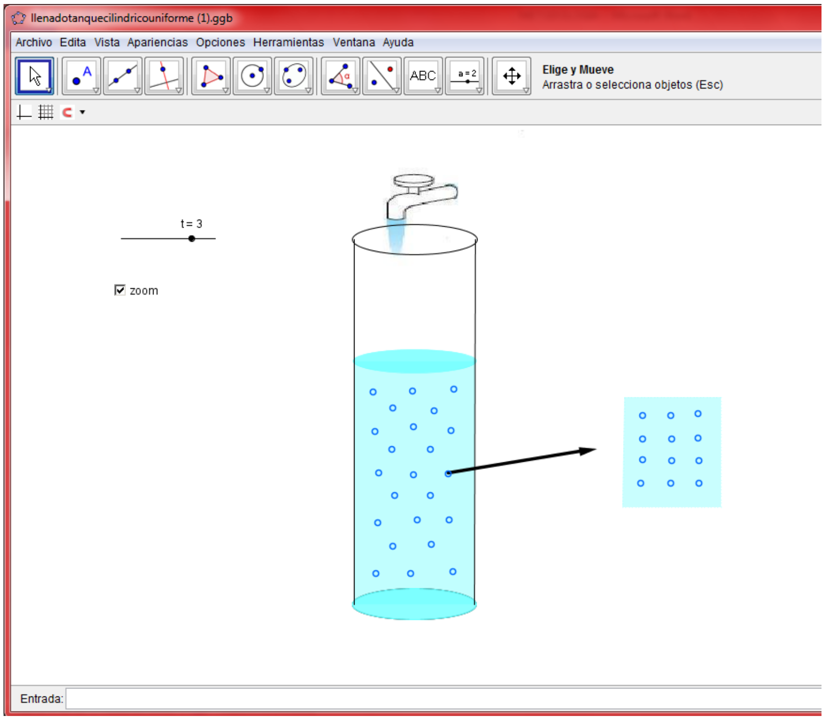
En esta situación la expresión $\frac{dC_l}{dt} = V_e - V_s$ a la que esperamos que llegue el estudiante representa la rapidez con la que cambia la cantidad de líquido en el recipiente, y esa debe ser la respuesta a esta pregunta.

5.3 TERCERA ACTIVIDAD

La tercera actividad está conformada por 3 enunciados que plantean situaciones presentadas en problemas de mezclas, en los que se espera que en relación con el trabajo realizado en las actividades 1 y 2 el estudiante se encuentre en condiciones de plantear la ecuación diferencial que permite modelarlos. En cada problema el estudiante encuentra unas preguntas que buscan orientar y organizar sus ideas con la ayuda de applets (figura 3, 4, 5) que permiten visualizar el comportamiento del problema, esperando que sirva de ayuda para plantear adecuadamente la ED. A continuación se presenta los 3 problemas y las preguntas orientadoras en cada uno de ellos.

5.3.1 Problema 1 A un tanque que contiene 300 galones de salmuera (es decir, agua en la que se ha disuelto cierta cantidad de libras de sal). Se vierte otra solución con una concentración de sal de 2 libras por galón, a una velocidad de 3 galones por minuto. Cuando la solución se mezcla bien en el tanque, se extrae al mismo ritmo que la solución de entrada.

Figura 5. Applet 3



1. **¿Cuáles son las variables de este modelo? Clasifícalas como dependientes e independientes.**

Se encuentra relacionada con las preguntas 2 y 1 de la primera y segunda parte de la actividad 2. Ya que consideramos necesario que el estudiante identifique cuáles son las variables y en función de quién deben estar, para que tenga éxito en el resultado final de esta actividad, que es plantear adecuadamente la ED.

2. **¿Qué sucede con el nivel y el volumen del líquido, en cualquier instante de tiempo?**

Esta pregunta busca enfocar la atención del estudiante en la variable cantidad de sustancia ya que en problemas en los que las velocidades de entrada y salida de líquido son iguales, la cantidad de líquido y el nivel permanecen constantes.

3. **¿Cómo cambia la variable dependiente en función de la variable independiente?**

La pregunta se encuentra relacionada con la pregunta 5 de la segunda parte de la actividad 2 en la que el estudiante debería expresar como respuesta $C_l = (V_e - V_s)t$.

4. **¿Qué cantidad de SAL entra por A, en cualquier momento t?**

Es necesario realizar este proceso de conversión debido a que el enunciado no da de forma explícita las velocidades de entrada y salida de la sustancia.

5. **¿Qué proceso debes realizar para responder: Qué cantidad de SAL sale del tanque en cualquier instante de tiempo? (ten en cuenta la casilla zoom)**

Generalmente, en un problema de mezclas en un recipiente tenemos disuelta una cantidad de sustancia la cual desconocemos y que además le agregamos más sustancia para mezclarla y sacarla del recipiente. La casilla zoom pretende mostrar que se debe dividir la cantidad de sustancia que se encuentra en el recipiente entre el volumen que en este tipo de problemas siempre es igual.

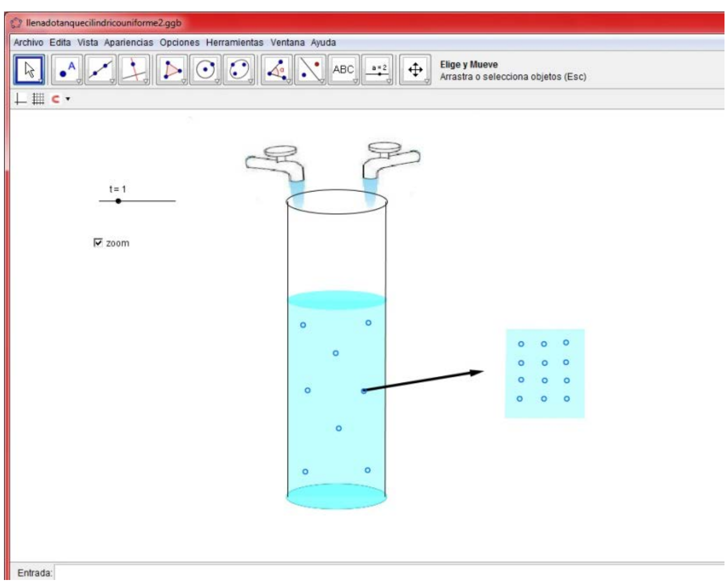
6. **¿Con qué velocidad cambia la cantidad de SAL en cualquier instante de tiempo?**

Desde la primera actividad se está trabajando el proceso de pasar del registro lenguaje natural al algebraico, con el propósito de que al abordar este tipo de problemas los estudiantes tengan herramientas para realizar el traspaso de registro.

5.3.2 Problema 2 Se considera un tanque que contiene azúcar y agua con los que se prepararán refrescos embotellados. Suponga que el tanque contiene 100 galones de líquido, la cantidad que fluye hacia adentro es la misma que fluye hacia afuera, pero siempre hay 100 galones en el tanque. El tanque se mantiene bien mezclado, por lo que la concentración de azúcar es uniforme en todo el tanque. El agua azucarada que contiene 5 cucharadas de azúcar por galón, entra al tanque a través del tubo A, a razón de 2 galones por minuto. El agua azucarada que contiene 10 cucharadas de azúcar por galón, entra al tanque a través del tubo B, a razón de 1 galón por minuto. El agua azucarada sale del tanque a través del tubo C a razón de 3 galones por minuto.

El applet 4 (figura 6) permite representar visualmente el enunciado de este problema, el cual difiere del problema 1, solo gráficamente ya que en esencia es un problema de mezclas en el que la velocidad de entrada y salida de líquido son iguales; por lo tanto, al igual que en el problema 1 el volumen permanece constante.

Figura 6. Applet 4.



La pregunta planteada en este problema que difiere de las realizadas en el problema 1 es la siguiente:

1. ¿Qué cantidad de azúcar entra en total al tanque en cualquier momento t?

Esta pregunta se plantea con el objetivo de que el estudiante perciba que la cantidad de agua y por ende de sustancia que entra al tanque es el resultado de la suma de las velocidades de entrada de sustancia por cada tubo.

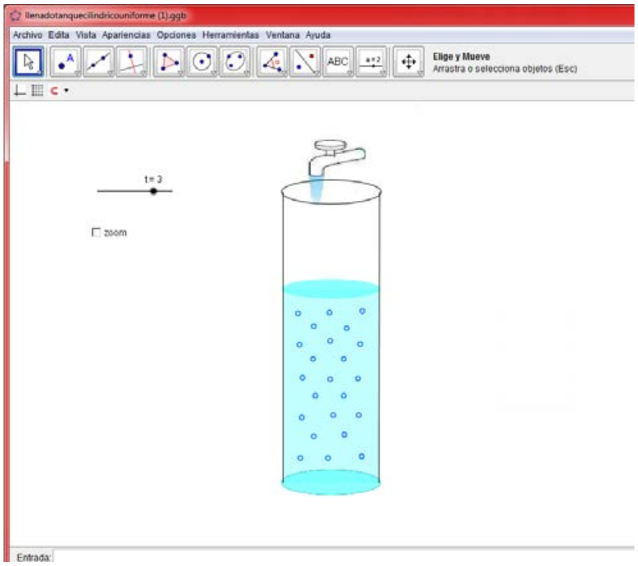
5.3.3 Problema 3 Un tanque grande de mezcla inicialmente contiene 200 galones de agua disuelta con 50 Lb de sal (salmuera). Otra solución de salmuera se inyecta en el tanque a una velocidad de 3 galones por minuto; en este flujo de entrada, la concentración de sal es de 2 libras por galón. Cuando la solución se mezcla bien en el tanque, se extrae a una velocidad de 2 galones por minuto. Si el tanque tiene tapa abierta y una capacidad total de 300 galones, responde:

1. En que tiempo se derramara el líquido.
2. Cuantas libras de sal habrá en el tanque al instante del derrame.
3. Grafique la solución en geogebra y responda: ¿Cuántas libras de sal hay en el tanque cuando $t \to \infty$? ¿Coincide con lo que usted creería sin haber hecho ningún proceso?

Este problema difiere de los problemas 1 y 2, y para su solución el estudiante debe hacer uso de todas las herramientas que se espera que la propuesta haya proporcionado con cada actividad, incluso con los problemas anteriores, dichas herramientas son cambio de registro lenguaje natural al algebraico, cambio de representación ejecutable al registro algebraico, interpretación de la variación presente en un problema de mezclas, razonamiento para abordar cualquiera de las tres clases de problemas de mezclas mencionadas en 4.2.4

El applet que proporciona la representación visual del problema permite observar que a medida que avanza el tiempo el volumen de líquido en el recipiente aumenta, lo cual induce a pensar que en algún instante el líquido se derrama, conservando la representación de distribución uniforme de la sustancia en el líquido.

Figura 7. Applet 5.



6. IMPLEMENTACIÓN

La propuesta se implementó a un grupo de 21 estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas inscritos en la asignatura de ED en segundo semestre del año 2012. El lugar donde se implementó la propuesta fue la sala de informática de la facultad tecnológica la cual cuenta con 25 computadores, todos con conexión a internet, y el java instalado adecuado para la reproducción de los applets. El tiempo que duro la implementación de la propuesta fue de dos días de clase resaltando que en cada día de clase el trabajo fue individual y durante dos horas.

El primer día de clase se trabajó con la primera y segunda actividad. A cada estudiante se le entrego la guía de actividades en forma impresa, y también la descargaban en formato pdf desde la página **luisjaimes.jimdo.com**, para observar las imágenes con mejor color y nitidez. La primera actividad se inició con la lectura del enunciado que estaba escrito después de los objetivos y una intervención del docente de la asignatura, donde se habló de la derivada como razón de cambio.

Posteriormente se inició la lectura y solución de la primera actividad propuesta, la cual fue desarrollada un tiempo aproximado de 10 min, resaltando que durante el desarrollo de esta los estudiantes no plantearon ningún tipo de inquietudes.

Terminada la actividad anterior se procedió con la lectura y desarrollo de la primera parte de la segunda actividad; para esto, los estudiantes descargaron el applet 1 subido a la página; se resalta que este applet al ser descargado no se mostró como se tenía diseñado, por lo que fue necesario pasar por cada uno de los equipos y hacer una pequeña modificación para lograr el efecto visual esperado. Seguido de la descarga los estudiantes comenzaron a manipular el applet y relacionarlo con la información dada en la situación 1; en ese momento se pidió a los estudiantes leer y responder las preguntas de la actividad. Se invirtió la mayor parte del tiempo en las preguntas 3 y 4, ya que en las demás, expresaban las repuestas con facilidad resaltando la ayuda del applet.

El proceso de implementación finalizó el primer día con la segunda parte de la segunda actividad en la que nuevamente se realizó el proceso de descarga del applet 2 subido a la página y la relación con la información dada en la situación 2, pasando después a la lectura y repuesta de las preguntas formuladas para esa situación; cuando los estudiantes se dispusieron a responder la pregunta 2 no llegaron a la respuesta con la facilidad que se esperaba, aún teniendo la ayuda del applet; por lo tanto, fue necesario la intervención del docente donde se mencionaron algunas analogías relacionadas con el enunciado, para que los estudiantes continuaran con el desarrollo de la actividad.

En el segundo día de clase se implementó la tercera actividad la cual consta de tres situaciones asociadas a problemas de mezclas; para cada situación se realiza la descarga del applet 3 subido a la página web, el cual proporciona un efecto visual en relación con la información dada, pasando después a la lectura y repuesta de las preguntas planteadas para cada una de ellas. Como se esperaba la pregunta en la que los estudiantes gastaron más tiempo y generó mayor dificultad según lo observado por el docente fue la pregunta 4 de la situación 1, en donde fue necesaria la intervención del docente nuevamente realizando analogías relacionadas con el razonamiento que se puede aplicar para abordar este tipo de problemas. Después de esta intervención los estudiantes continuaron desarrollando las preguntas faltantes planteadas para la primera situación.

La segunda situación fue leída y desarrollada con menor tiempo que la anterior por parte de los estudiantes ya que varía muy poco con respecto a la primera.

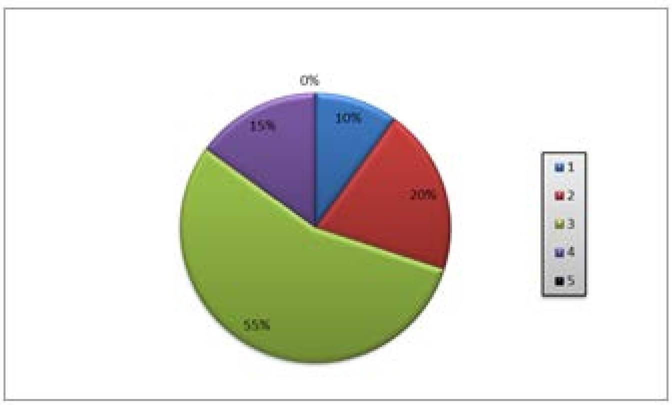
Por último se abordó la situación 3, en la que el estudiante debía plantear de forma correcta la ED que permite modelar el problema de mezclas, resolverla, graficar e interpretar la solución; al finalizar el tiempo de la clase solo se logró realizar el proceso de solución hasta la segunda pregunta quedando pendiente el desarrollo de la gráfica e interpretación de la solución.

7. RESULTADOS

7.1 Actividad 1

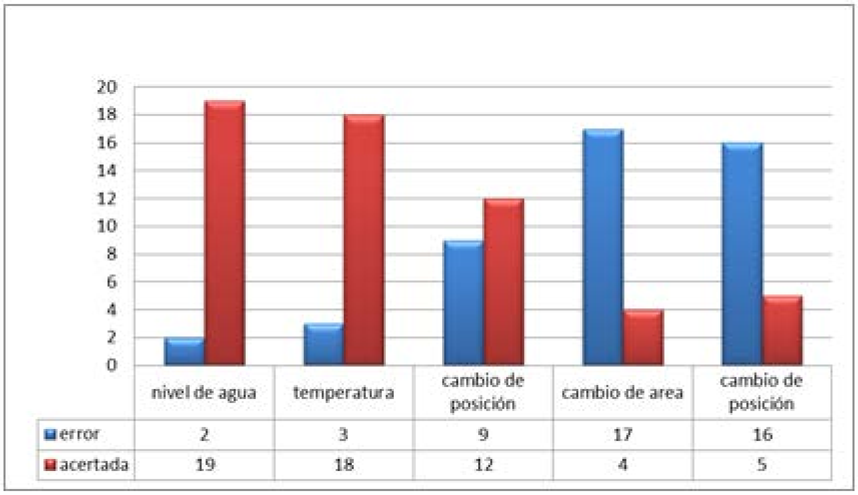
En el diagrama 1 se observa que el 70% de los estudiantes obtuvieron un resultado aceptable al realizar el traspaso del registro lenguaje natural al registro algebraico en al menos 3 de las 5 situaciones, el 30% restante solo tuvo éxito a lo mas en 2 situaciones al pasar de un registro a otro, resaltando que ningún estudiante realizó adecuadamente el traspaso de registro en todas las situaciones.

Diagrama 1. Número de preguntas acertadas.



El diagrama 2 permite observar que el 90% y 86% de los estudiantes obtuvieron éxito al realizar al traspaso de registro en las situaciones 1 y 2 respectivamente de la primera actividad. Los índices más altos de fracaso al realizar el traspaso de registro se presentaron en las situaciones 4 y 5 con 81% y 76%, respectivamente. Estos porcentajes nos muestran que los estudiantes identificaron razones de cambio en situaciones donde solo se aprecia una variable que depende del tiempo, y por el contrario presentaron dificultades en situaciones donde se presenta más de una variable dependiente no necesariamente del tiempo.

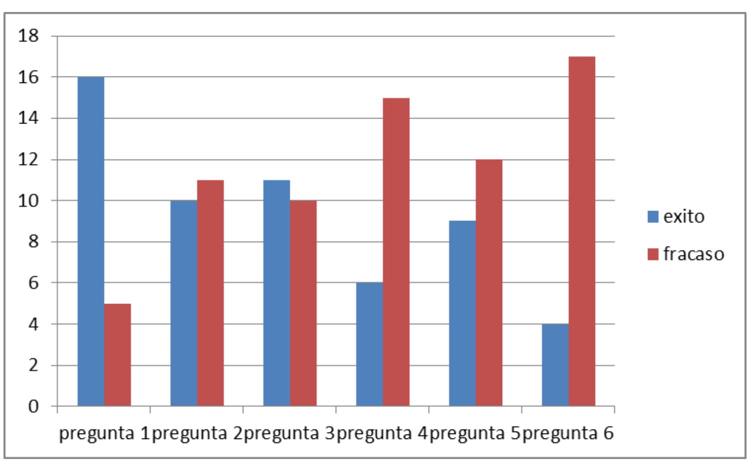
Diagrama 2. Desempeño en la actividad 1.



7.2 Actividad 2

7.2.1 **Primera parte** El diagrama 3 muestra que el 76% de los estudiantes obtuvo éxito en la primera pregunta, la cual se relacionaba con el trabajo hecho en la actividad 1, es decir que el porcentaje mencionado de estudiantes obtuvo éxito al pasar del registro lenguaje natural al registro gráfico.

Diagrama 3. Éxito y fracaso en la primera parte de la actividad 2.



En la pregunta número 2 el 48% de los estudiantes respondió acertadamente, y el porcentaje de estudiantes que fracaso cometió en algunos casos los mismos errores, los cuales presentamos en la siguiente tabla:

Tabla 1.

Error asociado a:	Incidencia
Dependencia e independencia de las variables	3
Identificación de las variables volumen ó nivel	4
Expresó constantes o parámetros como variables	2
Expresó los diferenciales como las variables del enunciado	1

En la pregunta número 3 el 52% de los estudiantes obtuvo éxito al expresar la función que relacionaba las variables como $\boldsymbol{V = \pi r^2 h}$, en los errores cometidos por los estudiantes que fracasaron están:

Tabla 2.

Error asociado a:	Incidencia
Multiplicaron la variable tiempo por $\boldsymbol{\pi r^2 h}$	3
Escribieron una derivada	2

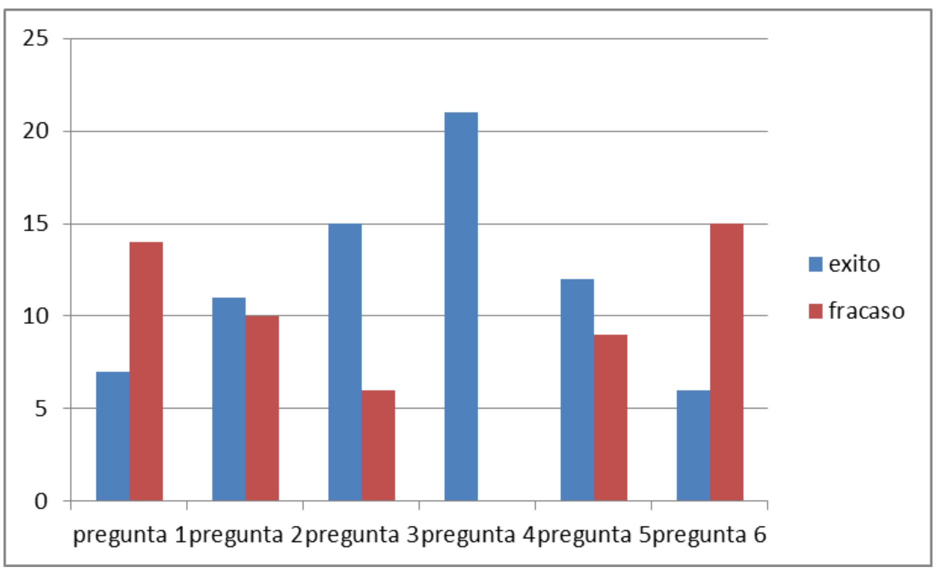
En la pregunta número 4 el porcentaje de fracaso es de 71%, donde se identificó que un 29% de los estudiantes fracasaron porque no manejan la derivación implícita, además según lo observado por el docente los estudiantes no derivan una función con respecto a una variable que no está de forma explícita en la función, ejemplo:

Para algunos estudiantes no es posible derivar la expresión $V = \pi r^2 h$ con respecto al tiempo ya que la variable t no se encuentra en la expresión.

Los porcentajes de fracaso de las preguntas 5 y 6 fueron de 57% y 81% respectivamente pero no fue posible realizar ninguna identificación de errores comunes, debido a que en la mayoría de los casos no respondieron.

7.2.2 **Segunda parte** El diagrama 4 permite observar el éxito del 100% obtenido en la pregunta 4, con lo que consideramos que la implementación del software permite identificar o descartar condiciones que influyen al abordar un problema de mezclas.

Diagrama 4. Éxito y fracaso en la segunda parte de la actividad 2.



En las preguntas 1 y 6 consideramos un elevado porcentaje de fracaso que fue del 67% y 71% respectivamente, dentro de este porcentaje de fracaso se resaltan errores cometidos por los estudiantes en repetidas ocasiones, que mostramos en las tablas 1 y 2.

Tabla 3.

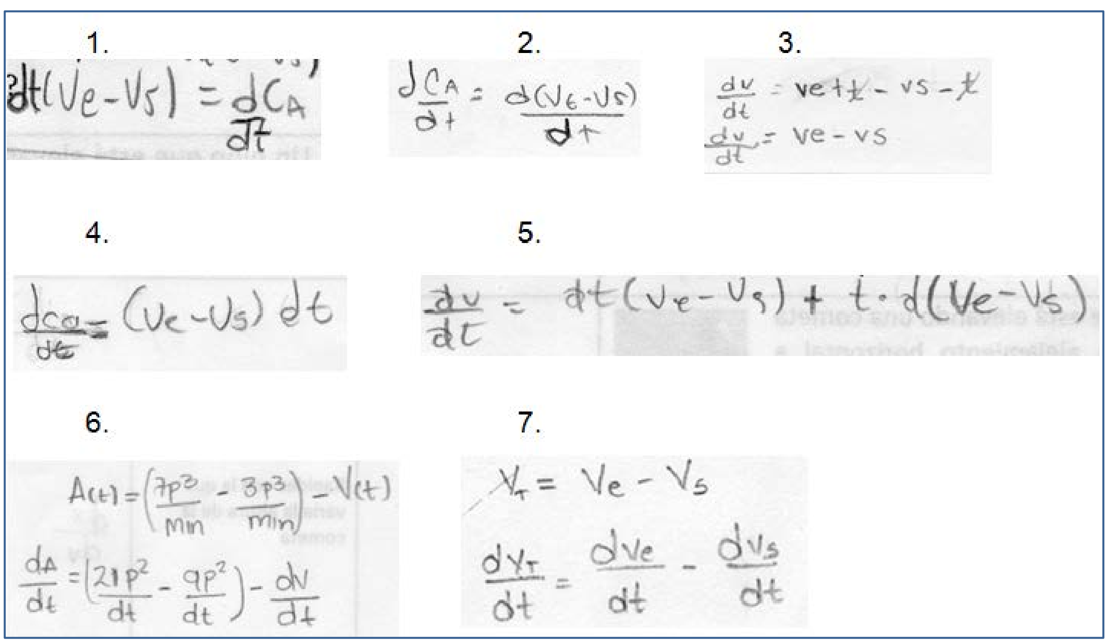
Pregunta 1	
Error asociado a:	Incidencia
Identificación de Dependencia de las variables volumen o nivel	5
Velocidades de entrada y salida dependientes del tiempo.	6

Tabla 4.

Pregunta 6	
Error asociado a:	Incidencia
Deficiencias en el proceso de derivación implícita	11

La figura 8 muestra algunos de los errores cometidos por los estudiantes en el momento de derivar la expresión dada como respuesta a la pregunta 6

Figura 8. Errores cometidos por los estudiantes al resolver la pregunta 6.



En las preguntas 2, 3 y 5, se obtiene un porcentaje de éxito de 52%,71% y 57%, respectivamente; los errores más comunes de fracaso lo presentamos en las tablas 1, 2 y 3.

Tabla 5.

Pregunta 2	
Error asociado a:	Incidencia
Expresan la cantidad de agua como una razón o razón de cambio	4
No tuvieron en cuenta el tiempo	2

La figura 9 permite observar algunos de los errores mencionados en la tabla 4:

Figura 9. Errores cometidos por los estudiantes al resolver la pregunta 2.

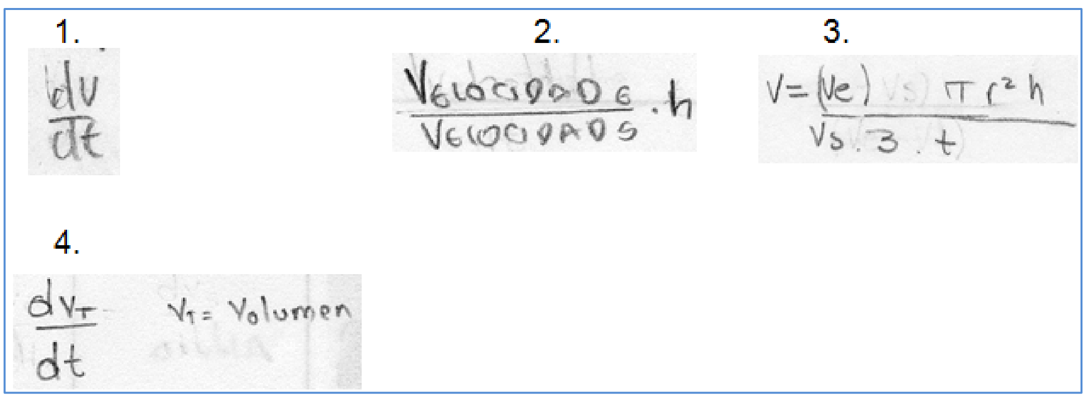


Tabla 6.

Pregunta 3	
Error asociado a:	Incidencia
Inclusión o exclusión de pertinencia de algunas variables	6

La figura permite observar algunos de los errores mencionados en la tabla 5:

Figura 10. Errores cometidos por los estudiantes al resolver la pregunta 3.

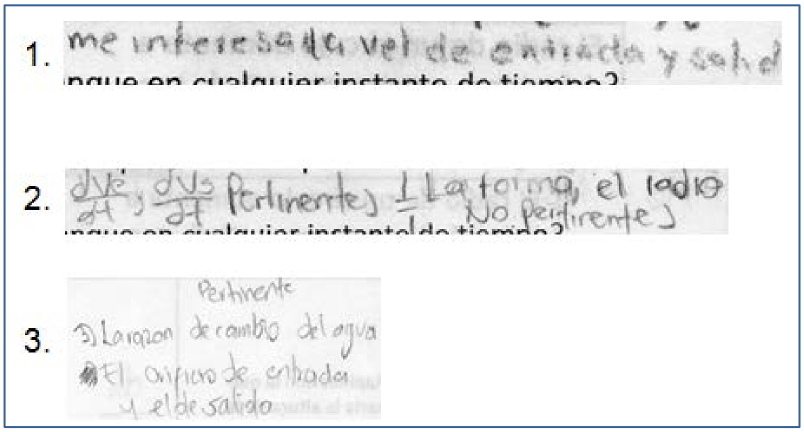
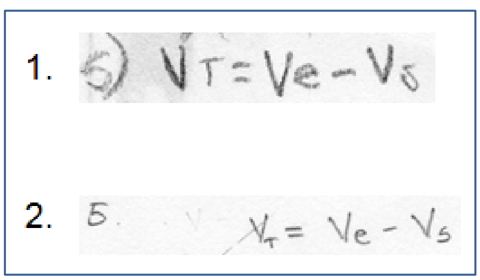


Tabla 7.

Pregunta 5	
Error asociado a:	Incidencia
Falto multiplicar por el tiempo	2

Figura 11. Errores cometidos por los estudiantes al resolver la pregunta 5.

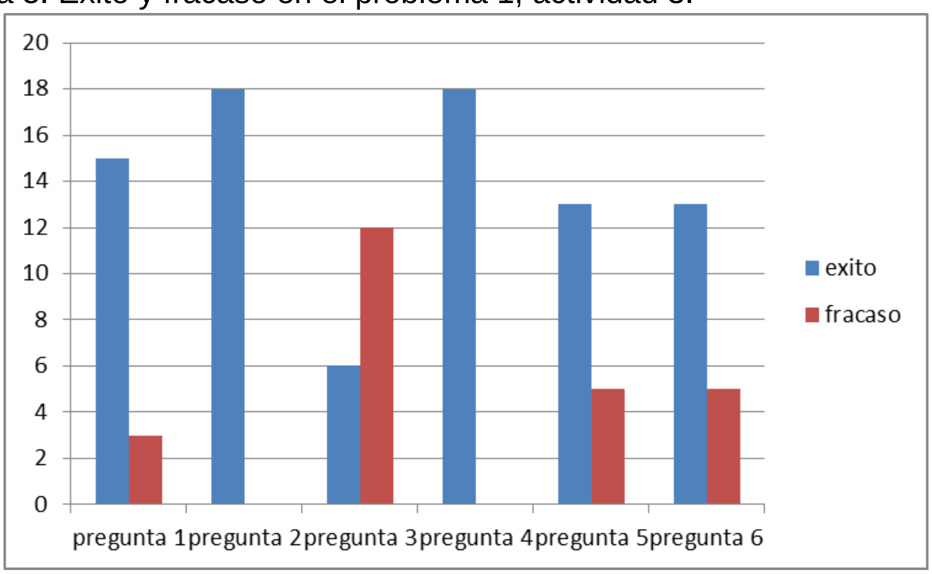


7.3 Actividad 3

7.3.1 **Problema 1** Los resultados de la implementación muestran un desempeño aceptable por parte de los estudiantes; el diagrama 5 muestra el desempeño en cada una de las preguntas; en términos porcentuales, nos referimos a los estudiantes que respondieron de acuerdo a lo esperado con:

- 83% en la pregunta 1
- 100% en la pregunta 2
- 100% en la pregunta 4
- 72% en la pregunta 5 y 6

Diagrama 5. Éxito y fracaso en el problema 1, actividad 3.

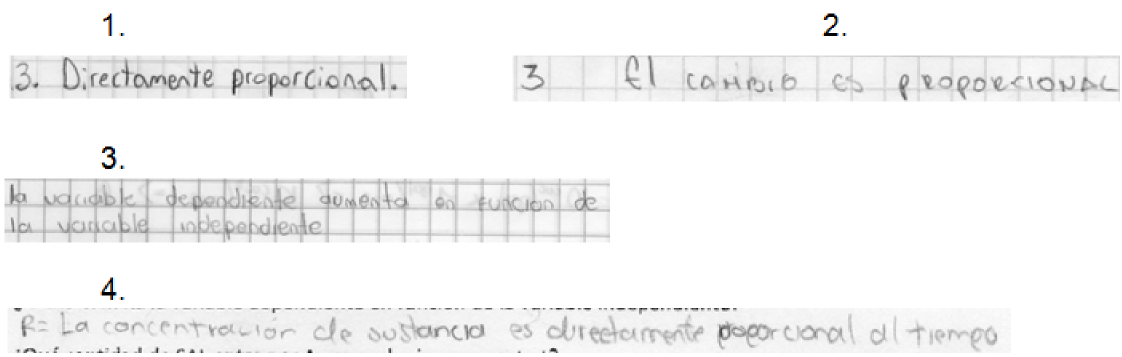


De otra parte el gráfico también permite apreciar que en la pregunta 3 la respuesta dada por el 67% de los estudiantes no corresponde a la esperada en el momento de plantear la actividad, pero resaltamos que la respuesta difiere de la esperada solo por el registro de representación en el que se encuentra, ya que se esperaba que estuviese dada en el registro algebraico, pero como muestran la tabla 7 y la figura 12, fue expresada en el registro lenguaje natural.

Tabla 8.

Pregunta 3	
Error asociado a:	Incidencia
Respuesta expresada en el registro lenguaje natural	7
Expresar la función como una razón de cambio	3

Figura 12. Errores cometidos por los estudiantes al resolver la pregunta 3, act. 3.

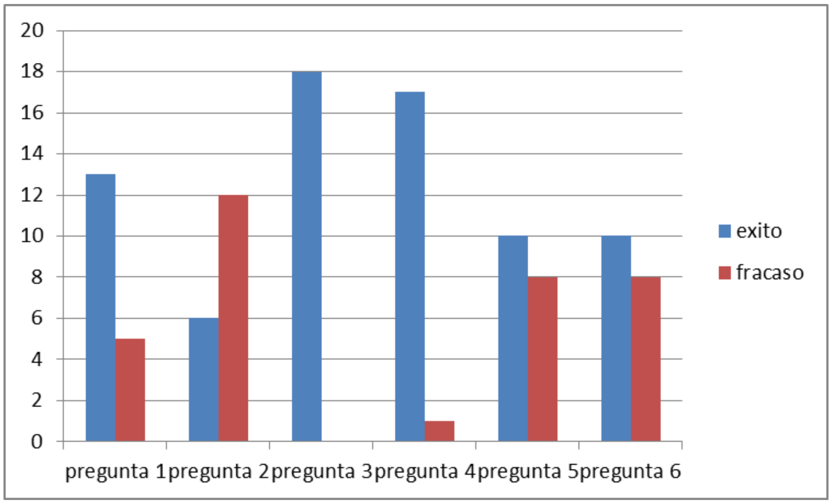


7.3.2 **Problema 2** Los porcentajes de éxito obtenidos por los estudiantes en el problema 2 se asemejan a los obtenidos en el problema 1; el diagrama 6 permite deducir los siguientes porcentajes:

- 72% en la pregunta 1
- 33% en la pregunta 2
- 100% en la pregunta 3
- 94% en la pregunta 4
- 56% en las preguntas 5 y6

Diagrama 6. Éxito y fracaso en el problema 2, actividad 3.

.



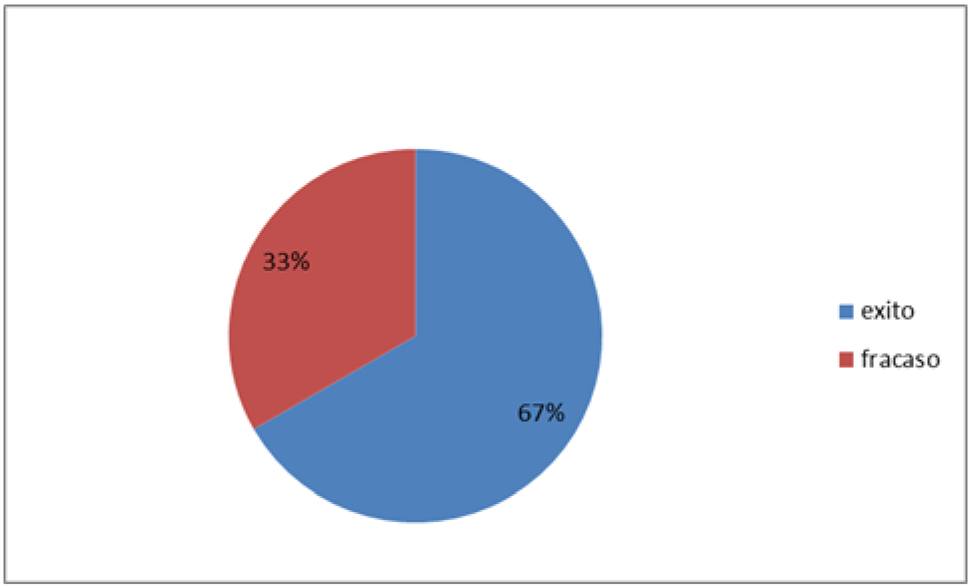
Lo anterior muestra que los estudiantes tienen éxito al convertir unidades de medida y a pesar de cambiar las condiciones de llenado del tanque, interpretaron la velocidad de entrada de líquido como la suma de las velocidades de entrada en cada tuvo. Los porcentajes más altos de fracaso se presentaron en la pregunta 2 con un 67%, la cual está planteada igual que la pregunta 3 del problema 1, y al igual que ésta los estudiantes expresaron la respuesta en el registro de representación lenguaje natural y se esperaba que estuviese dada en el registro algebraico, la tabla 8 muestra la coincidencia en el número de errores asociados.

Tabla 9.

Pregunta 3	
Error asociado a:	Incidencia
Respuesta expresada en el registro lenguaje natural	9

7.3.3 **Problema 3** Tal como muestra el diagrama 7, el 67% de los estudiantes plantearon y resolvieron la ecuación diferencial del problema 3, obteniendo éxito en el traspaso de registro lenguaje natural al algebraico las preguntas planteadas en este problema no coincidían con las de los problemas 1 y 2, pero se esperaba que estas sirvieran como herramienta para que el estudiante tuviese éxito al plantear la ecuación que modelaba el problema.

Diagrama 7. Éxito y fracaso en el problema 3, actividad 3.



8. PROPUESTA FINAL

De acuerdo a los resultados obtenidos en la implementación, se han modificado ciertas preguntas planteadas en los enunciados de la propuesta, esperando que esto minimice los porcentajes de fracaso que se presentaron. Tomando como referencia los porcentajes más elevados de fracaso que se mencionaron en el capítulo anterior, según lo mencionado la actividad se modificó de la siguiente forma:

- Se eliminan de la actividad 1 los enunciados en los que se presenta más de una variable y se sustituyen por ejemplos que permiten observar a los estudiantes cómo se dan estas razones de cambio, y que no siempre dependen del tiempo. Esto debido a que se considera que en el curso de ecuaciones diferenciales, el manejo de la derivada como razón de cambio es un prerrequisito; por lo tanto, no corresponde al espacio del curso dedicar más tiempo del que se plantea en la propuesta para abordar el tema.

- En la primera parte de la actividad 2 se cambia el enunciado de la pregunta 2, por el siguiente: *De acuerdo a lo observado en el applet 1, ¿Qué está variando y qué permanece constante?, ¿Cuáles de estas variables son dependientes o independientes?*

- Las preguntas 3 y 4 de la primera parte de la actividad 2 se reducen a una sola quedando el siguiente enunciado: *Tomando como referencia la fórmula del volumen del cilindro realiza el proceso necesario para dar una expresión algebraica que indique "qué tan rápido sube el nivel de líquido".*

- En la segunda parte de la actividad 2 se cambia el enunciado de la pregunta 1 por el siguiente: *De acuerdo a lo observado en el applet 1, ¿Qué está variando y que permanece constante?, ¿Cuáles de estas variables son dependientes o independientes?*

- La pregunta 2 de la segunda parte de la actividad 2 se modifica de la siguiente forma: *Elabore una tabla con dos columnas (tiempo y volumen) por seis filas y llénela con la siguiente información: ¿Cuántos pies cúbicos hay en el cono después de 1, 2, 3, 4 y 5 minutos?, ¿Qué función permite encontrar el volumen que hay en el cono en cualquier instante de tiempo?*

- Se elimina la pregunta 5, quedando en su lugar la pregunta 6 la cual se ajusta de la siguiente forma: *¿Qué expresión obtiene al derivar con respecto al tiempo la función establecida en el punto 2?*

La propuesta final y la que fue modificada se encuentran como anexos al final del documento.

9. CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados obtenidos al implementar la propuesta, se supone que en situaciones donde solo se presentan dos variables los estudiantes tienen éxito al realizar el traspaso del registro lenguaje natural al algebraico, esto puede deberse a que según lo mencionado por R. Duval acerca de la teoría de las representaciones semióticas serían representaciones congruentes de registros; por el contrario, en situaciones donde se encuentra más de una variable dependiente y no necesariamente del tiempo, se presenta un fenómeno de no congruencia; por lo tanto, hay un mayor porcentaje de fracaso. Debido a esto, se ajustó la propuesta de tal forma que las situaciones en las que los estudiantes fracasan al realizar el traspaso de registro quedaron como ejemplos, esperando que les permita ampliar las representaciones semióticas dadas en los registros de representación trabajados en la actividad 1. De igual manera, estas actividades, según los resultados obtenidos, es posible que sirvan como herramienta para identificar datos explícitos e implícitos en un enunciado donde se presenta una razón de cambio.

Se cree que la implementación del software permite identificar o descartar condiciones que influyen al abordar un problema de mezclas, pero algunas deficiencias presentadas impiden que los estudiantes tengan éxito en el traspaso de registros, como por ejemplo las dificultades generalizadas en el manejo de los diferenciales por parte de algunos estudiantes; esto sumado a las falencias en el proceso de derivación implícita, dentro de las cuales como se menciona en los resultados, los estudiantes no derivan una función con respecto a una variable que no está de forma explícita en la función.

Las dificultades encontradas en los problemas 1 y 2 de la actividad 3 muestran que los estudiantes expresaron la respuesta en el registro lenguaje natural, cuando se esperaba que ésta se diera en el registro algebraico, coincidiendo con Guzmán R. (1998) quien menciona que *las "respuestas se quedan en el registro en el cual está planteada la pregunta*". En esta actividad se resalta que los estudiantes tienen éxito al convertir unidades de medida en el momento que se realiza el proceso de solución de un problema de mezclas, y que más de la mitad de los estudiantes que realizaron las tres actividades de la propuesta al final lograron plantear adecuadamente la ED que permitía modelar el problema de mezclas dado.

Por lo tanto, se considera que con las modificaciones que se realizaron de acuerdo a la implementación, la propuesta presentada finalmente proporciona herramientas que permiten construir la ED que se ajusta al problema dado.

RECOMENDACIONES

Es pertinente que en la introducción al curso de ED se considere un espacio dedicado a la derivación implícita, y que en lo posible en el desarrollo del curso se maneje la notación de Leibniz ya que es una herramienta adecuada al plantear la ED que permite modelar un problema de mezclas dado.

Dar continuidad a este trabajo enfocándolo no solo a los problemas de mezclas, ya que problemas de ley de enfriamiento y calentamiento de Newton, crecimiento y decrecimiento, sistemas masa resorte, etc. pueden ser modelados con la ayuda del software geogebra, ampliando los traspasos de registro lenguaje natural al algebraico mediante representaciones ejecutables.

Implementar las actividades propuestas con el objetivo evaluar el impacto causado en el aprendizaje de las ED, y a su vez explorar alternativas diferentes al método de enseñanza tradicional.

BIBLIOGRAFIA

De las Fuentes Maximiliano, Arcos L. José & Navarro R. Carlos. (2010). Impacto en las Competencias Matemáticas de los Estudiantes de Ecuaciones Diferenciales a Partir de una Estrategia Didáctica que Incorpora la Calculadora. Formación Universitaria, Vol. 3(3), 33-44.

Dullius, M. M. (2009). Enseñanza y aprendizaje en ED con abordaje gráfico, numérico y analítico. *Tesis Doctoral* . Burgos, España.

Duval, Raymond (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la RSME, Vol. 9.1, 143-168.

Guzmán, Ismenia (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. Relime, Vol. 1, Núm. 1, 5 – 21.

MEN, (2004). Pensamiento Variacional y Tecnologías computacionales.

Morales L. Yuri & Salas H. Oscar. (2010). Incorporación de la tecnologia para la enseñanza y aprendizaje de las ED ordinarias. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,6* , 155-172.

Nápoles Valdés, J. E., González Thomas, A., Brundo, J. M., Genes, F., & Basabilbaso, F. (2004). El enfoque histórico problémico en la enseñanza de la matemática para ciencias técnicas: el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Acta Scientiae,6* , 41-59

Lupiañez, J.L. (2000). Nuevos Acercamientos a la Historia de la Matemática a través de la Calculadora TI-92, Universidad de Granada, Granada.

Swokowski W. Earl. (1989). Cálculo con Geometría Analítica, Segunda Edición, Editorial Iberoaméricana.

Zill Dennis & Cullen Michael. (2008). Matematicas avanzadas para ingenieria, vol 1. Ecuaciones diferenciales Tercera Edición, Editorial McGraw-Hill.

ANEXO A

(Propuesta Inicial)

TALLER DE ECUACIONES DIFERENCIALES
MEZCLAS

Objetivos:

- Identificar razones de cambio en diferentes situaciones reales
- Realizar cambios de representación en los registros gráficos, algebraico y lengua natural, con el objeto razón de cambio
- Trasladar situaciones dadas en un lenguaje natural a un lenguaje matemático.
- Proponer la ED que se ajusta a los problemas de mezclas, resolverla e interpretar su solución.

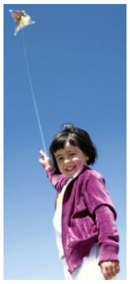
Recuerda que: La derivada expresa el cambio instantáneo que experimenta una variable con respecto a otra, para una función $y = f(x)$, se podría obtener la derivada o razón de cambio de las variables "x" y "y" con respecto al tiempo "t", es decir: $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dx}{dt}$

ACTIVIDAD 1

Exprese las siguientes situaciones usando lenguaje matemático:

Contexto	Variable dependiente	Variable independiente	Lenguaje natural	Expresión algebraica
Cuando llenas un vaso con gaseosa, ¿qué tan rápido cambia el nivel de líquido al llenar el vaso? 			**Rapidez** con la que varía el nivel del líquido al llenar el vaso	$\frac{dh}{dt}$

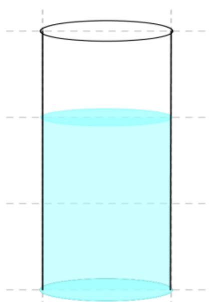
Un pollo es sacado del horno, y colocado sobre la mesa  ¿con qué rapidez se enfría?			**Rapidez del cambio** de la temperatura al sacar el pollo del horno	
Como cambia el vértice superior de una montaña de arena de forma triangular  generado al vaciar una volqueta.			Rapidez con la que cambia la posición del vértice, superior de una montaña de arena	
El radio de un círculo aumenta a velocidad constante ¿Qué tan rápido aumenta 			Razón de cambio del área de un circulo	

Un niño que está elevando una cometa observa su alejamiento horizontal a medida que su cuerda se va soltando (suponga que la cuerda se mantiene recta) ¿Cómo varia la altura de la cometa? 			Variación de la altura de la cometa	

ACTIVIDAD 2

Primera Parte

¿Qué expresión algebraica describe la rapidez con la que sube el nivel **n** de líquido en un tanque cilíndrico vertical de radio **r**, si se llena a una razón de 3 m^3/min?



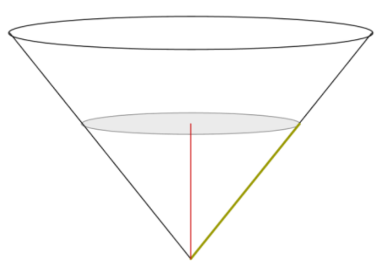
Ingrese a la página luisjaimes.jimdo.com y busque la opción U distrital > Ecuaciones Diferenciales > Applets > Applet 1

En el applet 1 mueva el deslizador "t" y conteste lo siguiente:

1. ¿Cómo interpreta la frase "*¿Qué tan rápido sube el nivel de líquido?*", en términos matemáticos?
2. ¿Qué variables y parámetros puede identificar? ¿Cuáles variables son dependientes y cuales son independientes?
3. Escribe una función que relacione las variables y parámetros encontrados en el punto anterior.
4. Encuentra la expresión que permite identificar la rapidez con la que sube el nivel del líquido con respecto al tiempo.
5. ¿Qué información del enunciado puede reemplazar en la ecuación que obtiene?
6. Con lo desarrollado en los puntos anteriores ¿puede dar respuesta a la pregunta formulada en la situación 1?

Segunda Parte

Un tanque con forma de cono es llenado con agua a razón de 7 $\frac{p^3}{min}$, si la altura del tanque es de 12 pies, el radio de la base es de 6 pies, y el tanque posee un orificio en su parte inferior por el cual sale agua a una razón de 3 $\frac{p^3}{min}$, entonces responda:



Ingrese a la página luisjaimes.jimdo.com y busca la opción U distrital > Ecuaciones Diferenciales > Applets > Applet 2

En el applet 2, mueva el deslizador "t", V_e, V_s, y conteste lo siguiente:

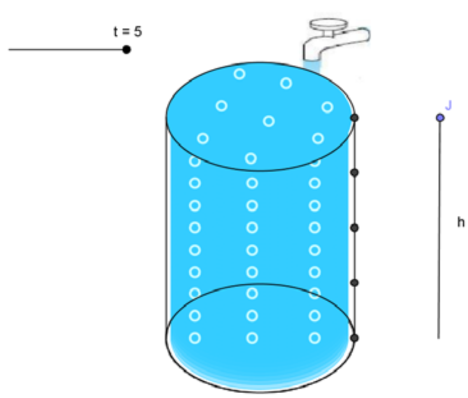
1. ¿Qué variables cambian a medida que cambia el tiempo?
2. ¿Cuál es la expresión algebraica que describe la cantidad de agua que hay en el tanque en un tiempo *t*?
3. ¿Cuáles datos son pertinentes y cuáles no, para dar respuesta a la pregunta 2?
4. ¿Influye la forma del recipiente, al hallar la cantidad de líquido que hay en el tanque en cualquier instante de tiempo? ¿Por qué?
5. Establezca una función que defina la cantidad de agua en un instante de tiempo para cualquier recipiente.
6. ¿Qué expresión obtiene al derivar con respecto al tiempo la función establecida en el punto 5?

ACTIVIDAD 3

MEZCLA EN UN TANQUE.

Problema 1. Rapidez de entrada = Rapidez de salida

A un tanque que contiene 300 galones de salmuera (es decir, agua en la que se ha disuelto cierta cantidad de libras de sal). Se vierte otra solución con una concentración de sal de 2 libras por galón, a una velocidad de 3 galones por minuto. Cuando la solución se mezcla bien en el tanque, se extrae al mismo ritmo que la solución de entrada.



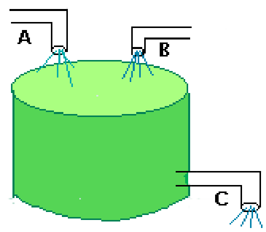
Ingresa a la página luisjaimes.jimdo.com y busca la opción U distrital > Ecuaciones Diferenciales > Applets > Applet 3

En el applet 3 debes mover el deslizador "t" y contestar lo siguiente:

1. ¿Cuáles son las variables de este modelo? Clasifícalas como dependientes e independientes.
2. ¿Qué sucede con el nivel y el volumen del líquido, en cualquier instante de tiempo?
3. ¿Cómo cambia la variable dependiente en función de la variable independiente?
4. ¿Qué cantidad de SAL entra por A, en cualquier momento t?
5. ¿Qué proceso debes realizar para responder: Qué cantidad de SAL sale del tanque en cualquier instante de tiempo? (ten en cuenta la casilla zoom)
6. ¿Con qué velocidad cambia la cantidad de SAL en cualquier instante de tiempo?

Problema 2.

Consideremos un gran tanque que contiene azúcar y agua con los que se prepararán refrescos embotellados. Suponga que el tanque contiene 100 galones de líquido, la cantidad que fluye hacia adentro es la misma que fluye hacia afuera, pero siempre hay 100 galones en el tanque. El tanque se mantiene bien mezclado, por lo que la concentración de azúcar es uniforme en todo el tanque. El agua azucarada que contiene 5 cucharadas de azúcar por galón, entra al tanque a través del tubo A, a razón de 2 galones por minuto. El agua azucarada que contiene 10 cucharadas de azúcar por galón, entra al tanque a través del tubo B, a razón de 1 galón por minuto. El agua azucarada sale del tanque a través del tubo C a razón de 3 galones por minuto.



1. ¿Cuáles son las variables de este modelo? Clasifícalas como dependientes e independientes.
2. ¿Cómo cambia la variable dependiente en función de la variable independiente?
3. ¿Qué cantidad de azúcar entra por A y por B?
4. ¿Qué cantidad de azúcar entra en total al tanque en cualquier momento t?
5. ¿Qué cantidad de azúcar sale del tanque en cualquier instante de tiempo?
6. ¿Con qué velocidad cambia la cantidad de sustancia en cualquier instante de tiempo?

Problema 3. Rapidez de entrada > Rapidez de salida

Supongamos que un tanque grande de mezcla contiene inicialmente 200 galones de agua disuelta con 50 lb de sal (salmuera). Otra solución de salmuera se inyecta en el tanque grande a una velocidad de 3 galones por minuto; en este flujo de entrada, la concentración de sal es de 2 libras por galón. Cuando la solución se mezcla bien en el tanque, se extrae a una velocidad de 2 galones por minuto. Si el tanque tiene tapa abierta y una capacidad total de 300 galones, responde:

1. En qué tiempo se derramará el liquido
2. Cuántas libras de sal habrá en el tanque al instante del derrame

3. Grafique la solución en geogebra y responda: ¿Cuántas libras de sal hay en el tanque cuando $t \to \infty$ ¿coincide con lo que usted creería sin haber hecho ningún proceso?

ANEXO B
(Propuesta Final)

TALLER DE ECUACIONES DIFERENCIALES
MEZCLAS

Objetivos:

- Identificar razones de cambio en diferentes situaciones reales
- Realizar cambios de representación en los registros gráficos, algebraico y lengua natural, con el objeto razón de cambio
- Trasladar situaciones dadas en un lenguaje natural a un lenguaje matemático.
- Proponer la ED que se ajusta a los problemas de mezclas, resolverla e interpretar su solución.

ACTIVIDAD 1

Recuerda que: La derivada expresa el cambio instantáneo que experimenta una variable con respecto a otra, para una función $y = f(x)$, se podría obtener la derivada o razón de cambio de las variables "x" y "y" con respecto al tiempo "t", es decir: $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dx}{dt}$

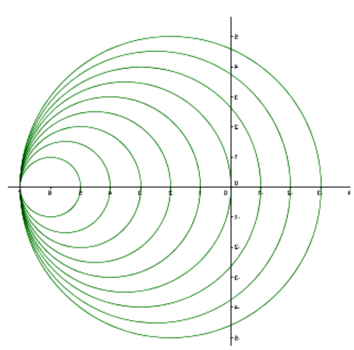
Exprese las siguientes situaciones usando lenguaje matemático:

Contexto	Variable dependiente	Variable independiente	Lenguaje natural	Expresión algebraica
Cuando llenas un vaso con gaseosa,  ¿qué tan rápido cambia el nivel de líquido al llenar el			Rapidez con la que varía el nivel del líquido al llenar el vaso	$\frac{dh}{dt}$

vaso?				
Un pollo es  sacado del horno, y colocado sobre la mesa ¿con qué rapidez se enfría?			Rapidez del cambio de la temperatura al sacar el pollo del horno	
Como cambia el  vértice superior de una montaña de arena de forma triangular generado al vaciar una volqueta.			Rapidez con la que cambia la posición del vértice, superior de una montaña de arena	

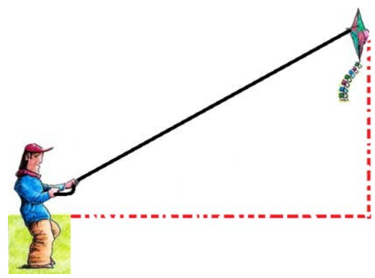
Nota: Es posible encontrar situaciones donde se presenten más de dos variables y la razón de cambio no este expresada de tal forma que el tiempo sea la variable dependiente, por ejemplo:

1. El radio de un círculo aumenta a velocidad constante ¿Qué tan rápido aumenta su área?



La pregunta pide identificar la razón de cambio del área de un círculo, pero resaltamos que en esta situación el área del círculo depende del radio quien a su vez depende del tiempo, por lo tanto la rapidez con la que aumenta el área del círculo está dada por la expresión: $\frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{dA}{dt}$

2. Un niño que está elevando una cometa observa su alejamiento vertical a medida que su cuerda se va soltando (suponga que la cuerda se mantiene recta) ¿Con qué rapidez cambia la altura de la cometa?

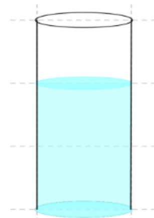


La pregunta pide identificar la razón de cambio de la altura de la cometa la cual depende de la cantidad de cuerda que se suelte, por la tanto la rapidez con la que cambia la altura de la cometa está dada por $\frac{dh}{dl}$

ACTIVIDAD 2

Primera Parte

¿Qué expresión algebraica describe la rapidez con la que sube el nivel **n** de líquido en un tanque cilíndrico vertical de radio **r**, si llenamos aquel a una razón de 3 m^3/min?



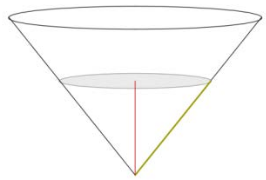
Ingresa a la página luisjaimes.jimdo.com y busca la opción U distrital > Ecuaciones Diferenciales > Applets > Applet 1

En el applet 1 mueva el deslizador “t” y conteste:

1. ¿Cómo interpreta la frase “*¿Qué tan rápido sube el nivel de líquido?*”, en términos matemáticos?
2. De acuerdo a lo observado en el applet 1, ¿Qué está variando y que permanece constante?, ¿Cuáles de estas variables son dependientes o independientes?
3. Tomando como referencia la fórmula del volumen del cilindro realiza el proceso necesario para dar una expresión algebraica que indique "qué tan rápido sube el nivel de líquido".
4. ¿Qué información del enunciado puede reemplazar en la ecuación que obtiene?
5. Con lo desarrollado en los puntos anteriores indica la expresión algebraica que describe la rapidez con la que sube el nivel de líquido.

Segunda parte

Un tanque con forma de cono se encuentra vacío y es llenado con agua a razón de 7 $\frac{p^3}{min}$, si la altura del tanque es de 12 pies, el radio de la base es de 6 pies, y el tanque posee un orificio en su parte inferior por el cual sale agua a una razón de 3 $\frac{p^3}{min}$:



Ingrese a la página luisjaimes.jimdo.com y busca la opción U distrital > Ecuaciones Diferenciales > Applets > Applet 2

En el applet 2, mueva el deslizador "t", V_e, V_s, y responda:

1. De acuerdo a lo observado en el applet 1, ¿Qué está variando y que permanece constante?, ¿Cuáles de estas variables son dependientes o independientes?
2. Elabore una tabla con dos columnas (tiempo y volumen) por seis filas y llénela con la siguiente información: ¿Cuántos pies cúbicos hay en el cono después de 1, 2, 3, 4 y 5 minutos?, ¿Qué función permite encontrar el volumen que hay en el cono en cualquier instante de tiempo?
3. ¿Cuáles datos son pertinentes y cuáles no, para dar respuesta a la pregunta 2?
4. ¿Influye la forma del recipiente, al hallar la cantidad de líquido que hay en el tanque en cualquier instante de tiempo? ¿Por qué?
5. ¿Qué expresión obtiene al derivar con respecto al tiempo la función establecida en el punto 2?

ACTIVIDAD 3

MEZCLA EN UN TANQUE.

Problema 1. Rapidez de entrada = Rapidez de salida

A un tanque que contiene 300 galones de salmuera (es decir, agua en la que se ha disuelto cierta cantidad de libras de sal). Se vierte otra solución con una concentración de sal de 2 libras por galón, a una velocidad de 3 galones por minuto. Cuando la solución se mezcla bien en el tanque, se extrae al mismo ritmo que la solución de entrada.

Ingresa a la página luisjaimes.jimdo.com y busca la opción U distrital > Ecuaciones Diferenciales > Applets > Applet 3

En el applet 3 mueva el deslizador "t" y conteste lo siguiente:

1 ¿Cuáles son las variables de este modelo? Clasifícalas como dependientes e independientes.

2 ¿Qué sucede con el nivel y el volumen del líquido, en cualquier instante de tiempo?

3 ¿Cómo cambia la variable dependiente en función de la variable independiente?

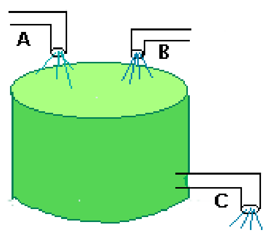
4 ¿Qué cantidad de SAL entra por A, en cualquier momento t?

5 ¿Qué proceso debes realizar para responder: Qué cantidad de SAL sale del tanque en cualquier instante de tiempo? (ten en cuenta la casilla zoom)

6 ¿Con qué velocidad cambia la cantidad de SAL en cualquier instante de tiempo?

Problema 2.

Consideremos un gran tanque que contiene azúcar y agua con los que se prepararán refrescos embotellados. Suponga que el tanque contiene 100 galones de líquido, la cantidad que fluye hacia adentro es la misma que fluye hacia afuera, pero siempre hay 100 galones en el tanque. El tanque se mantiene bien mezclado, por lo que la concentración de azúcar es uniforme en todo el tanque. El agua azucarada que contiene 5 cucharadas de azúcar por galón, entra al tanque a través del tubo A, a razón de 2 galones por minuto. El agua azucarada que contiene 10 cucharadas de azúcar por galón, entra al tanque a través del tubo B, a razón de 1 galón por minuto. El agua azucarada sale del tanque a través del tubo C a razón de 3 galones por minuto.



1. ¿Cuáles son las variables de este modelo? Clasifícalas como dependientes e independientes.
2. ¿Cómo cambia la variable dependiente en función de la variable independiente?
3. ¿Qué cantidad de azúcar entra por A y por B?
4. ¿Qué cantidad de azúcar entra en total al tanque en cualquier momento t?
5. ¿Qué cantidad de azúcar sale del tanque en cualquier instante de tiempo?
6. ¿Con qué velocidad cambia la cantidad de sustancia en cualquier instante de tiempo?

Problema 3. Rapidez de entrada > Rapidez de salida

Supongamos que un tanque grande de mezcla contiene inicialmente 200 galones de agua disuelta con 50 lb de sal (salmuera). Otra solución de salmuera se inyecta en el tanque a una velocidad de 3 galones por minuto; en este flujo de entrada, la concentración de sal es de 2 libras por galón. Cuando la solución se mezcla bien en el tanque, se extrae a una velocidad de 2 galones por minuto. Si el tanque tiene tapa abierta y una capacidad total de 300 galones, responde:

1. En qué tiempo se derramará el líquido.
2. Cuántas libras de sal habrá en el tanque al instante del derrame.
3. Grafique la solución en geogebra y responda: ¿Cuántas libras de sal hay en el tanque cuando $t \to \infty$ ¿coincide con lo que usted creería sin haber hecho ningún proceso?

TRABAJO AUTÓNOMO

Problema 4. Rapidez de entrada < Rapidez de salida

Responda las siguientes preguntas si se invierte los valores de las velocidades de entrada y de salida del problema 3:

1. En qué tiempo se vaciará el tanque.
2. Cuántas libras de sal habrá en el tanque 1 minuto antes de vaciarse.
3. Grafique la solución en geogebra y exprese cómo interpreta la gráfica.