

# ¿PANTÓGRAFO O CABRI? ARTEFACTOS PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN

JUDITH CAROLINA GONZÁLEZ PACHÓN

2008140030

WENDY LORENA MAESTRE FLOREZ

2008140038

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2012

¿PANTÓGRAFO O CABRI? ARTEFACTOS PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN

JUDITH CAROLINA GONZÁLEZ PACHÓN

2008140030

WENDY LORENA MAESTRE FLOREZ

2008140038

Trabajo de grado presentada como

Requisito para optar el título

de Licenciado en Matemáticas

Asesora:

CARMEN SAMPER DE CAICEDO

Profesora titular

Departamento de Matemáticas UPN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2012

## DEDICATORIA

*“A Dios, por darme la oportunidad de vivir y por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de estudio, para formarme como docente, en especial a mi compañera de trabajo. A mis padres y hermana, porque creyeron en mí y porque me sacaron adelante, dándome ejemplos dignos de superación y entrega, porque en gran parte gracias a ustedes, hoy puedo ver alcanzada mi meta, ya que siempre estuvieron impulsándome en los momentos más difíciles de mi carrera, y porque el orgullo que sienten por mí, fue lo que me hizo ir hasta el final”.*

*Judith Carolina González Pachón*

*“Dedico este trabajo en primer lugar a Dios por ser mi apoyo incondicional y brindarme la oportunidad de cumplir mi sueño de ser docente, a mis padres, hermanos y demás familiares que me alentaron y me brindaron su apoyo para lograr mis metas y objetivos, pues con su ejemplo, consejos y enseñanzas me motivaron a perseverar hasta conseguirlos, a mi compañera de trabajo, pues sin ella esto no hubiese sido posible y por último a mi novio Fredy Guerrero por haber estado en los momentos difíciles y apoyarme cuando más lo necesitaba”.*

*Wendy Lorena Maestre Florez*

## AGRADECIMIENTOS

A nuestras familias por su apoyo, comprensión y respaldo en este proceso de formación profesional.

A los profesores del Departamento de Matemáticas por su aporte y compañía durante la carrera, nos brindaron siempre su orientación con profesionalismo, además de afianzar nuestra formación e inculcar siempre el aprecio, compromiso y respeto por nuestra profesión.

A las estudiantes, Ana Camila González Pachón y Nasly Yelitza Sánchez Rodríguez, participes de las actividades, por su disposición, interés y dedicación; ya que sin su ayuda este trabajo no hubiese sido desarrollado.

De manera especial agradecemos a la profesora Carmen Samper de Caicedo, quien nos aportó su experiencia como docente y nos brindó el tiempo necesario, con paciencia, apoyo y compromiso en todo el proceso de construcción de este trabajo.

A todos ellos ¡MIL GRACIAS!

## RESUMEN ANALÍTICO

1. Información General	
<b>Tipo de documento</b>	Trabajo de Grado
<b>Acceso al documento</b>	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
<b>Título del documento</b>	¿Pantógrafo o Cabri? Artefactos para la conceptualización
<b>Autor(es)</b>	GONZÁLEZ PACHÓN, Judith Carolina MAESTRE FLOREZ, Wendy Lorena
<b>Director</b>	SAMPER DE CAICEDO, Carmen
<b>Publicación</b>	Bogotá, D.C, 2012, 69 páginas sin anexos, 111 páginas con anexos
<b>Unidad Patrocinante</b>	Universidad Pedagógica Nacional
<b>Palabras Claves</b>	Pantógrafo, Cabri, semejanza, instrumentalización, visualización, conceptualización.

2. Descripción
<p>Se realizó un estudio, con dos estudiantes de grado noveno, sobre el uso de dos artefactos, el pantógrafo y el programa de geometría dinámica Cabri. Con el objetivo de estudiar la formulación, construcción y comprensión de conceptos geométricos específicamente el concepto de semejanza. Abordando principalmente los procesos, de conceptualización, visualización e instrumentalización, inmersos en el manejo de cada uno de los artefactos.</p> <p>Se proponen tres actividades, las cuales están conformadas por tres momentos relevantes en donde se puedan evidenciar los procesos mencionados anteriormente.</p> <p>Se tomaron diversos registros de información: Audio y video de las estudiantes al desarrollar las actividades propuestas y algunas producciones escritas de éstas. Luego fueron analizadas con base en unas categorías propuestas aludiendo al uso de los artefactos, al funcionamiento y las construcciones hechas.</p>

### 3.Fuentes

El marco teórico está basado en la consulta bibliográfica de algunos documentos relativos a los elementos enmarcados en este trabajo, los más relevantes se mencionan a continuación:

Pantógrafo: Hoyos, V. 2006. Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria. Enseñanza de las ciencias, 24(1). México. Extraído el 25 de febrero de 2012 desde <http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v24n1p31.pdf>.

Cabri: Delgado, L., & Peña, F. 2010. Cabri, un camino para propiciar unidad cognitiva: un estudio de casos. Trabajo de grado no publicado. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C., Colombia.

Semejanza: Samper, C. 2008. Geometría. Bogotá D.C., Colombia: Editorial norma.

-Clemens, S., O'Daffer, P & Cooney, T. 1998. Geometría con aplicaciones y solución de problemas. México. Addison Wesley Iberoamericana, S.A.

Procesos de visualización: Acosta, M., Camargo, L., Castiblanco, A., Urquina, H. 2004. Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Bogotá D.C., Colombia. Extraído el 7 de septiembre de 2012 desde [http://www.colombiaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-13753\\_archivo.pdf](http://www.colombiaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-13753_archivo.pdf).

Instrumentalización: Castro, C., & Céspedes, N. (2009) Concepciones de los estudiantes de grado octavo sobre el concepto de semejanza. Tesis de Maestría. Universidad Sergio Arboleda. Bogotá D.C. Colombia, Extraído el 5 de septiembre de 2012 desde <http://www.usergioarboleda.edu.co/civilizar/invedusa/concepciones-concepto-semejanza.pdf>

Conceptualización: Aya, O., & Echeverry, A. 2009. Geometría dinámica en el proceso de definir. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Pedagógica Nacional.

- D'Amore, B. 2004. Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. Uno. Barcelona, España. Extraído el 2 de agosto de 2012 de <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/479%20Conceptualisacion.pdf>.

#### 4. Contenidos

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos descritos a continuación:

1. Marco Teórico: El cual comprende los referentes teóricos generales sobre los que se soporta el estudio: conceptualización, instrumentalización, visualización y artefactos (pantógrafo y Cabri).
2. Diseño metodológico: El cual contempla, el enfoque metodológico, las etapas del estudio, la población y el diseño de las actividades.
3. Análisis: En este capítulo, se describe y analiza la forma en que se construye el concepto de semejanza a partir de las interacciones entre las estudiantes al momento de desarrollar las actividades propuestas.
4. Conclusiones: Se muestran las conclusiones para las actividades, las generales del documento y las personales.

#### 5. Metodología

La metodología utilizada para la realización de esta investigación fue la correspondiente a un estudio de casos, en la modalidad no participativa. A fin de realizar un análisis descriptivo e interpretativo, de la información recolectada en audio y video, de las intervenciones de las estudiantes al momento de abordar las situaciones que les fueron planteadas.

Tal análisis se realizó a través de diferentes etapas; determinamos unas categorías de análisis fundamentadas, conjeturamos los posibles procesos que harían las estudiantes en el momento de la realización de las actividades propuestas determinando esas categorías, utilizándolas analizamos la información y formulamos conclusiones.

Los procesos y las correspondientes categorías son:\

PROCESOS	CATEGORÍAS
Visualización	➤ Imágenes conceptuales
Instrumentalización	➤ Esquemas de utilización
Conceptualización	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Propiedades relevantes del concepto</li> <li>➤ Definición del concepto</li> </ul>

## 6. Conclusiones

En las conclusiones se presenta un cuadro comparativo entre los dos artefactos, donde podemos destacar la pertinencia de su utilización durante las diferentes fases de las actividades, mostrando como resultado un proceso de conceptualización mediado por la visualización e instrumentalización.

A través de la ejecución de las actividades, se logró que las estudiantes exploraran y aprendieran a manipular dos artefactos diferentes, que las condujo a la comprensión (identificación de propiedades), construcción (elaboración de la definición) del concepto de semejanza.

Es posible evidenciar que los dos artefactos se complementan, aportando elementos para la formulación, construcción y comprensión del concepto de semejanza. Además de surgir cuestiones para responder posteriormente.

<b>Fecha de elaboración del Resumen:</b>	22	11	2012
--	----	----	------

## Contenido

INTRODUCCIÓN .....	7
JUSTIFICACIÓN .....	8
1. OBJETIVOS.....	10
1.1 General.....	10
1.2 Específicos.....	10
2. MARCO TEÓRICO .....	11
2.1 CONCEPTUALIZACIÓN .....	11
2.1.1 Definición del concepto versus imagen conceptual.....	11
2.1.2 Los procesos para definir en geometría .....	13
2.1.3 Definiciones y geometría dinámica.....	14
2.2 INSTRUMENTALIZACIÓN .....	14
2.3 VISUALIZACIÓN .....	16
2.3.1 Nivel global de percepción visual .....	17
2.3.2 Nivel de percepción de elementos constitutivos .....	17
2.3.3 Nivel operativo de percepción visual.....	17
2.4 SEMEJANZA .....	18
2.4.1 Conceptos asociados al término de estudio .....	19
2.4.2 Definiciones de semejanza en algunos libros de texto .....	21
2.5 ARTEFACTOS COMO TECNOLOGÍA .....	22
2.5.2 PANTÓGRAFO.....	23
2.5.3 CABRI .....	27
3. DISEÑO METODOLÓGICO.....	28
3.1 METODOLOGÍA .....	28
3.2 ETAPAS DEL ESTUDIO.....	28
3.3 POBLACIÓN .....	29
3.4. DISEÑO DE ACTIVIDADES .....	30
3.4.1 Actividades con pantógrafo .....	31
3.4.2 Actividades con Cabri.....	31
3.4.3 Actividades sin artefactos .....	33
4. ANÁLISIS .....	34
4.1 PRIMER EPISODIO .....	34

4.1.1 Exploración del artefacto.....	34
4.1.2 Uso del artefacto .....	37
4.1.3 Establecimiento de propiedades matemáticas de la semejanza .....	40
4.2 SEGUNDO EPISODIO.....	42
4.2.1 Exploración del artefacto.....	42
4.2.2 Uso del artefacto .....	47
4.2.3 Establecimiento de propiedades matemáticas de la semejanza .....	51
4.3 TERCER EPISODIO.....	54
5. CONCLUSIONES .....	61
6. BIBLIOGRAFÍA .....	65
ANEXOS.....	I
ANEXO 1 .....	I
ANEXO 2. PLANEACIÓN: ACTIVIDADES CON PANTÓGRAFO .....	VI
ANEXO 3 PLANEACIÓN: ACTIVIDADES CON CABRI .....	X
ANEXO 4 PLANEACIÓN: ACTIVIDAD SIN ARTEFACTOS.....	XVIII
ANEXO 5 TRANSCRIPCIONES DE LAS INTERACCIONES.....	XX
Trascripción de la interacción con el pantógrafo.....	XX
Trascripción de la interacción con Cabri .....	XXVIII
Trascripción de la interacción sin artefactos E <sub>1</sub> .....	XXXVI
Trascripción de la interacción sin artefactos E <sub>2</sub> .....	XL

## INTRODUCCIÓN

La finalidad de nuestro trabajo era determinar la utilidad y pertinencia de aplicar actividades en geometría diseñadas para hacer uso de artefactos como el pantógrafo y Cabri, en busca de introducir nuevos conceptos geométricos, en este caso el de semejanza. Se realizó, un experimento con un grupo de dos estudiantes de grado noveno, con el fin de contrastar acciones e ideas acerca del concepto que proporcionan durante el desarrollo de las actividades usando cada uno de los artefactos.

El objetivo general de este documento es, estudiar el efecto en la formulación, construcción y comprensión del concepto geométrico semejanza con el uso de artefactos usuales y artefactos poco convencionales en la enseñanza de la geometría, con el propósito de fomentar innovación en aulas escolares con relación al proceso de conceptualización.

El primer capítulo corresponde al marco teórico, el cual expone el proceso para definir en geometría, los referentes teóricos de visualización, instrumentalización y conceptualización. Así mismo, se realiza una breve descripción de los artefactos utilizados en este estudio y se expone el concepto de semejanza. En el siguiente capítulo se encuentra la descripción de la metodología seguida para la realización del trabajo, a continuación se presenta la descripción de las actividades diseñadas.

El capítulo posterior comprende al análisis de la implementación de las actividades desarrolladas por las estudiantes. Para éste realizamos un estudio de las ideas y acciones, de ellas al momento de la realización a fin de determinar momentos de instrumentalización o visualización, desarrollo de imagen conceptual (misma forma, diferente tamaño, punto de fuga) y la formalización del concepto (congruencia de ángulos, proporcionalidad entre los segmentos). Con el objetivo de identificar los aportes que realizan, cada uno de los artefactos a la formación del concepto.

Finalmente, se dan las conclusiones del trabajo realizado, en cuanto a la utilidad de los artefactos para el proceso de conceptualización.

## JUSTIFICACIÓN

En estudios recientes, tal y como se reporta en los estándares básicos de competencias, se ha evidenciado un cambio en la educación debido a la inclusión de herramientas mecánicas, máquinas articuladas y tecnología que modifican la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ello ha permitido crear sesiones de trabajo con estudiantes, donde estos pueden desplegar recursos matemáticos que se desencadenan por medio de la comprensión de nociones o donde pueden promover la creatividad y el ingenio en el diseño científico mediante el uso de nuevas tecnologías.

Además, apoya la adquisición, construcción y comprensión de nociones matemáticas complejas, el descubrimiento y formulación de conjeturas, y el desarrollo de ideas para justificar hechos matemáticos. Sin embargo, no sobra realizar un estudio en donde se vean diferencias entre el conocimiento matemático que surge, cuando se usa un artefacto u otro.

Lo cual nos llevó a desarrollar una consulta de trabajos relacionados con el uso tecnologías en la educación como, Hoyos (2006) quien afirma que las funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas, en la escuela secundaria, permiten desplegar ciertas habilidades e intuiciones para desarrollar actividades propuestas en el aula de clase. También se realizó un estudio que implicó el diseño y posterior implementación de actividades, con el fin de lograr que los estudiantes se logren apropiar del concepto estudiado haciendo uso de dos artefactos diferentes, pantógrafo y Cabri, para suscitar el interés y comprensión de nociones geométricas, específicamente la *semejanza*, a través del descubrimiento de propiedades.

Se escogió el concepto de semejanza puesto que desde nuestra experiencia en el campo pedagógico (prácticas docentes) hemos visto que a los estudiantes se les dificulta la comprensión de este concepto, muchas veces no les es claro que propiedades están implícitas en la definición de semejanza.

Al desarrollar nuestro trabajo con estos artefactos la intencionalidad era verificar cuál de las dos máquinas permitirían suscitar de forma más fácil procesos válidos en la formulación del concepto.

# 1. OBJETIVOS

## 1.1 General

Estudiar el efecto en la formulación, construcción y comprensión de conceptos geométricos, del uso de artefactos usuales y artefactos poco convencionales en la enseñanza de la geometría, con el propósito de fomentar la innovación en el aula escolar para el proceso de conceptualización.

## 1.2 Específicos

1. Determinar la utilidad de usar una máquina articulada, como lo es el pantógrafo, en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, complementado con el uso del software Cabri.
2. Determinar cuáles de las características del concepto semejanza, la proporcionalidad entre longitudes de segmentos y la congruencia de ángulos, evidencian los estudiantes al manipular uno u otro de los artefactos.
3. Diseñar actividades que permitan al estudiante la exploración y uso de artefactos para la conceptualización del concepto *semejanza*.
4. Analizar la transcripción de la interacción de las estudiantes entre sí y con los artefactos para determinar diferencias y similitudes entre lo que descubren del concepto de semejanza.
5. Establecer, a través de los procesos evidenciados, cuál de los dos artefactos es más pertinente para la conceptualización del concepto *semejanza*.

## 2. MARCO TEÓRICO

Para el desarrollo de este trabajo fue necesario consultar fuentes teóricas que nos permitieron entender los procesos de conceptualización, visualización, instrumentalización, artefactos como tecnología y el concepto de semejanza.

### 2.1 CONCEPTUALIZACIÓN

Según Vergnaud (citado en D'Amore, 2004) el proceso de conceptualización está ligado básicamente a la apropiación de conceptos, entendiendo éste como una entidad formada por tres componentes; el referente responsable de dar el sentido atribuido al concepto. El significado es al conjunto de situaciones que el estudiante enfrenta y resuelve. El significante se relaciona con los modos de expresión o simbología de los significados.

Es importante aclarar que para Vergnaud (citado en D'Amore, 2004) las diversas situaciones le dan sentido a los conceptos matemáticos, sin embargo el sentido no está ligado a la situación misma, ya que depende del individuo, en la medida en que lo considere relevante. Esto puede deberse a la afirmación enunciada por Tall y Vinner (citado por Barroso, 2000) *“La mente humana no es puramente lógica; la forma compleja como funciona varía a menudo de la lógica matemática. El comprender cómo ocurre este proceso, tanto con éxitos como con errores, nos lleva a formular una distinción entre el concepto matemático formalmente conocido y el proceso cognitivo por el que se concibe”* (p. 286), por lo cual es necesario incluir dos términos, la definición del concepto y la imagen conceptual que se describen a continuación con más detalle.

#### 2.1.1 Definición del concepto versus imagen conceptual

El proceso de formación de un concepto involucra la interacción entre el *“concept definition”* o *definición del concepto* y el *“concept image”* o *imagen conceptual*. Según Vinner y Tall (citado por Aya y Echeverry, 2009) las *imágenes conceptuales* son las diferentes representaciones (dibujos, definiciones, ejemplos, no ejemplos, diagramas)

que tiene un individuo de un concepto, mientras que la definición *del concepto* es la definición aceptada por la comunidad matemática.

La formación de un concepto se realiza en un largo periodo de tiempo, durante el cual las experiencias con el concepto van enriqueciendo la *imagen conceptual*. Sin embargo, los resultados de algunas investigaciones muestran que habitualmente los profesores en la enseñanza secundaria y en los niveles preuniversitarios creen que el alumno forma la *imagen conceptual* a través de la *definición del concepto* y no en sentido contrario. Por lo cual es usual encontrar en las aulas de clase de matemáticas una falta de dedicación a la construcción de conceptos, pues las experiencias son entendidas por el docente como un proceso de memorización de la definición del concepto, sin involucrar actividades que propicien la apropiación de éstas.

### ***Imagen conceptual***

Lo que se denomina como imagen conceptual es el proceso de oír un concepto y evocar imágenes mentales, representaciones visuales, colecciones de impresiones o experiencias, asociadas a dicho concepto.

Por ejemplo, cuando usted escucha la palabra “silla”, la imagen de una silla específica es recordada en su mente; las vivencias que tenga, como sentarse en esta, utilizarla para alguna actividad específica, etc., pueden también ser evocadas. Puede además recordar que la mayoría de ellas tienen cuatro patas entre otros atributos.

Según Moore (citado por Aya y Echeverry, 2009) para la comprensión intuitiva del concepto, son necesarios entonces los ejemplos, ilustraciones de las definiciones o conceptos y resolver problemas. Ya que, muchas veces, los estudiantes los requieren como punto de partida. Puesto que, a través de los éstos, pueden construir sus imágenes conceptuales, y consecuentemente sus comprensiones, definiciones y notaciones.

### ***Definición del concepto***

Cuando las imágenes conceptuales son encadenadas a través de experiencias es posible afirmar que los estudiantes pueden generar definiciones de un concepto determinado. Aunque inicialmente estas probablemente serán formuladas en un lenguaje matemático poco preciso, con el transcurrir del tiempo, los estudiantes pueden llegar a producir definiciones más elaboradas de forma que sean aceptadas por la comunidad matemática tal y como lo afirma Jones (2000).

Sin embargo, se pueden evidenciar que la mayoría de estudiantes, tienen problemas como las comprensiones de conceptos tal como Moore, (citado en Aya y Echeverry, 2009) lo reporta. Él observó en un estudio que realizó con estudiantes universitarios que un concepto demasiado abstracto crea dificultades en la generación de imágenes conceptuales y, sin una comprensión informal del mismo, no se puede escribir la definición formal. Además si la imagen conceptual está muy alejada de la definición del concepto, no es posible expresarla de forma simbólica.

#### **2.1.2 Los procesos para definir en geometría**

Para de Villiers, (citado en Aya y Echeverry, 2009) el proceso de definir es la sistematización de las propiedades de un concepto particular. Define dos procesos: el *proceso de definir descriptivamente* y el *proceso constructivo*.

El primero se refiere a que la imagen conceptual se desarrolla antes de que pueda ser formulada para el objeto una definición del concepto; esto es, la imagen conceptual antecede a la definición del concepto. Mientras que en el segundo, se parte de una definición del concepto, luego a través de procesos de exclusión, generalización, sustitución o adición de propiedades a la definición, se genera una nueva definición del concepto y finalmente se elabora una imagen conceptual. Las dos formas de definir, son diferentes, pero no necesariamente son disyuntas, y usualmente van juntas cuando se genera una definición en particular.

### **2.1.3 Definiciones y geometría dinámica**

En un estudio hecho por Jones (2000), se abordó en tres fases y realizado con estudiantes de grado séptimo; desarrolló actividades que partían de acercamientos intuitivos de cuadriláteros y apoyados en la exploración con geometría dinámica, los estudiantes formulan afirmaciones cada vez más elaboradas.

Las conclusiones obtenidas a partir de las justificaciones reportadas por los estudiantes en este estudio, al categorizar cuadriláteros son:

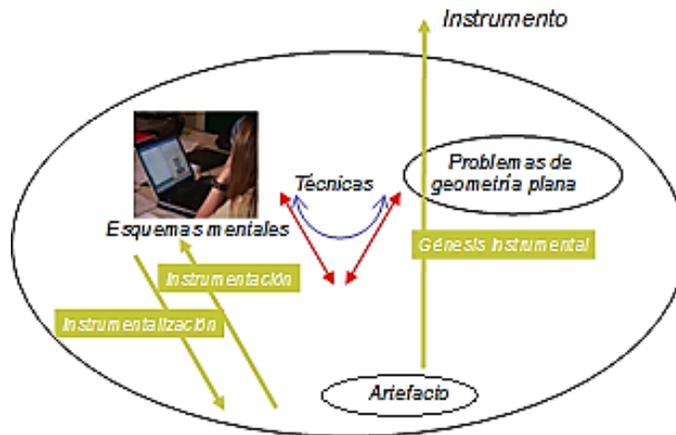
- i. En un primer momento, los estudiantes tienden a describir más que a explicar; pues la percepción es primordial y el razonamiento matemático pasa a segundo plano, es decir, la justificación no es necesaria y el uso del lenguaje matemático no es muy preciso.
- ii. En un segundo momento, hacen uso de términos relacionados a la geometría dinámica, por ejemplo el arrastre. Por tanto las explicaciones tienden a ser más matemáticas.
- iii. Las explicaciones en un contexto puramente matemático están inmersas completamente, al finalizar las actividades propuestas.

## **2.2 INSTRUMENTALIZACIÓN**

A continuación se describe en que consiste la génesis instrumental y la teoría de la instrumentación de Rabardel y la relación entre conocimiento del software y conocimiento matemático según Hollebrands (citados en Iranzo y Josep, 2006)

En la teoría de la instrumentación se diferencia entre el artefacto y el instrumento. El instrumento es la unión del artefacto y las habilidades cognitivas necesarias para manejarlo. El proceso de transformación de un artefacto en un instrumento se llama génesis instrumental. Según Rabardel (citado en Iranzo y Josep, 2006) el software restringe no sólo la manera de actuar, sino también la manera de pensar del estudiante.

La génesis instrumental tiene dos direcciones: los procesos de instrumentación y de instrumentalización. A continuación caracterizamos dichos procesos, a partir del diagrama:



Instrumento y artefacto (Iranzo y Josep, 2006, p. 3) <sup>1</sup>

En primer lugar la génesis instrumental, es el proceso que puede seguir el estudiante mientras que interactúa con el artefacto (tecnología), sin embargo para que se llegue a utilizar de forma correcta, o mejor de forma productiva, es necesario que se desarrolle un esquema de instrumentalización, puesto que dichos esquemas junto con el artefacto, es lo que van a conformar el instrumento, por supuesto este requiere de un tiempo y esfuerzo por parte del estudiante.

Dentro de esa génesis instrumental se desprende el esquema de instrumentalización, se da una unión de dos componentes, a una se le llama técnica y a la otra mental, la primera es la secuencia de acciones que se puede llegar a realizar con el artefacto para alcanzar un determinado objetivo o como lo define Iranzo y Josep (2006) en caso de los instrumentos tecnológicos matemáticos, la componente mental consiste en los objetos matemáticos implicados y en una imagen mental del proceso de resolución y de las acciones del artefacto.

Entonces las destrezas técnicas, los algoritmos y las ideas conceptuales están estrechamente ligadas en el esquema de instrumentalización.

<sup>1</sup> Iranzo, N., Cobo, P., & Fortuny, J. (2006) la co-emergencia de técnicas de papel y lápiz y de geometría dinámica en las estrategias de resolución de problemas de geometría: un estudio de casos. Extraído el 5 de septiembre de 2012 desde [http://edumat.uab.cat/iranzoFortuny\\_Lemniscata%2014\\_11\\_2008.pdf](http://edumat.uab.cat/iranzoFortuny_Lemniscata%2014_11_2008.pdf)

Es importante resaltar que la teoría de la instrumentalización consiste en proporcionar un modelo específico para entender la interacción del estudiante con la máquina y esta puede mostrar los obstáculos técnicos que se puedan generar en dicha interacción.

También existen otras definiciones más concretas de lo que se llama génesis instrumental como por ejemplo lo hace Verillon y Rabardel, para instrumentación (citado por Hoyos, 2006)

*Instrumentación:* La instrumentación es el proceso mediante el cual el artefacto influye en el alumno. Las posibilidades y restricciones del software influyen en las estrategias de resolución de problemas de los estudiantes, así como en las correspondientes concepciones emergentes. En la instrumentación encontramos el desarrollo de esquemas mentales que proporcionan un medio predecible e iterable de integración de artefacto y acción.

Según Trouche y White (citado por Hoyos, 2006) en la *Instrumentación:* El conocimiento del alumno y su forma de trabajar, guía la forma en que utiliza el artefacto. El proceso de instrumentalización depende del estudiante y es un proceso que lleva a una internalización del uso del artefacto (un artefacto no varía pero puede ser instrumentalizado de distintas formas).

### **2.3 VISUALIZACIÓN**

En la resolución de problemas en geometría es necesario desarrollar algunos procesos y uno de estos es la visualización, Clement's y Battista (citado en Camargo, et al. 2004. P 10). *“La visualización integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones, a partir de las representaciones de los objetos bi o tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones.”*

A continuación describimos tres niveles de visualización que caracterizan su desarrollo y están descritos en el documento de Pensamiento Geométrico y Tecnologías

Computacionales de Camargo, et al. 2004. Que se corresponde con los tipos de visualización propuestos por Duval<sup>2</sup>.

### **2.3.1 Nivel global de percepción visual**

Es considerado el nivel más elemental de visualización, puesto que en este encontramos la percepción global de las imágenes, que es esencial en la actividad geométrica y nos permite asociar figuras a objetos físicos. En este nivel, se destaca la forma total de la imagen. En un contexto matemático, la percepción global actúa para reconocer formas prototípicas que se asocian con nombres de figuras geométricas. En la percepción de estas formas prototípicas predominan aspectos no matemáticos como:

- La posición (boca arriba, boca abajo)
- Tipo de trazo (grosso, delgado).

### **2.3.2 Nivel de percepción de elementos constitutivos**

Este nivel de visualización ya no solamente se percibe la forma global, sino que se percibe también la imagen como constituida por elementos de una misma dimensión o dimensiones inferiores, unidimensionales (segmentos) o de dimensión cero (puntos).

Desde el punto de vista matemático, lo relevante para construir conceptos y relaciones geométricas, es la identificación de esos elementos constitutivos de la figura y las relaciones entre ellos. Por eso es indispensable la intervención de un enunciado que describa esas relaciones.

### **2.3.3 Nivel operativo de percepción visual**

Es en este tercer nivel de visualización en el que podemos operar sobre las figuras, realizando verdaderas transformaciones visuales que no están necesariamente mediadas por el discurso.

---

<sup>2</sup> Raymond Duval es profesor de la Universidad del Litoral y director de estudios de la Academia de Lila, Francia, consolidó su trayectoria investigativa en el Instituto de Investigaciones en Educación Matemática (IREM de Estrasburgo) a través de amplias observaciones de las actividades de docentes y alumnos en cursos de matemáticas y del diseño de clases experimentales.

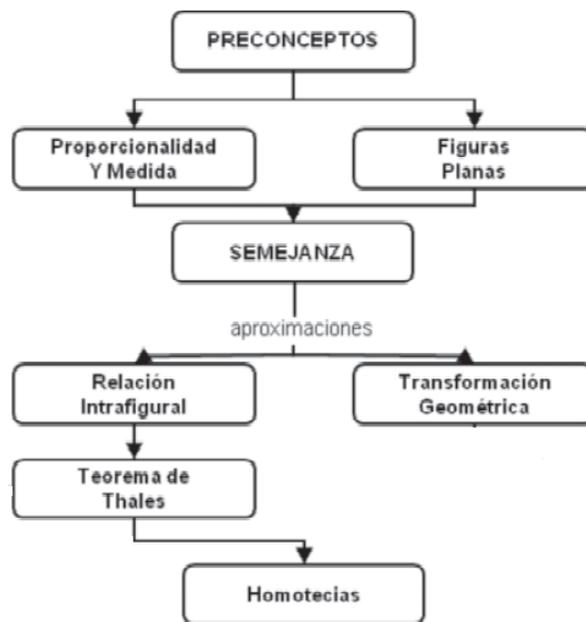
Es el caso, por ejemplo de las llamadas “pruebas sin palabras”. En este caso ya no se trata únicamente de la percepción de características de una configuración, sino de una manipulación mental de las sub-configuraciones, para obtener otra disposición significativa y útil.

A partir de una configuración se reorganizan los elementos constitutivos de una figura, que se mueven como piezas de un rompecabezas, para lograr otra configuración relevante para la solución de un problema.

## **2.4 SEMEJANZA**

Cuando se realizó la revisión teórica del concepto de semejanza, fue posible evidenciar que las nociones acerca de proporcionalidad, caracterización de figuras planas, medida de ángulos y lados; eran necesarias para las estudiantes, con las cuales se pretendía desarrollar el estudio, permitiendo construir, según Lemonidis (1991) (citado en Castro y Céspedes, 2009), una aproximación al concepto de semejanza desde las transformaciones geométricas y a través de la relación intrafigural.

Cabe resaltar que en la *relación intrafigural* la idea de transformar una figura en otra está ausente, pues se destaca la correspondencia entre los elementos de una figura y los correspondientes de su semejante. Mientras que en la *transformación geométrica* aparece la noción de transformar una figura en otra. Logrando percibir la transformación geométrica como una aplicación a los puntos del plano, además de hacer un tratamiento en busca de que la combinación de dos o más transformaciones de la transformación resultante.



Ideograma concepto de Semejanza

(Imagen adaptada. Castro y Céspedes, 2009, p 24)<sup>3</sup>

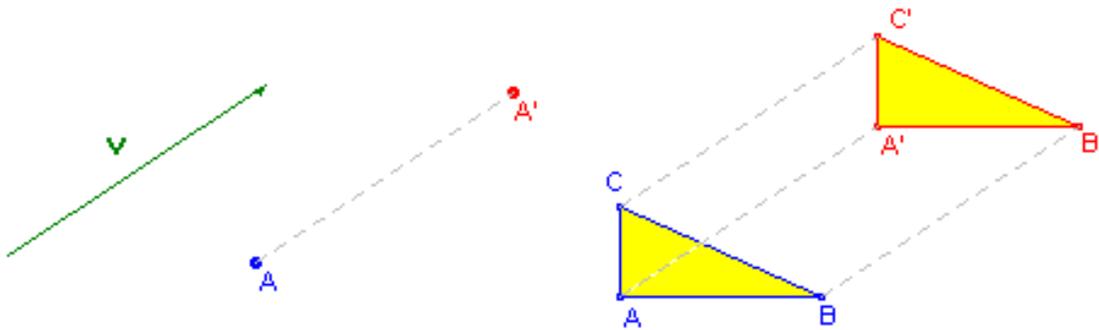
#### 2.4.1 Conceptos asociados al término de estudio

Para el diseño de las actividades, se considerará necesario recordar las definiciones de los conceptos que jugarán un papel importante en la apropiación del concepto de semejanza. Dichas definiciones comprenden a las presentadas por Samper en el libro Geometría (2008).

- Transformaciones en el plano: se definen como correspondencias entre los puntos del plano. Es decir si  $T$  es una transformación aplicada sobre un punto con coordenadas  $(x, y)$ , se puede decir que la expresión  $T[(x, y)] = (x', y')$  en donde el punto con coordenadas  $(x', y')$  es imagen del punto con coordenadas  $(x, y)$ .

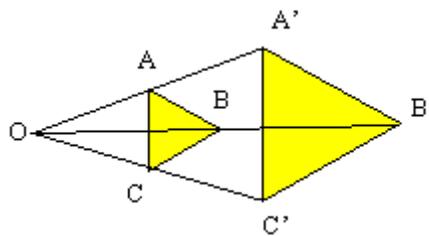
<sup>3</sup> Castro, C., Céspedes, N. (2009) Concepciones de los estudiantes de grado octavo sobre el concepto de semejanza. Tesis de Maestría. Universidad Sergio Arboleda. Bogotá D.C. Colombia, Extraído el 5 de septiembre de 2012 desde <http://www.usergioarboleda.edu.co/civilizar/invedusa/concepciones-concepto-semejanza.pdf>

- Traslación: Transformación definida por un vector  $\mathbf{v}$  (que indica dirección sentido y longitud) que hace corresponder a cada punto  $A$  con coordenadas  $(x, y)$  otro punto  $A'$  con coordenadas  $(x + a, y + b)$ .



**Traslación en el plano**

- Homotecia: Dado un punto  $O$  del plano y un número real  $k \neq 0$ , llamaremos homotecia de centro  $O$  y razón  $k$ , a la transformación que hace corresponder a cada punto  $A$  del plano, distinto de  $O$ , otro punto  $A'$  colineal con  $O$  y con  $A$  y tal que  $OA' = |k| \times OA$ .



**Homotecia**

- Congruencia de ángulos: Dos ángulos son congruentes si tienen igual medida.
- Colinealidad: Puntos colineales son los puntos que se encuentran sobre una misma recta.
- Proporciones: Una proporción es una igualdad entre dos razones. Las razones  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d}$  son proporcionales si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  con  $b \neq 0, d \neq 0$ .

La razón entre las longitudes de los lados de dos polígonos semejantes se denomina el factor de proporcionalidad o escala.

#### **2.4.2 Definiciones de semejanza en algunos libros de texto**

Para la elaboración de este documento se realizó, una revisión bibliográfica de algunos documentos relativos al constructo que nos interesa para desarrollar el estudio, a saber *semejanza*. Para este se presentan dos tipos de definiciones, las primeras son aquellas que mencionan la semejanza como una transformación y las segundas aquellas que hablan de semejanza entre figuras geométricas.

##### *Definiciones semejanza como transformación geométrica*

- Transformación de un espacio euclidiano por la cual para cualesquiera dos puntos A y B y sus respectivas imágenes A' y B' tiene lugar la relación  $|A'B'| = k |AB|$ , donde k es un número positivo llamado razón de semejanza (Vinogradov, Tomo 9-2, p. 53).
- La Semejanza es el producto de una homotecia por un movimiento (reflexiones, rotaciones o simetrías),  $S=H \cdot M$  (Martínez et al., 1984, p. 364)
- Una semejanza es una transformación geométrica que se obtiene como composición de una homotecia y un movimiento (reflexiones, rotaciones o simetrías) (Varios. *Matemáticas 1º ESO (4º)*. Santillana. 2001, 2000, 1995, 1995 p. 139)

##### *Definiciones semejanza entre figuras geométricas*

- Dos polígonos son semejantes si hay una correspondencia entre los vértices tal que los ángulos correspondientes sean congruentes y los lados correspondientes sean proporcionales. (Clemens, 1998, p 313)
- Dos triángulos son semejantes si sus ángulos son, respectivamente, iguales y los lados proporcionales. Es decir: los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes si se tiene:  $A=A'$ ,  $B=B'$ ,  $C=C'$ ,  $a/a'=b/b'=c/c'$  (Pérez, E. Summa, 1965 p. 144).
- En general, dos figuras con la misma forma en que los ángulos homólogos son iguales y los lados homólogos son proporcionales se les llama figuras semejantes (Equipo Signo. *Matemáticas 7º EGB*. Anaya. Madrid. 1983 p. 182).

- Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen los ángulos iguales y los lados opuestos a los ángulos iguales son proporcionales o los que los forman, tomando los lados y los ángulos en el mismo orden. (Elementos de Euclides, libro VI, definición 1, p 805)

En búsqueda de una producción de definición de semejanza al finalizar las actividades es seleccionada esta última.

Dos figuras son semejantes si existe una correspondencia entre los vértices tal que los ángulos correspondientes son congruentes y las medidas de los lados correspondientes son proporcionales. (Samper. 2008, p. 150).

## **2.5 ARTEFACTOS COMO TECNOLOGÍA**

Para conocer un artefacto hay que comenzar por determinar los elementos básicos del sistema: composición (sus componentes), estructura (las relaciones y la organización de los componentes), su ambiente (aquellos con lo que interactúa), mecanismo (o proceso o función, actividad esencial) y súper estructura o el sistema conceptual o modelo que representa el artefacto (incluyendo su instrucción técnica para operarlo o repararlo, o una teoría sobre su mecanismo: leyes, reglas, etc.). Por otra parte todo artefacto es construido o fabricado en un proceso de ensamblaje, resultado de un proceso que desorganiza todo material y lo reorganiza en un sistema (artefacto) según sus fines.

### **Influencia de los artefactos en la educación**

Actualmente, en nuestro país existe un interés por propiciar los contenidos de la geometría en todos los niveles educativos, para lo cual se hace necesaria la inclusión de nuevas tecnologías en el salón de clase, donde los estudiantes sean participantes, activos y constructivos. A través de recursos que permitan crear modelos, investigar y probar conjeturas acerca de distintos fenómenos matemáticos. (Estándares básicos de competencias 2004)

Para este trabajo en particular, se toman dos artefactos el pantógrafo y Cabri los cuales se describen a continuación.





**Pantógrafo de dibujo<sup>5</sup>**

- **Pantógrafos infográficos impresores:** Pueden ser trazadores sobre cilindros, que soportan papel continuo y una cabeza impresora, que imprime en chorro de tinta el documento contenido en el disco del ordenador con el que se controla el equipo impresor.
- **Pantógrafos infográficos de corte:** Hay pantógrafos infográficos con los que se trabaja sobre una superficie plana, habitualmente utilizada para cortar tanto rotulaciones de cartelería y señalización, como para el trazado de corte de tejidos, para prendas de vestir, plásticos, envases, sustituyendo a troqueladoras, con cortes realizados con cuchillas de acero, diamante o rayo láser.
- **Pantógrafos 3D:** También existen pantógrafos 3D, nacidos del desarrollo informático con los que los objetos dibujados en el plano se pueden reproducir en volumen; aunque estos nuevos instrumentos podrían ser también considerados como un "torno" con mayor capacidad de reproducción, por ejemplo, una cabeza humana, a escala, tomando la información de una base de datos digital procedente de un análisis métrico realizado con un equipo explorador infográfico (escáner) y sustituyendo el trabajo de un escultor. Esta técnica se utiliza frecuentemente para el modelado de objetos o piezas; la

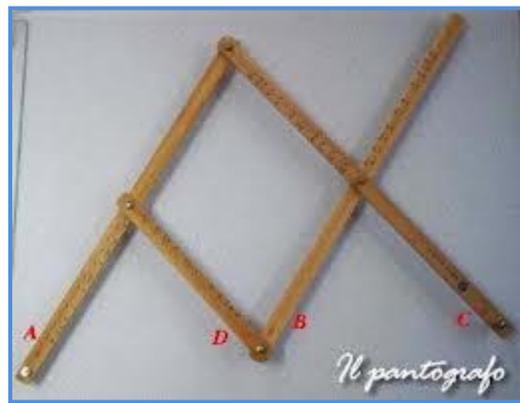
---

<sup>5</sup> Regla agrandar y reducir [Pantógrafo]. Extraído del día 17 de junio 2012

realización de maquetas de automóviles, diseños arquitectónicos, objetos publicitarios personalizados, etc.

### **2.5.2.1 Elementos del pantógrafo**

La siguiente imagen corresponde al pantógrafo utilizado en nuestro trabajo, puesto que este sirve para realizar homotecias (ampliaciones y reducciones).



**Pantógrafo profesional**

- Consta de cuatro regletas.
- Cada regleta tiene una letra específica (A, B, C, D) y todas tienen la misma cantidad de perforaciones enumeradas.
- Estas cuatro regletas van articuladas mediante tornillos en dichas perforaciones enumeradas.
- En los extremos de cada regleta, tienen una función específica:
  - A: Punto fijo (pivote)
  - B: Tornillo repasador
  - C: Lápiz
  - D: Tornillo repasador

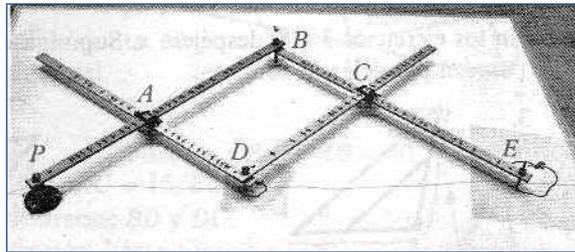
### **2.5.2.2 Funcionamiento**

Para explicar el funcionamiento del pantógrafo, es necesario hablar del siguiente teorema:

**Teorema: Si una recta interseca a dos lados de un triángulo y los divide proporcionalmente, entonces la recta es paralela al tercer lado.**

Demostración

- Un pantógrafo se construye de manera que  $AB = CD$ ,  $AD = BC$ , y  $P, D$  y  $E$  son colineales.
- Así, por el teorema: *si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo*. Se puede concluir que  $ABCD$  es un paralelogramo.
- Dado que  $ABCD$  es un paralelogramo,  $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$  en  $\triangle PBE$ .
- Por tanto, por el teorema:



**Pantógrafo, Clemens, p. 308**

**Si una recta paralela de un triángulo interseca a los otros dos lados, entonces divide a éstos proporcionalmente.**

Se puede concluir que la razón  $\frac{PD}{DE}$  siempre es constante e igual a la razón  $\frac{PA}{AB}$ . Este hecho ayuda a explicar el funcionamiento del pantógrafo.

### **2.5.3 CABRI**

Uno de los artefactos escogido para trabajar en el diseño, implementación y posterior análisis de las actividades es Cabri-Géomètre, el cual es un paquete de cómputo de geometría dinámica interactiva que permite hacer geometría de una manera particular, ya que se pueden manipular los objetos geométricos en la pantalla del computador o la calculadora. Este medio de trabajo logra que el estudiante tenga la posibilidad de experimentar con los objetos matemáticos, sus representaciones y sus relaciones.

Según Mariotti (citado por Delgado y Peña 2010) Cabri es una herramienta didáctica que favorece la transición entre lo empírico y lo teórico, pues la justificación de una construcción y la demostración de un teorema son acciones equivalentes

#### **Algunas facilidades del programa**

- Construir figuras en forma precisa y rápida, usando los componentes básicos geométricos
- Controlar el aspecto gráfico de los elementos geométricos usando simplemente el mouse.
- Crear macros para hacer construcciones geométricas complejas.
- Manipular las figuras geométricas y mirar atributos, tales como medidas, las cuales se actualizan automáticamente ante los cambios.
- Descubrir relaciones geométricas nuevas las cuales antes no eran evidentes.
- Verificar hipótesis en general y poder dar contraejemplos si lo desea.
- Ejecutar cálculos de medidas, desde medidas simples hasta expresiones complejas que evalúan por ejemplo áreas, pendientes, etc.

### **3. DISEÑO METODOLÓGICO**

En este apartado, se presenta la metodología usada para este estudio, así como las etapas empleadas para la realización del documento.

#### **3.1 METODOLOGÍA**

Con el fin de describir, clasificar, analizar e interpretar acontecimientos que se presentaron durante la investigación concerniente y en búsqueda constante de verificar, reforzar, y ampliar la enseñanza y el aprendizaje del concepto de semejanza para futuros estudiantes, este trabajo de grado se realiza bajo la metodología de investigación denominada estudio de casos.

Debido a que en el estudio se observan las interacciones de una pareja de estudiantes cuando desarrollaron ciertas actividades, la observación se centraba en encontrar evidencia del aprendizaje, características correspondientes al proceso en estudiantes con los mismos rasgos de la muestra seleccionada. Siendo esta características relevantes del estudio de casos.

Dicha observación, se sitúa en no participante, siendo ésta en donde el observador lleva a cabo un registro, procurando no intervenir, puesto que se quiere que las estudiantes sean quienes realicen las actividades autónomamente, atendiendo sus producciones desde luego bajo alguna guía.

#### **3.2 ETAPAS DEL ESTUDIO**

El estudio se realizó en cinco etapas, cada una con una intención específica, las actividades estructuraron el estudio realizado. A continuación se esboza cada etapa.

En primer lugar se realizó una consulta bibliográfica de algunos documentos relativos a los elementos que enmarcan este trabajo: pantógrafo (Hoyos, 2006), Cabri (Delgado y Peña, 2010), semejanza (Clemens, 1998), visualización (Camargo, et al., 2004), instrumentalización (Iranzo y Josep, 2006) y conceptualización (Aya y Echeverry, 2009).

A partir de ello se elaboró el marco teórico, permitiendo establecer relaciones entre los elementos mencionados para generar las ideas necesarias para proponer unas categorías de análisis. Con ellas se buscó determinar el efecto de utilizar un artefacto u otro, en la construcción del concepto de semejanza, por parte de la pareja de estudiantes a través de las situaciones planteadas.

Las actividades fueron diseñadas y elaboradas teniendo en cuenta la revisión bibliográfica realizada y sustentadas en el marco teórico. Además se analizaron con el fin de prever cualquier inconveniente que se pudiera presentar llevando a una reestructuración. También se hizo un análisis de la solución de éstas. Se tuvo en cuenta la posible duración del desarrollo de las actividades, los materiales que se necesitaban, el propósito de cada una de éstas, entre otras.

Dichas actividades fueron planeadas para utilizar, en unas él pantógrafo y en otras Cabri. Además se diseñó con una actividad en la que no usarían alguno de los artefactos, pues así las estudiantes tendrían la necesidad de utilizar los conocimientos adquiridos para realizar la tarea propuesta.

En cuanto al registro de las observaciones, se realizaron grabaciones con video cámara y grabadora de audio, las cuales posteriormente se transcribieron. Fueron revisadas varias veces con el fin de no perder ningún detalle de las actividades y diálogos. Posteriormente, se realizó un análisis usando las categorías establecidas, además de tener en cuenta fragmentos relevantes en dichas transcripciones (las transcripciones completas, ver anexo 4).

A partir del análisis se elaboran llas conclusiones y algunos comentarios personales.

### **3.3 POBLACIÓN**

Se escogió una pareja de estudiantes para poder registrar las conversaciones entre ellas, con el fin de identificar estrategias, argumentos e ideas acerca del concepto, mencionados en el momento de resolver los problemas.

Son estudiantes de colegiatura, específicamente de grados noveno, de 13 años de edad, que aun cuando no son compañeras de colegio, puesto que una estudia en Bogotá y la otra en Ubaté, son amigas, lo cual permite una comunicación verbal con mayor fluidez entre ellas, al realizar una consulta con sus padres, docentes y una revisión en sus boletines académicos se evidenciaron algunas características como:

- Analizan de manera crítica las actividades académicas que se le proponen.
- Manifiestan interés y gusto por el aprendizaje de la geometría.
- Son estudiantes muy curiosas y receptivas.
- Han demostrado ser dedicadas en sus labores académicas.

Precisamente por cumplir estas particularidades, además de tener la facilidad de buscar espacios para desarrollar las actividades propuestas con los dos artefactos, fueron escogidas esta pareja de estudiantes.

En este trabajo y específicamente en las transcripciones y posterior análisis de la implementación de las actividades diseñadas para las estudiantes, serán mencionadas como  $E_1$  y  $E_2$ .

Según la consulta que realizamos, el proceso que han tenido las dos estudiantes ( $E_1$  y  $E_2$ ), durante sus años de colegiatura (hasta grado noveno, que es el nivel de educación en el que se encuentran), respecto a la geometría, en relación con lo que según los estándares de calidad del ministerio de educación (MEN) debieron cubrir, se encontró que sí fueron desarrolladas las temáticas correspondientes. (*Ver anexo 1*).

### **3.4. DISEÑO DE ACTIVIDADES**

Las actividades diseñadas se han clasificado en tres episodios diferentes según el artefacto empleado (con pantógrafo, con Cabri y sin artefactos en dos sesiones). A continuación se escriben cada una de ellas sustentadas en el marco teórico presentado en el capítulo 2. Dichas actividades están diseñadas para tres etapas de trabajo: exploración del artefacto, uso del artefacto, y establecimiento de propiedades matemáticas de la semejanza.

### **3.4.1 Actividades con pantógrafo**

Las actividades que se describirán a continuación, hacen parte de la primera experiencia que harán  $E_1$  y  $E_2$  con el artefacto pantógrafo. (Planeación de las actividades con el Pantógrafo, ver Anexo 2)

#### **3.4.1.1 Exploración del artefacto**

Como las estudiantes no han tenido la oportunidad de manipular este artefacto, esta primera etapa se planeó teniendo en cuenta que con ella se realizará la *génesis instrumental (Instrumentalización e Instrumentación)* del pantógrafo. No se quería que la introducción al artefacto fuera limitarse a una simple observación de su uso por parte de  $E_1$  y  $E_2$ . Pues se buscaba que manipularan el pantógrafo y, a través de preguntas, se generara una discusión respecto a la forma del artefacto, a sus elementos e incluso a la forma de usarlo y a lo que produce.

#### **3.4.1.2 Uso del artefacto**

Habiendo ya descubierto el papel de los elementos que componen el pantógrafo, esta actividad tiene como intención que  $E_1$  y  $E_2$  descubran qué se puede hacer con un pantógrafo y la relación geométrica entre la figura producida y la figura original, es decir algunas propiedades de la semejanza. (Ver anexo 2)

#### **3.4.1.3 Establecimiento de propiedades matemáticas de la semejanza**

El propósito de esta actividad es reforzar o aclarar las relaciones que se han establecido a partir de la construcción de una figura usando el pantógrafo. Dado que se solicita justificar la razón para rechazar o aceptar que una figura sea imagen de la figura original tiene como objetivo que se expresen verbalmente las percepciones, formadas con la actividad anterior, acerca de lo que son figuras semejantes.

### **3.4.2 Actividades con Cabri**

A continuación se describen las actividades en las que se usa el artefacto Cabri. Dichas actividades están diseñadas, al igual que en la actividad con el pantógrafo. (Planeación de las actividades con Cabri, Ver Anexo 3)

### **3.4.2.1 Exploración del artefacto**

En esta etapa, el propósito de la actividad es aprender a manipular el artefacto, dar cuenta de la observación de sus componentes, el reconocimiento de los iconos del programa y el descubrimiento de la forma correcta de usarlos, procesos ligados a la *visualización* ya que en este se encuentra la percepción global de las imágenes, que es esencial en la actividad geométrica y permite asociar figuras a objetos físicos. *E instrumentalización*, puesto que consiste en proporcionar un modelo específico para entender la interacción del estudiante con la máquina y esta pueda mostrar los obstáculos técnicos que se puedan generar en dicha interacción.

Para esta actividad, la primera parte fue una exploración libre, se pidió desplegar los diferentes menús que se encuentran en el software, además de intentar utilizar las herramientas que les llamen la atención. El fin es generar motivación e interés por la manipulación del artefacto, además de propiciar un correcto manejo de éste buscando eludir obstáculos referidos al empleo del artefacto.

Posteriormente, se realiza una exploración guiada, en donde se les solicita realizar construcciones tales como, un segmento, un ángulo y un ángulo de medida específica. Esto con la finalidad de incluir en el manejo del artefacto las herramientas necesarias para la realización de las actividades que seguían.

### **3.4.2.2 Uso del artefacto**

En esta parte, luego de haber identificado las herramientas y como usarlas, se solicita la construcción de una figura semejante a otra dada, esta vez debería abrir un archivo denominado Figure #1 que se encontraba en el computador dispuesto para la actividad.

Este archivo contenía una figura especial puesto que sus lados median números enteros, tenía un ángulo muy agudo, un ángulo muy obtuso y un ángulo recto, estas características buscaban resaltar atributos que conllevarían a la construcción de la definición de semejanza; puesto que, al tener segmentos con dichas medidas la relación de proporcionalidad era posiblemente más fácil de calcular, y al tener la figura estos ángulos la congruencia éstos podía ser más fácilmente evidenciada.

Esta actividad tenía como finalidad evidenciar los componentes necesarios para utilizar la herramienta homotecia, además de encontrar la relación geométrica entre la figura producida y la figura original.

### **3.4.2.3 Establecimiento de propiedades matemáticas de la semejanza**

Para esta actividad se dispuso otro archivo denominado Figure #2 el cual contenía la figura inicial trabajada en la actividad anterior y una serie de polígonos similares, algunos con el ángulo agudo de medida mayor o menor, sin el ángulo recto, con el ángulo obtuso de medida mayor o menor, o con los lados proporcionales pero con ángulos distintos. Además habría polígonos semejantes a la figura inicial.

La finalidad de esta actividad es fortalecer o esclarecer la relación establecida a partir de la construcción de una figura intencionalidad usando Cabri. Puesto que se exige explicar la razón para rechazar o aceptar que una figura sea resultado de haber aplicado la herramienta homotecia a la figura original, teniendo como propósito la expresión verbal de las apreciaciones, formadas con la actividad anterior, acerca de lo que son figuras semejantes.

### **3.4.3 Actividades sin artefactos**

A continuación se describen las actividades que se les propuso a  $E_1$  y  $E_2$ , pero en esta ocasión sin artefactos. A diferencia de los dos episodios anteriores en el que las actividades estaban planteadas con alguno de los dos, pantógrafo o Cabri. (Planeación de las actividades sin artefactos, Ver Anexo 4)

Para ésta sesión el objetivo es que las estudiantes logren dibujar una figura semejante a otra, teniendo sólo como herramientas: un compás, hojas blancas, transportador y regla. Se decidió trabajar con  $E_1$  y  $E_2$ , por aparte ya que tendrían la oportunidad de exponer cada una sus estrategias para resolver el problema propuesto.

Por supuesto se esperaba que  $E_1$  y  $E_2$ , hicieran uso de los conocimientos adquiridos en las experiencias con los artefactos.

## **4. ANÁLISIS**

A continuación se presentan las categorías que usamos para describir los procesos realizados y las producciones que muestran el acercamiento al concepto de semejanza por parte de las estudiantes.

### **Esquemas de utilización**

Esta categoría busca identificar la forma como se usa cada artefacto y que se dan en la comprensión adquirida del uso de estos.

### **Imágenes conceptuales**

Corresponde a los acercamientos de forma visual, al concepto que ponen en evidencia la imagen conceptual que manifiesta el estudiante.

### **Características relevantes de la definición**

Es la identificación para el estudio del reconocimiento de las propiedades esenciales del concepto de semejanza.

### **Definición del concepto**

Corresponde a determinar los momentos en que se enuncian su definición de semejanza. Usando lenguaje matemático apropiado.

## **4.1 PRIMER EPISODIO**

Se entregó el material a las estudiantes, dos pantógrafos, hojas blancas, compás, transportador, lapiceros y regla, además de hojas cuadriculadas para registrar observaciones.

### **4.1.1 Exploración del artefacto**

Les explicamos a  $E_1$  y  $E_2$  que debían explorar el artefacto para determinar qué se podía hacer con él, ya que era desconocido para ellas. Inicialmente las alumnas exploran libremente el artefacto para descubrir los elementos que lo componen y la estructura física.

- P* [Explica la actividad a realizar y hace preguntas referentes a ésta.]. En esta primera actividad, queremos que exploren el pantógrafo, ¿Qué características tiene este artefacto? ¿Qué creen que pueden hacer con esta herramienta?
- E<sub>1</sub>* [Siguiendo las instrucciones.] Pues tiene cuatro reglas, pero las medidas están un poco raras.
- E<sub>2</sub>* También tienen unos tornillos que unen todas las regletas, una chupa y se puede poner un lápiz, además cada regla tiene una letra: A, B, C y D.
- E<sub>1</sub>* Yo creo, que se puede hacer cuadriláteros con el pantógrafo.
- E<sub>2</sub>* Sí. Ya que las cuatro regletas forman un rombo y si vamos cambiando la posición de los tornillos en cada regleta podemos hacer varios cuadriláteros.

Como parte del proceso de instrumentalización, las estudiantes realizan un reconocimiento progresivo de las posibilidades y limitaciones propias del artefacto y de sus diferentes componentes.

Luego como parte de la exploración, se les pide a las estudiantes construir una figura (con regla, compás y transportador) en el papel blanco que se les ha dado usando el pantógrafo. La intención era que *E<sub>1</sub>* y *E<sub>2</sub>*, comprendieran el funcionamiento del artefacto.

- E<sub>1</sub>* [Las estudiantes en vez de utilizar el tornillo grande para repisar la figura dibujada, hacían lo contrario utilizaban el lápiz]. Cada vez que dibujamos algo, ese tornillo también se mueve de la misma forma que vamos dibujando algo.
- E<sub>2</sub>* ¿Cómo así?
- E<sub>1</sub>*: [Las estudiantes dibujaron un cuadrado con regla]. Mira lo que

*pasa cuando subrayo el cuadrado con el lápiz.*

*E2 [Este proceso lo hicieron, varias veces]. Pero no, es mejor hacerlo al contrario.*

*E1: ¿Cómo así?*

*E2 Pues subrayar con el tornillo para ver la figura que nos da con el lápiz.*

*E2: [Pero en este caso ellas no repasaron los lados del cuadrado, decidieron remarcar con el tornillo las diagonales de esté]. Ahora sí, unimos los dos segmentos que nos dibujó el lápiz y nos quedó el cuadrado.*

*E1 ¡Pero no nos dio!*

*P: ¿Por qué no?*

*E2 Porque nos dio un cuadrado como volteado, mejor dicho rotado y además mucho más grande.*

*E1 Si, y yo pensaba que nos iba a dar el mismo.*

*E2 Pero ya entendimos más o menos como funciona.*

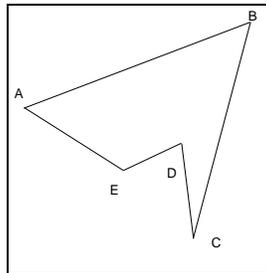
*E1 Yo creo que tiene que ver algo con esos números de las regletas.*

El proceso de *Instrumentación*, que se refleja en este fragmento es de un surgimiento y desarrollo de esquemas de utilización. Para ello, recurren a la forma, al proceso de visualización.

#### 4.1.2 Uso del artefacto

Habiendo ya descubierto el papel de los elementos que componen el pantógrafo, esta actividad tiene como intención descubrir qué se puede hacer con un pantógrafo y la relación geométrica entre la figura producida y la figura original.

Para la actividad 2, se les pide a E1 y a E2 que recorran la figura dada (ver figura 1) con el lápiz del pantógrafo y describan lo que sucede.



**Figura 1**

Los conceptos previos y la manipulación del artefacto, utilizando las ayudas brindadas por éste, permiten que E1 y E2 identifiquen los elementos necesarios para la utilización de la herramienta.

*E<sub>1</sub> [Siguiendo las instrucciones]. Quedo la misma figura.*

*E<sub>2</sub> No, no es la misma es parecida.*

*E<sub>1</sub> Pero se parece mucho, pero un poco más grande. Nos pasó lo mismo que con el cuadrado.*

*E<sub>2</sub> Si... pero, no sé, los lados más grandes en la figura ABCDE parecieran ser también los más grandes en la nueva figura. No estoy segura.*

*P: ¿Pero cómo sabes eso?*

*E<sub>1</sub> Primero pongámosle nombre a la otra figura y así podemos medir.*

*E<sub>2</sub> La voy a llamar A'B'C'D'E'*

*E<sub>1</sub> Pero colócale los nombres de la misma forma como la primera figura.*

*E<sub>2</sub> ¿Cómo así?*

*E<sub>1</sub>: Pues que A, sea A' en la otra, mejor dicho en el mismo lugar.*

Este momento es relevante ya que las estudiantes mencionan aspectos importantes como correspondencia entre segmentos y ángulos, entre la figura original y la figura resultante, claro está que de manera muy coloquial. Ya que las estudiantes tienden más hacia la descripción que a la explicación, es decir, no ven la necesidad de la justificación y tienen deficiencias en el uso del lenguaje matemático preciso. La visualización juega un papel importante en este instante, puesto que logran percibir la relación entre la figura y su imagen. Al transcurrir la actividad, las estudiantes deciden nombrar los vértices de las figuras, teniendo en cuenta la relación de correspondencia entre ángulos y segmentos de ambas figuras

E<sub>1</sub> y E<sub>2</sub> consideran importante, medir los segmentos correspondientes en cada figura, sin embargo, no logran establecer ninguna relación

*P: [Entre ambas niñas decidieron medir los segmentos:  $\overline{AB}$  y  $\overline{A'B'}$ ]*

*E<sub>1</sub>: [Después de verificar dos veces las medidas] pero dan muy raro, esas medidas son diferentes... no sé.*

*E<sub>2</sub> Si está raro, lo único es que en la figura ABCDE y en la A'B'C'D'E' los lados más grandes siguen siendo más grandes y los más pequeños también se mantienen más pequeños.*

Aun cuando E<sub>1</sub> y E<sub>2</sub> quieren establecer alguna conjetura esto se les dificulta, tal que pareciera que es un concepto demasiado abstracto sin una comprensión informal del mismo, y por tanto no permite escribir una conclusión final.

Después de un tiempo prudente las niñas no lograban establecer ninguna conjetura, por tanto, la profesora guía de la actividad hizo una pregunta:

*P: ¿Y pasará algo con sus ángulos?*

*E<sub>2</sub> [Miden con un transportador los ángulos de ambas figuras]. Es muy raro los ángulos si miden igual.*

*P: ¿Cuáles ángulos?*

*E<sub>2</sub> Pues los  $\angle ABC$  y  $\angle A'B'C'$*

*E<sub>2</sub> [Después de discutir un rato entre ellas] Ya entendimos, tanto en el cuadrado como en la nueva figura, pasa lo mismo. TIENEN LA MISMA FORMA PERO DIFERENTE TAMAÑO.*

*P: ¿Qué quieren decir con esto?*

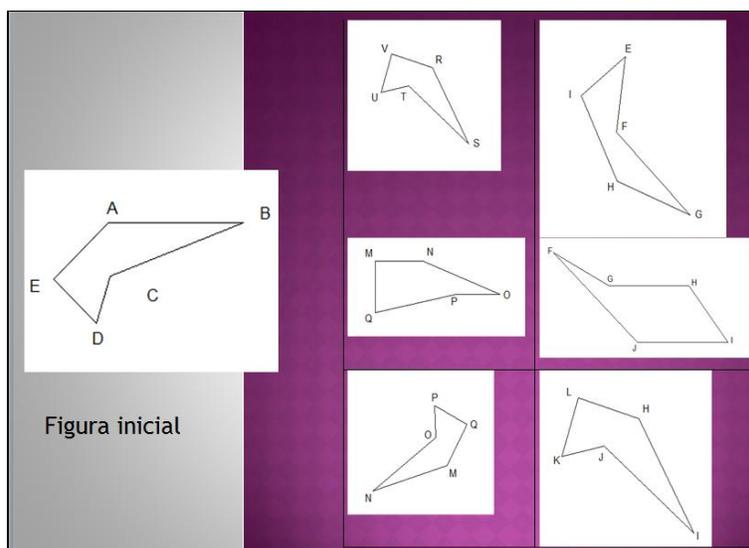
*E<sub>1</sub> Pues que los ángulos siempre van a ser iguales, algo así que*

permite que se mantenga la misma forma al agrandar la figura.

En este apartado las estudiantes logran comprobar que las características “*misma forma y diferente tamaño*” están relacionadas con propiedades específicas. Es decir, comprueban una correspondencia entre los ángulos de las figuras que compete a una congruencia respectivamente, aunque todavía estos términos no sean usados, más adelante tendrán importancia.

#### 4.1.3 Establecimiento de propiedades matemáticas de la semejanza

El propósito de esta actividad es reforzar o aclarar la relación que se ha establecido a partir de la construcción de una figura usando el pantógrafo. Dado que se solicita justificar la razón para rechazar o aceptar que una figura sea imagen de la figura original, tiene como objetivo que se expresen verbalmente las percepciones, formadas con la actividad anterior, acerca de lo que son figuras semejantes. Para esto se les entregan varias figuras dibujadas en hojas tamaño carta, remarcando una figura que era la original.



**Identificación de figuras semejantes**

P: [Se les entregan varias figuras dibujadas en hojas tamaño

carta, remarcando una figura que era la original]. ¿Cuáles de estas figuras creen ustedes que fueron hechas con el pantógrafo y cuáles no, respecto a la figura original?

*E<sub>1</sub>: [Las niñas escribieron sus respuestas en hojas y posteriormente nos explicaron el porqué de esas respuestas]. Yo trate de ver, sin importar la posición, que los ángulos fueran iguales, tuvieran la misma medida y que además se formaran las mismas sub- figuras que en la original.*

*P: ¿Cuáles sub- figuras?*

*E<sub>1</sub>: Pues los triángulos o cuadriláteros en que se puede dividir la figura inicial.*

*E<sub>2</sub> Yo también tuve en cuenta los ángulos y que no cambiara la forma de la figura y que se mantuviera la medida entre los segmentos.*

*P: ¿Qué quieres decir con que se mantenga la medida entre los segmentos? ¿Acaso que sean iguales?*

*E<sub>2</sub> No, lo que observe y comprobé midiendo es que si  $\overline{MO}$  en la figura original era el mas largo en las otras figuras el mismo segmento que supuestamente le corresponde sea también mas largo que los otros.*

Después de la actividad, se les explicó cuáles eran los términos que geoméricamente debían usar para sus afirmaciones. Y se terminó concluyendo por parte de ambas estudiantes el término semejanza.

A pesar que las niñas logran evidenciar una imagen conceptual de semejanza entre figuras, aun no son capaces de enunciar una primera definición completa de semejanza. Sin embargo, caracterizan algunas partes importantes que logran caracterizar figuras semejantes y no semejantes a través de los componentes mencionados en las actividades anteriores.

*E<sub>2</sub> [Después de discutir un rato entre ellas] Ya entendimos, tanto en el cuadrado como en la nueva figura, pasa lo mismo. TIENEN LA MISMA FORMA PERO DIFERENTE TAMAÑO.*

*P: ¿Qué quieren decir con esto?*

*E<sub>1</sub> Pues que los ángulos siempre van a ser iguales, algo así que permite que se mantenga la misma forma al agrandar la figura.*

El que puedan distinguir fácilmente figuras resultantes permite la apropiación del concepto estudiado, mencionando características y visualizando componentes necesarios para sustentar las declaraciones hechas sobre una figura.

## **4.2 SEGUNDO EPISODIO**

Se entregó el material a E<sub>1</sub> y E<sub>2</sub>, un computador con el programa Cabri y hojas blancas para registrar observaciones.

### **4.2.1 Exploración del artefacto**

Las profesoras les explicaron a las estudiantes que debían explorar para determinar qué se podía hacer con ese programa, el cual era desconocido para ellas.

Inicialmente las alumnas exploran libremente el artefacto para descubrir las herramientas que éste ofrece y la ubicación de las que les son significativas en cada menú.

- E1 y E2: [Despliegan los menús y utilizan las herramientas que son tales como puntero, punto, recta, segmento, polígono, triángulo, circunferencia, recta paralela y recta perpendicular. Para las otras no se detiene para analizarlas. ]*
- P: ¿Qué encontraron que les llamará la atención?*
- E1: Herramientas para hacer figuras geométricas.*
- P: ¿Dónde las encontraron?*
- E2: [Señala las herramientas, pero no puede decir la posición.]¿Podemos llamar a cada menú, F1, F2, F3...?*
- P: Sí, si ustedes lo desean.*
- E1 y E2: Entonces en F2 herramientas para hacer puntos, en F3 encontramos herramientas para hacer segmentos y rectas, polígonos y triángulos. En F4 herramientas para hacer círculos.*

Como parte del proceso de instrumentalización, las alumnas deciden asignar a cada grupo de herramientas un nombre: F1 al primer grupo en el cual está la función de “arrastre” y así sucesivamente. Además, con este ejercicio las estudiantes se dieron cuenta que para cada herramienta aparece un ícono diferente en dos colores.

Luego como parte de la exploración, se les pide a las estudiantes construir un ángulo y medirlo, y después construir un ángulo de medida específica.

#### **i. Construir un ángulo y encontrar su medida**

La intención de solicitar la construcción de un ángulo era poder introducir las herramientas “rayo” y “medida de ángulo”. En el siguiente fragmento se evidencia el conflicto que tienen las estudiantes entre su definición de ángulo y su imagen conceptual.

- E1: *¡Ah ya! Tiene una medida en grados.*
- E2: *Un ángulo está formado por dos rectas unidas por un punto que se llama vértice.*
- E1: *[Construye las dos rectas]. Pero nos resultan cuatro ángulos; esta construcción no nos sirve porque necesitamos uno sólo.*
- E2: *[Revisan dentro de las opciones que ofrece el programa]. Entonces probemos con segmentos*
- E1: *[Construye un ángulo con segmentos e intenta medirlo para lo cual despliega varios menús en busca de un ícono que se asemeje a un ángulo].*
- E2: *[Recuerda la definición de ángulo]. Luego para construir un ángulo ¿necesitamos son rayos?*
- [Construyen otro ángulo, usando rayos, al lado del primero.]*
- E1: *[Activa la opción de medida de ángulo e intenta medir el ángulo, seleccionando el vértice del ángulo luego un punto sobre uno de los rayos y por último un punto sobre el otro rayo]. ¡Ya! Mide noventa.*
- E2: *Pero ese ángulo es agudo no recto. [Identifica el ángulo recto]. Es que estás tomando él que no es.*
- Las niñas piensan por un momento.*
- E1 y E2: *Nombremos los puntos, mejor.*
- E2: *[Vuelve a medir el ángulo; esta vez comienza con un punto sobre el rayo, luego el vértice y por último un punto*

*sobre el otro rayo]. La medida del ángulo ABC es treinta grados.*

El proceso de instrumentalización que se refleja en este fragmento consiste en lograr que la representación en la calculadora coincida con la imagen conceptual que tienen de ángulo. Con esta tarea, descubren que es posible construir segmentos, rayos y medir ángulos. La respuesta que da Cabri como medida del ángulo choca con la visualización de la figura, lo cual las hace cambiar la forma como le indican al computador cuál es el ángulo. Para ello, recurren a la forma, ya conocida por ellas, de nombrar un ángulo. En el fondo, las estudiantes reconocen a Cabri como autoridad y, por ello, que fueron ellas las que procedieron de manera incorrecta a medir el ángulo.

## **ii. Construcción de ángulo de medida dada**

La siguiente tarea fue dirigida por una de las profesoras. La intención era introducir la herramienta “rotación” y lograr que las alumnas reconocieran que el ícono que aparece, cuando se activa esa herramienta, contiene la información sobre los elementos necesarios para poder actuar (en azul, un punto y una medida representada con la letra  $\alpha$ ) y el resultado de la acción (un punto en rojo). Ante la pregunta de cómo construir un ángulo de medida  $45^\circ$ , las estudiantes arrastran un lado del ángulo hasta obtener el número solicitado, es decir, hacen una construcción blanda.

*E1: Movemos los rayos hasta que dé. [Mueve los rayos y cuadra el número que muestra la medida del ángulo a la medida solicitada].*

*[La profesora les indica que hay una herramienta “rotación” que puede servir para hacer un ángulo.]*

*E2: [Busca dentro de los menús la opción de rotación y la activas].*

Luego de ello, la profesora sugiere usar la herramienta “rotación” para hacer una construcción robusta del ángulo con esa medida, **sin explicar cómo usarla**. Sin

embargo la construcción no es guiada por la docente del todo. Les deja como exploración encontrar los elementos necesarios para utilizar la herramienta que permite realizar la construcción robusta y luego pregunta por el procedimiento llevado a cabo al hacer la construcción.

*E1: [Identifica lo que necesita a través del ícono]. Necesitamos un segmento, un punto y una letra o ¿un número?*

*E2: [Realiza la construcción de un segmento y un punto, escribe un número y una letra. Activa "Rotación"]. Da un segmento pero inclinado.*

*E1: [Ante la pregunta de una de las observadoras, explica]. Pues no estaba segura si necesitaba una letra o un número, pero ya sabía que cuando activaba el ícono y me acercaba a lo que necesitaba Cabri me hacia una pregunta como ¿a esta recta? Y como no me pregunto por la letra y por el número sí, le di clic. También le di clic al segmento [Da clic a la pantalla sin darse cuenta y aparece un punto] y a un punto.*

Luego, una de las observadoras les pide utilizar nuevamente la herramienta pero esta vez les exige utilizar como punto de rotación el vértice del ángulo que se quiere construir, pidiéndoles además que hablen de las características del ángulo obtenido.

*E1: [Realiza de nuevo la construcción con la indicación dada]. Da un ángulo.*

*E2: [Susurra a su compañera]. Mídelo.*

*E1: [Mide el ángulo]. De la misma medida que el número que seleccioné. O sea que así se construye el ángulo de cuarenta y cinco grados.*

A diferencia de la construcción blanda, para la construcción robusta es necesaria la intervención de la profesora y algunas indicaciones.

Con esta actividad las alumnas aprenden lo que es una construcción blanda y una construcción robusta. Con ensayo y error, descubren que la letra  $\alpha$  del ícono representa un número y descubren que el resultado de usar esa herramienta es un segmento que determina con el segmento original un ángulo con la medida dada. Cabri apoyó ese proceso de descubrimiento a través de los diálogos que produce cuando el cursor se acerca a un objeto, como lo manifiesta  $E_1$ .

#### 4.2.2 Uso del artefacto

Para esta actividad,  $E_1$  y  $E_2$  deben abrir el archivo con el nombre *figura 1* y utilizar la herramienta homotecia, de nuevo sin dar instrucciones para su uso

*E1: Un  $k$  y un punto.*

*P: Y ¿quién será ese  $k$ ? ¿Qué se les ocurre que pueda ser?*

*E2: El nombre de un punto.*

*E1: Una letra.*

*P: ¿Qué más puede ser?*

*E2: Un número.*

*P: Miremos todas las opciones a ver qué sucede.*

*E1: [Ingresa una letra y un número en la pantalla. Realiza el mismo proceso que para la rotación, es decir acerca el cursor para ver con cuál de las dos opciones, letra o número, Cabri le hace una pregunta].*

Los conceptos previos y la manipulación del artefacto, utilizando las ayudas brindadas por éste, permiten que  $E_1$  y  $E_2$  identifiquen los elementos necesarios para la utilización de la herramienta.

Posteriormente, E1 y E2 activan la herramienta y comparan las dos imágenes que se ven en la pantalla para determinar semejanzas.

*E2: [Acerca el cursor al polígono y Cabri le realiza la pregunta: ¿Dilatar este polígono?]*

*P: ¿Qué sucedió?*

*E1 y E2: Apareció uno más grande.*

*P: ¿Qué característica tiene esta nueva figura?*

*E1 y E2: Tiene la misma forma y diferente tamaño.*

Este momento es relevante ya que las estudiantes mencionan componentes de la definición de semejanza, de una manera coloquial, que serán el punto de partida para formalizar dicha definición, siendo esto un elemento más del proceso de conceptualización. La visualización juega un papel importante en este instante, puesto que logran percibir la relación entre la figura y su imagen.

Al transcurrir la actividad, las estudiantes deciden nombrar los vértices de las figuras, teniendo en cuenta la relación de correspondencia entre ángulos y segmentos de ambas figuras. Las observadoras aprovechan este acto para preguntar por qué el uso de las mismas letras diferenciadas por el símbolo “prima”.

*E1: Coloquémosle nombres A con A', B con B'.*

*P: ¿Por qué colocas las letras en este orden y no en otro?*

*E1: Porque es la misma figura, pero como es otra se le colocan primas. Además este vértice que tiene nombre A debe ir con este otro que le colocaremos A'. [Señala los vértices correspondientes].*

La interacción anterior muestra que E1 y E2 no tienen dificultad en cuanto a la correspondencia entre los vértices de las figuras, posiblemente basadas en experiencia

previas y, de nuevo, en la visualización de características relevantes. Con ello, se evidencia que han identificado otro aspecto necesario para definir semejanza. Luego las observadoras solicitan a E1 y E2 que cambien el número que usaron para realizar la homotecia. En determinado momento deciden medir, puesto que les causó curiosidad el hecho de que una de las figuras resultantes les hubiese quedado más grande y la otra más pequeña, respecto a la figura original.

*P: Ahora miremos que pasa si en lugar de 2 tomamos 0.5.*

*E2: [Realiza la construcción]. Es más pequeño.*

*P: ¿Por qué?*

*E1: Porque dos es más grande que cero coma cinco.*

*P: Miremos, si es ahora tres ¿Qué sucede?*

*E2 y E1: Es todavía más grande.*

*[Las estudiantes deciden medir, ya que observan el mismo comportamiento en las figuras que cuando usaron el pantógrafo].*

*E1: [Le dice a su compañera]¿Pasa lo mismo que con el pantógrafo?*

*E1 y E2: [Miden segmentos correspondientes de cada uno de los cuatro polígonos de la pantalla].*

*[Debido a que aparecen muchas medidas en la pantalla deciden registrar en papel las medidas de los segmentos y el número que escribieron para obtener la homotecia].*

*E1: Éste es el doble del primero, éste la mitad del primero y éste es tres veces el primero.[Señalan las figuras en la pantalla]*

*P: Y ¿Qué más sucede?*

E2: *[Observa las figuras]. Los ángulos cambian.*

E1: *No. Son iguales. [Mide los ángulos correspondientes].  
Tienen la misma medida.*

En este apartado las estudiantes logran comprobar que las características “*misma forma y diferente tamaño*” están relacionadas con propiedades específicas, es decir comprueban una correspondencia entre los lados y los ángulos de las figuras que concierne a una proporción y a una congruencia respectivamente, aunque todavía estos términos no sean usados, más adelante tendrán importancia, puesto que para decidir si una figura es semejante a otra los usarán.

Logrando así darle significado al concepto de semejanza, enfrentando y resolviendo adecuadamente la actividad propuesta. En esta parte tienden más hacia la descripción, y no ven la necesidad de justificar, y muestran algunas deficiencias en el uso del lenguaje matemático preciso. En seguida se solicita a las estudiantes que muevan los puntos con los cuales realizaron la homotecia y que expliquen lo que sucede.

E1: *La figura inicial se mueve.*

E2: *[Observa fijamente y concluye] La distancia de este punto a este punto y de este punto a este punto parecen ser iguales. [Señala el centro de dilatación y un punto de la figura original; luego ese último punto y su correspondiente en otra figura].  
[Mide las distancias entre los puntos para confirmar lo que dice]. Por más que se mueva la figura la distancia es igual.*

P: *¿Qué pasa con esos puntos? ¿Quiénes son?*

E1: *[Por un momento medita sobre la situación y afirma temerosa] Son puntos que están en una misma línea...  
[Construye una recta, y verifica que ésta contiene los tres*

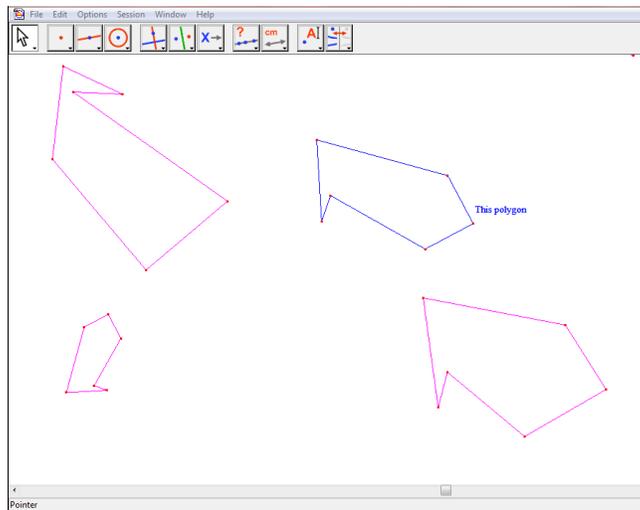
puntos].

*P:* Es decir, son colineales, ya que se encuentran en una misma recta.

Esta actividad tenía como finalidad realizar acciones que puedan sacar a la luz la relación con el punto de fuga, en la cual necesitaron el concepto de colinealidad, por lo cual se hace necesario incluirlo en la interacción para que las estudiantes puedan hablar con propiedad y seguridad. Este hecho posteriormente se constituyó en la única prueba de las estudiantes para verificar que las figuras eran semejantes.

#### 4.2.3 Establecimiento de propiedades matemáticas de la semejanza

Para esta actividad se les pide a las estudiantes que revisen de un grupo de figuras cuales creen que fueron hechas con la herramienta homotecia y sustenten sus ideas.



#### Actividad con Cabri

*E1 y E2:* [Al mismo tiempo señalan la misma figura]. Ésta.

*P:* ¿Por qué?

*E1:* Porque tiene la misma forma, pero diferente tamaño. [Mide los lados y los ángulos, de la figura que afirma fue hecha con homotecia]. Además, si unimos los puntos correspondientes resultan colineales.

- E2: [Observa detalladamente los segmentos correspondientes y sus respectivas medidas]. La figura inicial es la mitad de la figura que decimos que resulta de una homotecia.*
- E1: No. Como para la homotecia necesitamos la figura inicial y luego el número, entonces la figura que decimos que resulta de una dilatación es el doble de la inicial.*
- P: ¿Cuál otra figura resulta de una homotecia?*
- E1 y E2: [Analizan varias figuras, moviendo el ratón de figura en figura].*
- P: ¿Por qué pasaron estas figuras?*
- E1 y E2: Porque éstas no se realizaron con homotecias.*
- P: ¿Por qué dicen eso?*
- E1: Porque ésta no tiene esta punta. [Señalando uno de los ángulos de las figuras].*
- E2: Y éste tiene mucha punta. [Señalando uno de los ángulos de otra de las figuras].*
- E2: Éste sí. [Señala una figura].*
- P: ¿Por qué dices eso?*
- E1: Tiene la misma forma pero es más grande y esta rotada.*
- E2: Ésta también. [Señala otra figura]. Solo que ésta es más pequeña.*
- E1: Ésta no porque al unir los puntos correspondientes no va a dar. [Realiza la construcción de las rectas que pasan por los puntos correspondientes].*
- E2: No se unen como cuando lo hacemos con dilatación en un*

*punto.*

Se logra evidenciar que las estudiantes han creado una imagen conceptual de semejanza entre figuras, por lo cual son capaces de enunciar una primera definición, puesto que logran caracterizar figuras semejantes y no semejantes a través de los componentes mencionados en las actividades anteriores.

El que puedan distinguir fácilmente figuras resultantes al aplicar la herramienta homotecia de aquellas que no resultan, siendo estas muy similares, vislumbra la apropiación del concepto estudiado, mencionando características y visualizando componentes necesarios para sustentar las declaraciones hechas sobre una figura.

Alcanzando integrar la imagen conceptual a la definición del concepto, recurriendo de forma cíclica a sus conocimientos previos y relaborando el concepto de semejanza.

Cuando finalizan la actividad se les solicita a las estudiantes escribir las conclusiones del proceso que llevaron a cabo durante todas las actividades y posteriormente se les cuestiona por la conclusión a la que han llegado. Con lo cual las dos estudiantes mencionan una primera definición de semejanza.

*E1 y E2: Las figuras son semejantes si tienen la misma forma pero diferente tamaño, Es decir diferentes medidas en los segmentos, pero con los ángulos iguales. [Señalan figuras semejantes].*

En la última parte de la actividad las estudiantes muestran algunas de las características para formular la definición de semejanza y si bien no está elaborada con un lenguaje matemático apropiado, sus aportes son precisos y necesarios aunque no suficientes.

Recurriendo al *proceso de definir descriptivamente*, donde la imagen conceptual se desarrolla antes de que una definición del concepto, se logre que las estudiantes mencionen características generales y particulares mediadas por la actividad

instrumentada, imágenes conceptuales y conocimientos previos, generando una definición estructurada.

### 4.3 TERCER EPISODIO

A continuación se describe el análisis hecho a cada una de las transcripciones hechas a E<sub>1</sub> y E<sub>2</sub> sin artefacto, aun cuando este tercer episodio se hizo por separado con cada una de las estudiantes, se muestra en paralelos fragmentos más importantes de las transcripciones, puestos que sus procesos fueron muy parecidos.

Se les entregó el material a E<sub>1</sub> y E<sub>2</sub> para desarrollar el trabajo, hojas blancas, regla, compás, transportador y la figura inicial (ver figura 1), acompañados de la siguiente instrucción

*Observa la figura dada (ver figura 1). A partir de ésta figura, dibuja una figura semejante, sin utilizar herramientas como el pantógrafo o Cabri.*

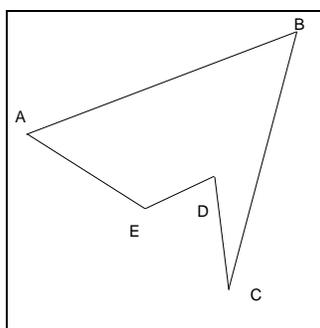


Figura 1

EPISODIO E <sub>1</sub>	EPISODIO E <sub>2</sub>
<p>Siguiendo la instrucción, E1 intenta resolver la actividad</p> <p><i>E1: [Tratando de seguir las instrucciones, realizó un primer intento que duró 15 minutos]. Voy</i></p>	<p>E<sub>2</sub> intenta resolver la actividad</p> <p><i>E<sub>2</sub>: [La estudiante se quedó observando la figura y los instrumentos dados por más de 5 minutos].No entiendo, ¿me</i></p>

*a medir los segmentos. Y voy a dibujarlos otra vez, pero doblando esa medida.*

*P: ¿Y por qué doblando la medida?*

*Porque la quiero hacer más grande, mejor dicho: que el factor sea el número 2.*

*E1: [La estudiante trató de dibujar una figura semejante a la original con los segmentos que tenían el doble de la medida de los originales]. Pero tengo un problema. No me cuadra la figura A'B'C'D'E'. ¡No la puedo cerrar!*

En este apartado se evidencia que E1 recuerda una de las conclusiones a las que había llegado en las actividades anteriores, la proporcionalidad de los lados correspondientes, sin embargo olvida que los ángulos correspondientes deben ser congruentes.

Debido a las afirmaciones hechas por E<sub>1</sub>, se le cuestiona a que se refiere con que “No la puede “cerrar” a lo cual contesta

*E<sub>1</sub>: [La estudiante intento durante 15 minutos aproximadamente hacer una figura semejante a la*

*toca medir los segmentos y los ángulos y dar el factor?*

*P: ¿Qué recuerdas que debes hacer para dibujar una figura semejante a otra?*

*E<sub>2</sub>: Pues me acuerdo de varias condiciones, voy a empezar con la de los lados y para esto voy fijar mi factor que va hacer el dos.*

*P: ¿Y para qué el factor?*

*E<sub>2</sub>: Porque quiero que la medida de los segmentos, sea el doble de la original. Y para eso voy a medir todos los segmentos.*

En este apartado se evidencia que E<sub>2</sub> recuerda una de las conclusiones a las que había llegado en las actividades anteriores como:

- La proporcionalidad de los lados correspondientes.

Debido a las afirmaciones hechas por E<sub>2</sub>,

<p><i>original, teniendo como una condición la medida de los segmentos. Pero no lo logré]. Es que cada segmento mide el doble del original, pero me toca saberlos cuadrar, para que me dé la misma figura.</i></p> <p>Después de un tiempo, es notorio que al faltarle contemplar todas las características necesarias para obtener una figura semejante a otra, no es posible resolver la actividad; sin embargo, implícitamente llega a la propiedad que le hace falta, pues se da cuenta que sólo si “Cuadra” los segmentos la figura le resultará semejante.</p> <p>E1 realiza varios intentos y logra acordarse de lo que le hace falta</p> <p><i>E<sub>1</sub>: [Aun cuando en uno de esos intentos le resultó una figura más o menos parecida a la original, puesto que trato de cuadrar la posición de los segmentos, vio que no le resultó esta estrategia para dibujar una figura semejante a la original y empezó a medir los ángulos]. Ya me acorde que debo tener presente la medida de los ángulos.</i></p>	<p>se le cuestiona a que se refiere con que “No me da” a lo cual contesta</p> <p><i>E<sub>2</sub>: [Después de medir todos los segmentos de la figura, inició a dibujar una semejante a la original]. ¡Esto es muy difícil! No me da figura, ya que si uso estas nuevas medidas la forma de la figura se me distorsiona.</i></p> <p>Después de un tiempo, es notorio que al faltarle contemplar todas las características necesarias para obtener una figura semejante a otra, no es posible resolver la actividad, sin embargo implícitamente llega a la propiedad que le hace falta, pues se da cuenta que sólo si “Cuadra” los segmentos la figura le resultará semejante. Pero para esto debe realizar varios intentos, logra acordarse de lo que le hace falta.</p> <p><i>E<sub>2</sub>: [La estudiante duro 10 minutos tratando de dibujar la nueva figura, pero nunca le resultó]. Como no me resultó con solo la medida de los segmentos entonces voy a medir los ángulos que son los que me cambian al dibujar la nueva figura.</i></p>
---	--

<p><i>P: ¿Por qué?</i></p> <p><i>E<sub>1</sub>: Porque antes no me acordaba que, aun cuando la medida de los segmentos se puede cambiar con el factor que uno quiera, los ángulos siempre van a medir lo mismo.</i></p> <p><i>[Después medir los ángulos, intentó nuevamente dibujar la figura semejante al polígono ABCDE]. ¡Ah ya! Ahora si me da semejante, tiene la misma forma, pero diferente tamaño.</i></p> <p>Se evidencia que E<sub>1</sub> se ha apropiado del concepto, pues logra solucionar una actividad con materiales distintos además de recordar los componentes o las dos características fundamentales de la definición, para obtener una semejanza, que había enunciado en las experiencias anteriores.</p> <p>Luego vuelve a hacer la construcción puesto que la figura resultante, es obtenida a través de una reducción y no con una ampliación que era lo que quería inicialmente</p>	<p><i>P: ¿Por qué?</i></p> <p><i>E<sub>2</sub>: Porque necesito que no se me dañe la forma de la figura, no importa que cambie el tamaño pero para que me de semejante a la original me toca que los ángulos se mantengan congruentes.</i></p> <p><i>E<sub>2</sub>: [Después medir los ángulos, intentó nuevamente dibujar la figura semejante al polígono ABCDE, pero ella tuvo en cuenta también la nueva medida de los segmentos]. Me tocó dibujar los mismos ángulos, es decir con la misma medida y con la nueva medida de los segmentos.</i></p> <p><i>E<sub>2</sub>: Ahora si me quedó ya que tiene la misma forma, pero diferente tamaño.</i></p> <p>Se evidencia que E<sub>2</sub> se ha apropiado del concepto, pues logra solucionar una actividad con materiales distintos además de recordar los componentes o las dos características fundamentales de la definición, claro que hay que resaltar que</p>
---	--

<p><i>E<sub>1</sub>: Sí. Se me olvidó. Yo quería ampliar la figura y me quedó más pequeña.</i></p> <p><i>Pero ya sé cómo hacerla. Como tengo el doble de la medida de los segmentos, con éstos puedo dibujar los ángulos.</i></p> <p><i>Ahora si la pude hacer. La medida de los segmentos de la figura A'B'C'D'E' me quedaron el doble de la figura ABCDE y sus ángulos son congruentes.</i></p> <p>Lo anterior muestra que E<sub>1</sub> tiene en cuenta que para realizar una semejanza la proporción entre lados correspondientes está ligado a un factor y este es el que determina si la figura se amplía o se reduce. Además muestra que a pesar de fallar en su intento, reconoce su error en la construcción y no en la obtención de figuras semejantes, puesto que acepta el resultado de la reducción como una figura semejante solo que no era la deseada.</p> <p>Por iniciativa de E<sub>1</sub>, quien afirma que debe hacerse una prueba, de que lo que ha realizado si es una semejanza, procede de la siguiente forma</p>	<p>se le dificulto bastante lograrlo sin los dos artefactos ya antes utilizados.</p> <p>Por iniciativa de E<sub>2</sub>, quien afirma que debe hacerse una prueba, de que lo que ha realizado si es una semejanza, procede de la siguiente forma:</p> <p>E<sub>2</sub>: Pero me falta hacer la prueba.</p> <p>P: ¿Cómo así la prueba?</p> <p>E<sub>2</sub>: [En ese momento no quiere hablar y pide que se le dé un tiempo de 10 minutos para mostrarnos lo que quería hacer y a lo que le llamaba prueba]. Esperen quiero comprobar que las dos figuras si sean semejantes.</p> <p>E<sub>2</sub>: [Encima de la mesa cuadró las dos figuras a cierta distancia y posición y empezó a trazar rectas]. Ya ahora si encontré el punto de la dilatación.</p> <p>P: ¿Qué quieres decir con el punto de la dilatación?</p> <p>E<sub>2</sub>: ¡Pues que me den los</p>
--	--

<p><i>E<sub>1</sub>: Ahora sólo me falta hacer la prueba.</i></p> <p><i>P: ¿Y cómo haces la prueba?</i></p> <p><i>Pues encontrando los tres puntos colineales, por ejemplo A, A', O, otros tres puntos colineales son B, B', O.</i></p> <p><i>[Después de comprobar, todos los puntos colineales la estudiante dio su conclusión]. Las dos figuras son semejantes, ya que tienen la misma forma, es decir sus ángulos congruentes y diferente tamaño ya que aun cuando la medida de los segmentos correspondientes es diferente se mantienen sus proporciones.</i></p> <p>Al utilizar la homotecia para llegar a construir el concepto de semejanza, E1 recurre a encontrar proyecciones para demostrar que ha obtenido una semejanza; sin embargo, en su definición este componente no es mencionado.</p> <p>Finalmente se le cuestionó por la precepción que tenía E<sub>1</sub> de la actividad</p> <p><i>E<sub>1</sub>: ¡Muy difícil!</i></p>	<p>puntos correspondientes colineales con ese punto!</p> <p>P: ¿Y para qué?</p> <p>E<sub>2</sub>: Para, comprobar que la distancia sea igualita y así comprobar que sean semejantes.</p> <p>Para la E<sub>2</sub> era de suma importancia encontrar el punto de dilatación, puesto que esta característica le permite comprobar si el trabajo realizado quedó bien hecho.</p>
---	---

*P: ¿Por qué difícil?*

*E<sub>1</sub>: Porque me tocó ponerme a cuadrar la posición de los ángulos y los segmentos, muchas veces para que me diera la figura semejante que yo quería.*

*Además si hubiera usado el pantógrafo, en las regletas hubiera podido cuadrar el factor para ampliar la figura y solo tenía que subrayar la figura ABCDE y de una me salía la figura A'B'C'D'E' semejante.*

E<sub>1</sub> afirma que la actividad tiene más dificultad que las anteriores que había realizado, puesto que con los artefactos las figuras semejantes eran mostradas de inmediato y lo que debía hacer era encontrar las relaciones y características entre estas figuras, en cambio para esta actividad lo que debía hacer era utilizar esas características y relaciones para obtener sus construcciones, es decir, el proceso inverso, con lo cual se recurría al *proceso de definir descriptivamente* y al *proceso constructivo*.

## 5. CONCLUSIONES

En primer lugar, se muestra un cuadro comparativo entre las actividades hechas con pantógrafo y Cabri. Posteriormente se exponen las conclusiones generales del estudio realizado, y para terminar se manifiestan las conclusiones personales de las autoras.

### ¿Pantógrafo o Cabri?

A continuación se evidencian algunas de las características que surgieron del uso de cada uno de los artefactos durante la implementación y posterior análisis de las actividades.

<b>PANTÓGRAFO</b>	<b>CABRI</b>
<ul style="list-style-type: none"><li>• La exploración libre del manejo del pantógrafo permitió que las estudiantes identificaran sus elementos y la finalidad del pantógrafo.</li><li>• No fue inmediato ni fácil el descubrimiento del funcionamiento del artefacto.</li><li>• No lograron claridad respecto a la enumeración de las perforaciones en las regletas pero si de las perforaciones mismas.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• La exploración del software requiere desarrollarse a través de una actividad guiada, debido a que las herramientas ofrecidas son numerosas y, para nuestro caso, sólo algunas se necesitaban.</li><li>• La presentación del programa en computador facilitó la exploración para determinar qué herramientas incluye, puesto que con el título y su correspondiente ícono, las alumnas, de forma visual, pudieron identificar el objeto geométrico relacionado con esa herramienta y la relación geométrica correspondiente.</li></ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aun cuando es dispendioso el manejo del artefacto, éste permite observar más detalladamente el proceso que se realiza (al repisar la figura) para obtener la figura resultante.</li> <li>• Al utilizar el artefacto y al observar lo que está sucediendo al manejarlo, se identifican una característica propia del concepto semejanza:  <i>“Misma forma, diferente tamaño”</i></li> <li>• <math>E_1</math> y <math>E_2</math> lograron establecer propiedades como: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Correspondencia entre los vértices A y A'</li> <li>• Proporcionalidad entre la longitud de los segmentos correspondientes, sin embargo dado que el uso del artefacto no fue exacto no lograron descubrir la razón entre esas proporciones.</li> </ul> </li> <li>• La génesis instrumental del artefacto fue un proceso que tomó bastante tiempo para <math>E_1</math> y <math>E_2</math>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dado que en cada ícono se presentan imágenes en dos colores, las alumnas descubrieron que uno de ellos (rojo) indicaba el objeto sobre el cual se va a actuar y lo que se necesita, y el otro (azul) el resultado.</li> <li>• Por tanto <math>E_1</math> y <math>E_2</math> identificaron que para aplicar la herramienta homotecia, es necesario tener en cuenta tres componentes: un número o factor, un punto (punto de fuga) y una figura.</li> <li>• <math>E_1</math> y <math>E_2</math> visualizaron fácilmente la relación entre la figura inicial y la resultante, sin embargo como ellas lo manifestaron, no fue evidente el proceso para obtener la nueva figura al aplicar la herramienta homotecia.</li> <li>• Al tener claro los componentes necesarios para aplicar la herramienta homotecia, las estudiantes logran construir, una definición aprendida el concepto de semejanza, puesto que tienen en cuenta las siguientes características: <ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>misma forma diferente tamaño</i></li> <li>• <i>proporcionalidad entre lados</i></li> </ul> </li> </ul>
---	--

	<p><i>correspondientes.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>congruencia entre ángulos correspondientes</i></li> <li>• E<sub>1</sub> y E<sub>2</sub> con el uso de Cabri solicitaron las palabras adecuadas para enunciar propiedades encontradas.(colinealidad, correspondencia, congruencia)</li> </ul>
--	--

Del cuadro anterior es posible concluir que:

- Las características del concepto de semejanza, proporcionalidad entre longitudes de segmentos correspondientes y congruencia de ángulos correspondientes, son evidenciados por los estudiantes en ambos momentos con pantógrafo y Cabri. Aunque en las actividades con el pantógrafo E<sub>1</sub> y E<sub>2</sub> las nombran de manera coloquial en las actividades con Cabri son enunciadas en lenguaje matemático.
- La manipulación de cada uno de los artefactos permitió a las estudiantes conocer diferentes procesos para obtener figuras semejantes.

### **Generales**

De manera general, arroja los siguientes resultados:

- Se logró fomentar, crear y aplicar actividades geométricas que permitieron la construcción del concepto semejanza, haciendo uso de dos artefactos.
- El pantógrafo y Cabri son artefactos que le permiten al estudiante realizar procesos como: medir, generalizar, justificar, verificar entre otros y habilidades propias de la geometría como establecer relaciones entre figuras, construcciones, visualización matemática... etc.
- Los procesos de visualización e instrumentalización son de gran importancia en el proceso de conceptualización, ya que E<sub>1</sub> y E<sub>2</sub> aluden a las imágenes conceptuales

y las experiencias al manipular los artefactos cuando se les solicita realizar una figura semejante a otra dada sin utilizar pantógrafo o Cabri.

- $E_1$  y  $E_2$  son quienes construyen autónomamente la definición de semejanza, a partir de la observación de características propias de dicho concepto. Además se apropian de este concepto a tal grado que generan una forma de validar sus resultados y procedimientos.

En síntesis los dos artefactos se complementan, cada uno aportando elementos para la formulación, construcción y comprensión del concepto de semejanza.

### Personales

- El desarrollo de este trabajo nos permitió darnos cuenta que es posible diseñar e implementar actividades con artefactos poco usuales en el aula de clase, que permitan desarrollar el interés, motivación y niveles altos de visualización de los estudiantes para sus afirmaciones.
- Esta experiencia nos permitió evidenciar que el proceso de conceptualización se puede dar en dos formas, la primera en donde se inicia por dar la definición al estudiante y luego él va construyendo imágenes conceptuales. Y otro donde los estudiantes construyen las imágenes conceptuales y a partir de estas se genera la definición, siendo este último de mayor provecho puesto que se convierte en un ir y venir entre imágenes conceptuales que se modifican y afirmaciones que se presentan como definiciones.
- Surgen como cuestiones para responder posteriormente:
  - ¿Existe la posibilidad de que las actividades diseñadas sean implementadas con un grupo más grande y se obtengan los mismos resultados?
  - ¿Sería mejor utilizar primero Cabri, que el pantógrafo? ¿Por qué?

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- Aya, O., & Echeverry, A. (2009). Geometría dinámica en el proceso de definir. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Pedagógica Nacional.
- Acosta, M., Camargo, L., Castiblanco, A., Urquina, H. 2004. Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Bogotá D.C., Colombia. Extraído el 7 de septiembre de 2012 desde [http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articulos-113753\\_archivo.pdf](http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articulos-113753_archivo.pdf).
- Clemens, S., O'Daffer, P & Cooney, T. (1998). Geometría con aplicaciones y solución de problemas. México. Addison Wesley Iberoamericana, S.A.
- D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. Uno. Barcelona, España. Extraído el 2 de agosto de 2012 de <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/479%20Conceptualizacion.pdf>
- Delgado, F., & Peña, F. (2010). Cabri, un camino para propiciar unidad cognitiva: un estudio de casos. Trabajo de grado no publicado. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C., Colombia
- Drijvers, P. (2003). Aprender matemáticas en un entorno de algebra computacional: los obstáculos constituyen oportunidades. Extraído el 26 de septiembre de 2012 desde <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/55/Articulo02.pdf>.
- Hoyos, V. (2006). Funciones complementaria de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria. Extraído el 25 de febrero de 2012 desde <http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v24n1p31.pdf>.
- Martignone, F. y Antonini, S. (2011). Pantographs for geometrical transformations: an explorative study on argumentation. Extraído el 17 de septiembre de 2011 en: [http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7\\_WG1\\_antonini\\_martignone.pdf](http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7_WG1_antonini_martignone.pdf).
- Samper, C. 2008. Geometría. Bogotá D.C., Colombia: Editorial norma.

## ANEXOS

### ANEXO 1

CICLOS DE COLEGIA -TURA	ESTÁNDARES	INDICADORES DE LOGROS PROPUESTOS PARA E <sub>1</sub>	INDICADORES DE LOGROS PROPUESTOS PARA E <sub>2</sub>
<p><i>Primero a tercero</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconozco nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia.</li> <li>• Represento el espacio circundante para establecer relaciones espaciales.</li> <li>• Reconozco y aplico traslaciones y giros sobre una figura.</li> <li>• Reconozco y valoro simetrías en distintos aspectos del arte y el</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Maneja adecuadamente la regla para trazar líneas y figuras.</li> <li>• Identifica metro como una medida de longitud.</li> <li>• Identifica y clasifica ángulos según su medida.</li> <li>• Reconoce figuras</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica las rectas y los segmentos como elementos básicos de la geometría.</li> <li>• Construye figuras geométricas teniendo en cuenta sus medidas.</li> <li>• Identifica y grafica los giros.</li> <li>• Ubica parejas ordenadas en el</li> </ul>

	<p>diseño.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconozco congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir).</li> <li>• Realizo construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figuras geométricas bidimensionales.</li> <li>• Desarrollo habilidades para relacionar dirección, distancia y posición en el espacio.</li> </ul>	<p>simétricas respecto al eje de simetría.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Se ubica adecuadamente en el espacio.</li> </ul>	<p>plano cartesiano.</p>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.</li> <li>• Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica las diferentes clases de triángulos y cuadriláteros y establece relaciones entre ellos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica y establece conceptos básicos de geometría.</li> </ul>

<p>Cuarto a quinto</p>	<p>esquinas en situaciones estáticas y dinámicas.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilizo sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales.</li> <li>• Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.</li> <li>• Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.</li> <li>• Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.</li> </ul>		
<p>Sexto a séptimo</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Clasifico polígonos en relación con sus propiedades.</li> <li>• Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica propiedades de diferentes polígonos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprende las diferentes transformaciones rígidas sobre un plano.</li> </ul>

	<p>(traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.</li> <li>• Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.</li> <li>• Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.</li> <li>•</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprende y aplica las posibles transformaciones que se dan en un problema, para trabajar en un plano cartesiano.</li> </ul>	
--	--	---	--

<p>Octavo a novenos</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).</li> <li>• Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica los criterios de congruencia de triángulos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprende y aplica el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.</li> </ul>
-----------------------------	--	--	---

## **ANEXO 2. PLANEACIÓN: ACTIVIDADES CON PANTÓGRAFO**

### **DESCRIPCIÓN**

Las actividades que se describirán a continuación, hacen parte de la primera interacción que harán estudiantes con el artefacto pantógrafo. Dichas actividades están diseñadas en tres etapas de trabajo: exploración del artefacto, uso del artefacto, y establecimiento de propiedades matemáticas de la semejanza. Para cada una de ellas las estudiantes contarán con los materiales pertinentes.

### **TIEMPOS DESTINADOS**

- Exploración del artefacto, para esta actividad el tiempo aproximado es de dos horas.
- Construcción de una figura semejante a otra dada, en este caso el tiempo estimado es de una a dos horas.
- Categorización de figuras semejantes, para la realización de esta actividad se estima un tiempo de una hora.

### **OBJETIVOS DE ENSEÑANZA**

- Instruir y propiciar el manejo del pantógrafo con el fin de que los estudiantes sean capaces de realizar diferentes construcciones donde involucren sus conocimientos para la solución de tareas específicas.
- Construir la definición de semejanza a partir de actividades que involucren los aspectos necesarios para que los estudiantes conceptualicen este término.

### **OBJETIVO CONCEPTUAL**

- Institucionalizar el concepto de semejanza

### **OBJETIVOS PROCEDIMENTALES**

- Manipular y aprender a utilizar correctamente un recurso poco convencional.

### **OBJETIVOS ACTITUDINALES**

- Suscitar el interés por la realización de trabajo en equipo, colaboración para comprender y argumentar afirmaciones.
- Suscitar el desarrollo de habilidades visuales.
- Desarrollar actividades matemáticas con materiales no usuales en el aula de clase.
- Motivar interés por el uso de herramientas poco convencionales en la clase de geometría.

## **LOGROS**

Se espera que el estudiante logre:

### Actitudinal:

- Trabaje en equipo
- Se interese por el uso de artefactos no convencionales para la enseñanza de las matemáticas.
- Comunica sus ideas por medio de afirmaciones matemáticas.

### Procedimental:

- Identificar propiedades de figuras semejantes a través de la verificación visual.
- Explora para buscar propiedades.
- Usa procesos de visualización para definir relaciones geométricas.
- Pone a prueba sus afirmaciones al construir figuras semejantes y utilizar las herramientas adecuadas del artefacto.

### Conceptual:

- Da respuestas a las preguntas de los ejercicios propuestos por la docente.
- Describe con coherencia las razones de las afirmaciones hechas.
- Muestra interés por las actividades propuestas.

## **PRERREQUISITOS**

- Corresponden a los conocimientos previos, destrezas, habilidades que se consideran necesarios para realizar el trabajo propuesto.
  - Conocimientos previos: conceptos relacionados a ángulos, figura geométrica.
  - Destrezas y habilidades: Medir, dibujar, formular, visualizar y conjeturar.
- Identifica y caracteriza polígonos por sus lados y sus ángulos.

### **RECURSOS DIDÁCTICOS:**

Hojas, lápiz, regla, compás y transportador.

Dos pantógrafos

### **Exploración del artefacto**

Teniendo en cuenta que las estudiantes no han tenido la oportunidad de manipular este artefacto, durante su exploración se pretendía que lograran constituir una *génesis instrumental (Instrumentalización e Instrumentación)*, puesto que era la primera vez que ven el pantógrafo, No se quería que la introducción al artefacto fuera limitarse a una simple observación. Se buscaba que manipularan el pantógrafo y, a través de preguntas, se generara una discusión respecto a la forma del artefacto, a sus elementos o incluso a la forma de usarlo y lo que produce.

La siguiente actividad se realiza oralmente. A las estudiantes sólo se les entrega el pantógrafo, hojas y una hoja con una figura geométrica. Las preguntas se realizan a medida que la estudiante explora el material y descubre cómo se utiliza el pantógrafo.

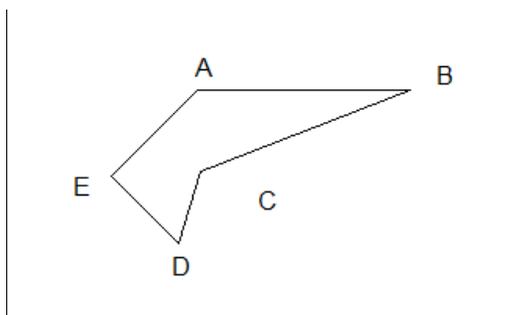


Figura 1

<b>Actividad</b>	<b>Descripción</b>	<b>Opciones</b>
<b>Exploración del artefacto</b>	Se le dará un tiempo determinado (20 minutos), para que el $E_1$ y $E_2$ exploren el artefacto	Esta exploración aun cuando parezca libre, en realidad será mediada puesto que se les pedirá a $E_1$ y $E_2$ , que dibujen una figura y luego la repisen con el lápiz del pantógrafo.
<b>Uso del artefacto</b>	Para esta actividad $E_1$ y $E_2$ , deberán usar el pantógrafo tal que logren dibujar una figura semejante a la figura original	➤ Habiendo ya descubierto el papel de los elementos que componen el pantógrafo, esta actividad tiene como intención que $E_1$ y $E_2$ descubran qué se puede hacer con un pantógrafo y la relación geométrica entre la figura producida y la figura original, es decir, algunas propiedades de la semejanza.
<b>Establecimiento de propiedades matemáticas de la semejanza</b>	El propósito de esta actividad es reforzar o aclarar las relaciones que se han establecido a partir de la construcción de una figura usando el pantógrafo. Dado que se solicita justificar la razón para rechazar o	➤ $E_1$ y $E_2$ pueden mediante diferentes procesos (visualización o conceptualización) identificar y argumentar sus estrategias para identificarlas figuras semejantes a la original

	<p>aceptar que una figura sea imagen de la figura original tiene como objetivo que se expresen verbalmente las percepciones, formadas con la actividad anterior, acerca de lo que son figuras semejantes.</p>	
--	---	--

### **ANEXO 3 PLANEACIÓN: ACTIVIDADES CON CABRI**

#### **DESCRIPCIÓN**

- Esta actividad se divide en tres partes o etapas, la primera la exploración del artefacto, la segunda construcción de una figura semejante a otra y finalmente la categorización de figuras semejantes a otra.

Instruir y propiciar el manejo del software Cabri con el fin de que los estudiantes sean capaces de realizar diferentes construcciones donde involucren sus conocimientos para la solución de tareas específicas.

- Construir la definición de semejanza a partir de actividades que involucren los aspectos necesarios para que los estudiantes conceptualicen este término.

#### **TIEMPOS DESTINADOS**

- Exploración del artefacto, para esta actividad el tiempo aproximado es de dos horas.
- Construcción de una figura semejante a otra dada, en este caso el tiempo estimado es de una hora y media.
- Categorización de figuras semejantes, para la realización de esta actividad se estima un tiempo de una hora.

## **OBJETIVOS DE ENSEÑANZA**

### *OBJETIVO CONCEPTUAL*

Institucionalizar el concepto de semejanza

### *OBJETIVOS PROCEDIMENTALES*

Manipular y aprender a utilizar correctamente el recurso informático.

### *OBJETIVOS ACTITUDINALES*

- Suscitar el interés por la realización de trabajo en equipo, colaboración para comprender y argumentar afirmaciones.
- Suscitar el desarrollo de habilidades visuales.
- Desarrollar actividades matemáticas con materiales no usuales en el aula de clase.
- Motivar interés por el uso de herramientas computacionales en la clase de geometría.

**LOGROS** Se espera que el estudiante logre:

#### Actitudinal:

- Trabaja en equipo
- Se Interese por el uso de software para la enseñanza de las matemáticas.
- Comunica sus ideas por medio de afirmaciones matemáticas.

#### Procedimental:

- Identificar propiedades de figuras semejantes a través de la verificación visual.
- Explora para buscar propiedades.
- Usa procesos de visualización para definir relaciones geométricas.
- Pone a prueba sus afirmaciones al construir figuras semejantes y utilizar las herramientas adecuadas del software.

### Conceptual:

- Da respuestas a las preguntas de los ejercicios propuestos por la docente.
- Describe con coherencia las razones de las afirmaciones hechas.
- Muestra interés por las actividades propuestas.

### **PRERREQUISITOS**

- Corresponden a los conocimientos previos, destrezas, habilidades que se consideran necesarios para realizar el trabajo propuesto.
  - Conocimientos previos: Los que competen a definiciones de figura geométrica, ángulos.
  - Destrezas y habilidades: Visualizar, analizar, medir, manejo de herramientas básicas tecnológicas, formular y conjeturar.
- Identifica y caracteriza polígonos por sus lados y sus ángulos.

### **RECURSOS DIDÁCTICOS**

#### *Materiales convencionales:*

Hojas, lápiz, regla, compas y transportador.

#### Materiales tecnológicos:

Computador

Software Cabri

### **Actividades con geometría dinámica (Cabri)**

A continuación se describen cada una de las etapas que componen esta actividad, para lo cual se elaboró una tabla en donde se encuentra la actividad con su respectiva descripción y con algunas opciones en caso de que lo descrito no salga de la manera deseada.

## Exploración del artefacto

Los estudiantes por pareja tendrán un computador para realizar las siguientes actividades. En primer lugar se les otorga un tiempo determinado para realizar una exploración libre, posteriormente se les solicita construir un segmento y un ángulo además de solicitarles que los midan, construir un ángulo de medida  $45^\circ$  y finalmente construir un polígono.

<i>Actividad</i>	<i>Descripción</i>	<i>Opciones</i>
Explora el programa de Cabri, sus iconos.	Se le dará un tiempo determinado (20 minutos), para que el estudiante explore los iconos del programa Cabri.	Esta exploración será libre, es decir el estudiante podrá dibujar lo que quiera según las herramientas que le llamen la atención.
Cómo construir, nombrar y medir un segmento, “Queremos que el segmento me dé un número determinado”	Se le pedirá al estudiante que trace un segmento. Para esto el estudiante tiene deberá buscar entre los iconos la opción segmento.	Para esto el estudiante tendrá la posibilidad de buscar entre los iconos la opción segmento. (exploración libre)
Cómo construir, nombrar y medir un ángulo.	Se le pedirá al estudiante que trace un ángulo y que lo mida.	El estudiante tendrá un tiempo libre para realizar la actividad, si este no puede realizarla el entrevistador intercede y le explica la

	<p>Al trazarlo se le pedirá que ahora ese ángulo tenga una medida de 45° <i>¿Cómo lo logras?</i></p> <p>Por arrastre</p> <p>Por rotación</p>	<p>forma de crear un ángulo y medirlo.</p> <p>Como se le pide al estudiante que el ángulo tenga una medida de 45, éste podrá hacerlo por arrastre o por rotación.</p> <p>Bajo esta herramienta el estudiante “cuadra” el ángulo a una medida de 45°.</p> <p>Si al estudiante no se le ocurre esta opción que es lo más probable, el guía intervendrá y le explica la forma de utilizar la herramienta, luego le preguntará por los pasos llevados a cabo para obtener el ángulo, con el fin de resaltar la información brindada por el icono.</p>
<p>Construcción de un polígono</p>	<p>Se le pide por último al estudiante que dibuje un</p>	<p>El estudiante tendrá tiempo libre para realizar la</p>

	polígono.	actividad.  Finalmente se le mostraran las herramientas de polígono regular y polígono.
--	-----------	---

Construir una figura semejante a otra dada

Para esta actividad se les solicita a los estudiantes que abran el archivo Figure #1 y que intenten utilizar la herramienta homotecia.

Actividad	Descripción	Opciones
Construcción de una homotecia dado un polígono	<p>La estudiante deberá abrir el documento de Cabri que lleva el nombre de Figure #1 y se le dará la instrucción, utiliza la herramienta homotecia en este nuevo archivo.</p> <p>¿Qué necesitas para realizar la homotecia? ¿Qué te dice el icono? ¿Qué pasos necesitas seguir para poder utilizar la herramienta homotecia?</p> <p>Revisa toda la pantalla ¿Qué sucedió? ¿Podrías explicarlo?</p>	<p>El estudiante ira a la herramienta homotecia, utilizará el polígono que se le ha dado.</p> <p>Estas preguntas se le harán al estudiante con el fin de observar si comprende lo que está haciendo en el entorno</p> <p>Esta es la pregunta clave de esta actividad ya que el estudiante tendrá que explicar que ocurre a través de lo que observa en la</p>

	<p>¿Por qué y para qué necesitaste un punto, un número y una figura?</p> <p>¿Qué relación hay entonces entre las dos figuras?</p>	<p>pantalla.</p> <p>En caso de que el estudiante de una respuesta vaga de lo que ocurre el entrevistador hará esta pregunta con el fin de generar una respuesta más elaborada por parte del estudiante. Se espera que utilice las herramientas de medición tanto de ángulos como de segmentos.</p> <p>Finalmente se realizará esta pregunta buscando como respuesta del estudiante "Tienen la misma forma pero diferente tamaño"</p>
--	---	--

## Categorización de figuras semejantes a otra dada

Para esta actividad se pide a los estudiantes abrir el archivo Figure #2, en donde encontrarán varias figuras de las cuales algunas son semejantes a la figura que se viene trabajando en los dos archivos (que se encuentra de otro color) y otras que no, por lo cual la instrucción que se les da a los estudiantes es, determina cuál de las siguientes figuras es semejante a la figura inicial y cual no. Explica tus afirmaciones.

Actividad	Descripción	Opciones
Categorizar figuras resultantes de una homotecia	Abre el archivo que se llama Figure #2, ¿Cuáles de estas figuras resultaron de aplicar una homotecia? ¿Por qué?	El estudiante observa una serie de figuras donde identifica cuales resultaron de aplicar una homotecia y cuáles no.  Esta actividad tiene como finalidad ver si el estudiante identifica las partes relevantes de una homotecia para poder generar una definición por lo menos intuitiva

## **ANEXO 4 PLANEACIÓN: ACTIVIDAD SIN ARTEFACTOS**

### **DESCRIPCIÓN**

- Esta actividad es totalmente diferente a las dos anteriores puesto que, se busca que  $E_1$  y  $E_2$  logren dibujar una figura semejante a otra sin hacer uso del pantógrafo o Cabri, por supuesto que se espera que hagan uso de propiedades ya antes estudiadas y necesarias para que les resulte una figura semejante a otra.

### **TIEMPOS DESTINADOS**

Se estima un tiempo aproximado de una a dos horas, para cada estudiante.

### **OBJETIVOS DE ENSEÑANZA**

#### *OBJETIVO CONCEPTUAL*

Institucionalizar el concepto de semejanza

#### *OBJETIVOS PROCEDIMENTALES*

Manipular y utilizar materiales usuales como lo son compás, transportador y regla.

#### *OBJETIVOS ACTITUDINALES*

- Suscitar el interés por la realización de trabajo en equipo, colaboración para comprender y argumentar afirmaciones.
- Suscitar el desarrollo de habilidades visuales.
- Desarrollar actividades matemáticas con materiales no usuales en el aula de clase.
- Motivar interés por el uso de herramientas computacionales en la clase de geometría.

## PRERREQUISITOS

- Corresponden a los conocimientos previos, destrezas, habilidades que se consideran necesarios para realizar el trabajo propuesto.
  - Conocimientos previos: Los que competen a definiciones de figura geométrica, ángulos y características relevantes a la definición de semejanza.
  - Destrezas y habilidades: Visualizar, analizar, medir, manejo de herramientas geométricas, formular y conjeturar.
- Identifica las propiedades relevantes para garantizar que una figura es semejante a otra.

## RECURSOS DIDÁCTICOS

*Materiales convencionales:*

Hojas, lápiz, regla, compás y transportador.

## ANEXO 5 TRANSCRIPCIONES DE LAS INTERACCIONES

### Trascripción de la interacción con el pantógrafo

[Trascrito a partir del audio (27 de mayo de 2012). Transcripción complementada con el archivo de video.]

#### Actividades con el pantógrafo

Para esta primera interacción con el pantógrafo, se abordaron tres actividades: la primera consistía en la exploración del artefacto, la segunda tenía como finalidad que las estudiantes construyeran una figura semejante a la figura dada y por último se solicitaba identificar en una serie de figuras hechas con el pantógrafo cuales de esas eran semejantes a la figura original. Se les entregó un pantógrafo, hojas y una lámina con una figura geométrica (ver figura 1). Las preguntas se realizaron a medida que las estudiantes exploraron el material y fueron descubriendo cómo se utiliza el pantógrafo.

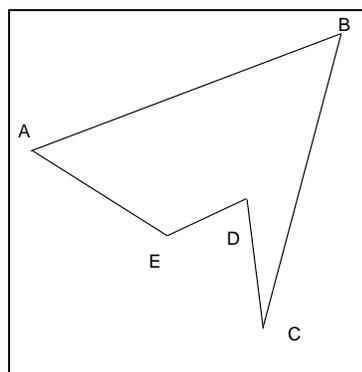


Figura 1

1. P: [Se les entregó el material a las estudiantes].
  
2. P: [Explica la actividad a realizar y hace preguntas referentes a ésta.]. En esta primera actividad, queremos que exploren el pantógrafo ¿Qué características tiene este artefacto? ¿Qué creen que pueden hacer con esta herramienta?
  
3.  
E<sub>1</sub> [Siguiendo las instrucciones.] Pues tiene cuatro reglas, pero las medidas están un poco raras.

4. E<sub>2</sub> También tienen unos tornillos que unen todas las regletas, una chupa y se puede poner un lápiz, además cada regla tiene una letra: A, B, C y D.
5. E<sub>1</sub> Yo creo, que se puede hacer cuadriláteros con el pantógrafo.
6. E<sub>2</sub> Sí. Ya que las cuatro regletas forman un rombo y si vamos cambiando la posición de los tornillos en cada regleta podemos hacer varios cuadriláteros.
7. P: ¿Pero entonces para que el lápiz y el tornillo grande?
8. E<sub>1</sub> [Entre ambas estudiantes, revisaron minuciosamente el artefacto, todos sus elementos e iniciaron por dibujar una figura con el pantógrafo]. Ya sé, vamos a pegarlo a la mesa con la chupa y con el lápiz vamos a dibujar algo.
9. E<sub>2</sub> [En un principio tuvieron mucha dificultad para utilizar el artefacto de forma adecuada]. Si, tratamos de dibujar un cuadrado pero no nos quedó muy bien y además no entiendo que pasa con el otro tornillo grande.
- 10 E<sub>1</sub> [Las estudiantes en vez de utilizar el tornillo grande para repisar la figura dibujada, hacían lo contrario utilizaban el lápiz]. Cada vez que dibujamos algo, ese tornillo también se mueve de la misma forma que vamos dibujando algo.
- 11 E<sub>2</sub> ¿Cómo así?
- 12 E<sub>1</sub>: [Las estudiantes dibujaron un cuadrado con regla]. Mira lo que pasa cuando subrayo el cuadrado con el lápiz.

- 13 E<sub>2</sub> [Este proceso lo hicieron, varias veces]. Pero no, es mejor hacerlo al contrario.
- 14 E<sub>1</sub>: ¿Cómo así?
- 15 E<sub>2</sub> Pues subrayar con el tornillo para ver la figura que nos da con el lápiz.
- 16 E<sub>2</sub>: [Pero en este caso ellas no repisaron los lados del cuadrado, decidieron remarcar con el tornillo las diagonales de esté].  
Ahora sí, unimos los dos segmentos que nos dibujó el lápiz y nos quedó el cuadrado.
- 17 E<sub>1</sub> ¡Pero no nos dio!
- 18 P: ¿Por qué no?
- 19 E<sub>2</sub> Porque nos dio un cuadrado como volteado, mejor dicho rotado y además mucho más grande.
- 20 E<sub>1</sub> Si y yo pensaba que nos iba a dar el mismo.
- 21 E<sub>2</sub> Pero ya entendimos más o menos como funciona.
22. E<sub>1</sub> Yo creo que tiene que ver algo con esos números de las regletas.
23. P: [Para la actividad 2, se les pide a las estudiantes que recorran la figura dada (ver figura 1) con el lápiz del pantógrafo y describe lo que sucede.]



24. E<sub>1</sub> [Siguiendo las instrucciones]. Quedo la misma figura.
25. E<sub>2</sub> No, no es la misma es parecida.
26. E<sub>1</sub> Pero se parece mucho, pero un poco más grande. Nos pasó lo mismo que con el cuadrado
27. E<sub>2</sub> Si... pero, no sé, los lados más grandes en la figura ABCDE parecieran ser también los más grandes en la nueva figura. No estoy segura.
28. P: ¿Pero cómo sabes eso?
29. E<sub>1</sub> Primero pongámosle nombre a la otra figura y así podemos medir.
30. E<sub>2</sub> La voy a llamar A'B'C'D'E'
31. E<sub>1</sub> Pero colócale los nombres de la misma forma como la primera figura.
32. E<sub>2</sub> ¿Cómo así?
33. E<sub>1</sub>: Pues que A, sea A' en la otra, mejor dicho en el mismo lugar.

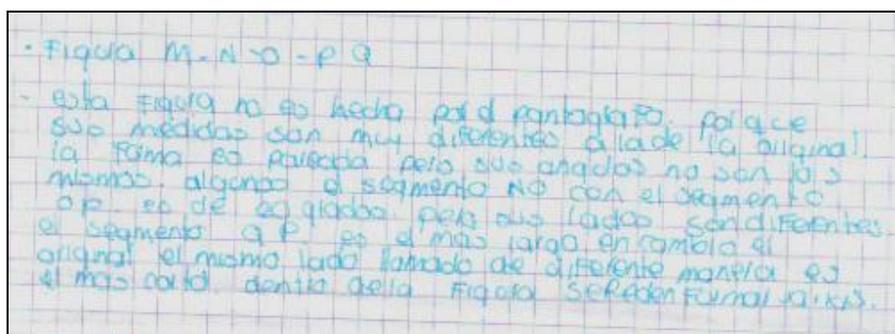


34. P: [Entre ambas niñas decidieron medir los segmentos:  $\overline{AB}$  y  $\overline{A'B'}$ ]
35. E<sub>1</sub>: [Después de verificar dos veces las medidas] pero dan muy raro esas medidas son diferentes... no sé.
36. E<sub>2</sub> Si está raro, lo único es que en la figura ABCDE y en la A'B'C'D'E' los lados más grandes siguen siendo más grandes y los más pequeños también se mantienen más pequeños.
37. P: [Después de 15 minutos las niñas no lograban establecer ninguna conjetura, por tanto la profesora hizo una pregunta]. ¿Y pasará algo con sus ángulos?
38. E<sub>2</sub> [Miden con un transportador sus ángulos de ambas figuras]. Es muy raro, los ángulos si miden igual.
39. P: ¿Cuáles ángulos?
40. E<sub>2</sub> Pues los  $\angle ABC$  y  $\angle A'B'C'$
41. E<sub>2</sub> [Después de discutir un rato entre ellas] Ya entendimos, tanto en el cuadrado como en la nueva figura, pasa lo mismo. TIENEN LA

MISMA FORMA PERO DIFERENTE TAMAÑO.

42. P: ¿Qué quieren decir con esto?
43. E<sub>1</sub> Pues que los ángulos siempre van a ser iguales, algo así que permite que se mantenga la misma forma al agrandar la figura.
44. E<sub>2</sub> Y en lo que si cambia es en el tamaño, porque los segmentos miden diferente en cada figura, por culpa de la posición de los tornillos, eso sí se mantienen sus características.
45. P: ¿Qué quieres decir con características?
46. E<sub>2</sub> Pues que si en la figura original uno de los segmentos es más grande que los otros, en la que nos resulta al usar el pantógrafo ese segmento en la nueva figura también va hacer más grande que los otros.
47. P: [Se les entregan varias figuras dibujadas en hojas tamaño carta, remarcando una figura que era la original]. ¿Cuáles de estas figuras creen ustedes que fueron hechas con el pantógrafo y cuáles no, respecto a la figura original?
48. E<sub>1</sub>: [Las niñas escribieron sus respuestas en hojas y posteriormente nos explicaron por qué de esas respuestas]. Yo trate de ver, sin importar la posición que los ángulos fueran iguales, tuvieran la misma medida y que además se formaran las mismas sub- figuras que en la original.
49. P: ¿Cuáles sub- figuras?

50. E<sub>1</sub>: Pues los triángulos o cuadriláteros en que se puede dividir la figura inicial.
51. E<sub>2</sub>: Yo también tuve en cuenta los ángulos y que no cambiara la forma de la figura y que se mantuviera la medida entre los segmentos.
52. P: ¿Qué quieres decir con que se mantenga la medida entre los segmentos? ¿Acaso que sean iguales?
53. E<sub>2</sub>: No, lo que observé y comprobé midiendo es que si el segmento  $MO$  en la figura original era el más largo en las otras figuras el mismo segmento que supuestamente le corresponde sea también más largo que los otros.



54. Después de la actividad, se les explicó cuáles eran los términos que geoméricamente debían usar para sus afirmaciones. Y se terminó concluyendo por parte de ambas estudiantes el término semejanza.
55. P: ¿Qué les pareció la actividad con el pantógrafo?
56. E<sub>1</sub>: Pues, al principio no entendía mucho lo que se podía hacer con el Pantógrafo, pero cuando empezamos a observar las

nuevas figuras y a comprobar que características se mantenían o no, fue muy bueno porque nos dimos cuenta que esta herramienta nos puede servir para construir figuras parecidas a otras pero en diferente tamaño e incluso en diferente posición.

57. E<sub>2</sub>: A mí me gustó mucho, primero porque nos hizo acordar de algunos términos geométricos y algunas características que uno debe tener en cuenta para dibujar ciertas figuras, además nos dimos cuenta que aparte del compás y el transportador, pues también existen otras herramientas que son muy útiles en geometría. Es algo así como que reúne a dos materiales en uno solo, ya que reúne dos condiciones ángulos y segmentos.

## Trascripción de la interacción con Cabri

[Trascrito a partir del audio (4 de julio de 2012). Transcripción complementada con el archivo de video. Se inicia la actividad con una fase de exploración del software. Luego se abordan dos actividades: la primera consistía en identificar el uso de la herramienta homotecia y aplicarla a una figura dada; la segunda actividad solicitaba identificar en una serie de figuras aquellas hechas con la herramienta homotecia. Descubre el significado de los colores en los íconos del programa Cabri.]

- 1 P: [Explica la actividad a realizar y hace preguntas referentes a ésta.] En la siguiente actividad vamos a construir un ángulo con Cabri. ¿Cómo construirían un ángulo? ¿Qué necesitarían?
2. E1: ¿Cómo así?
3. P: ¿Qué características tiene un ángulo?
4. E1: ¡Ah ya! Tiene una medida en grados.
5. E2: Un ángulo está formado por dos rectas unidas por un punto que se llama vértice.
6. E1: [Construye las dos rectas]. Pero nos resultan cuatro ángulos; esta construcción no nos sirve porque necesitamos uno sólo.
7. E2: [Revisan dentro de las opciones que ofrece el programa]. Entonces probemos con segmentos
8. E1: [Construye un ángulo con segmentos e intenta medirlo para lo cual despliega varios menús en busca de un ícono que se asemeje a un ángulo].
9. E2: [Recuerda la definición de ángulo]. Luego para construir un ángulo ¿necesitamos son rayos?

10. P: [Aclara.] Las dos construcciones son correctas en Cabri, pero tu definición es correcta.
11. E1: [Activa la opción de medida de ángulo e intenta medir el ángulo, seleccionando el vértice del ángulo luego un punto sobre uno de los rayos y por último un punto sobre el otro rayo]. ¡Ya! Mide noventa.
12. E2: Pero eso ángulo es agudo no recto. [Identifica el ángulo recto]. Es que estás tomando el que no es.
- Las niñas piensan por un momento...
13. E1 y E2: Nombremos los puntos, mejor.
14. E2: [Vuelve a medir el ángulo; esta vez comienza con un punto sobre el rayo, luego el vértice y por último un punto sobre el otro rayo]. La medida del ángulo ABC es treinta grados.
15. P Muy bien, ahora yo quiero que construyan un ángulo de cuarenta y cinco grados. ¿Cómo lo construirían?
16. E1: Movemos los rayos hasta que dé. [Mueve los rayos y cuadra el número que muestra la medida del ángulo a la medida solicitada].
17. P Pero si muevo los rayos de nuevo ya no da. Entonces, ¿qué hacemos?
18. E2 y E1: [Las niñas exploran, discuten proveen ideas por 20 minutos]. No sabemos.
19. P: [Debido a que las niñas no saben cómo proceder es necesaria la intervención]. Vamos a la opción que se llama Rotación y utilicémosla a ver qué sucede.

20. E2: [Busca dentro de los menús la opción de rotación y la activó].
21. E1: [Identifica lo que necesita a través del ícono]. Necesitamos un segmento, un punto y una letra o ¿un número?
22. E2: [Realiza la construcción, escribe un número y una letra, un segmento y un punto]. Da un segmento pero inclinado.
23. P: ¿Cómo hiciste la construcción?
24. E1: Pues no estaba segura si necesitaba una letra o un número, pero ya sabía que cuando activaba el ícono y me acercaba a lo que necesitaba Cabri me hacía una pregunta como ¿a esta recta? Y como no me pregunto por la letra y por el número sí, le di clic. También le di clic al segmento y al punto.
25. P: Y si le das clic a uno de los extremos del segmento, ¿qué sucede?
26. E1: [Realiza de nuevo la construcción con la indicación dada]. Da un ángulo.
27. P: ¿Con que característica?
28. E2: [Susurra a su compañera]. Mídelo.
29. E1: [Mide el ángulo]. De la misma medida que el número que seleccioné. Ósea que así se construye el ángulo de cuarenta y cinco grados.
30. E2: [Construye el ángulo de cuarenta y cinco grados].

Luego de un receso de más o menos treinta minutos se procede con la primera actividad.

31. P: Vamos a abrir el archivo que se llama Figura 1. [Indica que se encuentra en el escritorio].
32. E1 y E2: [Abren el archivo].
33. P: ¿Qué encontraron?
34. E1: Un polígono de seis lados.
35. P: Activen la opción que se denomina Dilatación, ¿Qué necesitamos para utilizarla? [Se hace la aclaración que dilatación y homotecia significan lo mismo en Cabri].
36. E1: Un K y un punto.
37. P: Y ¿quién será ese K? ¿Qué se les ocurre que pueda ser?
38. E2: El nombre de un punto.
39. E1: Una letra.
40. P: ¿Qué más puede ser?
41. E2: Un número.
42. P: Miremos todas las opciones a ver qué sucede.
43. E1: [Ingresa una letra y un número en la pantalla. Realiza el mismo proceso que para la rotación, es decir acerca el cursor para ver con cuál de las dos opciones, letra o número, Cabri le realiza una pregunta].
44. P: Pero, ¿para qué es entonces la figura?
45. E2: [Acerca el cursor al polígono y Cabri le realiza la pregunta: ¿Dilatar este polígono?]
46. P: ¿Qué sucedió?
47. E1 y E2: Apareció uno más grande.

48. P: ¿Qué característica tiene esta nueva figura?
49. E1y E2: Tiene la misma figura y diferente tamaño.
50. E1: Coloquémosle nombres A con A', B con B'.
51. P: ¿Por qué colocas las letras en este orden y no en otro?
52. E1: Porque es la misma figura, pero como es otra se le colocan primas. Además este vértice que tiene en nombre A debe ir con este otro que le colocaremos A'. [Señala los vértices correspondientes].
53. P: Ahora miremos que pasa si en lugar de 2 tomamos 0.5.
54. E2: [Realiza la construcción]. Es más pequeño.
55. P: ¿Por qué?
56. E1: Porque dos es más grande que cero coma cinco.
57. P: Miremos, si es ahora tres ¿Qué sucede?
58. E2 y E1: Es todavía más grande.
59. E1 [Miden segmentos correspondientes de cada uno de los cuatro polígonos de la pantalla].
- [Registran en papel las medidas de los segmentos y el número que escribieron para obtener la homotecia].
60. E1: Éste es el doble del primero, éste la mitad del primero y éste es tres veces el primero.
61. P: Y ¿esto sucede también con los ángulos?
62. E2: [Observa las figuras]. Si cambian.
63. E1: No, son iguales. [Mide los ángulos correspondientes]. Tienen la misma medida.

64. P: Movamos los puntos con los cuales realizamos la dilatación. ¿Qué sucede?

65. E1: La figura inicial se mueve.

66. E2: La distancia de este punto a este punto y de este punto a este punto son iguales. [Señala el centro de dilatación y un punto de la figura original; luego ese último punto y su correspondiente en otra figura].

[Mide las distancias entre los puntos]. Por más que se mueva la figura la distancia es igual.

67. P: ¿Qué pasa con esos puntos? ¿Quiénes son?

68. E1: Son los puntos que están en una misma línea... [Construye una recta, y verifica que ésta contiene los tres puntos].

69. P: Es decir son colineales, ya que se encuentran en una misma recta.

[Se realiza un receso de una hora para que las niñas almorzaran].

70. P: [Indica la actividad a realizar]. Abran el archivo con el nombre de Figura 2.

Vamos a realizar la misma actividad que con el pantógrafo. Es decir, de estas figuras vamos a decir cuáles fueron hechas con la herramienta homotecia y cuáles no; además de decir porque si o porque no.

¿Cuál creen que se realizó con homotecia?

71. E1 y E2: [Al mismo tiempo señalan la misma figura]. Ésta.

72. P: ¿Por qué?
73. E1: Porque tiene la misma forma, pero diferente tamaño. [Mide los lados y los ángulos de la figura que afirma fue hecha con homotecia]. Además, si unimos los puntos correspondientes resultan colineales.
74. P: Pero sólo tienen una recta que pasa por dos puntos y ¿cuántos eran los puntos colineales?
75. E2: Tres. [Baja la pantalla y se da cuenta que todas las rectas se intersecan en un punto].
76. E1: [Intenta hacer una dilatación para obtener la figura que se encuentra en la pantalla, pero se da cuenta que le hace falta el número que insertaba con edición numérica, y si lo insertaba no le daba la misma figura].
77. E2: [Mide los segmentos correspondientes].
78. E1: La figura inicial es la mitad de la figura que decimos que resulta de una homotecia.
79. E2: No. Como para la homotecia necesitamos la figura inicial y luego el número, entonces la figura que decimos que resulta de una dilatación es el doble de la inicial.
80. P: ¿Cuál otra figura resulta de una homotecia?
81. E1 y E2: [Analizan varias figuras, moviendo el ratón de figura en figura].
82. P: ¿Por qué pasaron estas figuras?
83. E1 y E2: Porque éstas no se realizaron con homotecias.
84. P: ¿Por qué dicen eso?

85. E1: Porque ésta no tiene esta punta. [Señalando uno de los ángulos de las figuras]. FIGURA
86. E2: Y éste tiene mucha punta. [Señalando uno de los ángulos de otra de las figuras]. FIGURA
87. E2: Éste sí. [Señala una figura].
88. P: ¿Por qué dices eso?
89. E1: Tiene la misma forma pero es más grande y esta rotada.
90. E2: Ésta también. [Señala otra figura]. Solo que ésta es más pequeña.
91. E1: Ésta no porque al unir los puntos correspondientes no va a dar. [Realiza la construcción de las rectas que pasan por los puntos correspondientes].
92. E2: No se unen como cuando lo hacemos con dilatación en un punto.  
[Las niñas se toman un tiempo para escribir en una hoja sus conclusiones].
93. E1 y E2: Las figuras son semejantes si tienen la misma forma pero diferente tamaño. Es decir diferentes medidas en los segmentos, pero con los ángulos iguales. [Señalan figuras semejantes].

## Trascripción de la interacción sin artefactos E<sub>1</sub>

[Trascrito a partir del audio (10 de agosto de 2012). Transcripción complementada con el archivo de video].

[Para esta actividad se le entregó a la estudiante un transportador, un compás, una regla, hojas blancas tamaño carta, lápiz y colores].

1. P: Observa la figura dada (ver figura 1). Quiero que a partir de ésta figura, dibujes una semejante, sin utilizar herramientas como el pantógrafo o Cabri.

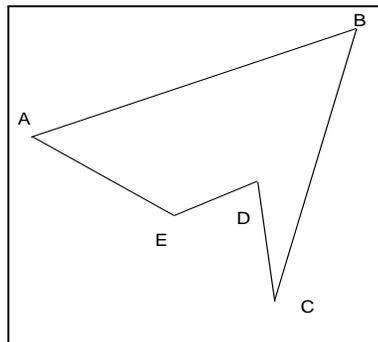


Figura 1

2. E1: [Tratando de seguir las instrucciones, realizó un primer intento que duró 15 minutos]. Voy a medir los segmentos. Y voy a dibujarlos otra vez, pero doblando esa medida.
3. P: ¿Y por qué doblando la medida?
4. E1: Porque la quiero hacer más grande, mejor dicho: que el factor sea

el número 2.

5. E1: [La estudiante trató de dibujar una figura semejante a la original con los segmentos que tenían el doble de la medida de los originales]. Pero tengo un problema. No me cuadra la figura A'B'C'D'E'. ¡No la puedo cerrar!
6. P: ¿A qué te refieres con que no la puedes cerrar?
7. E1: [La estudiante intento durante 15 minutos aproximadamente hacer una figura semejante a la original, teniendo como una condición la medida de los segmentos. Pero no lo logró]. Es que cada segmento mide el doble del original, pero me toca saberlos cuadrar, para que me dé la misma figura.
8. E1: [Aun cuando en uno de esos intentos le resulto una figura más o menos parecida a la original, puesto que trato de cuadrar la posición de los segmentos, vio que no le resulto esta estrategia para dibujar una figura semejante a la original y empezó a medir los ángulos]. Ya me acorde que debo tener presente la medida de los ángulos.
9. P: ¿Por qué?
10. E1: Porque antes no me acordaba que, aun cuando la medida de los segmentos se puede cambiar con el factor que una quiera, los ángulos siempre van a medir lo mismo.
11. E1: [Después medir los ángulos, intentó nuevamente dibujar la figura semejante al polígono ABCDE]. ¡Ah ya! Ahora si me da semejante,

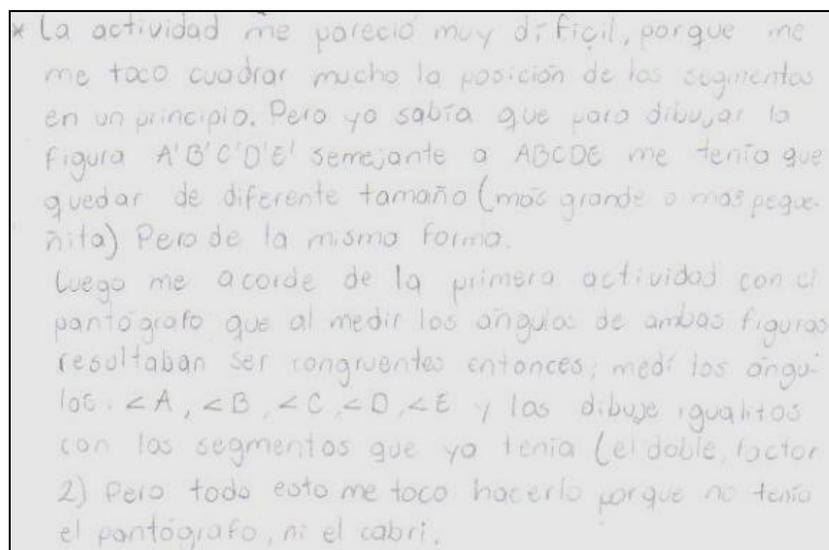
tiene la misma forma, pero diferente tamaño.

12. P: [La estudiante olvidó que quería dibujar una figura semejante al polígono ABCDE, pero la medida los segmentos correspondientes el doble].  
Pero olvidaste algo. ¿Qué pasó con el factor que habías pensado para dibujar tu nueva figura A'B'C'D'E'?
13. E1: Sí. Se me olvido. Yo quería ampliar la figura y me quedo más pequeña.
14. E1: Pero ya sé cómo hacerla. Como tengo el doble de la medida de los segmentos, con éstos puedo dibujar los ángulos.
15. E1: [En ese momento recuerda que debe hablar haciendo uso del lenguaje geométrico; pronuncia varios términos hasta que menciona el más adecuado para lo que quiere indicar]. Congruencia, correspondientes, colineales.
16. E1: Ahora si la pude hacer. La medida de los segmentos de la figura A'B'C'D'E' me quedaron el doble de la figura ABCDE y sus ángulos son congruentes.
17. E1: Ahora solo me falta hacer la prueba.
18. P: ¿Y cómo haces la prueba?
19. E1: Pues encontrando los tres puntos colineales, por ejemplo A, A', O, otros tres puntos colineales son B, B', O.

20. E1: [Después de comprobar, todos los puntos colineales la estudiante dio su conclusión]. Las dos figuras son semejantes, ya que tienen la misma forma, es decir sus ángulos congruentes y diferente tamaño ya que aun cuando la medida de los segmentos correspondientes es diferente se mantienen sus proporciones.

21. P: ¿Qué te pareció la actividad sin hacer uso del pantógrafo o de Cabri?

22. E1: ¡Muy difícil!



\* La actividad me pareció muy difícil, porque me tocó cuadrar mucho la posición de los segmentos en un principio. Pero ya sabía que para dibujar la figura A'B'C'D'E' semejante a ABCDE me tenía que quedar de diferente tamaño (más grande o más pequeña) Pero de la misma forma. Luego me acordé de la primera actividad con el pantógrafo que al medir los ángulos de ambas figuras resultaban ser congruentes entonces; medí los ángulos:  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$ ,  $\angle D$ ,  $\angle E$  y los dibujé igualitos con los segmentos que ya tenía (el doble, factor 2) Pero todo esto me tocó hacerlo porque no tenía el pantógrafo, ni el Cabri.

23. P: ¿Por qué difícil?

24. E1: Porque me tocó ponerme a cuadrar la posición de los ángulos y los segmentos, muchas veces para que me diera la figura semejante que yo quería.

25. E1: Además si hubiera usado el pantógrafo, en las regletas hubiera podido cuadrar el factor para ampliar la figura y solo tenía que subrayar la figura ABCDE y de una me salía la figura A'B'C'D'E' semejante.

## Trascripción de la interacción sin artefactos E<sub>2</sub>

[Trascrito a partir del audio (10 de agosto de 2012). Transcripción complementada con el archivo de video].

[Para esta actividad se le entregó a la estudiante un transportador, un compás, una regla, hojas blancas tamaño carta, lápiz y colores].

1. P: Observa la figura dada (ver figura 1). Quiero que a partir de ésta figura, dibujes una semejante, sin utilizar herramientas como el pantógrafo o Cabri.

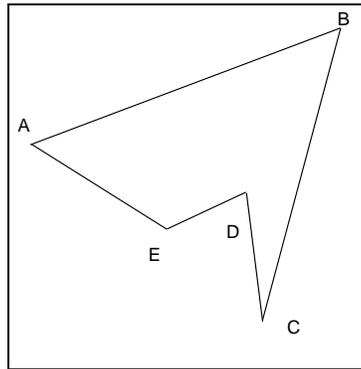
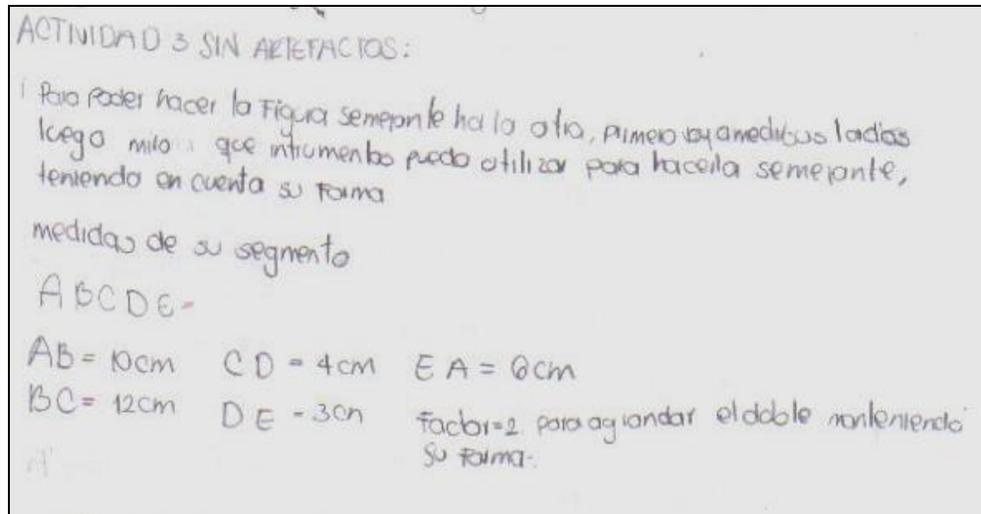


Figura 1

2.  
E2: [La estudiante se quedó observando la figura y los instrumentos dados por más de 5 minutos]. No entiendo, ¿me toca medir los segmentos y los ángulos y dar el factor?
3. P: ¿Qué recuerdas que debes hacer para dibujar una figura semejante a otra?
4. E2: Pues me acuerdo de varias condiciones, voy a empezar con la de los lados y para esto voy fijar mi factor que va hacer el dos.



5. P:            ¿Y para qué el factor?
6. E2:            Porque quiero que la medida de los segmentos, sea el doble de la original. Y para eso voy a medir todos los segmentos.
7. E2:            [Después de medir todos los segmentos de la figura, inició a dibujar una semejante a la original]. ¡Esto es muy difícil! No me da figura, ya que si uso estas nuevas medidas la forma de la figura se me distorsiona.
8. E2:            [La estudiante duro 10 minutos tratando de dibujar la nueva figura, pero nunca le resultó]. Como no me resultó con solo la medida de los segmentos entonces voy a medir los ángulos que son los que me cambian al dibujar la nueva figura.
9. P:            ¿Por qué?
- 10 E2:            Porque necesito que no se me dañe la forma de la figura, no importa que cambie el tamaño pero para que me de semejante a la original me toca que los ángulos se mantengan congruentes.
- 11 E2:            [Después medir los ángulos, intentó nuevamente dibujar la figura

semejante al polígono ABCDE, pero ella tuvo en cuenta también la nueva medida de los segmentos]. Me tocó dibujar los mismos ángulos, es decir con la misma medida y con la nueva medida de los segmentos.

12E2: Ahora si me quedó ya que tiene la misma forma, pero diferente tamaño.

13 E2: Pero me falta hacer la prueba.

E2, finalmente, escribe como le pareció la actividad sin artefactos:

Realizando la actividad sin ningún instrumento me pareció difícil ya que la forma de la figura no me daba ya que las medidas cambiaban constantemente y se cambiaba la forma de la figura y el objetivo era hacer la figura en un diferente espacio pero que no se distorsionara su forma, su tamaño se podía <sup>cambiar</sup> siempre y cuando mantuviera sus ángulos y su forma, si algún segmento cambiaba se transformaba toda la figura y no daba el objetivo.