

Un modelo para ayudar a los profesores a reflexionar sobre la actividad matemática que promueven en sus clases

Sandra Evely Parada*
Olimpia Figueras**
François Pluvinage***

Un modelo para ayudar a los profesores a reflexionar sobre la actividad matemática que promueven en sus clases

Este documento comunica el desarrollo de una investigación cualitativa cuyo objetivo es ayudar a los profesores de matemáticas a reflexionar sobre la actividad matemática de sus estudiantes durante la clase; para esto se propone un modelo de reflexión que les facilite analizar aspectos puntuales de su práctica docente. En la comunicación se presenta la estructura del modelo, el cual es aplicado en tres casos de estudio, y se reportan algunos resultados del proceso reflexivo en uno de ellos.

Palabras clave: Enseñanza de las matemáticas, modelo reflexivo, actividad matemática, reflexión, formación de maestros.

A model for helping teachers reflect on the mathematical activity they promote in their classes

This document communicates the development of a qualitative investigation which main objective is to help math teachers reflect on their students' mathematical activity in class. It then proposes a model of reflection that makes it easier for them to analyze some specific aspects of their teaching practice. The article presents the structure of the model, which is applied in three case studies, and reveals some of the results of the reflective process in one of them.

Key words: The teaching of mathematics, reflective model, mathematical activity, reflection, teaching formation.

Un modèle pour aider les professeurs à réfléchir sur l'activité mathématique qui encouragent dans leurs classes

Ce document exprime le développement d'une recherche qualitative dont l'objectif est aider les professeurs de mathématiques à réfléchir sur l'activité mathématique de leurs étudiants pendant la classe. Pour cela, on propose un modèle de réflexion qui leur rende facile l'analyse des aspects ponctuels de leur pratique pédagogique. Dans cet article est présentée la structure du modèle, lequel est appliqué en trois cas d'étude et quelques résultats du processus réfléchi en un d'eux sont rapportés.

Mots clés: Enseignement des mathématiques, modèle réfléchi, activité mathématique, réflexion, formation d'enseignants.

* Maestría en Ciencias, especialidad en matemática educativa, estudiante de doctorado del Departamento de Matemática Educativa (DME), Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (Cinvestav-IPN), México.
E-mail: sparada@cinvestav.mx

** Dra. Profesora titular del DME, Cinvestav-IPN.
E-mail: figueras@cinvestav.mx

*** Dr. IREM de Strasbourg, France, & DME-Cinvestav-IPN.
E-mail: pluvin@math.u-strasbg.fr

Introducción

La reflexión de los profesores está ganando un espacio especial en el campo investigativo de la matemática educativa, dado que se reconoce la relevancia de su rol como seres humanos promotores de la actividad matemática que los estudiantes realizan en la clase. Con esta investigación se quiere favorecer la reflexión de los docentes de matemáticas desde una perspectiva objetiva y crítica, que atienda las preocupaciones de sus rutinas diarias, aportando algunas herramientas que les permitan verse como protagonistas y gestores en cada uno de los espacios y los momentos de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Para John Dewey (1989) la reflexión es un proceso de resolución de conflictos, de dudas, que requiere, a la vez, de una disposición para revisar la actuación. La reflexión de los profesores de matemáticas se dirige a analizar su experiencia docente, antes, durante y después de la actividad que desarrolla en el salón de clase con sus estudiantes.

La investigación¹ que se expone en este documento se realiza dentro del contexto del programa de Maestría en Educación, especialidad matemática, bajo la dirección y la coordinación del Departamento de Matemática Educativa (DME) del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados (Cinvestav), para los maestros de educación básica² del área de matemáticas del estado de México. En este artículo se muestra la estructura del modelo, el cual es aplicado en tres casos de estudio que corresponden a tres alumnos-docentes de la maestría que se desempeñan en niveles diferentes de la educación básica de México.

Con la investigación que aquí se presenta, se busca responder a las siguientes dos preguntas:

1. ¿Cuáles son las reflexiones de los profesores sobre lo que planean para sus clases de matemáticas y lo que logran sus estudiantes en esas clases?
2. ¿Cómo orientar la reflexión de los profesores sobre la actividad matemática que promueven en las aulas?

1 Este artículo es un extracto de la tesis de maestría de Parada (2009), orientada por la Dra. Olimpia Figueras y el Dr. François Pluvinaige.

2 La educación básica en México es de carácter obligatorio para estudiantes entre los 3 y los 15 años, y está compuesta por tres niveles: preescolar (3 grados), primaria (6 grados) y secundaria (3 grados).

Los objetivos de investigación se explicitan a continuación:

1. Caracterizar las reflexiones de los profesores sobre las actividades matemáticas que planean llevar a cabo en sus clases y la que lograron promover durante ellas.
2. Aportar elementos para la construcción de un modelo que permita al profesor reflexionar sobre la actividad matemática de sus estudiantes durante las clases.

En este texto se exhibe una primera versión de un modelo aplicado con los tres casos de estudio en cada una de las etapas que lo conforman y se enuncian las conclusiones de la investigación.

Diseño de la investigación

El diseño de la investigación se enmarca en una metodología cualitativa y se estructuró por medio de cinco fases:

1. Preliminares y bases del modelo. La investigación tiene sus raíces en el programa de Maestría en Educación, especialidad matemática,³ la cual surge como una alternativa de mejoramiento profesional para que sesenta maestros del Estado de México que se desempeñaban en preescolar, primaria y secundaria, adquirieran una formación propia de la educación matemática y que ésta contribuyera directamente al aprendizaje de sus alumnos.

La fase preliminar se divide en tres partes: 1) planeación colectiva (el objetivo principal fue que cada grupo de trabajo de la Maestría preparara una clase de 50 minutos sobre el contenido matemático que le correspondiera estudiar según el progra-

ma de estudios para la semana siguiente a la planeación colectiva; en cada grupo se elegía el profesor que daría la clase y, en consecuencia, el grado escolar en el que el equipo trabajaría); 2) puesta en marcha de la clase planeada colectivamente (el objetivo era observar la puesta en escena de la clase planeada, dentro de las actividades docentes regulares del ciclo escolar) y 3) reflexión colectiva de lo planeado y lo alcanzado.

2. Estudios de casos. Se seleccionaron tres de los diez alumnos-docentes que laboraban en niveles diferentes de educación básica, así:
 - Lucas es maestro de preescolar, desde hace seis años, en un jardín para niños ubicado en un sector rural del estado de México.
 - Eduardo es profesor de sexto grado de primaria de una escuela rural del estado de México, hace cinco años.
 - José se desempeña como profesor de secundaria, en un colegio de la ciudad de México, hace nueve años.
3. Diseño de un modelo de reflexión. Para la consecución de los objetivos de investigación se diseña y se aplica un primer modelo de reflexión. La figura 1 bosqueja la estructura de reflexión que se usa en esta investigación a la cual nos referiremos como *modelo*, esperando presentar al final de este reporte los ajustes posteriores a una aplicación y análisis. Este modelo se construye alrededor de la actividad matemática que surge del triángulo pedagógico expuesto por Saint-Onge (1997, citado en Ibáñez, 2007), en el que identifica el vínculo entre el alumno y el profesor como *mediación*, el del alumno y el conocimiento como *estudio*, y el del conocimiento y el profesor como *relación didáctica*.

3 El programa académico de la Maestría se desarrolló durante tres años, en los que los alumnos-docentes cursaron nueve seminarios y, a la vez, trabajaron un proyecto de desarrollo. Los alumnos-docentes se distribuyeron en diez grupos de proyectos de desarrollo, que correspondían a líneas de investigación de matemática educativa y fueron dirigidos por investigadores del DME.

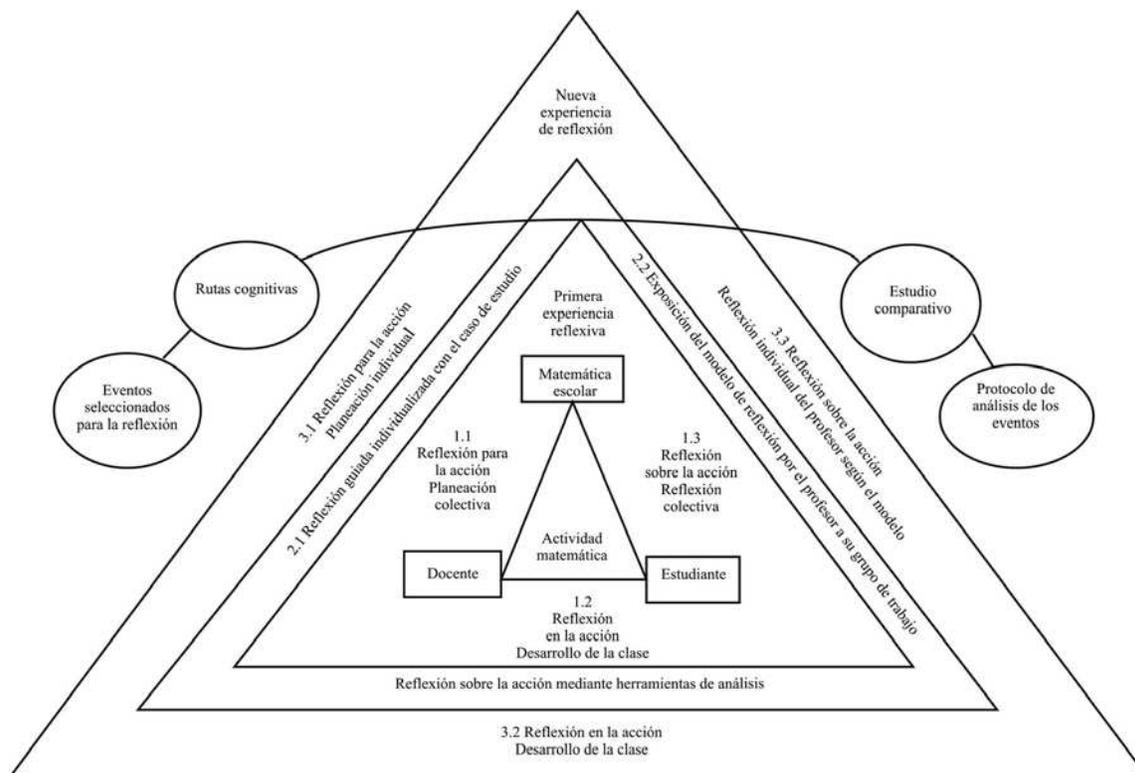


Figura 1. Etapas del primer modelo de reflexión

El modelo sugiere tener en cuenta cuatro aspectos que le permitan al maestro centrar su atención en elementos puntuales de su práctica docente: 1) los conocimientos matemáticos para la enseñanza (Ponte, 2000); 2) las formas de enseñar la materia (Shulman, 1987); 3) uso y selección de instrumentos, por el profesor, a partir de las ideas de Llinares (2000), y 4) el uso del lenguaje matemático, estudiado por Chevallard (1991).

Para la reflexión de los profesores se tienen en cuenta tres procesos de reflexión, los cuales se caracterizan con base en algunas ideas de Dewey (1989) y Schön (1992). El primer autor define la reflexión *para la acción* en el ámbito educativo: ésta se hace presente en la forma como el maestro planea la clase, cómo comprende la temática que va a llevar a sus estudiantes, cómo diseña sus hojas de trabajo y selecciona instrumentos como los problemas, las situaciones y los recursos didácticos manipulables o electrónicos. El segundo habla

sobre la reflexión *en la acción* (se da cuando el profesor establece el vínculo mediático entre el conocimiento y el estudiante, la forma como conduce el aprendizaje y la capacidad de responder a las situaciones inesperadas de la clase) y sobre reflexión *sobre la acción* (cumple una función crítica de lo que ya ha ocurrido en el aula, la forma como el maestro evalúa la interacción entre el conocimiento matemático escolar y el alumno, desde la perspectiva de la consecución de los objetivos de aprendizaje esperados).

El modelo propuesto consta de tres etapas de reflexión:

- a. La *primera experiencia de reflexión*. Esta etapa se desarrolla tal como se describió en la fase preliminar de la investigación y se propone con el fin de identificar cómo reflexiona habitualmente el maestro sobre la actividad matemática que promueve en el salón de clase (véase punto 1, figura 1).

Posteriormente se realiza el análisis de los datos,⁴ que da como resultado la determinación de las rutas cognitivas que permiten comparar la actividad matemática planeada por el profesor y la actividad lograda por los estudiantes, como se puede observar en la figura 5. Las rutas cognitivas se centran en el contenido matemático procesado durante la clase: conceptos matemáticos, tipos de herramientas usadas y tipos de tareas dadas a los estudiantes (Robert y Rogalski, 2005). De aquí surge la idea de mostrar a los maestros estos resultados como evidencias, para promover su reflexión.

Quienes escriben tienen como propósito promover la reflexión docente, apoyada en evidencias que permitan a los profesores ver su actuación antes, durante y después de la clase. Por eso proponen como herramientas para la reflexión de los docentes, las rutas cognitivas de lo planeado y lo logrado, y la selección de momentos de la clase que favorezca el análisis de su acción y reacción frente a una situación específica (herramientas que pretenden ser unas lentes para el maestro, mismas que se representan en las circunferencias laterales de los triángulos de la figura 1); para esto último se construye una *guía de observación*, como la de la tabla 1.

Tabla 1.
Guía de observación de los momentos seleccionados

Evento seleccionado	Pregunta de reflexión	Aspecto de reflexión
Descripción del momento, con su respectiva transcripción y tiempo registrado en el video. (Para el desarrollo de la actividad se sugiere hacer un videoclip del momento seleccionado)	La pregunta debe orientar la reflexión que se espera de ese momento, evitando emitir juicios de valor, pues lo que se espera es que el maestro se exprese sobre lo que observa de su propio desempeño en el aula	Identificación del tema sobre el cual se pretende promover la reflexión del maestro

b. *Reflexión sobre la acción mediante las herramientas de análisis.* En esta etapa se le dan a conocer, al maestro, los resultados del análisis de la primera experiencia, como herramientas para la reflexión. El objetivo de esta etapa no es mostrar el modelo y las herramientas como una única forma de reflexionar, sino coadyuvar en la construcción de un modelo que favorezca la reflexión objetiva de los profesores de matemáticas.

1. Reflexión individualizada, guiada por las herramientas de reflexión. La actividad se desarrolla de manera personal con el maestro (véase punto 2, figura 1). Inicialmente se le muestran al docente los eventos que han sido seleccionados, por considerarse que representan un episodio que a criterio del investigador requiere de una revisión por el profesor. La observación y la reflexión se hacen usando una guía

⁴ Los datos recolectados de la sesión de planeación fueron la planeación escrita de cada grupo con su respectiva hoja de trabajo y el video de la sesión, de la clase y la reflexión colectiva.

- de preguntas que promoverá la reflexión objetiva del profesor, ayudándolo para que haga una introspección sobre la forma como actuó en ese momento. Un segundo período de esta sesión consiste en darle a conocer al maestro los resultados de un estudio comparativo, elaborado con las rutas cognitivas de lo que planeó y lo que logró, con el fin de que analice la forma cómo condujo la actividad matemática en la clase.
2. Exposición del modelo de reflexión por el profesor a su grupo de trabajo. Con esta actividad se busca que el maestro socialice sus reflexiones con sus compañeros. El propósito es observar cómo él comunica lo que ha asumido como fortalezas y debilidades del desarrollo de la actividad; asimismo, promover una reflexión objetiva en su grupo de trabajo.
 - c. *Nueva experiencia para la reflexión del caso de estudio.* En esta etapa se observa cómo el maestro se ha apropiado del proceso realizado y las herramientas utilizadas para reflexionar sobre su quehacer docente. Para hacer esta indagación, se le propone al profesor que planee nuevamente una clase, la lleve a cabo y, por último, él escriba sus reflexiones personales de lo que ha hecho. Esta actividad se divide en tres partes: planeación individual, desarrollo de la clase y reflexión sobre la acción de lo planeado y lo logrado en la nueva experiencia.
 4. Puesta a prueba del modelo. Los primeros resultados obtenidos a partir del análisis sobre la actividad matemática realizada en la primera experiencia de reflexión fueron los de José. Por tal motivo, el proceso de reflexión usando las herramientas de análisis se inicia con él y, posteriormente, se pone a prueba el modelo con Eduardo y después con Lucas. En este artículo se comunican sólo los resultados de reflexión del profesor Eduardo.
 5. Análisis de los datos y reestructuración del modelo de reflexión propuesto. Al finalizar el proceso de diseño y aplicación del modelo de reflexión se buscan respuestas a las preguntas de investigación. Esta fase se divide en dos partes:
 - a. *Análisis de los datos a través de categorías.* Esta parte de la investigación tiene como propósito categorizar las reflexiones de los profesores sobre la actividad matemática que planean llevar a cabo en su clase y la que efectivamente promovieron durante ella. Para concretar dichas respuestas, se toman como categorías de análisis los cuatro aspectos considerados para caracterizar la actividad matemática que se desarrolla en la clase: 1) los conocimientos matemáticos para la enseñanza, 2) las formas de enseñar la materia, 3) el uso y la selección de instrumentos por el profesor y 4) el uso del lenguaje matemático estudiado.
 - b. *Propuesta de un modelo.* En esta parte de la investigación se pretende aportar elementos para la construcción de un modelo que permita a los profesores reflexionar sobre la actividad matemática de sus estudiantes durante las clases. Este momento del análisis tiene como propósito examinar el modelo y su aplicación, y determinar si se ajusta a los objetivos de reflexión que pretendían alcanzarse con los profesores.

El modelo aplicado en el caso de Eduardo

El maestro lleva a cabo su práctica docente en una escuela primaria del sector rural del estado de México. Para Eduardo es muy importante que los estudiantes trabajen con material concreto en la clase de geometría y estas concepciones emergen en gran medida en sus reflexiones.

Primera experiencia de reflexión

El grupo de trabajo de Eduardo planeó una clase que versa sobre el tema “La altura y el área de las figuras”. La figura 5a presenta la ruta cognitiva⁵ de la clase planeada colectivamente. En la ruta se puede observar el esquema que propone Eduardo para desarrollar la clase: 1) que identifiquen la base y la altura en los triángulos; 2) que hallen las áreas de los triángulos y rectángulos, y que coloquen estos resultados en una tabla, para poder hacer comparaciones entre las áreas de los triángulos y los rectángulos; 3) que recompongan (formen) las figuras mediante el recorte de papel, y 4) propone un ejercicio de visualización del concepto construido, con el apoyo de un *software* y una evaluación para evidenciar la comprensión que los estudiantes tienen del tema.

El profesor pone en marcha la clase tal como lo habían planeado. Sin embargo, durante ella, enfrenta algunas situaciones de conflicto, debido a que la actividad seleccionada lo conduce a un problema matemático complejo, el cual estaba muy por encima de los conocimientos matemáticos que se enseñan o se aprenden en el nivel en el que él se desempeña.

Eduardo pone en escena la actividad de descomposición y recomposición de un triángulo inscrito en un rectángulo, para que los niños verifiquen que si dos triángulos tienen la misma base y la misma altura, tienen la misma área. Para iniciar la actividad, el maestro presenta un ejemplo en el pizarrón (véase figura 2).

[...] el otro tramito que estaba, este triángulo estaba así mira, recorté el cachito que sobra... este cachito lo vamos a acomodar en esta parte de aquí... [Al ver que las piezas no encajaban] Creo

que mis cortes salieron todos chuecos. Ahora el triángulo que estaba aquí, miren este triángulo, ¿creen que quepa en esta parte de aquí?

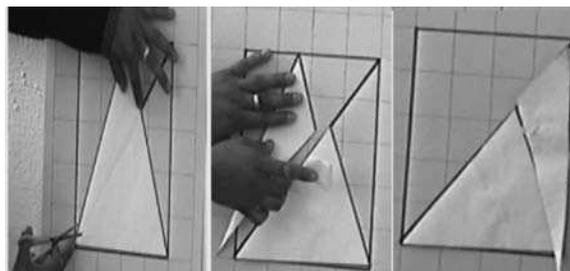


Figura 2.

Disección realizada por el profesor

El maestro pensó que la dificultad que enfrentó con la recomposición de figuras tuvo que ver con imprecisiones en los cortes del triángulo. Le pide a los niños que resuelvan el mismo ejercicio. Les entrega una hoja impresa a blanco y negro, y otra en color, con seis rectángulos iguales, que tienen inscritos triángulos diferentes en cada uno de ellos y les dice que recorten la de color y hagan la recomposición en la hoja blanca.

El maestro planeó la actividad de recortar papel para que los niños hicieran la recomposición de figuras, pero no previó que la disección del triángulo no podía hacerse como él pensaba; se requería de otros elementos conceptuales que permitieran la equidescomposición de triángulos para la posterior recomposición de otro triángulo de igual área.

En la figura 3a aparece la situación que Eduardo les presentó a sus alumnos; las características de las figuras que eligió influyeron en su pensamiento:

5 En las rutas cognitivas, los cuadros punteados representan los procesos realizados por los estudiantes que causaron conflicto y confusión en la clase, mismo que el maestro no tenía previstos.

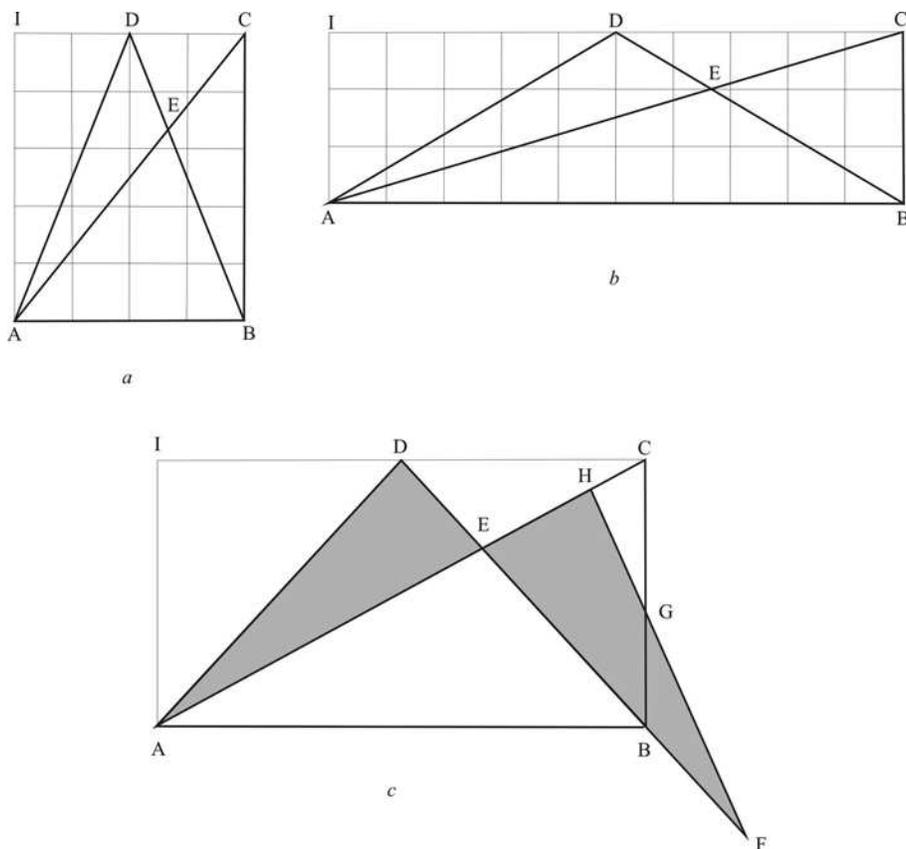


Figura 3
Representación de que la prueba es incorrecta

$$\text{Área } \Delta ADB = \text{Área } \Delta ADE + \text{Área } \Delta AEB,$$

y

$$\text{Área } \Delta ACB = \text{Área } \Delta BCE + \text{Área } \Delta AEB.$$

Eduardo sabe que

$$\text{Área } \Delta ADB = \text{Área } \Delta ACB$$

y como ΔAEB es parte de ambos triángulos ADB y ACB , entonces:

$$\text{Área } \Delta ADE = \text{Área } \Delta BCE.$$

Visualmente, en el problema representado en la figura 3a, los triángulos ADE y BCE parecen iguales, lo que quizá convenció a Eduardo que si recortaba el triángulo ADE y lo re-

flejaba, ya que los ángulos en el vértice G son iguales por ser opuestos por el vértice, ése se podría superponer en el triángulo BCE .

El profesor no se dio cuenta que no son congruentes y bastaría ver que la longitud de AD es mayor que la de CB . Variando la base y la altura del triángulo como en la figura 3b, el peso de la visualización desaparece.

Fue desafortunada la elección de las medidas del largo y el ancho del rectángulo, y la figura 3c muestra la situación que enfrentaron Eduardo y los niños. Cabe señalar que el recorte reiterado hecho por un alumno convenció a los demás, incluyendo al profesor, pero no resuelve el problema.

El problema que se puso Eduardo al preparar su clase, descomponer el triángulo ADB para

transformarlo en el triángulo ACB, también tenía como objetivo mostrar que el

Área de $\Delta ADB = \text{Área } \Delta ACB = \frac{1}{2} \text{Área } \Delta AICB$
(véase figura 3c).

Al respecto, Fiol menciona que

Dos figuras planas se llaman equidescomponibles cuando una de ellas puede dividirse en un número finito de piezas que, resituadas adecuadamente, permiten obtener la otra [...] (1999: 4).

Eduardo consideró que por tener la misma área, el ΔABD y el ΔABC necesariamente podrían descomponerse y recomponerse uno en el otro. Para hacer esta equidescomposi-

ción, se requerían de una serie de cálculos y de movimientos en el plano de los triángulos que conformaban los ΔAED y ΔEBC .

La siguiente descomposición constituye una forma de resolver el ejercicio y una guía para buscar una demostración matemática formal. En la figura 4 se puede observar la solución hallada en la investigación usando el *software* Cabri Geometry II plus, a través de una serie de particiones y movimientos en el plano. La clave fue encontrar que

FE es $\frac{1}{3}$ de AB

y que

el ΔFDE tiene $\frac{1}{3}$ de la altura del ΔABD .

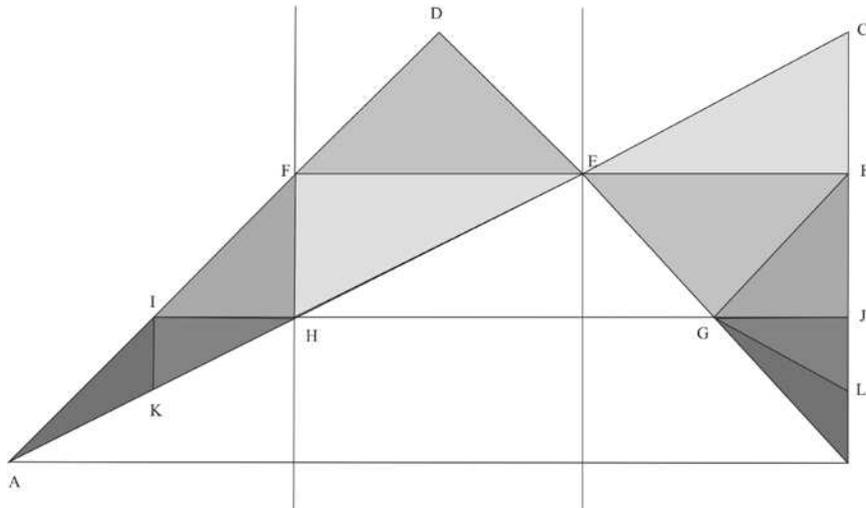


Figura 4

Una solución al problema de la equidescomposición propuesto por Eduardo

Es importante reconocer que, para Eduardo, la actividad que propuso parecía sencilla; sin embargo, resultó un problema matemático complejo, que le provocó dificultades. Este problema, los niños “aparentemente” lo resuelven mediante una división del triángulo. No obstante, la solución correcta difícilmente

podía hallarla el maestro en medio del tiempo y la tensión de la clase. Además, ésta no podría usarse con los niños de sexto de primaria, salvo como un rompecabezas para mostrarles que sí se puede descomponer el ΔADE y recomponer en el ΔBEC .

En la primera reflexión colectiva, los compañeros del proyecto de desarrollo de la Maestría en Educación, especialidad matemática, le dicen a Eduardo, después de observar el video de la clase, que las dificultades que se dieron en ella se debieron a la forma como llevó el control del tiempo, y también porque no se realizó la actividad en el *software* Cabri Geometry II plus, como lo habían planeado, con el fin de formalizar los conceptos, y que por esto no se pudieron completar los objetivos planteados para la clase.

Eduardo, en la primera reflexión, manifiesta que en su clase se lograron los objetivos que se habían propuesto, dado que los niños pudieron trazar las alturas de los triángulos indicados; además, notaron que el área del triángulo era la mitad de la del rectángulo que lo inscribe, lo cual verificaron numéricamente (completando una tabla de áreas) y haciendo la recomposición de las figuras. Frente a la situación de la equidescomposición, su apreciación fue:

Quizás fue el ancho de..., lo he pensado y siento que fue el ancho del marcador. Lo recorté a la orilla del marcador y esa puntita que sale es lo que sobra [...] Hubo dificultad al trazarlo, pero como lo dije ese día, a lo mejor hizo falta que lo probara antes de empezar.

Reflexión de Eduardo con el apoyo de las herramientas de análisis

Después de construir las herramientas de reflexión, se le da a conocer el estudio comparativo entre las rutas cognitivas de la clase planeada (véase figura 5a) y la clase realizada (véase figura 5b).

También se le muestran los videoclips de los momentos seleccionados para la reflexión.

Cuando Eduardo evidencia, mediante las herramientas, la complejidad del problema con

el que se enfrentó, su primera manifestación fue:

Incluso los compañeros, cuando “vieron” el video, todos concordábamos en la situación de que era el corte. Nunca lo vimos de la manera geométrica. Que error tan garrafal... Bueno, no me queda más que una buena lección para que no vuelva yo a cometer esos errores.

En este caso de estudio encontramos un maestro con buena actitud y con apertura al mejoramiento y al cambio; no buscó justificarse, simplemente explicó por qué él creía que podía hacerse así:

[...] esa idea me surgió porque cuando estuvimos viendo fracciones, tienes un cuadrado y lo divides a la mitad, tienes otro cuadrado y encuentras otra forma diferente de dividirlo a la mitad. Yo tenía la idea, yo pensé que como tenía la misma área, era lógico y no tomé en cuenta muchas otras cosas. Nada más quizás falta otro poco más de conocimiento.

Al término de esta sesión se perciben sentimientos encontrados del maestro, pues a pesar de que sentía vergüenza porque se había equivocado, ahora él ya sabía algo que debía comunicarle a sus compañeros de secundaria.

En la exposición del modelo por Eduardo a sus compañeros, les presenta el videoclip donde se expone la situación. Posteriormente les pregunta:

¿Qué dificultades encontramos? ¿Se puede hacer aunque es un poco difícil el recorte? ¿La idea de recubrir tiene que ser muy bien pensada o es muy complicado hacerlo? ¿O es imposible con dos triángulos que numéricamente tienen la misma área?

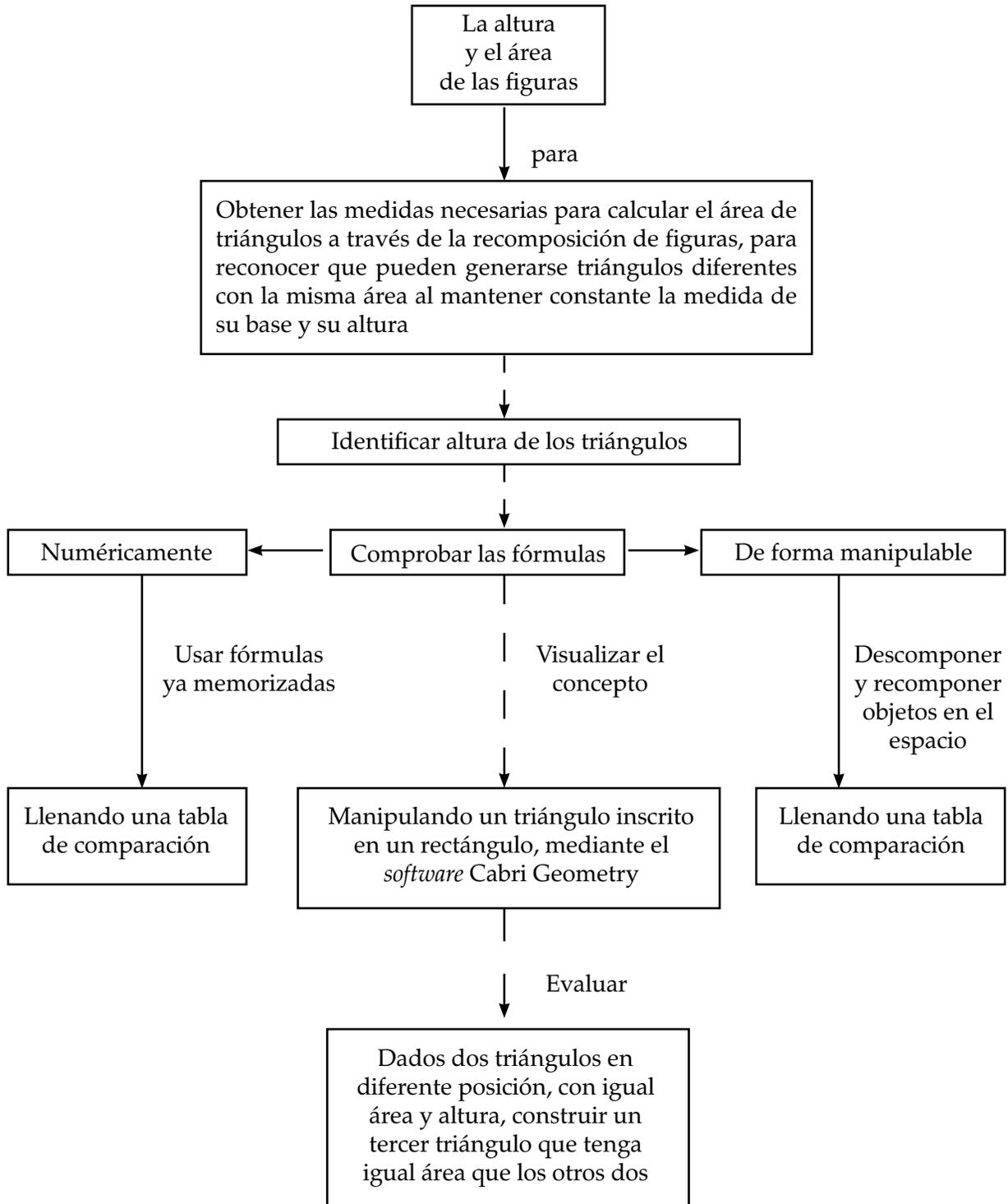


Figura 5 a. Ruta cognitiva de la actividad planeada

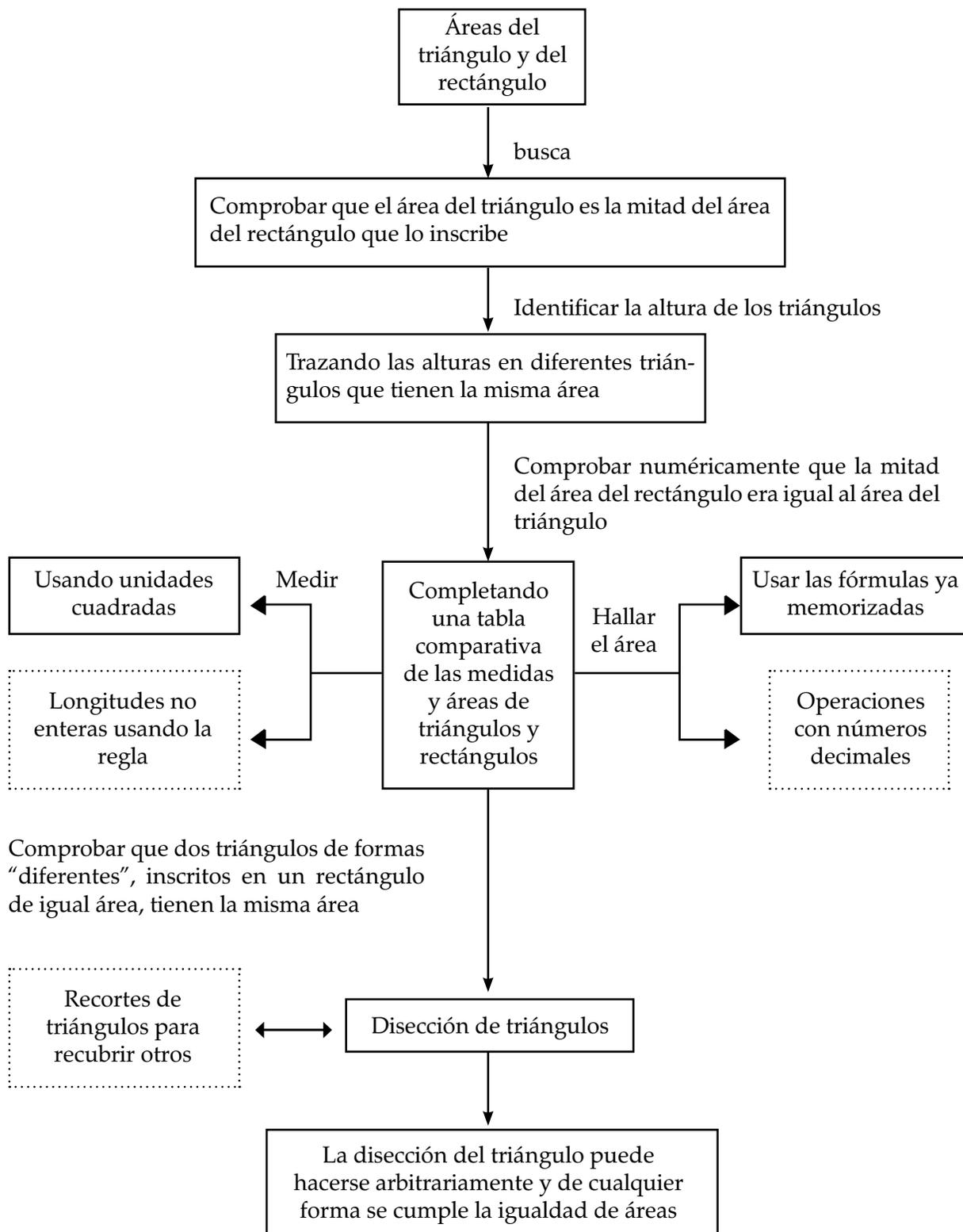


Figura 5 b. la clase realizada

Los colegas de Eduardo le responden lo que él estaba esperando, que el problema había sido el recorte y el no haber probado los materiales. En ese momento, él aprovecha para explicarles por qué ΔADE y ΔBEC no eran congruentes. Posteriormente les dice:

Yo todavía me fui más con la duda, en el momento en que se hace la primera reflexión del video, que Marcos me decía: "es que tú no probaste tu material, es que la línea era más gruesa". Y yo me fui con la idea de que yo había hecho mi dibujo y que la línea era, que el área que ocupaba la línea del marcador era la que me sobraba. Pero no me imaginé que esa partecita cabría en la parte de arriba. Y yo se lo aclaré y se lo dije fue por el grosor de la línea y por mis recortados. Pero no tenía la idea de que para hacer la disección de un triángulo se necesitaba tener otros conocimientos.

Sus compañeros reconocen que no se habían dado cuenta de la situación y que esta demostración se parece a la que ellos, los maestros de secundaria, hacen para demostrar el teorema de Pitágoras.

En este caso de estudio se pudieron evidenciar las fortalezas del uso de las herramientas de análisis, pues los maestros requerían evidencias para distinguir cuándo una situación de conflicto en la clase se da por el tratamiento de los contenidos de estudio, por la forma como se conduce la clase, por los materiales o por la manera como se comunican las ideas. Los maestros pudieron ver que aquello que ellos consideraron una dificultad pedagógica tenía un trasfondo conceptual.

Otra riqueza que se pudo extraer de esta experiencia es que la reflexión en colectivo favorece que se compartan inquietudes y se generen oportunidades de aprendizaje, en este caso, sobre los contenidos matemáticos.

Fue interesante, en este grupo, que cada uno de los integrantes expresara por escrito sus reflexiones, identificando fortalezas de la experiencia realizada, como también las dificultades, buscando alternativas para enfrentarlas. Al finalizar la experiencia de reflexión con el apoyo de las herramientas, Eduardo dice:

Yo puedo planear una actividad, pero a veces este afán de diseñar un material muy bonito desatiendo la idea. Y a veces no se logra ni una cosa ni otra; entonces, yo creo que la idea es conjugar las dos cosas. Planear bien una actividad tiene muchas situaciones que cuidar, desde: cómo se planea, qué objetivo se persigue, qué recursos se utilizan y qué logros se van a obtener a partir de esta planeación.

Reflexiones de Eduardo en la nueva experiencia

Esta experiencia de reflexión realizada por Eduardo se inicia el mismo día de su exposición a sus compañeros. Este día, el profesor hizo la entrega de la planeación de clase y al siguiente día se le acompañó en su escuela para hacer la grabación. Una semana más tarde se le da a Eduardo el video, para que pueda hacer, escribir y llevar a cabo su reflexión, la que es devuelta por escrito por el profesor casi un mes después.

En la nueva experiencia de reflexión se percibe que el profesor asume una actitud más analítica con respecto al contenido matemático de estudio. Para la clase, él seleccionó un tema que ya había estudiado, al parecer busca sentirse más seguro conceptualmente. Se observan reflexiones críticas y objetivas por Eduardo, pues revisa los aspectos que estuvieron bien en la clase y los aspectos en los que necesita continuar reforzando.

Con relación a las reflexiones de la primera etapa, Eduardo retomó aquellas en las que se enfatizó sobre la aclaración de inquietudes y la corrección de procesos, antes de continuar

con la siguiente actividad de la clase. Una fortaleza reconocida en Eduardo sobre su esquema pedagógico es la participación que da a los estudiantes como protagonistas del proceso de la clase. En su reflexión en la acción de la nueva experiencia se preocupó porque todos los niños participaran y expresarán sus dudas libremente.

Conclusiones

1. Las reflexiones llevadas a cabo con la aplicación del modelo les permitió a los tres profesores:
 - Pensar con más claridad sobre las nociones matemáticas que se estudiaron en las clases y sobre las competencias que en torno a ellas querían que los estudiantes desarrollaran. En algún caso, de forma personal, se reconocieron debilidades y, por tanto, una oportunidad para estudiar sobre ellas.
 - Valorar la planeación a través de una organización de contenidos que los condujera gradualmente a que los alumnos comprendieran aspectos de contenidos estudiados.
 - Que fueran más conscientes de que hay que pensar en las posibles respuestas de los estudiantes a las tareas y en las dificultades que se pueden enfrentar en la clase, para evitarlas o tener control sobre ellas con secuencias de enseñanza que permitan mejores formas de enseñar día a día.
2. En los tres casos de estudio se observó un interés por captar la atención de los estudiantes, mediante la realización de actividades variadas y motivantes. Las herramientas de análisis ayudaron a los profesores a valorar que las actividades requieren tener un propósito de aprendizaje específico.
3. El proceso de reflexión mostró la importancia de confrontar a los docentes con sus maneras de enseñar. En los profesores que sirvieron como casos de estudio se pudo observar el impacto que las reflexiones realizadas tuvieron en sus esquemas de enseñanza; ellos reconocieron que las actividades planeadas pueden transformarse por las interacciones que se dan en la clase y que sus esquemas pueden flexibilizarse, para atender de la mejor manera las situaciones de aprendizaje.
4. Las reflexiones de los profesores sobre los instrumentos fueron enriquecidas a través del proceso, posibilitando que analizaran sus beneficios y posibles dificultades para alcanzar los propósitos de aprendizaje de la clase.
5. Los tres advirtieron la importancia de hacer una selección afortunada de un problema o situación de aprendizaje, para sacarle el máximo provecho a los instrumentos seleccionados.
6. En el desarrollo de la investigación se puso de manifiesto un análisis poco cuidadoso del uso del lenguaje matemático por los tres docentes para comunicar los conceptos de la materia.
7. Las reflexiones resultantes de la aplicación del modelo posibilitaron que los profesores reconocieran la importancia del lenguaje matemático y la necesidad de usarlo para explicar, justificar y formalizar las ideas estudiadas en la clase.
8. La aplicación del modelo reflejó cambios en el proceso reflexivo de los profesores. Las cuatro reflexiones que los docentes-casos de estudio realizaron, cada vez se hicieron más críticas y objetivas. Sin embargo, se reconoce que el pensamiento reflexivo se construye con constancia y con procesos de formación de desarrollo profesional, pues además de la actitud reflexiva, se requiere el apoyo para el mejoramiento académico de los profesores.
9. Es importante enfatizar que los caminos a la reflexión en la formación de profesores

se constituyen en un proceso dinámico y continuo, y que no se pueden esperar cambios de la noche a la mañana en los maestros.

Hacia un modelo de reflexión de la práctica de un profesor de matemáticas

Después de diseñar, aplicar y analizar una primera versión de un modelo de reflexión se propone una versión mejorada, acorde con uno de los objetivos de la investigación. Este segundo prototipo recoge las inquietudes y las reflexiones de los autores de este artículo, para proponer un esquema más cercano a los profesores que se encuentran en diferentes contextos educativos y de desarrollo docente.

Como se pudo ver, esta primera experiencia se desarrolla en un contexto muy particular. Sin embargo, se quiere promover la reflexión sobre la práctica docente en la comunidad de profesores de matemáticas en general, con el fin de favorecer el mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Esta propuesta rescata todo el marco conceptual del modelo aplicado en esta investigación. Desde esta perspectiva, las bases teóricas del modelo con relación al proceso reflexivo se construyen sobre el aprovechamiento de algunas ideas del pensamiento de Dewey (1989) sobre el camino de la reflexión, y de Schön (1992), en cuanto a la caracterización de la reflexión en la acción y sobre la acción, para redefinir lo que en esta investigación se ha llamado *procesos de reflexión*.

Los procesos de reflexión se han fundado en las relaciones del triángulo pedagógico descrito por Saint-Onge (1997, citado en Ibáñez, 2007), relaciones que generan la actividad matemática tal como la refiere Treffers (1987).

Asimismo, al encontrar que los cuatro aspectos para reflexión que antes se propusieron,

efectivamente influyen en la actividad matemática que el maestro promueve en el aula, entonces, se mantienen en este nuevo prototipo, identificándolos como: 1) los contenidos matemáticos para la enseñanza, 2) las formas de enseñar la materia, 3) el uso y la selección de instrumentos y 4) el uso del lenguaje matemático.

En la experiencia de reflexión realizada se pudo ver la importancia de que el maestro reflexione antes, durante y después de la clase. Encontramos que estos procesos se dan en las diferentes relaciones del triángulo pedagógico. El proceso de *reflexión para la acción* se ubica en la relación, del triángulo pedagógico, entre profesor y contenido matemático, porque aquí el maestro está solo con el contenido que desea "enseñar". *La reflexión en la acción* se hace efectiva en la clase, en el vínculo entre el profesor y el estudiante, cuando el primero acerca al segundo el conocimiento matemático que ha planeado. *La reflexión sobre la acción* se sitúa en la relación del conocimiento matemático y el estudiante, porque aquí el maestro evalúa los logros de los objetivos de aprendizaje propuestos para la clase.

Para que las reflexiones sobre los aspectos mencionados en cada uno de los procesos se realicen de manera crítica y objetiva, se hacen necesarios unos "lentes" que le permitan al maestro verse en el modo como trata el contenido que enseña, en la forma como lo enseña, en la manera como se ponen en juego los instrumentos en el aula y en cómo dar explicaciones y formalizar los conceptos estudiados en la clase. En la primera versión del modelo de reflexión diseñado, aplicado y analizado se usaron cuatro herramientas que resultaron eficaces en los diferentes procesos de reflexión; estas fueron: las rutas cognitivas, los estudios comparativos, la selección de eventos de la clase y la guía de observación de los eventos de la clase. Es importante resaltar que la fuente para la construcción de estas herramientas en la primera versión del modelo fueron las videgrabaciones de dife-

rentes sesiones de trabajo. Por tal motivo, en esta segunda versión, la grabación del video de la clase es un elemento esencial, para que puedan construirse las herramientas de reflexión y puedan llevarse a cabo los procesos de reflexión antes descritos.

Por último, considerando que la reflexión es un proceso individual y también social, proponemos que el modelo se use por los maestros dentro de los grupos de trabajo de las instituciones en las que laboran, en las que se organicen jornadas de trabajo de los profesores del área en la que los maestros realicen este proceso de manera individual, pero socializado con los demás, para enriquecer la experiencia. Se considera interesante que los maestros compartan sus reflexiones y que se den espacio para ver la clase de un compañero, con el fin de construir críticas constructivas y formativas sobre la actividad matemática que se realizó en la clase. Posteriormente, se podría combinar el proceso con una sesión de trabajo en la que se planee una clase de forma colectiva, se graben unos a otros y se compartan las reflexiones realizadas en cada uno de los procesos.

Es importante que este modelo se oriente en una etapa inicial por personal especializado

con relación a las herramientas de reflexión y las formas de trabajo, partiendo de un proceso de reflexión sin herramientas y uno posterior con el uso de herramientas, instancias éstas que le permitan ver al maestro que se requieren algunos instrumentos para reflexionar críticamente sobre la práctica pedagógica realizada. Se espera que los maestros adquieran un hábito reflexivo individual y social, en el que se compartan las preocupaciones y las problemáticas que se viven en el aula, buscando alternativas de mejoramiento.

Se pudo evidenciar que el proceso de reflexión es largo y continuo, que requiere de un trabajo constante al respecto. Por eso, el modelo que se muestra en la figura 6 se propone en espiral, porque en cada círculo se abre una nueva experiencia que se lleva lo aprendido en la anterior. En el esquema se ve que cada círculo tiene sombras más marcadas, lo que quiere representar que cada vez las reflexiones se harán con mayor conciencia y responsabilidad, buscando alternativas de mejoramiento. Se espera que el maestro, además de que aprenda a evaluarse, busque optimizar su práctica en el aula y se haga consciente de la responsabilidad de promover la actividad matemática en el aula.

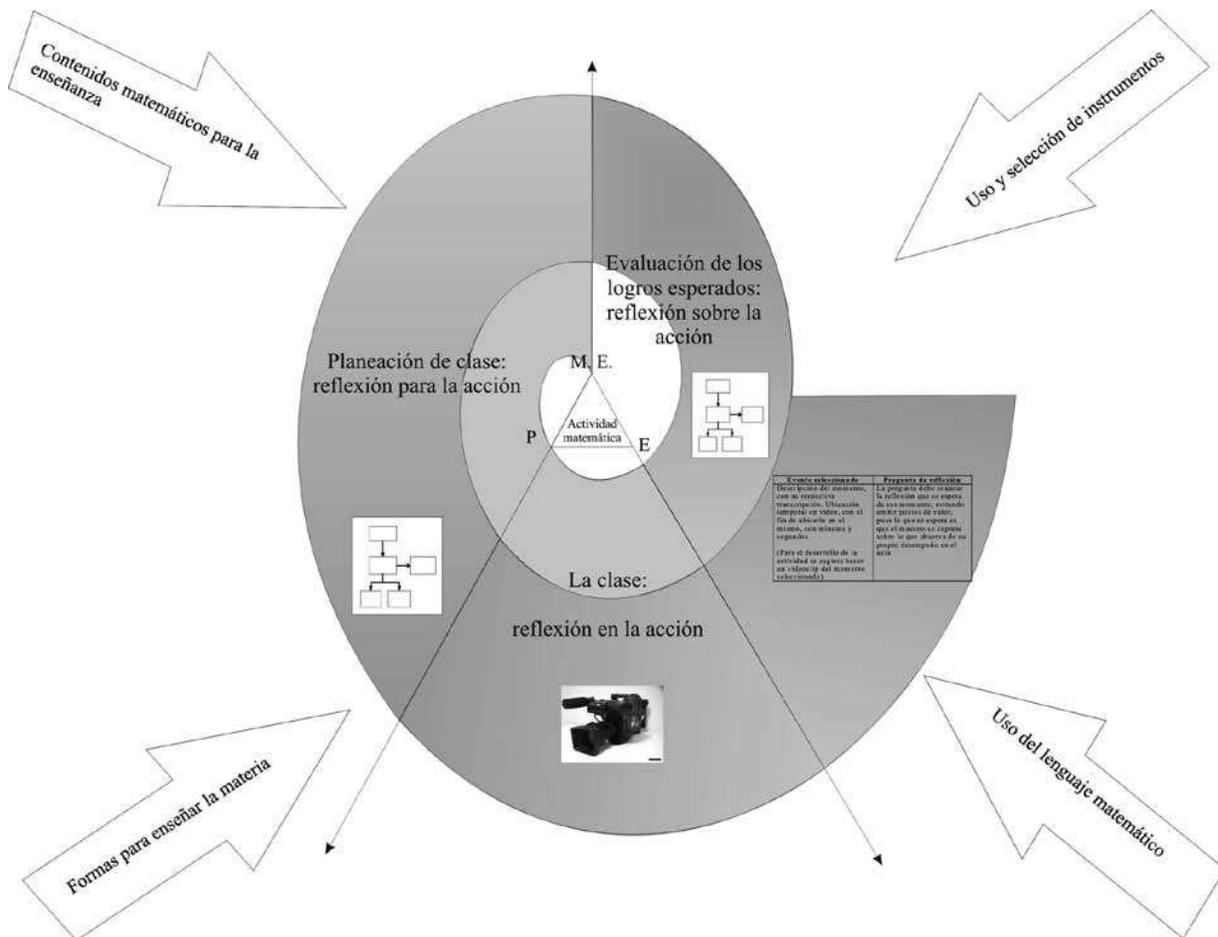


Figura 6. Un modelo para la reflexión del profesor de matemáticas

Referencias biblio y cibergráficas

Chevallard, Y., 1991, "Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité Mathématique", *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*, Grenoble, France, LSD2, IMAG, Université Joseph Fourier.

Dewey, J., 1989, *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. Barcelona, Paidós.

Fiol, M. A., 1999, "Aplicaciones de la teoría de matrices en matemática discreta", Departamento de Matemática Aplicada y Telemática, Universidad Politécnica de Catalunya, *Universidad Politécnica*

de Catalunya, [en línea], disponible en: <https://upcommons.upc.edu/e-prints/bitstream/2117/729/1/Llull.pdf>, consulta: 11 de febrero de 2009.

Ibáñez, C., 2007, "Un análisis crítico del triángulo pedagógico. Una propuesta alternativa", *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, vol. 2, núm. 32, pp. 435-456.

Llinares, S., 2000, "Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas", en: J. P. da Ponte y L. Serrazina, coords., *Educação matemática em Portugal, Espanha e Italia*, Lisboa, Portugal, Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, pp. 109-132.

Parada, S., 2009, "Reflexión sobre la práctica profesional: actividad matemática promovida por el profesor en su salón de clases", tesis de maestría, Centro de investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico nacional, México.

Ponte, J. P., 2000, *A investigação o professor de Matemática Problemas e perspectivas*, Seminario Internacional de pesquisa em educação matemática, promovido pela SBEM, São Paulo, Brasil.

Robert, A. y Rogalski, J., 2005, "A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in

a French 10th-grade class", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 59, pp. 269-298.

Schön, D., 1992, *La formación de profesionales reflexivos*, Buenos Aires, Paidós.

Shulman, L. S., 1987, "Knowledge and teaching: Foundations of the new reform". *Harvard Educational Review*, vol. 57, núm. 1, pp. 1-22.

Treffers, A., 1987, *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas Project*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Referencia

Parada, Sandra Evely, Olimpia Figueras y François Pluvinage, "Un modelo para ayudar a los profesores a reflexionar sobre la actividad matemática que promueven en sus clases", *Revista Educación y Pedagogía*, Medellín, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, vol. 23, núm. 59, enero-abril, 2011, pp. 85-102.

Original recibido: julio 2009

Aceptado: enero 2010

Se autoriza la reproducción del artículo citando la fuente y los créditos de los autores.
