EL ARGUMENTO DE INDISPENSABILIDAD DE LA MATEMÁTICA

Autor: Diana Isabel Quintero Suica

Cédula: 1020750472 – Código: 2011240048

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para obtener el título de Licenciada en Matemáticas

Director: Profesor Edgar Alberto Guacaneme Suárez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ

2015

Agradecimientos

Primero a Dios, por darme la licencia de realizar este trabajo, la salud y la fuerza para no desfallecer en el camino, y por tener la posibilidad de verlo culminado. A mi mamita por darme la vida y la posibilidad de ver tantas cosas maravillosas. Su trabajo y esfuerzo me alimentan cada día a ser una mejor profesional.

A mi querido esposo Andrés, que más que un esposo es mi mejor amigo, cómplice y compañero. Gracias por apoyarme en cada día y cada noche que le dedique a este trabajo. Por hacerme entender que, aunque seré bígama toda mi vida por amarlo a él y a las Matemáticas y, por supuesto, dar la vida por ambos, siempre será él la razón de todas mis razones; la razón primera y última de todo lo que aquí escribí.

A mí estimado profe Edgar. A él más que nadie le agradezco su dedicación y tiempo para leer cada palabra, cada línea que escribí con tanto esfuerzo. Por sus consejos, su paciencia y por alentarme cada día con sus palabras, convenciéndome de que mi locura y mis “caprichos intelectuales” son compartidos por alguien más en este mundo. Gracias por hacerme ver y convencer de cuán bellas son la Educación, la Matemática y la Filosofía.

A mis compañeros Dani, Krupsie, Alejita, Migue, Johncito T., Cristian, Juanito, Lao y Carito por acompañarme y alentarme a seguir adelante con este escrito. Infinitas gracias por su amistad y apoyo en cada paso de mi formación como profesora de Matemáticas.

Por último, a todas aquellas personas que con sus valiosos aportes hicieron posible que este trabajo se encuentre terminado, e influenciarme en continuar esforzándome por alcanzar mis objetivos con trabajo y entereza.

Resumen Analítico de Educación - RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	El argumento de indispensabilidad de la Matemática
Autor(es)	Quintero Suica, Diana
Director	Guacaneme Suárez, Edgar
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 111 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA, REALISMO MATEMÁTICO, EXISTENCIA DE ENTIDADES MATEMÁTICAS

2. Descripción

Trabajo de grado que se propone la ilustración de las, al menos, tres versiones del Argumento de Indispensabilidad de la Matemática explicitando sus ventajas y desventajas a partir de los sustentos teóricos que dan origen a la tesis Quine-Putnam, y las posturas filosóficas que lo utilizan como herramienta teórica. Dichos sustentos y posturas que se describen el documento son: el naturalismo, el holismo confirmacional, realismo en Matemática y nominalismo.

3. Fuentes

Alemán, A. (1999). El argumento de indispensabilidad en Matemáticas. *Teorema, 18*(2), 49-61.

Balaguer, M. (1998). *Platonism and Anti-pltonism in Mathematics.* New York: Oxford University Press.

Baum, R. (1973). *Philosophy and Mathematics.* San Francisco: Freeman, Cooper & Company.

Colyvan, M. (2001). *The Indispensability of Mathematics.* New York: Oxford University Press.

De Sagarra, J. (octubre de 2011). *La ontología de Quine y sus raíces en la filosofía de Carnap.* Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Diéguez, A. (1998). *Realismo científico: Una introducción al debate actual en filosofía de la ciencia.* Málaga: Universidad de Málaga.

Field, H. (1980). *Science Without Numbers.* New Jersey: Princenton University Press.

Monterroza, Á. (2011). Relativismo evolutivo, una alternativa epistemológica. *Trilogía*(4), 79-93.

4. Contenidos

El presente trabajo pretende conocer, describir y estudiar el argumento de indispensabilidad de la Matemática propuesto por Willard Van Orman Quine y Hilary Putnam y las ideas se encuentran expuestas en cinco capítulos.

En el primer capítulo expone una primera aproximación a la versión inicial del argumento. En este capítulo se presenta lo que cualquier persona encontraría de primera mano sobre el argumento. Cabe resaltar que en este capítulo diferenciamos las tres enunciaciones que del argumento pretendemos abordar ofreciendo una breve descripción de cada uno.

Luego de esto, en el segundo capítulo, exploramos la corriente realista (o platonista) desde tres miradas diferentes: la Filosofía, la Filosofía de la ciencia y las Matemáticas. Para cada una de las líneas de descripción tomamos los aportes y contribuciones de diferentes filósofos como Platón, Aristóteles, Kant, Popper, Balaguer, Maddy, entre otros.

Ya en el tercer capítulo ahondamos en las posturas filosóficas que dieron origen al argumento: el naturalismo y holismo de Quine y el realismo de Putnam. Allí se examinan las diversas interpretaciones de estos dos filósofos sobre las nociones de *realidad*, *existencia* y *verdad*, lo cual nos permite evidenciar una incongruencia entre el origen del argumento (naturalismo de Quine y realismo de Putnam) y los fines para los cuales sirve (realismo platónico).

Una vez especificados los referentes teóricos podemos iniciar con un análisis más detallado, en el cuarto capítulo, de las enunciaciones del argumento que se proporcionaron en el primer capítulo. Este análisis consiste en una descripción de las dificultades que muestra la enunciación inicial del argumento y cómo estas son el punto de partida para la reformulación de este.

Luego estudiamos (de una forma muy general) una propuesta que pretende restar legitimidad al argumento. El planteamiento, de carácter nominalista, es hecho por el filósofo de la ciencia Hartry Field; en este se replantea la teoría de la gravedad de Newton de forma que la cuantificación sobre entidades matemáticas no sea necesaria. Dicha propuesta, por tanto se convierte en una de las herramientas principales de los anti-realistas para anular la validez del argumento.

5. Metodología

Se organiza el trabajo a partir de la consulta de literatura especializada que nos ofreciera un detalle de los aspectos relevantes del argumento de indispensabilidad de la Matemática; búsqueda de autores que proporcionan un juicio de valor al argumento junto con las implicaciones de dichas afirmaciones; y por supuesto, la construcción del presente escrito que acopia e ilustra los aspectos que determinamos relevantes respecto a la materia de estudio.

La documentación que tuvimos en cuenta se seleccionó de acuerdo con cada uno de los temas de estudio de cada capítulo, priorizando artículos de revistas filosóficas o libros de contenido filosófico. La gran mayoría de las fuentes se encuentran en idioma Inglés.

6. Conclusiones

Una de las conclusiones es retomar la idea de la interpretación desde los marcos del realismo platónico. Es evidente que en el estudio del sustento filosófico de esta tesis se involucran interpretaciones de las nociones de *existencia*, *realidad* y *verdad* que no son compatibles con las interpretaciones de estas mismas nociones desde la tendencia realista-platonista.

Otro de los aspectos importantes que se puede concluir se encuentra relacionado con la sorpresa que genera el conocer una propuesta que desafía una creencia general desde tiempos antiguos, sobre la indispensabilidad de las Matemáticas en el quehacer diario de la producción de conocimiento científico.

Por otro lado, consideramos la importancia de la influencia de la Filosofía de las Matemáticas en la formación de docentes de Matemáticas, debido a que afecta tanto las creencias y concepciones del futuro docente como de sus actos en la enseñanza de la Matemática.

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, se hace necesario involucrar el estudio de la Filosofía de la Matemática en la formación de profesores de Matemáticas, y en particular en el plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, de forma que se generen reflexiones en las aulas sobre la producción e interpretación del conocimiento matemático.

Elaborado por:	Quintero Suica, Diana
Revisado por:	Guacaneme Suárez, Edgar

Fecha de elaboración del Resumen:	30	10	2015

Tabla de contenidos

Lista de Figuras

INTRODUCCIÓN

En el estudio de la Matemática las personas en general asumen muchas creencias sobre diversos objetos matemáticos (*v.g.*, polígonos, números, ecuaciones) y sobre sus propiedades. Por ejemplo, se cree que: la cantidad de superficie de los cuadrados cuyos lados están determinados por los catetos de un triángulo rectángulo es igual a la cantidad de superficie del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa de dicho triángulo[1]; los números primos son infinitos, (como lo demostró Euclides en la proposición 20 del libro IX de *Elementos*); o si n es un número entero mayor que dos, entonces no existen números enteros positivos x, y, y z tales que $x^n + y^n = z^n$, conocido como *el último teorema de Fermat*.

Sin embargo, aunque conocemos estas y otras propiedades de los objetos matemáticos, para muchas gentes estas no son del mismo tipo que las propiedades de otro objeto de nuestra realidad, como por ejemplo un balón o una casa. Para algunos la diferencia radica en que los objetos matemáticos pertenecen a un mundo de ideas, por lo cual no podemos tocarlos, verlos, palparlos o escucharlos, en tanto que los objetos balón o casa sí se pueden percibir a través de los sentidos. Desde tal perspectiva, nunca persona alguna ha podido ver el número dos o ha sostenido una esfera geométrica en sus manos; algo muy diferente a lo que ocurre con el balón el cual se puede sentir, o con la casa que se puede ver. A pesar de ello, sí se ha tenido contacto con representaciones del número dos o se ha tomado en las manos un cuerpo esférico. Así, si bien podemos crear modelos físicos o representaciones de esos objetos matemáticos que viven en nuestra mente, dichas representaciones o modelos no son el objeto en sí mismo. Con base en esto cabe hacer la pregunta: ¿cómo, más allá de la fe, se puede tener certeza de nuestras creencias sobre los objetos matemáticos y sus propiedades si estos no se encuentran al alcance de nuestros sentidos?

[1] Esta propiedad de los triángulos rectángulos, conocida como el teorema de Pitágoras, se encuentra expuesta en la proposición 47 del libro I de *Elementos*.

Existen algunas respuestas a esta pregunta y cada una de ellas se puede enmarcar en una corriente filosófica particular. Así, por ejemplo, como lo señala Russell (s.f.), los racionalistas establecen que los seres humanos tenemos una capacidad no sensible para comprender la Matemática en un pensamiento puro; los logicistas toman partido por reducir cada elemento de la Matemática a un lenguage lógico (metalenguaje); y por último, los nominalistas, aducen que no existen los objetos matemáticos, por lo cual no es necesario justificar nuestras crencias sobre ellos.

El argumento de indispensabilidad de la Matemática es una vía o intento por responder a tal pregunta. Por medio de este, se justifica la existencia de los objetos matemáticos a partir de la aparente aplicabilidad (e indispensabilidad) de la Matemática a ciencias empíricas, como la Física. La insinuación de dicho argumento se debe, principalmente, a los filósofos Willard Van Orman Quine y Hilary Putnam, y más allá de ubicarse en una obra específica, las ideas principales sobre este se reconocen en sus escritos publicados desde la decáda de los cuarentas del siglo pasado.

Es importante resaltar que la noción de *existencia* a la que refiere el argumento se encuentra estrechamente relacionada con la filosofía platónica sobre la existencia de los objetos matemáticos. Por esta razón, dicho argumento es una de las mayores herramientas a favor de concepciones adscritas a la corriente realista de la ciencia y la Filosofía.

El presente trabajo pretende conocer, describir y estudiar este argumento de indispensabilidad de la Matemática propuesto por los autores mencionados anteriormente. Para esto organizamos un plan de trabajo que involucró principalmente: la consulta de literatura especializada que nos ofreciera un detalle de los aspectos relevantes del argumento de indispensabilidad de las Matemáticas, búsqueda de autores que proporcionan un juicio de valor al argumento junto con las implicaciones de dichas afirmaciones y, por supuesto, la construcción del presente escrito que acopia e ilustra los aspectos que determinamos relevantes respecto a la materia de estudio.

Relacionado con la presentación de la información es preciso mencionar que se procuró que esta, además de ilustrar los aspectos propios del tema en cuestión, permitiera al lector evidenciar el progreso que tuvimos con cada una de las lecturas que realizábamos.

Por lo anterior iniciamos en el primer capítulo, con una primera aproximación a la versión inicial del argumento, entendiendo esta aproximación como un referente al que cualquier lector puede acceder si realiza una búsqueda rápida sobre información de tal argumento. En síntesis, en este capítulo se presenta lo que cualquier persona (en particular nosotros), inclusive aquellas no muy familiarizadas con la Filosofía de la ciencia, encontrarían de primera mano sobre el argumento. Cabe resaltar que en este capítulo diferenciamos las tres enunciaciones que del argumento pretendemos abordar ofreciendo una breve descripción de cada uno. No se detalla mayor aspecto debido a que hasta este punto no contábamos con los componentes necesarios para un análisis más específico.

Luego de esto, en el segundo capítulo, exploramos la corriente realista (o platonista) desde tres miradas diferentes: la Filosofía, la Filosofía de la ciencia y las Matemáticas. Para cada una de las líneas de descripción tomamos los aportes y contribuciones de diferentes filósofos como Platón, Aristóteles, Kant, Popper, Balaguer, Maddy, entre otros.

El estudio de la tendencia realista que efectuamos en el segundo capítulo nos permite dotar de argumentos teóricos la interpretación que hacemos de la versión original del argumento y las reformulaciones que de este se han hecho en capítulos posteriores. Además, nos permite comprender, con una mayor facilidad, las diversas dificultades en torno al planteamiento de esta tesis y sus reformulaciones

Ya en el tercer capítulo ahondamos en las posturas filosóficas que dieron origen al argumento: el naturalismo y holismo de Quine y el realismo de Putnam. Allí se examinan las diversas interpretaciones de estos dos filósofos sobre las nociones de *realidad*, *existencia* y *verdad*, lo cual nos permite evidenciar una incongruencia entre el origen del argumento (naturalismo de Quine y realismo de Putnam) y los fines para los cuales sirve (realismo platónico).

Una vez especificados los referentes teóricos podemos iniciar con un análisis más detallado, en el cuarto capítulo, de las enunciaciones del argumento que se proporcionaron en el primer capítulo. Este análisis consiste en una descripción de las dificultades que muestra la enunciación inicial del argumento (a la cual otorgamos el nombre de *AIM basado en la noción de verdad a partir de la ciencia*), y cómo estas son el punto de partida para la reformulación de este. En este mismo capítulo presentamos y detallamos, igualmente, las al menos dos reformulaciones mencionadas en el primer capítulo (que denominamos *AIM basado en la noción de confirmación* y *AIM basado en la noción de verdad como inmanencia*) haciendo evidentes sus ventajas y desventajas.

Luego de estudiar las diversas pretensiones de algunos filósofos de la ciencia con el fin de evitar las dificultades de la versión original del argumento, estudiamos (de una forma muy general) una propuesta que pretende restar legitimidad al argumento. El planteamiento, de carácter nominalista, es hecho por el filósofo de la ciencia Hartry Field; en este se replantea la teoría de la gravedad de Newton de forma que la cuantificación sobre entidades matemáticas no sea necesaria. Dicha propuesta, por tanto se convierte en una de las herramientas principales de los antirrealistas para anular la validez del argumento.

Al final de este escrito presentamos algunas de las conclusiones a las cuales pudimos llegar luego del estudio de este tema. Algunas de estas se encuentran estrechamente realcionadas con algunas de las evidencias propias que se nos revelan en el estudio del argumento. Sin embargo, algunas otras tienen que ver con la influencia de la Filosofía (en particular de la Filosofía en las Matemáticas) en las creencias y concepciones de docentes de Matematicas en formación.

La documentación que tuvimos en cuenta se seleccionó de acuerdo con cada uno de los temas de estudio de cada capítulo, priorizando artículos de revistas filosóficas o libros de contenido filosófico. La gran mayoría de las fuentes se encuentran en Inglés por lo cual las citas que aquí presentamos, que provengan de textos en este idioma, son traducciones que hemos hecho de las ideas que se exponen en tales doumentos.

Con este panorama general, iniciemos el estudio del argumento de indispensabilidad de las Matemáticas.

Capítulo 1 – Argumentos de indispensabilidad de la Matemática

En el presente apartado procuramos[2], en primer lugar, dar una aproximación a lo que constituye un Argumento de Indispensabilidad (de ahora en adelante AI), particularizando, claro está, su definición al campo de la Matemática por medio del Argumento de Indispensabilidad de la Matemática (de ahora en adelante AIM) expuesto en la propuesta de Quine y Putnam.

Luego, ilustraremos algunos de los aspectos que estimamos importantes comentar para que nuestro lector pueda darse una primera y básica idea sobre el tema que se tratará en este documento.

1.1 ¿Qué es un AI?

Para poder dar inicio a nuestro estudio del AIM se hace necesario que definamos lo que es un *argumento de indispensabilidad* - AI. Colyvan (2001) citando a Field (1980) indica que un argumento de indispensabilidad es "un argumento en el que creemos en una determinada alegación […] porque hacerlo es *indispensable* para ciertos propósitos" (p. 6).

Aunque el AIM es de tipo científico y se constituye en una vía para la demostración de la existencia de los objetos matemáticos, es importante notar que la definición de un AI no se limita necesariamente al campo de las ciencias o de la Matemática, como tampoco se justifica su uso exclusivamente para la prueba de existencia de entidades. Estos AI se pueden encontrar en la cotidianidad de muchas personas, como por ejemplo la alegación "es *indispensable* creer en Dios para tener un vida bienaventurada".

[2] Desde una primera aproximación la cual podríamos llamar "ingenua" porque se basa principalmente en documentos e información que cualquier lector interesado puede encontrar sobre el tema en una primera búsqueda.

Aunque en lo que expondremos en este capítulo será referido al ámbito científico, particularmente el ámbito de la Matemática, queremos antes ilustrar una formulación en el ámbito científico (no matemático) de un AI. Aunque formulado bajo una estructura muy general, será suficiente para entender de una forma muy aceptable la estructura de este. Dicha formulación se puede hallar igualmente en Colyvan (2001) y se expone como sigue: "Si la aparente referencia a alguna entidad (o clase de entidades) ξ es indispensable para nuestras *mejores teorías científicas,* entonces debemos creer en la existencia de ξ" (p. 7). Algunos elementos involucrados en esta formulación como son "las mejores teorías científicas" y "debemos creer la existencia de…*",* se aclararán posteriormente.

Por otro lado, pese a que el más popular AI en el marco de Matemática se atribuye a Quine y Putnam, el cual podemos hallar en los escritos publicados en la década de los 50, 60 y 70 de estos autores, algunos filósofos y matemáticos como Fregue y Gödel habían formulado sus propios AI en este mismo campo. Estos AI en la Matemática son buenos ejemplos de AI que no se suscriben a ideas realistas, porque los propósitos de su uso no están involucrados con la demostración de existencia de entidades. A continuación se explican brevemente estas formulaciones de AI.

Colyvan (2001) indica que Frege sugería su AI a partir de un cuestionamiento que él presentaba a los formalistas sobre la causa de la aplicabilidad de la Matemática. Él era consciente de la concepción que tienen los formalistas de las teorías matemáticas, equiparándola con un "juego" en el que hay unas reglas básicas a seguir y en el que los objetos matemáticos no tienen un significado. Lo que Frege le discute a los matemáticos formalistas es sobre cómo es posible que las teorías matemáticas, considerándolas un mero juego, puedan ser aplicables a tantas prácticas en las ciencias empíricas y en la vida cotidiana. Él sugería que era *indispensable* elevar a la Aritmética a un rango en el que se le considere ciencia y no tratarla como un simple juego, para poder justificar su aplicabilidad.

Gödel, por su parte, se inspira para formular lo que consideramos es un AI a partir de la adición de un nuevo axioma a la teoría de conjuntos (Colyvan, 2001). Él buscaba justificar la pertinencia de dicho axioma en la teoría en la que se encontraba trabajando. Este matemático, lógico y filósofo indicaba que sería justificable esta pertinencia siempre que el axioma fuese fructífero, es decir, que el axioma permita el estudio de consecuencias o teoremas verificables es *indispensable* para estar justificados en incluirlo en la teoría.

Luego de esta breve introducción a la noción de AI, haciendo alusión a algunos ejemplos tanto en la matemática como en la ciencia empírica, iniciemos nuestro acercamiento al AIM partiendo de su primer formulación, la cual se basa en la noción de verdad a partir de la ciencia, y describiendo *grosso modo* las, al menos, dos reformulaciones que de este se han planteado.

1.1.1 Primera enunciación

La formulación original del AIM es atribuida, por parte de los integrantes de la comunidad académica, a los filósofos estadounidenses Willard Van Orman Quine (1908-2000) y Hilary Putnam (1926-).

El primero, nacido en Akron, Ohio en 1908, es reconocido como el filósofo de mayor prestigio en los Estados Unidos durante el siglo XX, y aquel que hizo grandes aportaciones en Lógica matemática y en general en Filosofía de las ciencias. Destacado por defender muchas de las ideas naturalistas, fisicalistas y holistas de sus maestros Otto Neurath (1882-1945) y Rudolf Carnap (1891-1970)[3].

Por su parte, a Hilary Putnam, nacido en Chicago, Illinois en 1926, se le considera uno de los más prolíficos filósofos en la última mitad del siglo XX. Hizo importantes aportaciones a la Lógica matemática, Teoría de la computación y Filosofía del lenguaje. Se le reconoce, además, por demostrar que el décimo problema de Hilbert[4] es irresoluble.

[3] Ambos, tanto Neurath como Carnap, pertenecientes al famoso Círculo de Viena. En líneas posteriores explicitaremos la importancia de las ideas que surgieron en esta sociedad académica para el análisis detallado del AIM.

[4] "Dar un algoritmo que decida para la ecuación $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ donde f es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Z}$, si tiene o no una solución con cada $x_i \in \mathbb{Z}$" (Videla, 2006, p. 186).

La primera versión del argumento, llamada comúnmente como *tesis Quine-Putnam*, la podemos examinar en Alemán (1999) y la cual presentaremos de forma sintética en el siguiente gráfico (Figura 1):

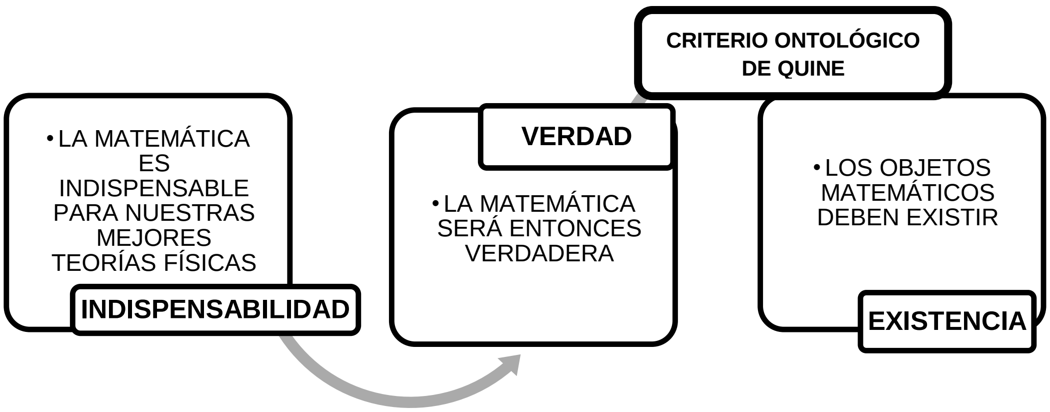

Figura 1: Tesis Quine y Putnam

La ilustración anterior nos permite observar que en la formulación inicial de la tesis Quine-Putnam se ven involucrados tres principios fundamentales a tener en cuenta: la *indispensabilidad de las matemáticas*, *la verdad de la matemática* y *la existencia de los objetos matemáticos*. Estos tres principios, de acuerdo con las interpretaciones de esta primera enunciación, deben conducir a concluir la existencia de los objetos matemáticos. Describamos brevemente cada uno de estos tres principios fundamentales.

La *indispensabilidad de la Matemática* para nuestras **mejores teorías científicas**[5] es el punto de partida de la tesis Quine-Putnam. Es evidente y ampliamente documentada la utilidad de la Matemática para muchas ciencias empíricas a través de la historia de la humanidad. Por ejemplo, citando algunos casos particulares, tenemos la teoría de la gravitación de Newton, las leyes de los campos electromagnéticos, análisis de riesgos financieros, mecánica cuántica, entre otros.

[5] Entenderemos en el presente trabajo la expresión **mejores teorías científicas** o **mejores teorías físicas** como aquellas teorías que en la actualidad son ampliamente aceptadas debido a que describen de la mejor forma, o de una muy aproximada los diversos fenómenos que atañen a cada una de ellas. Es decir, son las teorías mejor contrastadas empíricamente hasta el momento.

Además de ser útil, la Matemática *parece* ser indispensable para todas estas posibles aplicaciones. Indicamos que *parece* indispensable porque la abrumadora evidencia de su uso para muchas otras ciencias y su éxito en contribuir con los propósitos de dichas ciencias, no nos sugiere algo diferente. No parece, *prima facie*, que haya alguna otra herramienta de la misma naturaleza que subvencione las diversas actividades de la práctica científica. Una persona se consideraría sensata al argumentar que la matemática está en todo y para todo.

Hagamos un breve paréntesis comentando algo importante respecto a lo dicho últimamente. Si bien, la utilidad de la Matemática y su aparente indispensabilidad en el campo de las teorías físicas es algo ampliamente documentado y aceptado por la mayoría de las personas, hay quienes se cuestionan sobre esta aparente aplicabilidad e indispensabilidad. Y estos cuestionamientos parten de varios ejemplos en los que las teorías matemáticas han sido creadas solo por satisfacer al matemático o su aplicabilidad se da en un tiempo posterior a su surgimiento. Es una característica intrigante de la matemática que, al ser de carácter abstracto, contribuya sustancialmente a “ordenar” los sucesos de nuestra realidad.

La pregunta ¿por qué la Matemática es aplicable? no es sencilla de responder y es uno de los asuntos más complejos de los que trata la Filosofía de la Matemática. Sin embargo, evidenciamos claramente que la tesis Quine-Putnam o AIM, sin mayor discusión, parte de la suposición de que la Matemática sirve como instrumento indispensable y predilecto para trabajar en las ciencias empíricas.

Retomemos la descripción del AIM. Después de determinar un hecho obvio que es la indispensabilidad de la Matemática en las ciencias físicas, se determina que dicha Matemática es verdadera porque de lo contrario no podría ser tan útil y exitosa para la modelación de los diversos sucesos que cada una de dichas ciencias físicas pretende estudiar. Ahora bien, se hace preciso que aclaremos en qué sentido se habla de la verdad de las Matemáticas.

Muchos matemáticos (incluidos los profesores de Matemáticas) confunden usualmente la verdad de la matemática con la verificación de unas determinadas proposiciones, las cuales denominamos teoremas, a la luz de un referente teórico compuesto, igualmente, por otras proposiciones, a las cuales nos referimos como axiomas. Los teoremas que se pueden demostrar en un determinado marco axiomático diremos que son *verificables*.

La verdad de la Matemática a la que en este escrito nos referiremos, será la que plantea la corriente realista de la ciencia o realista de las matemáticas[6]. Una teoría es verdadera desde esta postura filosófica cuando “proporciona una imagen real y fiel en sus detalles de la realidad que describen” (Marín, 2008, p. 30). En este punto de la discusión cabe hacerse las siguientes preguntas: ¿qué se puede interpretar por la expresión *imagen real y fiel*? o ¿qué se entiende desde esta postura por la palabra *realidad*?

No obstante, aunque hasta este punto no tenemos los elementos teóricos desde la Filosofía de la ciencia para describir en qué se constituye la realidad a la que refiere el realismo científico, podemos aventurarnos a conjeturar, de acuerdo con nuestra experiencia, que tal realidad debe ser ese mundo externo que sentimos y vivimos a diario. Todo aquello que se encuentra fuera de nosotros puede ser una buena forma de ver esa realidad. En ese sentido, es posible afirmar que la Matemática se convierte en una imagen real y fiel de esto que creemos es realidad, pues es claro que debido a su utilidad sirve para la modelación de los fenómenos que observamos a nuestro alrededor. En síntesis, el mundo se comporta matemáticamente.

Sin embargo, dejando de lado un poco la posible respuesta a las preguntas anteriores (porque es posible que se tenga una visión diferente de *realidad* y de *imagen real y fiel*), es evidente que, por ejemplo, el hecho de que un teorema sea verificable en un determinado marco axiomático no implica necesariamente que este es verdadero, o lo que es lo mismo, un teorema puede ser demostrable en una determinada teoría matemática sin que este sea una *imagen real y fiel* de una *realidad* particular.

Además podemos, al menos de forma intuitiva, determinar que la naturaleza de esta verdad a la que nos referimos es trascendente, porque los objetos mismos de las matemáticas, como

[6] Usamos la referencia que hace la tendencia realista en filosofía de la ciencia para aclarar el término de verdad de la Matemática porque el AIM es usado, de acuerdo con esta primera aproximación, para propósitos francamente realistas en el campo del conocimiento científico.

expusimos en la introducción, no son cognoscibles siquiera por medio de la experiencia sensorial. Un teorema matemático, para muchas gentes, versa sobre entidades ideales a las cuales no podemos acceder por medio de nuestra percepción sensorial. Esto nos conduce a pensar que el hecho de determinar la verdad de un teorema matemático, debido a la naturaleza de sus objetos, es una cuestión de tipo metafísico[7].

Pero volvamos a nuestro asunto. Habiendo revisado el camino que se compone de los dos primeros principios sobre los cuales se encuentra fundamentado el AIM, debemos lograr deducir la proposición buscada sobre la existencia. Como es ampliamente aceptado el uso, y por tanto la indispensabilidad de las teorías matemáticas para las ciencias fácticas, y además esta es verdadera, deducimos entonces que los objetos propios del estudio de la Matemática (números, funciones, conjuntos, etc.) deben existir.

Debemos también precisar, al igual que lo hicimos con la noción de verdad, lo que refiere la palabra existencia en el contexto del AIM. Como el AIM se emplea a manera de herramienta de la posición realista de las matemáticas para determinar la existencia de los objetos matemáticos, en este entorno particular, se hace necesario que dicha existencia la examinemos desde el punto de vista realista-platónico. Quiere decir que los objetos de la Matemática preexisten, inclusive a los sujetos cognoscentes, y por lo tanto habitan en un mundo trascendente, atemporal y descontextualizado. En esto se constituye la existencia desde la mirada realista-platónica.

Esta última percepción sobre la existencia de los objetos matemáticos suena coherente con la idea de pensar en los objetos de las matemáticas como entes a los cuales accedemos indirectamente por medio de sus representaciones, pero no de forma directa con la experiencia sensorial.

Habiendo aclarado el sentido de la existencia retomemos un punto significativo en el último paso del AIM. Para obtener la conclusión central del AIM, es necesario entablar "un puente"

[7] De acuerdo con la RAE, la palabra metafísico designa a la "Parte de la filosofía que trata del ser en cuanto tal, y de sus propiedades, principios y causas primeras".

entre la premisa que afirma el carácter verdadero de la Matemática y la existencia de sus objetos. A esta conexión o "puente" se le denomina *criterio de compromiso ontológico.*

Hagamos una breve explicación sobre el criterio de compromiso ontológico. Este criterio es una idea planteada por Quine, basada principalmente en la aceptación de aquellas entidades introducidas en una teoría científica. Palacio (1995) cita a Quine, indicando que el criterio de compromiso ontológico se emplea cuando "una teoría adopta una entidad si y solo si esta entidad debe incluirse entre los valores de las variables para que los enunciados de la teoría sean verdaderos" (p. 97). La postulación de este criterio se corresponde, como veremos más adelante, con la noción de existencia que concibe Quine en su postura naturalista.

Volvamos con el AIM. Este argumento parece un camino sencillo de seguir para probar algo tan controvertido como lo es la existencia de entidades abstractas. Sin embargo, la tesis Quine-Putnam ha sido objeto de diversas críticas, por lo cual algunos filósofos, además de poner de manifiesto las dificultades que posee la tesis, han planteado su reformulación de forma que no se presenten dichas dificultades.

El asunto más problemático cuando indagamos sobre el tema es el de inferir, a partir de la aplicabilidad de la Matemática, el carácter verdadero de esta. Aunque parece sencillo obtener la conclusión, la inferencia no es en sí obvia debido a que, como mencionamos en líneas anteriores, esta noción de verdad es trascendente a la experiencia porque los objetos propios de la Matemática son objetos insensibles.

A continuación revisaremos una de las versiones del AIM en la que se pretenden superar los inconvenientes generados por la primera versión. El cambio de esta formulación respecto a la primera radica esencialmente en el reemplazo de la noción trascendente de verdad por algo más manejable, como es la idea de confirmación.

1.1.2 Segunda enunciación

Habiendo explorado el planteamiento original de la tesis Quine-Putnam, y teniendo claro lo que busca y los elementos involucrados para obtener la conclusión sobre la existencia de los objetos propios de la Matemática, presentaremos a continuación una reformulación de la versión original. Esta interpretación la ilustraremos, al igual que la primera enunciación, por medio de un esquema que la sintetiza (Figura 2):

Figura 2: AIM-reformulación tesis Quine-Putnam

Dicha propuesta del AIM cambia la noción trascendente de verdad y se esboza teniendo como referente la noción de *confirmación* que busca, principalmente, eludir los inconvenientes que genera la segunda premisa del argumento.

Gracias al esquema presentado observamos claramente que el planteamiento de este AIM se sustenta, al igual la primera enunciación, en tres principios básicos, a saber: *la indispensabilidad*, ***la confirmación*** y *la existencia*.

Cabe resaltar que para esta formulación de la tesis la noción de existencia se emplea con el mismo significado que se explicitó en la sección anterior, es decir, es una existencia de tipo realista-platónica. Además, los argumentos para sustentar la indispensabilidad de la Matemática en las mejores teorías físicas, son los mismos.

Revisemos el esquema general de esta segunda enunciación. Debemos iniciar, al igual que en la versión anterior, partiendo del supuesto de que la Matemática es aplicable a las mejores teorías científicas. Como la definición que hemos empleado aquí de la expresión las *mejores teorías científicas* se establece en términos de las teorías mejor contrastadas, podemos concluir que dichas teorías se encuentran confirmadas por una cantidad determinada (y considerable) de hechos observables.

Precisemos algo: esta característica de confirmación de las teorías fácticas las acerca mucho más a nuestra visión actual de generar conocimiento científico pues, el hecho de que una teoría, por ejemplo T_1, se encuentre altamente confirmada, no nos conduce a descartar que haya en un futuro, una teoría que explique y prediga de una forma más adecuada los fenómenos que son descritos por T_1. Esta forma de ver el conocimiento no es posible deducirla cuando se califica a las ciencias fácticas como verdaderas pues, implícitamente, conduce a pensar que son *las* teorías y no habrán otras mejores, finalmente la verdad no tiene grados de certeza.

Continuemos, sin embargo, con la descripción de esta segunda enunciación para el AIM. El hecho de que las teorías físicas se encuentren altamente confirmadas nos debe llevar a inferir que la Matemática empleada en dichas teorías se encuentra confirmada igualmente. En otras palabras, si la teoría física se ve confirmada por las evidencias de los diversos sucesos que se predicen a partir de cuantificar sobre entidades matemáticas, entonces la Matemática empleada en dichas predicciones se confirma también.

Solucionado, aparentemente, el inconveniente que genera la concepción de verdad trascendente cambiándola por una noción más manejable, como lo es la confirmación, el último paso se constituye en abordar la conexión que existe entre las dos últimas premisas la cual hemos denominado *criterio de compromiso ontológico* de forma que se pueda obtener la conclusión deseada: las entidades matemáticas existen.

Esta versión del AIM nos deja una preocupación, justamente debida a la noción de confirmación. Aunque dejar de hablar de la verdad de las teorías físicas es algo que debe ser considerado, y por qué no, cambiado por una noción de confirmación, no creemos que por esto se deba supeditar la confirmación de las proposiciones matemáticas a la confirmación de los enunciados de las ciencias fácticas que se formulan teniendo en cuenta estas proposiciones.

Esto lo justificamos por el siguiente ejemplo: la teoría de la gravedad de Newton y la teoría de la relatividad se formulan teniendo como base, por lo menos de forma aparente, la misma teoría matemática. Es bien conocido que estas dos teorías son teorías “rivales” en el sentido de que la teoría de la gravedad de Newton se constituye en una teoría aplicable solo a un sub-espacio de aquel espacio concebido por la teoría de la relatividad. Ahora bien, la idea de que algunas hipótesis no confirmadas por sucesos experimentales dejen de confirmar la teoría de la gravedad de Newton no implica necesariamente que la Matemática empleada en la formulación de esta teoría ya no se encuentre confirmada. O que si los sucesos confirman hipótesis de la teoría de la relatividad, confirmen a la teoría matemática sobre la cual se encuentra planteada (la misma que se usa en la teoría de la gravitación universal).

Pareciera así que las proposiciones de la Matemática que se emplean en la formulación de ciencias empíricas, se encuentran dotadas de cierta certeza que no depende directamente de su aplicabilidad. No obstante, debemos analizar esto con más detalle en el cuarto capítulo cuando dispongamos de los elementos que nos permitan aclarar estas afirmaciones.

Examinemos ahora la última de las versiones del AIM que son objeto de estudio de este trabajo. Esta interpretación se debe al filósofo de la Matemática Michael David Resnik quién presenta una propuesta en la que procura solventar el obstáculo que exhibe la tesis Quine-Putnam. A continuación se muestra su propuesta y los cambios efectuados a la versión expuesta en el primer apartado.

1.1.3 Tercera enunciación

Michael David Resnik, filósofo de la Matemática, lógica y teoría de la decisión, hace una propuesta modificando el AIM basado en la noción de confirmación, debido a que esta última presenta gran contrariedad en sus planteamientos. Esta nueva propuesta, además de comprometer más premisas que los anteriores planteamientos, busca, básicamente, retomar la noción de verdad trascendente de la formulación original del AIM.

Ahora bien, la idea de retomar la noción de verdad trascedente y demostrar que la Matemática tiene este carácter no lo hace desde la misma vía que se presentó en el planteamiento inicial del AIM o tesis Quine-Putnam. Resnik reconoce que no es posible determinar la verdad de la Matemática partiendo la determinación de la verdad de la teoría empírica que se encuentra formulada y cuantifica sobre esta. Para ello propone entonces demostrar la verdad de la Matemática sin acudir a las teorías físicas que la emplea como herramienta para sus estudios.

En otras palabras, él se propone demostrar que la Matemática es verdadera al margen del carácter de verdad de las teorías físicas que la incorporan. A esta versión del AIM el mismo Resnik la denomina *Argumento de Indispensabilidad Pragmático* (desde ahora AIP).

Como es costumbre, exhibimos por medio de un esquema gráfico el planteamiento del AIP de Resnik, el cual se encuentra esbozado sobre siete tesis, las cuales conllevan a la conclusión de que la Matemática es verdadera. Las premisas que ilustramos y que sustentan esta versión del AIM para obtener la conclusión buscada, las tomamos de Alemán (1999) y Wilcox (2014) (Figura 3):

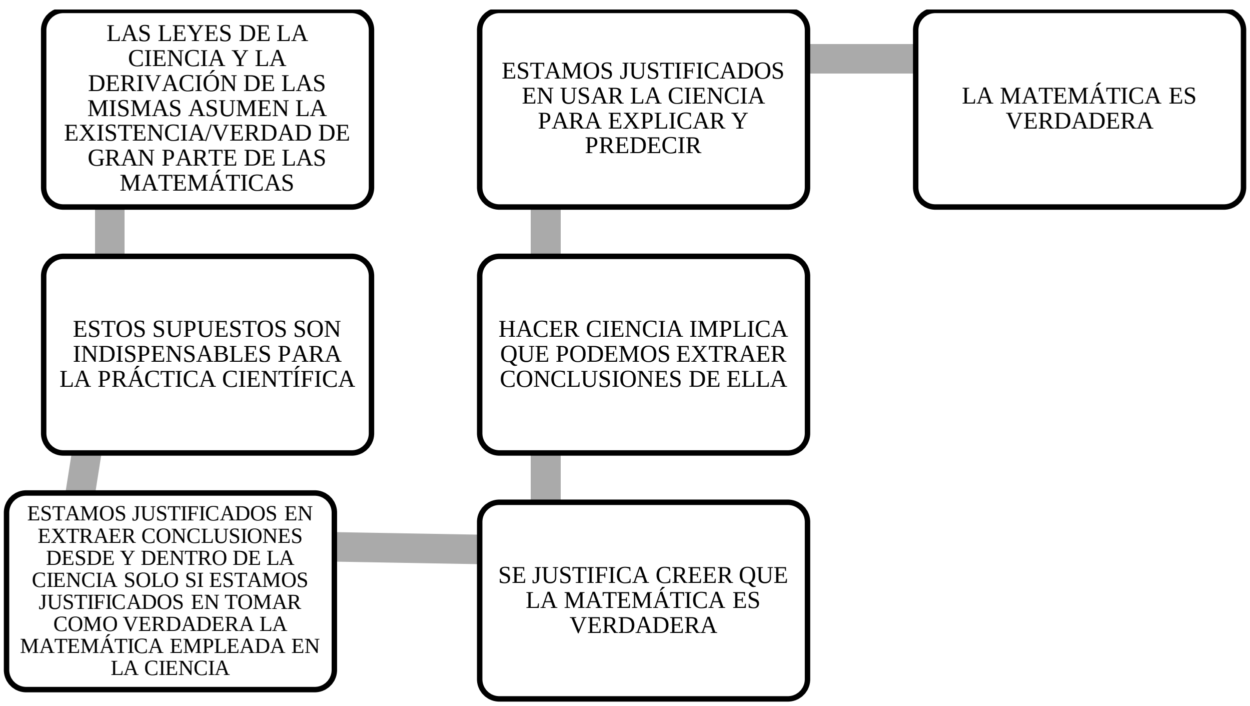

Figura 3: Tesis del AIM pragmático

Lo fundamental de estas tesis del AIM es que, sin importar si las ciencias físicas (empíricas) son falsas, verdaderas o meramente confirmadas, debemos poder demostrar en cualquier caso el carácter de verdad que toma la Matemática. Luego de demostrar que la matemática es verdadera, debemos inferir la conclusión sobre la existencia de las entidades matemáticas, existencia que tiene la misma interpretación que se indicó en la primera enunciación. Para hacer esto, es necesario que acudamos al *criterio de compromiso ontológico* debido a que, como lo mencionamos anteriormente es nuestra conexión o “puente” para determinar la premisa sobre la existencia.

Esta versión, al igual que las anteriores, aunque en apariencia solventa las dificultades de la versión del AIM basado en la concepción de confirmación, genera sus propios inconvenientes. Uno de ellos, y quizá el más controversial, lo ubicamos en la precisión que hace el filósofo de *creer* que la Matemática es verdadera para luego determinar, a partir de esta creencia, que esta *lo es* de hecho. En otras palabras, Resnik acude a la creencia que en general se tiene del carácter verdadero de la Matemática para poder concluir, luego, que dicha característica no es una mera creencia sino que sucede en el hecho.

Desde nuestro punto de vista la formulación del AIM que propone Resnick no parece tan clara pues, desde nuestros conocimientos, no es posible partir de una creencia para afirmar algo tan serio como lo es el carácter verdadero de la Matemática. Seguramente en líneas posteriores logremos comprender los argumentos que este filósofo proporciona para estructurar su planteamiento de esta forma.

Además, si se lograra demostrar bajo el esquema propuesto por Resnik que la Matemática es verdadera desde el referente del realismo, es decir, que la Matemática se constituye en un *relato real y fiel* de una *realidad*, no se explicita, por ejemplo, la naturaleza de esa realidad a la que aduce, porque claramente no será la misma idea de realidad que suponemos y presentamos en la sección en la que detallamos la primera enunciación del AIM.

Así mismo, al haber un cambio en la naturaleza de esa realidad a la que se refiere, suponemos también que debe haber un cambio de lo que se concibe como *relato real y fiel*, que no se explicitan tampoco en este AIP.

Pero como argumentamos al inicio de este capítulo, esta presentación es solo un aproximación inicial al AIM, lo que indica que no hemos dotado la discusión de los elementos teóricos necesario para intentar comprender tanto la posición de Resnik, como la de los demás filósofos que han hecho su aporte al tema de este trabajo. Por esta razón, analizaremos en los siguientes dos capítulos las tendencias filosóficas que se mueven alrededor del AIM (realismo, naturalismo y holismo) para, de esta manera, aportar una reflexión más detallada y pormenorizada de lo comentado anteriormente.

Capítulo 2 – Realismo y anti-realismo

En el capítulo anterior explicamos la tendencia que dio origen al AIM y los elementos filosóficos que son necesarios para su comprensión, al menos de forma general. En esta parte abordamos algunos elementos del realismo y centramos la atención en tres miradas del mismo: *i*) la Filosofía, distinguiéndose la tendencia tradicional, representada por Platón y Aristóteles, y la contemporánea, representada por las ideas de Kant; *ii*) la Filosofía de la Ciencia en la que recapitulamos, principalmente, los aportes de Karl Popper al conocimiento científico; y *iii*) la Matemática, en la cual presentamos, esencialmente, las propuestas de Penélope Maddy y Mark Balaguer acerca del significado de realismo en Matemática.

El realismo y el anti-realismo son dos tendencias filosóficas con unas características particulares, las cuales se oponen una a la otra, y que son el centro de la atención de este apartado porque nos permite tener elementos teóricos para la interpretación de los AIM, sobre todo, sus dificultades. A continuación presentamos determinadas ideas y planteamientos sobre algunos de tales enfoques de dicha corriente.

2.1 Desde la Filosofía, la Filosofía de la ciencia y la Matemática

Marin (2008) distingue entre cuatro formas posibles de concebir el realismo: *i*) la que emerge en el diario vivir de muchas gentes y es la de ser una forma de presentación de las cosas, a las cuales se le ven tal como son, sin engrandecerlas ni allarnarlas; *ii*) la que se entiende como una propensión hacia la afirmación de la existencia de los universales, lo que hace que el realismo comparta aspectos con la corriente idealista y se oponga al nominalismo, todo esto en torno al *problema de los universales* el cual se describirá en la presentación de las principales ideas de Platón; *iii*) como una posición epistemológica y metafísica, en la que se considera que el objeto de conocimiento es independiente del sujeto cognoscente, característica que se identificará como uno de los pilares comunes a las formas de realismo que se estudiarán en este documento; y *iv*) como una asunción relacionada con la naturaleza y propósito de la ciencia y el problema ontológico de entidades,en el escenario de la Filosofía de la ciencia, la cual se detallará en el apartado de *realismo científico* y *realismo en la Matemática*.

2.1.1 Realismo desde los fundamentos de la Filosofía

Desde esta mirada podemos distinguir tres formas principales de realismo. La primera de ellas se atribuye a Platón (428-345 a.C.) quien fue uno de los primeros filósofos que, igual que sus contemporáneos y predecesores, no distiguía entre ser filósofo y ser matemático. Ateniense de familia noble, amigo de Perícles, seguidor de Sócrates y maestro de Aristóteles, se convirtió en una de las personas más influyentes en la historia de la Filosofía. Todas sus ideas acerca de la realidad se encuentran impregnadas por los trabajos que se construyeron en la antigua Grecia, por no menos de doscientos años.

Se convirtió en uno de los primeros personajes de la historia de la Filosofía y la Matemática que se interesó en la naturaleza del conocimiento matemático, por lo cual planteó una forma de entender el mundo y la realidad de este. Él estableció distinciones entre las creencias u opiniones y el conocimiento cierto. El "mundo del devenir", en el cual se hallaban las creencias u opiniones y cuyo principal paradigma es la experiencia sensorial, es un mundo donde sus objetos se caracterizan por ser mutables, inciertos, perecederos y en algun sentido "irreales" (Baum, 1973).

Luego hace una descripción del "mundo de las formas eternas". Este mundo esta ocupado por los objetos de conocimiento que se caracterizan, al contrario de los del mundo del devenir, por ser inmutables, eternos y su existencia se concebía independientemente de los conocedores individuales. Uno de los ejemplos más notables de conocimiento cierto es la Matemática. Por medio de estas distinciones afirmaba que no había algún tipo de conocimiento (ya fuese de la Matemática o de cualquier otra cosa) que pudiese ser adquirido por medio de la experiencia (Baum, 1973).

Además de las distinción entre la opinión y el conocimiento, discernió en cada una de estas categorías por medio del diálogo entre Sócrates y Glaucón, conocido hoy día como la *metáfora de la línea dividida* (Figura 4). En ella establece que el conocimiento procede de los objetos inteligibles mientras que la opinión de los objetos visibles. Consideraba que el conocimiento matemático es el tipo de conocimiento de más bajo rango, o el más fácil de entender, lo que permitía que este fuese un puente entre la opinión y el conocimiento de los principios básicos de ética, estética y política, siendo estos últimos los principales intereses de Platón (Baum, 1973).

Él creeía en la existencia de un alma que se caracteriza por ser eterna, y que preexiste a la forma humana que adquiere al nacer. Habita en una orbe de almas donde conoce todo aquello que se encuentra y es posible sobre el mundo de las formas. Al nacer, olvida todo aquello que conoce y en su atrapamiento en la forma humana, en el transcurso de su crecimiento, recuerda algunos de los saberes que dominaba antes de habitar dicha forma.

Figura 4: Representación de la metáfora de la línea dividida

El mundo de las ideas o mundo de las formas, que para Platón es el auténtico mundo real, se encuentra dotado de conceptos o *universales*, que son elementos abstractos, atemporales y perfectos que determinan la característica particular de un conjunto de objetos. Por ejemplo, la idea "mesa" es un concepto abstracto que determina el que un conjunto de objetos específico cumpla unas características propias. Ahora, la mesa de una casa es solo un ejemplo de esta idea abstracta por lo que se le denomina un *particular.* Este último juicio generó gran controversia en la época Medieval debido a que era el germen de preguntas como: ¿Qué es más real, el *universal* "mesa", o el *particular* "la mesa de una casa", en este momento? Esta cuestión dio el punto de apoyo al *problema de los universales* que se inició con el pensador griego Heráclito (535 – 484 a.C.) el cual fundamentó las ideas nominalistas las cuales consideran que "los universales como 'mesa' son expedientes lingüísticos para referirnos abreviadamente a un conjunto de objetos" (Marin, 2008, p. 27).

Por todo lo descrito anteriormente, se considera a Platón el primer realista de la historia, junto con su discípulo Aristóteles (384 – 322 a.C.), aunque este último fue uno de los principales críticos de la retórica de Platón debido a que, aunque consideraba que se debía distinguir entre las formas ideales y particulares de los objetos, pensaba que ese mundo de formas inmutables no era trascendente, es decir separado de los sujetos pensantes.

Es en los aportes de este discípulo de Platón donde se puede distinguir una variante del realismo. Aristóteles fue un filósofo, lógico y científico nacido en Estagira en el norte de Grecia. Cuando era joven estudió en la Academia de Atenas por veinte años, pero luego de la muerte de su maestro se trasladó a Asia menor y Lesbos para hacer investigaciones en el campo filosófico (Miller, 2012). Escribió más de mil tratados pero muchos de ellos se perdieron en la antigüedad; solo se conservan treinta y uno de estos. Aunque no hizo aportaciones en el campo específico de la Matemática (en términos de conceptos, definiciones, demostraciones, etc.), sí contribuyó en la construcción del camino para la composición de *Elementos* por medio de su codificación de las reglas de la lógica deductiva bivalente y sus disertaciones acerca del método científico; ideas que expuso en los *Primeros* y *Segundos analíticos* de su obra *Organón* (Baum, 1973).

Sus aportes hicieron drásticos cambios en las teorías ontológica y epistemológica de su maestro, principalmente por su rechazo acerca del *mundo de las formas* que Platón había concebido para determinar el orbe de las ideas abstractas. Aristóteles creía que se debía distinguir entre la forma abstracta y la particular de una idea, pero hacía especial énfasis en que esas formas ideales no eran trascendentes, sino que por el contrario se encontraban en las cosas particulares, de tal manera que estas últimas permitían al sujeto llegar a dichas formas ideales por medio de la abstracción. Por ejemplo, los objetos empíricos, como manzana o balón, tienen una forma ideal, o como lo llamó él *esencia*, que los constituyen así como los constituye la materia en la que son creados. Las propiedades, por ejemplo de ser una unidad (en el caso de la manzana) o la redondez (en el balón), son aproximaciones empíricas a formas ideales, como lo son el concepto de unidad o el de esfera, respectivamente (Körner, 1968).

Estas últimas discusiones sobre el rechazo del mundo de las formas de Platón y la abstracción de las formas ideales, lleva a Aristóteles a concluir que, por un lado, la adquisición de conocimiento no se produce debido a la preexistencia a la forma humana de un alma eterna que lo conoce todo antes de nacer, y por otro, que el mundo percibido por la experiencia sensorial es el “mundo real”.

De acuerdo con Aristóteles los “objetos matemáticos” son producto de las abstracciones que se realizan de los objetos empíricos, por lo cual se pueden establecer las dos afirmaciones siguientes: cada uno de los objetos matemáticos están, de alguna manera, en los objetos de los cuales son abstraídos, y, hay gran multiplicidad de estos objetos ya que, por ejemplo, hay varios objetos empíricos que representan la unidad, así como los que representan círculos, esferas, triángulos, etc. (Körner, 1968).

Al igual que Platón, para Aristóteles el tipo de conocimiento más importante era el de las verdades generales o universales y para este último, dichas verdades se deben a uno o más de los cinco sentidos que poseemos. Por ejemplo, una verdad universal es saber que la suma de los cuadrados de los lados de cualquier triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa. Para llegar a ella se requiere de los sentidos, pero estos solo estudian formas particulares de esta verdad, es decir, unos casos específicos de triángulos rectángulos que poseen dicha propiedad. A partir de estos casos y utilizando como puente la *abstracción* es posible deducir la verdad general.

Distinguió, en su obra *Metafísica*, entre tres tipos de conocimiento: productivo, práctico y teórico. El primero, se refiere principalmente a la posesión de una habilidad como la de construir un edificio, o sea, tiene por objeto la producción o fabricación; el segundo incluye la habilidad y el acto, por lo cual pretende dirigir la actuación humana, es decir, la competencia de ordenar de forma racional la conducta para el alcance de logros; y el último, el cual no tiene por objetivo el interés productivo ni el práctico porque se refiere al conocimiento sobre las cosas el cual permite llegar a la sabiduría (Baum, 1973). El conocimiento matemático, de acuerdo con estos principios, es por ejemplo, un conocimiento teórico en el que se involucra una alta capacidad de abstracción.

A partir de los tipos de conocimientos que distinguió, estableció las relaciones entre matemática pura y aplicada. Él creía que las proposiciones que surgen en el marco de la matemática aplicada debían ser muy aproximadas a las proposiciones que del mismo objeto se hicieran en la matemática pura[8]. Por ejemplo, alguna proposición relacionada con la gráfica de una circunferencia debe ser muy cercana a la misma idea sobre el objeto abstracto de circunferencia.

Veamos ahora, una tercera forma más contemporánea y conocida como realismo crítico o neorrealismo, que se sitúa en la propuesta hecha por Imannuel Kant (1724 - 1804) quién se convirtió en el filósofo mas influyente en la Europa moderna y por su puesto en la filosofía univesal. Aprendió Filosofía, Matemática y Física en el periodo comprendido entre 1755 y 1770, en la universidad de Königsberg.

En su trabajo y aportes a la Filosofía, muchas de sus ideas se encontraban influenciadas por los trabajos de Leibniz (1646 - 1716), las teorías científicas o Filosofía natural de Newton (1642 - 1727), y las contribuciones de David Hume (1711 - 1776). Al presentar las ideas que había desarrollado en el marco de su teoría, él esperaba generar una revolución en su área equivalente a la que generó la revolución copernicana en la Astronomía (Baum, 1973).

Para estructurar su teoría se apoya en los planteamientos de Leibniz sobre las *verdades necesarias* (juicios analíticos) y *verdades contingentes* (juicios sintéticos)[9], y sobre la propuesta de Hume sobre conocimiento de *relaciones de ideas* y *conocimiento de materias*

[8] Interpretamos esta última idea como una analogía del concepto de verdad Tarskiano que estudiaremos en el análisis de los aportes de Karl Popper.

[9]Las *verdades necesarias* son proposiciones que son verdaderas en cualquier eventualidad o mundo posible (Pérez y García-Carpintero, 2005). Ejemplos de estas son las proposiciones “A=A” o “5+7=12”. Por su parte, las *verdades contingentes* son aquellas que no cumplen las características de las verdades necesarias, es decir, son proposiciones que son susceptibles de constante revisión debido a que su negación es siempre posible, por ejemplo la afirmación “El estudiante se encuentra sentado en la silla de un parque”.

de hecho[10]. Él pensaba que la propuesta de estos dos filósofos, aunque a simple vista eran diferenciaciones adecuadas de los tipos de juicio, fallaban en la medida en que no se discriminaba entre el conomiento *a priori* y *a posteriori*, y entre los juicios analíticos y sintéticos.

Para explicar los juicios analíticos se apoya en el siguiente ejemplo: "Todos los cuerpos son extensos". En esta proposición el predicado se encuentra como una de las características propias de la noción del sujeto, es decir, en la noción de cuerpo se establece que estos son extensos. Por esta razón se considera que los juicios analíticos no proporcionan un conocimiento nuevo pues son de carácter explicativo. Ahora bien, en los juicios sintéticos, como por ejemplo "todos los cuerpos son pesados", el predicado no se encuentra comprendido en la noción del sujeto, debido a que está añadiendo una característica al sujeto "cuerpo". Esta característica de los juicios sintéticos los convierte en extensivos porque amplía el conocimiento propio sobre el sujeto de la proposición.

Tanto para Leibniz como para Hume, las proposicones sintéticas son todas *a posteriori* (dependen de la experiencia), ya que por ejemplo, para determinar que un cuerpo es pesado es necesario experimentar con cuerpos particulares y establecer las condiciones que determinan si la proposición es verdadera. Por otra parte, las proposiciones analíticas, de acuerdo con estos mismos dos pensadores, son todas *a priori*. En este punto, Kant refuta este acuerdo y establece cuatro combinaciones diferentes, a saber: conocimiento analítico *a priori*, analítico *a posteriori*, sintético *a priori* y sintético *a posteriori*.

[10] La Geometría, el Álgebra y la Aritmética son ciencias que para Hume pertenecían a las *relaciones de ideas*, porque contienen afirmaciones que se pueden verificar ya sea por demostración o por intuición (conocimiento *a priori*), sin importar si los objetos sobre los que versan dichas proposiciones existen en la realidad sensible. Por ejemplo "tres veces cinco es igual a la mitad de treinta" es una afirmación de este tipo debido a que establece una relación entre los números mencionados y estos, a su vez, no se encuentran necesariamente en nuestra realidad sensible. Ahora bien, el *conocimiento de materias de hecho* no se verifica de la misma forma que las *relaciones de ideas* porque para las proposiciones allí contenidas siempre es posible su negación, es decir, su comprobación depende siempre de la experiencia (conocimiento *a posteriori*). Un ejemplo de proposición para este conocimiento es "el vehículo viaja a 40 km/h", debido a que siempre es posible que el vehículo no viaje a la velocidad indicada, por lo cual debe haber un hecho que determine la veracidad de dicha proposición.

La primera y última combinación son las equivalentes al conocimiento de *relaciones de ideas* y *conocimiento de materias de hecho* de Hume. Sobre la segunda, Kant afirmaba que no era posible este tipo de conocimiento en particular. Para la tercera proponía como ejemplo más notable el caso de la Matemática. En pocas palabras refina los juicios sintéticos estableciendo que no todos ellos dependen de la experiencia sensible.

La característica principal de los enunciados sintéticos *a priori* comprende un conocimiento universal y necesario, y además proporciona elementos al conocimiento propio de los sujetos a los que haga mención. Esto último ha generado polémica entre la comunidad académica ya que propicia preguntas como: ¿cómo es posible que algunos juicios, que en su característica no dependan de la experiencia, a su vez puedan proporcionar nuevos elementos al conocimiento propio?, ¿cómo es posible que proposiciones al margen de la experiencia y la verificación empírica puedan hablar sobre las situaciones y fenómenos del mundo? o ¿cómo son posibles los juicios sintéticos *a priori*? Si todos los juicios matemáticos, sin excepción alguna, son sintéticos *a piori* como lo estableció Kant, ¿cómo es posible la Matemática?

Estas y otras preguntas fueron el punto de partida para la escritura de su más sobresaliente contribución: *Crítica de la razón pura*. Esta se estructuró de acuerdo con tres cimientos principales: La *estética trascendental*, que trata sobre cómo es posible la Matemática; la *analítica trascedental*, que trabaja sobre la posibilidad de la ciencia natural pura; y la *didaléctica trascendental* en la que determina la posibilidad de la metafísica como ciencia.

Para tratar de mediar entre el debate tradicional sobre la existencia innata de las ideas, Kant hizo una afirmación en la que lograba dicha mediación indicando que "No hay duda alguna de que todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia, pero, aunque todo nuestro conocimiento empiece con la experiencia, no por eso procede todo él de la experiencia" (Baum, 1973, 213). Aunque la afirmación parece contradictoria en si misma, no lo es al hacer un análisis detallado de esta. A partir de lo leido sobre la propuesta de Kant, presentamos la intepretación que creemos es la que mejor se ajusta al enunciado: es claro que los conocimientos que se pueden llegar a tener sobre algo inician con la experiencia, por ejemplo, en el caso de la Matemática un primer acercamiento para conocer el objeto circunferencia puede iniciar por medio de las representaciones de esta y de las formas circulares. Ahora, todo el conocimiento que se genera no necesariamente proviene de la experiencia, porque puede convertirse en una construcción al margen del modelo del objeto que se desea conocer. Regresando al ejemplo, si bien el primer acercamiento a la circunferencia es posible llevando a cabo procesos en los que se encuentran involucrados los sentidos, no implica esto que cualquier conocimiento sobre esta, que muy seguramente es de un orden superior, deba provenir de la experiencia. Un ejemplo de esto, es el saber que si por un punto exterior se trazan dos rectas tangentes a una circunferencia, los segmentos comprendidos entre dicho punto y los puntos de tangencia, son congruentes. Es factible que este último hecho de las circunferencias sea creado en la mente, al margen de toda práctica sensorial.

2.1.2 Realismo científico

En el primer tercio del siglo XX, surge un grupo de científicos y filósofos, quienes refutaban las ideas sobre las proposiciones que Kant planteó, particularmente la concepción de los juicios sintéticos a priori (como lo son los de la Matemática), y que integraron lo que se conoció como el ***Círculo de Viena*** y ***La sociedad de Berlín*** (Creath, 2014).Algunos antecedentes de estas congregaciones se pueden relacionar con John Locke (1632 - 1704), Karl Marx (1818 - 1883), David Hume, y Gottfried Leibniz.

Los integrantes del Círculo de Viena, además de construir la primera sociedad dedicada específicamente al estudio de la filosofía de la ciencia (Echeverría, 1994), formularon las bases de lo que se conoce como positivismo lógico, neopositivismo o empirismo racional. Si bien el movimiento positivista establecía que el método científico[11] era la única forma legítima de conocimiento, los positivistas lógicos que son adeptos a esta forma de pensamiento, limitan este principio reduciendo el método científico a lo empírico y verificable, es decir a la ciencia empírica.

[11] Método entendido como "[…] el conjunto de reglas, procedimientos y pasos que se dan para conseguir un conocimiento profundo de la realidad" (Fayos, 2001, p. 24). El método científico se encuentra constituido por tres elementos, a saber: el marco teórico que sustenta todo actividad científica como planteamiento de hipótesis, experimentación e interpretación de resultados; la lógica empleada, sobre todo la inductiva y deductiva; y, el experimento con el que se contrastan las hipótesis con la realidad.

La tesis más conocida de los pertenecientes a este grupo fue el *criterio empirista de significado*, con el cual los empiristas lógicos establecían la diferencia entre la ciencia y la metafísica, haciendo distinción entre dos tipos de enunciados propios de la ciencia: las proposiciones analíticas y las que pueden ser verificadas por medio de la experiencia (Echeverría, 1994). El conjunto de enunciados de la Matemática pertenece a las proposiciones analíticas, mientras que los juicios de las ciencias empíricas son aquellas que se pueden verificar por medio de la experiencia, como se ilustra en la Figura 6. A todos los enunciados que se pueden catalogar dentro de estas dos clases se les dio el nombre de *enunciados cognitivamente significativos.*

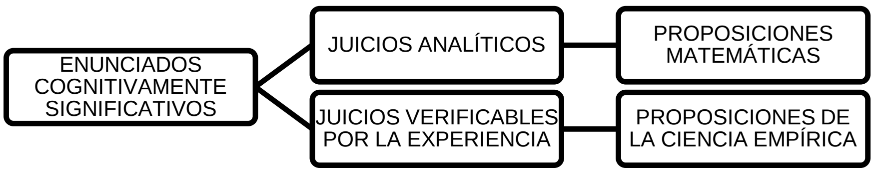

Figura 5: Esquema del criterio empirista de significado

Con base en estas y otras ideas formuladas por los positivistas lógicos, nace y se desarrolla una corriente en la Filosofía de la ciencia en oposición a este grupo de científicos y filósofos. Dicha corriente es denominada realismo científico. De acuerdo con Martínez (2002), existen dos tipos de realismo científico, con sendos asuntos: el realismo científico para teorías y el realismo científico para entidades. El primero, busca discutir sobre la verdad de las teorías científicas, es decir, si estas son candidatas para representar fielmente la realidad que describen. El segundo, el cual es una posición ontológica sobre las entidades que postulan las teorías (especialmente las inteligibles), las cuales se conciben como independientes de esta (la teoría).

Cabe resaltar que muchos partidarios de los asuntos del realismo sobre las teorías admiten, en algunos casos, la verdad de las teorías científicas como un ideal potencial pero no como un hecho que se pueda establecer. Es decir, no abandonan la verdad como el ideal al que aspira el conocimiento científico, pero son conscientes de la utopía de determinar en el acto si una teoría científica es o no verdadera, entendiendo la verdad en términos de la coincidencia con la realidad de la que tratan.

El realismo científico, ya sea sobre las cuestiones epistemológicas u ontológicas, posee muchas definiciones, gracias a las diferentes posturas que han surgido al respecto de esta corriente y que se han venido estructurando en los últimos cien años. Una de estas definiciones la podemos hallar en Dieguez (1998 citando a Feyerabend 1981), la cual reza así:

> El realismo científico es una teoría general del conocimiento (científico). En una de sus formas supone que el mundo es independiente de nuestras actividades para hacer acopio de conocimientos y que la ciencia es el mejor modo de explorarlo. La ciencia no solo produce predicciones, versa también sobre la naturaleza de las cosas; es metafísica y teoría de ingeniería en una sola (p. 74).

Otra de las definiciones que se puede encontrar acerca de este movimiento filosófico se debe a Bas van Fraassen (1979), quien hace una descripción de lo que él considera es el realismo científico, aduciendo que "en filosofía de la ciencia el término 'realismo científico' designa una posición precisa sobre la cuestión de cómo debe ser entendida una teoría científica y sobre qué es realmente la actividad científica" (p. 7).

Aunque existe un sinnúmero de definiciones del realismo científico, las tesis presentadas anteriormente sobre la esencia que constituye este término se seleccionan y muestran aquí debido a que compartimos las opiniones de Dieguez y Bas van Fraassen al ilustrar estas formas de describir el realismo en la ciencia. Primero, porque en las definiciones propuestas no se involucra la teoría *correspondentista* de la verdad[12] para caracterizar a los pensadores que siguen esta forma particular de pensamiento. Segundo, porque mencionan al realismo como una forma de conocer la actividad científica, describiendo sus facetas por medio del entendimiento de las teorías que comportan dicha actividad.

Sin embargo, en la mayoría de la literatura especializada que trata el tema del realismo en la ciencia, suponen que al hablar de esta corriente se acepta la posibilidad de determinar la verdad de las teorías científicas. Si se tiene en cuenta lo dicho anteriormente,

---

[12]La *teoría correspondentista de la verdad* o *teoría de la verdad como correspondencia* indica una coincidencia entre lo que se enuncia y la realidad sobre la que versa aquello que se enuncia. Es decir, se afirma la falsedad o veracidad de las proposiciones de acuerdo con como estas son o no un retrato de la realidad a la que se refieren.

caracterizaríamos entonces al realista científico, como aquel que asume la creencia de que las teorías contemporáneas se consideran verdaderas, que la actividad científica es propia del descubrimiento y no de la invención, y que dicha actividad ofrece como producto una teoría que relata lo que realmente existe en el mundo (Marín, 2008).

Uno de los personajes más influyentes en el siglo pasado en torno al universo que compone la discusión sobre el conocimiento científico y que asumía como uno de sus principios al realismo fue Karl Popper (1902 - 1994). Popper fue un filósofo y teórico austriaco de la ciencia, que en su libro *Conocimiento objetivo* (1982) deja muy clara su concepción del mundo y en particular del conocimiento científico, al firmar que "[…] deseo confesar desde ahora mismo que soy realista" (p. 107).

Los fundamentos de la teoría popperiana concerniente a los asuntos de la epistemología de la ciencia, se ven impregnados por una carga histórica, cultural y filosófica, que lleva contenida en sí al relativismo[13], el convencionalismo[14] y el pragmatismo[15], entre otros. Todos estos movimientos filosóficos se concibieron o divulgaron debido a los diversos cambios de paradigmas en la Física (nacimiento de la teoría de la relatividad de Einstein, sobreponiéndose a la teoría de la gravedad de Newton) y en la Matemática (gestación de las geometrías no euclidianas a partir de la negación y estudio del quinto postulado de Euclides), que se suscitaron en el siglo XIX y XX. Esto repercute, claro está, en un escepticismo generalizado en el mundo científico en aquella época, particularmente sobre la verdad de la ciencia.

[13] El relativismo filosófico propone identificar las verdades como relativas al marco de referencia en el que son propuestas, por lo cual, no hay en el conocimiento científico, en la metafísica o en la cultura verdades absolutas. Uno de sus precursores se halla en la antigua Grecia; Protágoras (490 a. C. – 420 a.C.), un filósofo pre-Socrático y nombrado en el *Sofista* de Platón.

[14] El convencionalismo es un movimiento filosófico que establece que el conocimiento científico no es un reflejo de un mundo objetivo; por el contrario es producto de unos acuerdos que se erigen entre los integrantes de la comunidad científica. Se admiten, por lo tanto, algunas creencias por conveniencia social, costumbre o tradición. Los principales defensores y autores de esta corriente filosófica son Henri Poncairé (1854 - 1912) y Pierre Duhem (1861 - 1916).

[15] Algunos de los exponentes principales del pragmatismo son Charles Peirce (1839-1914), John Dewey (1859 - 1952) y William James (1842 - 1910). El pragmatismo considera que los productos científicos, como teorías o conceptos, son verdaderos en tanto que son útiles, es decir, emplean la utilidad como criterio válido para juzgar la verdad del conocimiento científico. Esta forma de pensar hace que dichas verdades no sean absolutas, sino por el contrario, sujetas a cambio.

Popper, a partir de estas cuestiones que apremiaban solución en aquel entonces, considera hacer una propuesta la cual toma forma de oposición al verificacionismo[16] propuesto por el Círculo de Viena, por medio del rechazo del método inductivo para la generación de conocimiento científico, la cual termina por tomar el nombre de *falsacionismo*. Para esta propuesta se apoya en la teoría de la verdad como correspondencia, que formula el matemático, lógico y filósofo polaco Alfred Tarski (1902 - 1983) admitiendo la postura que defiende el realismo científico.

Las dos dimensiones a partir de las cuales se puede estudiar el problema de la inducción son la lógica y la psicológica. En la dimensión lógica se cuestiona la propuesta de poder establecer, lógicamente, las leyes universales a través de hechos particulares. La dimensión psicológica aduce la utilidad de este método científico partiendo de la creencia o el hábito de la mente humana para esperar regularidades o patrones de comportamiento de algunos objetos (Fayos, 2001). Popper (1970) consideraba que el método inductivo no es válido para generar conocimiento científico porque no había un argumento lógico para sostenerlo, debido a que es necesario establecer un principio de inducción definido al margen del método inductivo, lo cual no es posible y llevaría al planteamiento de un segundo principio de inducción que sostenga al primero, y así sucesivamente. Por otro lado, porque la justificación dada en la dimensión psicológica que parte de una *creencia* no es suficiente para sustentar su uso en la ciencia. En síntesis, para el filósofo austriaco el problema de la inducción no debe ser tratado en Filosofía de la ciencia debido a que no es posible que el método de inducción exista en la concepción de conocimiento científico.

Sin embargo, a pesar de considerar válido al método inductivo como una vía apropiada para el trabajo científico, acepta que un hecho particular puede refutar toda una teoría, con lo cual se hace necesaria su modificación, de forma que se ajuste a los hechos observados. Esta posición es, evidentemente, opuesta al holismo, que por su parte considera que las teorías científicas deben ser examinadas globalmente y no en cada una de las partes que las

[16] Reparando en la ciencia, en el verificacionismo se tiene en cuenta que es necesario considerar un número de sucesos observables con los cuales se corrobora una hipótesis propuesta previamente, es decir, la hipótesis se confirma a partir de unos datos particulares, o mejor dicho, se consolida inductivamente.

componen, por lo cual, un hecho que no se corresponda con lo planteado teóricamente refutará exclusivamente la parte de la teoría que no satisface el hecho pero, desde un punto de vista macro, no es necesario modificar toda la teoría porque esta puede continuar siendo correcta.

Para ilustrar la crítica al método inductivo y la posibilidad de refutar toda una teoría a partir de un hecho observable, Popper propuso un ejemplo que se popularizó en el ámbito científico, en el cual se plantea inicialmente un lago lleno de cisnes blancos. El hecho de que el número de cisnes blancos sea considerable no debe llevar al científico a generalizar por esto que todos los cisnes son blancos; pero si llegase a haber un cisne, por ejemplo, de color negro, se refutaría una posible hipótesis de que todos los cisnes son blancos.

Uno de los principales cuestionamientos a los que lleva el ejemplo de Popper refiere a la naturaleza de la hipótesis planteada. Si no es válido el método inductivo ¿Cómo es posible elaborar la hipótesis de que todos los cisnes son blancos sin tener por lo menos una cantidad de casos considerables que sugieran esto? A esta pregunta el filósofo responde aduciendo que la mente humana no funciona como un sistema que recoge experiencias que luego organiza, ordena y clasifica para comenzar a hacer ciencia. Esta última posición (la de considerar a la mente humana como un cajón que se colma de experiencias) lleva por nombre *la concepción de la mente como cubo* (Fayos, 2001) y es la que justamente Popper crítica y resuelve planteando que el comportamiento que mejor se describe en la mente es el del ensayo y error, es decir, el científico propone una expectativa de que todos los cisnes son blancos al ver un cisne de este color, para luego contrastar dicha expectativa con la realidad.

Teniendo en cuenta todo esto, Popper defiende el método deductivo como forma única de generar conocimiento científico y formula el falsacionismo como un criterio para determinar el carácter científico de una conjetura o hipótesis, es decir, sugiere que una teoría admite la calidad de ser científica a partir de la capacidad que posee esta de ser contrastada o refutada, al menos potencialmente.

Concibe el conocimiento objetivo independiente de la mente humana o las opiniones; es decir, acepta y cree firmemente en el conocimiento sin el conocedor. Además, aunque parezca insostenible, debido a que él mismo defiende la teoría de la verdad como correspondencia (cualidad característica de algunos realistas), no se debe olvidar que para este filósofo todas las ciencias son conjeturales por lo cual no es posible justificar o probar que algo sea verdadero en la ciencia, exceptuando la Matemática y la Lógica. No significa que él renuncie a la verdad o a la objetividad, sino que para Popper, la verdad se convierte en un ideal regulativo, es decir la norma a la cual la ciencia debe aspirar aunque se es consciente de la imposibilidad de esta empresa.

Como se ha mencionado, Popper utiliza la teoría de la verdad como correspondencia, formulada por Tarski, para sustentar sus planteamientos. Se explicará brevemente en qué consiste dicha formulación.

Algunas versiones del realismo científico, indican que una teoría científica será verdadera en tanto que los enunciados postulados en el marco teórico de la misma se correspondan con la realidad sobre la cual están versando. Es decir, que existe una relación entre los enunciados de una teoría y los hechos de la realidad. Esta relación se puede establecer cuando ambos elementos (enunciados y hechos) coinciden en la descripción dada. En la teoría correspondentista de la verdad de Tarski, esa relación entre los dos elementos antes mencionados se denomina correspondencia. Pero para establecer dicha correspondencia, es necesario considerar dos elementos, a saber: un *lenguaje objeto*, que se utiliza para formular los enunciados de la teoría y un lenguaje de orden superior o *metalenguaje* con el que se plantea la correspondencia y que contiene al lenguaje objeto (Figura 7).

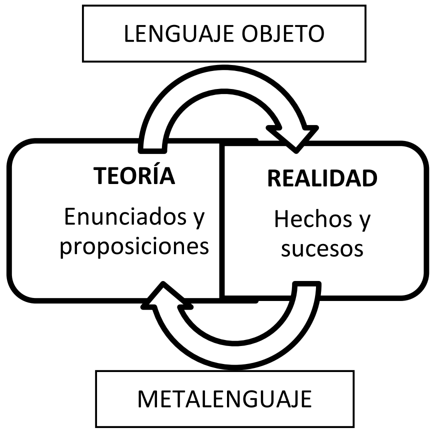

Figura 6: Esquema de la teoría de la verdad como correspondencia

En Fayos (2001) se encuentra un ejemplo descriptivo de lo explicitado. Sea el castellano el metalenguaje y el italiano el lenguaje objeto. Se establece primero el enunciado haciendo uso del lenguaje objeto, por ejemplo, "*fuori piove in questo momento* (está lloviendo afuera en este momento). Ahora, damos nombre al enunciado formulado en el lenguaje objeto a partir de las posibilidades del metalenguaje. Así, al enunciado "*fuori piove in questo momento*" se le denominará *P*, donde *P* es un enunciado del metalenguaje. Los hechos o estados de cosas que deben describir que "*fuori piove in questo momento*" los denominaremos con el literal *p*, siendo *p* un enunciado del lenguaje objeto. Así, se puede decir que *P* es verdadero sí y solo sí *p* es verdadero, o sea, *piove in questo momento* es cierto sí y solo sí *piove in questo momento* se da en la realidad.

Con esta descripción del concepto de verdad para Tarsky, vamos a detallar las principales asunciones del realismo en Matemática, y con esto, culminar nuestro estudio de la tendencia realista.

2.1.3 Realismo en Matemática

En el inicio de este capítulo se mostró el problema sobre la creencia en la existencia de los objetos matemáticos por lo cual, se presentan tres descripciones de realismo a partir de tres miradas principales: la Filosofía, la Filosofía de la ciencia y la Matemática. En los apartados anteriores se abordaron las primeras dos miradas; ahora, se pretende abordar la última. Esto es, se limitará la exposición de las ideas al campo de la Matemática respecto al tema del realismo, debido a que estas (las ideas), se consideran fundamentales para el análisis que se propondrá en líneas posteriores. La siguiente presentación se hará teniendo en cuenta, principalmente, los escritos y propuestas de Maddy (1990) y Balaguer (1998) sobre el tema en cuestión. A continuación, se presenta el panorama general que se discutirá en este apartado, por medio del siguiente esquema gráfico (Figura 8):

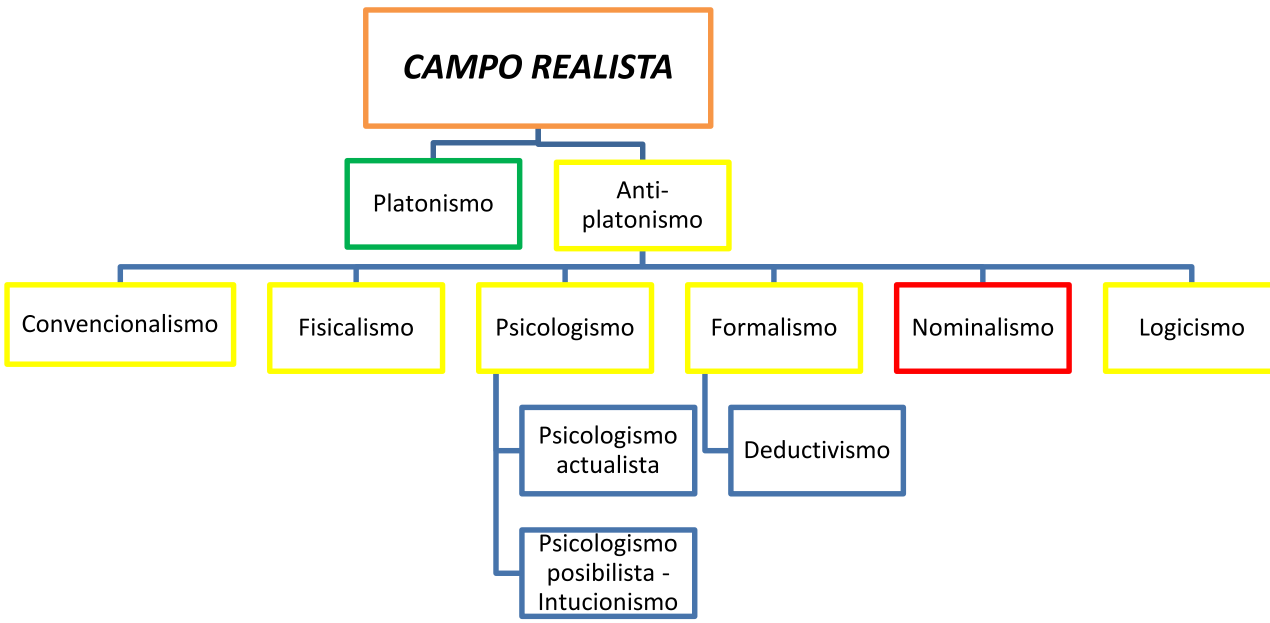

Figura 7: Mapa general del campo realista en Matemática

Cuando se habla de realismo en el campo de la Matemática usualmente se utiliza el término *platonismo* como sinónimo de vocablo *realismo*, haciendo referencia a la adopción de las concepciones que sobre el mundo tenía Platón (las cuales se presentaron en el apartado sobre el realismo en Filosofía), y su planteamiento de los universales. En esta sección se tomarán ambos términos como sinónimos, aunque se comparte la opinión de Maddy (1990) y de Balaguer (1998), acerca de que el platonismo es solo una variante del realismo, debido a que no todo realista adopta enteramente las ideas del platonismo.

Dentro del campo realista, es decir, en el campo donde se estudian los asuntos que atañen directamente al realismo, se pueden encontrar dos tendencias de pensamiento, a saber: el platonismo y el anti-platonismo. El platonismo, en el marco de la Matemática, establece dos premisas importantes para ser formulado:

1. Existen los objetos matemáticos abstractos, es decir, objetos que son independientes del mundo físico, del espacio, del tiempo y del sujeto cognoscente.
2. Las teorías matemáticas se constituyen, por tanto, en relatos o descripciones verdaderas de dichos objetos.

Maddy (1990), confirma esta versión del platonismo afirmando que "… las Matemáticas son el estudio científico de la existencia objetiva de las entidades matemáticas, así como la Física es el estudio de las entidades físicas" (p.21). Además añade que "El conocimiento de dichas entidades [los objetos abstractos] es *a priori* […] y cierto" (p.21).

La formulación del platonismo con las ideas antes expuestas se considera una versión tradicional de esta forma de pensamiento. Algunas de las enunciaciones modernas del platonismo se deben a Quine, Putnam y Gödel. La diferencia fundamental entre la forma tradicional y la contemporánea de ver al platonismo, radica en resaltar un aspecto importante acerca de la existencia de los objetos matemáticos al cuestionarse ¿cuántos objetos matemáticos existen? Balaguer (1998), al respecto, indica que pueden existir todos aquellos objetos matemáticos que son posibles lógicamente, es decir, la posibilidad lógica de los objetos matemáticos es un criterio para determinar la cantidad de estos. A esta nueva versión del platonismo, el mismo Balaguer lo llama *full-blooded platonism*.

Ahora, debido a las dificultades que presenta la versión del platonismo[17] no es de extrañar el surgimiento de versiones que critican los fundamentos de este movimiento filosófico. Partiendo de la descripción que hicimos anteriormente sobre las premisas fundamentales del platonismo, se supondrá entonces que los defensores del anti-platonismo consideran que las

[17] Aunque son varias las dificultades, presentamos dos principales: una de ellas, descrita en la sección de este documento, donde se ilustra la contrariedad de creer en la existencia de unos objetos llamados matemáticos, que no tienen presencia en la realidad. Otra de estas dificultades reposa en la *universalidad* de los objetos que constituyen el mundo real, debido a que pueden ser instanciados por muchos objetos de la realidad pero esto no supone una influencia en la existencia de dicho objeto.

matemáticas no son descripciones o relatos de unos objetos abstractos, sino que por el contrario, serán especificaciones de objetos concretos.

Existen muchas corrientes filosóficas que son opuestas al platonismo, por lo cual, presentaremos aquí al menos siete de ellas. La primera que se muestra en el esquema es el *convencionalismo*. En líneas anteriores se había descrito el convencionalismo en el campo del realismo científico. Sin embargo, atendiendo a la discusión en el marco de la Matemática, este movimiento afirma que las proposiciones matemáticas no son de tipo sintético, como lo afirma Kant, sino que por el contrario son juicios analíticos y verdaderos, por lo cual, no brindan información adicional para enriquecer el conocimiento propio.

Una segunda tendencia de anti-platonismo es el *fisicalismo* matemático. Esta posición descansa sobre la propuesta hecha por John Stuart Mill (1806 - 1873) al considerar que la matemática es una ciencia empírica y no una ciencia abstracta (Hempel, 1980). Las diferencias que plantea Stuart Mill entre la Matemática y las ciencias que se consideran usualmente empíricas, son:

1. Los temas que aborda la Matemática son mucho más generales que el de cualquier otro campo empírico.
2. Debido a que las proposiciones en la Matemática han sido tan altamente contrastadas y confirmadas, su consolidación es tan asombrosa que llevó a la humanidad a pensar que dichas proposiciones no compartían el mismo nivel con las proposiciones de las restantes ciencias fácticas.

Por otro lado, se considera una tercera corriente que se opone al platonismo, la cual se denomina *psicologismo*. Para esta escuela de pensamiento las teorías matemáticas no son relatos o descripciones de objetos abstractos sino, más bien, de objetos mentales. Maddy (1980) habla de una corriente que, en esencia versa sobre estos mismos “objetos mentales” pero ella lo designa como *intuicionismo*.

Se pueden distinguir dentro del psicologismo dos tendencias, a saber: el psicologismo actualista y el psicologismo posibilista. Estos difieren básicamente en lo que se refiere a los objetos que tratan; el primero alude a que la Matemática es un relato de objetos mentales actuales en tanto que el segundo a que es un relato de objetos mentales que son posiblemente construibles. Balaguer (1998), sugiere que el segundo de estos tipos de psicologismo no es genuino debido a que, al dejar de referirse netamente al objeto y tener en cuenta su posibilidad, no lleva inmerso un sustento ontológico para las Matemáticas. Esto lleva al autor a pensar y argumentar que toda forma de psicologismo es referida exclusivamente al psicologismo actualista.

La cuarta inclinación filosófica que se muestra en el esquema es el formalismo. En esta concepción de la Filosofía, la Matemática se equipara con un juego, como por ejemplo, el ajedrez. En dicho juego hay unas normas y estrategias para poder avanzar. Sin embargo, los objetos con los cuales se juega carecen de significado para los defensores del formalismo. El problema que se presenta a los formalistas es justificar el motivo por el cual la Matemática es aplicable a una gran cantidad de ramas de la ciencia empírica, siendo que tan solo es un juego en el que se deben seguir unas determinadas reglas. Se conoce que este cuestionamiento fue formulado por Gottlob Frege (1848 - 1925) como un desafío para los formalistas de su época.

Dentro del formalismo se puede distinguir una forma de pensamiento conocida como el deductivismo[18], o como también se conoce en el mundo filosófico en su presentación original en inglés como "if-thenism", el cual también se concibe como una forma de anti-platonismo. Esta propensión considera la necesidad de un axioma o conjuntos de axiomas para poder deducir teoremas. Es decir, la forma "si A entonces B" significa que A es necesaria para poder deducir B, por lo cual B será verdadera en tanto sea verificable en el marco axiomático que se enuncie. Sin embargo, es posible que en los mismos axiomas se postulen objetos que no existen, lo que indica que este movimiento antepone la verificabilidad de los

[18] Al respecto precisaremos dos asuntos: el primero, la palabra "deductivismo" no existe en la lengua española y se convierte en la traducción que mejor podemos ajustar a la palabra "*deductivism*" en inglés. El segundo, que el deductivismo al cual nos referimos aquí no es el mismo deductivismo que se concibe en el método científico de las ciencias factuales. Para ampliar la información acerca de la deducción en las ciencias factuales véase Cassini (2003).

teoremas a la existencia de los objetos que en estos se postulan. Es por esto que se constituye en una forma de anti-realismo.

Maddy (1990) expone en su escrito una forma de anti-platonismo llamada logicismo, refiriéndose particularmente al proyecto positivista. Los primeros logicistas, como por ejemplo Frege, planteaban que toda la Matemática se puede reducir a la lógica pura, es decir, que los objetos propios de esta (la Matemática) son, en última instancia, objetos lógicos, y que todo teorema puede ser demostrado por medio de la lógica. Los positivistas rescatan este planteamiento aseverando que las leyes de la Matemática se consideran ciertas simplemente por unos acuerdos y convenciones en la comunidad académica, por lo cual, contrario a lo que plantea el platonismo, la Matemática no es una ciencia objetiva.

Por último, refiriéndose al tema de esta sección, se presenta la forma más genuina de anti-platonismo, la cual recibe el nombre de ficcionalismo. En esta tendencia se cree que no es necesario establecer la verdad de las proposiciones en matemáticas, por la sencilla razón de que estas son relatos ficticios sobre un tipo particular de objetos. Por ejemplo, la igualdad "1+2 = 3" es tan ficticia como decir que "Papá Noel vive en el polo norte". Una de las preguntas para los ficcionalistas que inmediatamente surge al ver esta formulación de la visión de la Matemática, es la de determinar la validez de un par de enunciados. Es decir, si se tienen las proposiciones "1+2=3" y "1+2=4" ¿Cuál de ellas es la correcta? A este interrogante responderían que se debe elegir la primera debido a que es la historia del conocimiento que se nos ha dicho siempre, es decir, se acepta el primer enunciado porque es lo que tradicionalmente las personas han reconocido y utilizado.

Luego de esta breve exposición de la esencia del platonismo y las formas de movimiento filosófico que se oponen a este, presentaremos brevemente una tendencia que se considera de tipo realista, e intenta solucionar algunas de las principales dificultades del platonismo: *el estructuralismo*. Uno de los defensores de esta posición es Michael Resnik, el cual propone el argumento de indispensabilidad pragmático - AIP que expusimos en el capítulo anterior.

Como se mencionó en el primer capítulo, una de las características más intrigantes de la Matemática es su aplicabilidad a otras ciencias, lo que le permite a dichas ciencias hacer predicciones sobre el mundo que son su objeto de estudio. Muchas posiciones filosóficas, como el intuicionismo, el convencionalismo o el formalismo, han intentado justificar tal situación. El realismo, en cierta forma también lo ha intentado, no obstante, ninguna de estas corrientes ha tenido éxito en hacerlo.

Una posición filosófica contemporánea, llamada estructuralismo, parece tener una explicación de tal fenómeno. Se presta especial atención a la alusión de que parece porque, si bien es un argumento bastante bien aceptado en la actualidad, no se establece como una regla general o un paradigma acerca del conocimiento de la Matemática y su aplicación.

El estructuralismo afirma que todo descubrimiento en la Matemática tendrá, aunque no de forma inmediata necesariamente, una aplicación en las investigaciones de las ciencias empíricas (Reyes, 2011). El estructuralismo, básicamente, considera que la Matemática es un sistema conformado por estructuras, las cuales pueden presentar diversas instanciaciones con objetos de las matemáticas que pueden ser de diferentes ramas. Un ejemplo, propuesto por Reyes (2011), acerca de lo mencionado anteriormente es el siguiente:

Sean las siguientes dos sumas

$$a + b + c + d + e = f$$

y

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

Ambas, la suma de cinco números diferentes que arrojan un determinado resultado y la suma de los primeros cinco números naturales cuyo resultado es 15, son representantes, ejemplos o instanciaciones de la misma estructura que es el procedimiento de adición.

Otro ejemplo. El objeto *patrón*, el cual desde la mirada del estructuralismo, es una estructura que agrupa a unos objetos los cuales comparten una relación entre sí, como por ejemplo, el patrón que agrupa a los números que poseen la característica de ser primos.

Una idea interesante entre el estructuralismo y el platonismo la plantea Reyes (2011). Esta idea establece un punto de convergencia entre estas dos tendencias. Dicho punto de convergencia lo propone el autor entre las concepciones de estructura y de universal, debido a que aduce que estas nociones son análogas entre sí porque declaran una generalidad que se puede instanciar.

A partir de lo que examinamos anteriormente se presentará una síntesis con las tesis comunes a las formas de realismo.

2.2 Tesis comunes a las formas de pensamiento realista

En una primera aproximación a la literatura especializada y a partir de las descripciones hechas anteriormente sobre las principales propuestas que sobre el realismo se han construido desde la Filosofía, la Filosofía de la ciencia y la Matemática, vamos a inferir las tesis comunes que se suponen a todos los matices de esta tendencia con base en estos referentes.

Primero, una de las asunciones del realismo es aquella que considera la existencia de un mundo externo que constituye la realidad. Este hecho de constituir la realidad convierte a dicho mundo en verdadero. Además, este mundo se encuentra constituido por objetos relacionados entre sí, que existen de forma independiente a las opiniones, acciones o la mente humana, en síntesis, que tienen la cualidad de ser trascendentes. Un anti-realista rechazará la idea de independencia de los objetos que hacen parte de ese mundo abstracto.

Por ejemplo, en el caso de la Matemática, un realista pensaría que el último teorema de Fermat era cierto, incluso antes de su formulación por Pierre Fermat o la demostración hecha por Andrew Wiles. En conclusión, los hechos matemáticos se descubren. Un anti-realista, por su parte, defenderá la idea de que el teorema fue una construcción de la mente humana y por lo tanto su existencia dependió de su formulación y demostración. En otras palabras, la matemática para el anti-realista se construye, no se descubre.

Segundo, el realismo se refiere a la noción de verdad de un determinado conocimiento. Dicho conocimiento adoptará la característica de ser verdadero si este se corresponde con aquello que describe. En el caso particular de las teorías científicas, serán verdaderas en tanto que todo lo que refieren sea una copia fiel de la realidad sobre la que hablan. En este mismo camino, si un conocimiento se considera verdadero, tal como se concibe "verdad" desde esta tendencia, entonces los objetos o entes que se encuentran involucrados en la elaboración de este conocimiento, existen en el mundo real de los realistas.

Tercero, los realistas piensan que el conocimiento que se encuentra en el "mundo real", que además posee las características de ser eterno e inmutable, se constituye como una de las principales guías para regir los comportamientos humanos, ya sean individuales o colectivos. Además, el realismo se constituye en una actitud frente al problema ontológico sobre cierto tipo de entidades, viendo dicho problema de forma objetiva e independientemente de la mente humana, ya sea desde la Filosofía, la Filosofía de la ciencia o la Matemática.

A pesar de las tres características que inferimos anteriormente, pensamos que es díficil determinar una descripción concisa de un realista, debido quizás, a que hay tantas definiciones de realismo como hay filósofos, y la muestra que hacemos aquí es solo una porción de lo más común y aceptado en el mundo académico sobre el término.

Ahora bien, con base en las tres asunciones del realismo que presentamos y luego de reflexionar sobre nuestro estudio, pensamos que la única tesis común a todas las variantes de dicho movimiento desde cualquiera de las miradas que se exploraron anteriormente, debe ser la primera: **concebir un mundo externo independiente de la mente u opiniones, en el cual se encuentra el conocimiento que es independiente del conocedor**. A partir de esta síntesis, en el siguiente capítulo dotaremos de elementos teóricos la intepretación del AIM y sus reformulaciones, además de proporcionar una comprensión más amplia de las dificultades que estos presentan.

Capítulo 3 - Sustentos teóricos del AIM

En el presente capítulo haremos una descripción y análisis acerca de los sustentos teóricos que dieron origen al Argumento de Indispensabilidad de las Matemáticas (de ahora en adelante AIM), revisando las características principales de dichos sustentos y haciendo las respectivas aclaraciones del caso. Además se presentará una propuesta que sobre el análisis del AIM es pertinente hacer teniendo en cuenta la dificultad de conciliar el origen de dicho argumento y el propósito para el cual ha sido empleado.

3.1 Naturalismo y holismo como sustento del AIM

Para comprender al menos de forma general el AIM en su formulación inicial es necesario que analicemos los marcos filosóficos que dieron origen a este: el naturalismo y el holismo confirmacional.

3.1.1 Naturalismo

Como expusimos en el capítulo anterior, en el siglo XX se desarrolló una tendencia como forma de oposición a los principios y estándares gestados en el seno de la comunidad científica del Círculo de Viena y la Sociedad de Berlín. A dicha tendencia se le denominó realismo científico.

Este movimiento filosófico lo podemos caracterizar a partir de las fuentes de la literatura que versan sobre el tema, teniendo en cuenta las siguientes tres premisas[19]:

- Existe un mundo externo que los científicos pretenden conocer y que determina la producción científica.
- Este mundo externo es *la* realidad del científico, por lo cual es única.

[19] Aunque nosotros reconocemos a los realistas (desde la Filosofía, la Filosofía de la ciencia o la Matemática) a partir de la primera premisa tal como lo argumentamos en el capítulo anterior, por el momento trabajaremos con las tres premisas que se exponen en este apartado. Luego volveremos con nuestra acepción para hacer algunas claridades.

- El propósito de la ciencia es la descripción de dicha realidad por medio de las teorías científicas, lo que hace que dichas teorías sean verdaderas (o por lo menos verificables por los datos que suministran los fenómenos naturales), es decir, que todos los enunciados contenidos en la teoría se corresponden con un hecho de la realidad.

Aunque estos dos movimientos (el gestado en el Círculo de Viena conocido como positivismo lógico y el realismo científico) son opuestos entre sí, debido a algunos de sus principios, tienen en común el espíritu de dar un fundamento a la práctica científica estableciendo al método científico como la vía adecuada para explorar la naturaleza y obtener por tanto teorías científicas que se ajustan a esta. En otras palabras, buscan un fundamento del conocimiento humano sobre la realidad y de esta forma poder dar un juicio sobre la verdad y certeza de dicho conocimiento. Este aspecto fundacional pertenece enteramente a la concepción tradicional de epistemología en la que se considera que esta última provee las bases los demás conocimientos.

No obstante, dicho espíritu de fundación de la actividad científica fracasó, al menos para las ciencias empíricas por dos aspectos fundamentales que afirma Monterroza (2011):

> […] observamos que el proyecto fundacionalista de la epistemología tradicional fracasó, no sólo porque de forma a priori no ha conseguido encontrar los fundamentos y criterios últimos, sino porque las ciencias empíricas nunca la han utilizado para desarrollar su corpus de conocimiento (p. 85)

A partir de este revés, se constituye una perspectiva denominada naturalismo, la cual es una tendencia filosófica relativamente contemporánea (su formalización como doctrina filosófica la evidenciamos desde hace apenas un siglo), aun cuando algunos autores como Feussier (2005) argumentan que esta corriente es tan antigua como la humanidad[20].

[20] Para apoyar esta idea el autor hace referencia a las ideas de, por ejemplo, Tales de Mileto, cuando este último buscaba el elemento primero que daba origen a todas las cosas existentes entre los cuatro componentes que se creía hasta ese entonces, constituían el universo: aire, agua, fuego y tierra.

La propuesta naturalista busca enaltecer los principios naturales tal como lo ilustra Feussier (2005) cuando identifica la expresión naturalismo para “aquellos filósofos que indagan sobre temáticas francamente naturalísticas, o bien basados en principios de origen o inspiración natural” (p.440). Esta idea implica varios aspectos que precisaremos.

El primero, es el de asumir que el naturalismo compromete la imposibilidad de una filosofía primera o fundacional, externa a las ciencias naturales, que justifique el conocimiento científico, por lo cual, bajo esta concepción, la idea tradicional de la epistemología no es aceptada. Es necesario, por tanto, determinar una nueva epistemología que se alimente de las ciencias empíricas mismas y que a su vez pueda entablar un discurso sobre estas últimas. Es decir, las ciencias naturales englobaran a esta nueva epistemología y la transformarán en otra ciencia empírica. A este proceso de transformación se le denominó naturalización de la epistemología y tiene como producto la epistemología naturalista (Monterroza, 2011) o epistemología evolucionista (Feussier, 2005).

Segundo, como consecuencia de lo expuesto en el primer aspecto, el naturalismo se apartará de supuestos metafísicos. Esto hace que desde esta perspectiva no sea posible la existencia de aquello que es sobrenatural, que este por encima de la ciencia natural. En este aspecto se contrapone a la idea fundacional de la epistemología tradicional, debido a que esta empresa pretende dicha fundación por medio de elementos que no se encuentren involucrados en las ciencias naturales o conocimiento empírico. Esto lleva a que los elementos que contribuyen a este proceso de cimentación del saber posean una característica trascendente de todo aquello que es fáctico, idea que no es compartida por los adeptos naturalistas.

Respecto a esta consideración que hemos expuesto, nos interesa señalar que la asunción del naturalismo de no compartir las ideas metafísicas, y por tanto, el proyecto de fundamentación de la epistemología tradicional, le ha traído a esta forma de pensamiento una “mala fama” porque atenta contra la tradición y aceptación de lo que se conoce como Filosofía. Feussier (2005) ilustra esto al indicar que:

> El naturalismo en todas sus variantes ha sido etiquetado peyorativamente como ‘reduccionista’ y, por tanto, como poco serio, filosóficamente hablando. Las ciencias no podían pretender

> erigirse en explicadoras de ámbitos considerados superiores o rodeados de una especial aura de sacralidad: la religión, el arte, e incluso, la misma filosofía. Lo 'correcto' y aceptado era justo lo contrario: la filosofía le corresponde fundamentar metafísicamente a las ciencias. Las cuestiones *de facto* deberían quedar a cargo de las ciencias empíricas, mientras que las así llamadas cuestiones *de jure* le correspondían a la ciencia de las ciencias: la filosofía. (p. 445).

Tercero, es la aceptación del relativismo como consecuencia del naturalismo, idea que exponen Monterroza (2011) y Feussier (2005) cada uno en sus ensayos. Debido al problema de la fundamentación desde la visión tradicional se vuelve la mirada a las formas de adaptación del ser humano a su entorno, viendo dicha adaptación como el cimiento del conocimiento.

Ahora bien, la adaptación de un ser humano respecto a la adaptación de otro puede llegar a ser muy diferente debido a las percepciones, afectos, experiencias y conocimientos previos que cada uno tiene. Esto hace que la realidad sensorial que se le presente a dos seres humanos pueda ser interpretada de formas diferentes por cada uno. Lo expresado anteriormente como consecuencia que la verdad sea diferente o *relativa* a cada forma de pensamiento y situación que se presente. Lo anterior lo evidenciamos en Feussier (2005) cuando manifiesta que "Es una verdad, también, en cierto modo pragmática, pero nunca esencial ni única. No hay, en suma, 'la verdad', sino 'estas verdades humanas evolutivas y evolucionantes'" (p. 446).

El tema de la verdad, por tanto, tiene un carácter funcional debido a que es relativa a los diversos entornos socioculturales y a la interacción y evolución del ser humano en los diferentes momentos históricos. Claramente, esta noción de verdad relativa y pragmática se opone a la noción de verdad trascendente y metafísica del realismo científico debido a que se adopta una visión subjetiva del conocimiento.

Cuarto, que se desprende inmediatamente de lo aclarado anteriormente, es la reinterpretación de lo que se concibe como *realidad*. La realidad ya no será por tanto el mundo externo que intenta conocer y describir el ser humano como lo afirman los realistas, sino que por el contrario, es el conjunto que se conforma de dos elementos: el mundo externo del sujeto cognoscente y dicho sujeto. Como estos dos elementos evolucionan en los diferentes momentos históricos, entonces habrá *múltiples realidades* y no una *única realidad* como lo afirma la tendencia realista.

Con las cuatro precisiones hechas anteriormente, el naturalismo será para nosotros entonces **una tendencia filosófica que abarca varias formas de pensamiento, la cual afirma todo aquello que pertenezca a las ciencias naturales o conocimiento empírico, con lo cual, excluye todo aquello que sea sobrenatural o metafísico, y acepta que todo cimiento o explicación de la ciencia empírica deba nutrirse de esta última. Además, desde esta perspectiva, se reconoce la multiplicidad de las realidades debido a la concepción que de este término se tiene, y por tanto, la relatividad y utilidad del concepto de verdad**.

3.1.2 Holismo

En algunas líneas anteriores habíamos mencionado la esencia de la definición del holismo. Sin embargo, autores como Zuluaga (2008), ponen de manifiesto una clara distinción entre dos tipos de holismo, que si bien conforman una unidad para caracterizar a esta tendencia filosófica, cada uno se encarga de unos determinados asuntos. Estas tipologías de holismo se denominan *holismo semántico* y *holismo epistémico*. El autor define así cada uno de estos:

> El holismo semántico sostiene que las oraciones adquieren su significado gracias a sus relaciones con la totalidad de oraciones del lenguaje. El holismo epistémico dice que las hipótesis no se verifican de forma aislada sino en el contexto de una teoría. (p. 52).

Los detalles que expondremos en la siguiente sección serán referidos en su totalidad al holismo epistémico debido a que es este el que mayor influencia tiene sobre el tema que nos atañe. En este punto detallaremos un poco más las características de esta tendencia filosófica centrándonos en la propuesta quineana sobre el conocimiento científico.

3.1.3 Naturalismo y holismo quineano

Luego de la revisión, caracterización y definición del naturalismo y el holismo que hemos referido en los apartados anteriores, delimitaremos ahora la descripción de estos referentes a la luz de la propuesta filosófica de Quine.

3.1.3.1 La existencia, verdad y realidad en el naturalismo quineano

Para Quine el concepto de existencia tiene un significado apartado de la idea metafísica de algunas tendencias, como por ejemplo el realismo. En este sentido Quine efectúa una naturalización de la idea de existencia dejándose de referir a esta en sentido absoluto o descontextualizado.

Dicha naturalización consiste en reducir el problema de la existencia en una cuestión puramente semántica, tal como lo afirma De Sagarra (2011) al indicar que "para Quine, la existencia se reduce a la introducción de entidades en una teoría que faciliten que esta efectúe predicciones correctas" (p. 68). Es decir, la existencia de entidades se podrá establecer en tanto que se introduzcan en las teorías científicas para aportar elementos a las predicciones acertadas de esta.

Vale aclarar, por supuesto, que la introducción de dichas entidades a la teoría no se hace de forma arbitraria pues podríamos caer en el error de postular algo que no existe. Es importante tener en cuenta en dicha introducción el lenguaje normativo en el que se debe encontrar formulada la teoría. Como afirma De Sagarra (2011):

> Una teoría, empero, es una construcción lingüística (para Carnap y Quine). El autor propugna para la ciencia un lenguaje formalizado y normalizado lógicamente, en que las entidades sean introducidas o postuladas de forma normalizada o canónica, eliminando posibles ambigüedades. La existencia, así, se convierte en una categoría semántica. (p. 68).

Como la noción de existencia se interpreta desde una versión naturalizada del concepto en la propuesta quineana, podemos llegar a inferir que también lo será el concepto de verdad. Y estamos justificados en decirlo debido al sustento naturalista de toda su filosofía, que como examinábamos en apartados anteriores implica la característica relativa de la verdad, que se encuentra muy alejada de la característica trascendente del término desde, por ejemplo, el realismo.

Desde esta óptica, entonces la verdad de una teoría será relativa a ella misma, es decir, se alude a un concepto de verdad inmanente[21], por lo cual "la verdad de los enunciados (así como la existencia de sus entidades postuladas) es inmanente a la teoría a la que pertenecen" (De Sagarra, 2011, p. 81).

En este punto de la descripción de la verdad desde el enfoque naturalista de Quine, emerge la principal crítica a la característica de esta noción. Como la verdad es relativa a cada una de las teorías ¿qué justifica a un científico a decidir entre un par de teorías? Desde esta idea relativa no hay entonces una teoría mejor que otra debido a una especie de "inconmensurabilidad"[22] que existe entre ellas, al menos en cuanto a la verdad se refiere.

A este respecto, De Sagarra (2011) hace ver que la posición de Quine es clara y afirma que "en la ciencia empírica madura, siempre hay una teoría mejor: la mejor contrastada empíricamente, **la teoría vigente**" (p. 83), lo que nos lleva a pensar en el contraste empírico como un criterio para determinar o decidir entre un par de teorías cualesquiera.

Para terminar, examinemos la noción de *realidad*. Como cabe predecir, este concepto diferirá bastante de la idea tradicional que de este término se tiene. En el realismo, la realidad es un orbe de elementos que se encuentran "ahí" a los que se tiene acceso de una forma sobrenatural. Como el naturalismo, y en particular el naturalismo quineano se aparta de toda cuestión metafísica, sería absurdo acogernos a esta caracterización de la realidad.

Como hicimos ver en secciones anteriores, la realidad tiene por tanto desde esta doctrina una característica relativa debido primero, a lo que se entiende por realidad, y segundo, a la evolución del ser humano y de la naturaleza a través de la historia.

En este punto se hace preciso aclarar que para el naturalismo quineano –y en general para el naturalismo– no es imperante ver a la ciencia desde el punto de vista descriptivo, es decir, concebir a la ciencia como el medio para describir la realidad externa a los sujetos

[21] De acuerdo con la RAE (Real Academia de la lengua Española), el vocablo "inmanente*"* describe a todo aquello "Que es inherente a algún ser o va unido de un modo inseparable a su esencia, aunque racionalmente pueda distinguirse de ella"

[22] Usamos aquí el término "inconmensurabilidad" en el sentido de no encontrar una medida común a ambas teorías que contribuya a determinar el grado de verdad (o acierto) de estas.

cognoscentes. Lo realmente importante es el estudio de los procesos de interacción y adaptación de los sujetos al mundo externo, elementos que en últimas (sujeto y mundo externo) constituyen la realidad para el naturalismo. En resumen, "lo real es la interacción, no lo que está afuera" (Monterroza, 2011, p. 88).

El razonamiento expuesto anteriormente es la génesis de la concepción de realidad para los naturalistas, y la principal diferencia de la noción de realidad que conciben algunas tendencias filosóficas como la realista.

Luego de este detalle sobre las nociones de existencia, verdad y realidad quineana, analicemos las principales particularidades de la propuesta holista de Quine.

3.1.3.2 Holismo confirmacional de Quine

La visión holista del autor en cuestión, la podemos evidenciar con mayor profundidad en el libro *Los dos dogmas del empirismo*. En este libro Quine plantea los que, a su consideración, son los dogmas que estableció la tendencia empirista que se generó en el Círculo de Viena. Para cada uno de estos dogmas el filósofo norteamericano ofrece una crítica. Dichos dogmas son:

Primer dogma: Diferenciación de todos los enunciados involucrados en las teorías científicas en juicios analíticos (*a priori*) y juicios sintéticos (*a posteriori*).

Segundo dogma: La experimentación permite contrastar los enunciados de una ciencia de forma individual, es decir, se verifican o refutan los enunciados de forma particular por medio de la experiencia.

Respecto al primer dogma, Quine expone su desacuerdo con la diferencia que se establece entre los enunciados de la ciencia. Esta crítica se encuentra completamente sustentada por sus inclinaciones naturalistas debido a que este autor piensa que todas las proposiciones que se encuentran involucradas en la ciencia son verificables por medio de la experiencia. En otras palabras, todas las proposiciones que se establecen en cualquier teoría científica se pueden refutar o confirmar de acuerdo con los datos que arrojen los diversos experimentos.

Esta forma de ver la producción de conocimiento científico tiene como consecuencia la consideración de que todo el conocimiento es conocimiento sintético y *a posteriori*, incluyendo al conocimiento matemático, con lo cual se abandona la idea de las verdades necesarias y de lo apriorístico en las teorías científicas.

Respecto al segundo dogma del empirismo, Quine se opone a la verificabilidad de una teoría científica por medio de la contrastación entre los datos experimentales y cada uno de los enunciados de forma individual. El filósofo argumenta que la confirmación o la no confirmación en el ámbito científico se deben realizar de *forma global* y no de forma particular.

Esta última idea que expusimos en el párrafo anterior es la esencia de la tendencia holista confirmacional de la propuesta filosófica quineana. Al respecto haremos un par de precisiones. La primera se refiere a la concepción de la ciencia como un todo. Quine acepta en sus últimos trabajos que debido a la diversidad de teorías en cada una de las ciencias empíricas, la confirmación o no confirmación por medio de la experiencia será solo a una porción de una determinada ciencia factual.

La segunda es que si bien para Quine todos los enunciados que comportan las teorías científicas se pueden verificar por medio de la experiencia, al ser refutada una porción de la teoría (uno o algunos enunciados) por un conjunto de datos experimentales, aquellos enunciados se revisarán dependiendo de su carácter factual. Es decir, “usualmente revisaremos los enunciados más directamente ligados a la experiencia… antes que aquellos conectados más indirectamente a la misma [por ejemplo, las leyes lógicas]” (De Sagarra, 2011, p. 113). La justificación de este proceder se basa en evitar cambios drásticos en la teoría:

> En general tenderemos a preservar los enunciados más abstractos y de utilización más general (particularmente las leyes lógicas, o la matemática), con el fin de evitar reajustes dramáticos en la teoría y revisaremos, si ello es suficiente, aquellos enunciados más directamente vinculados a la experiencia. (De Sagarra, 2011, p. 114).

Es fácil ver que el holismo confirmacional quineano es coherente con la idea de considerar a todas las proposiciones involucradas en una determinada teoría como susceptibles de verificación por medio de las evidencias empíricas, o sea, todo el conocimiento es *a posteriori*. Con esto se puede evidenciar fácilmente que los enunciados matemáticos comparten el estatus epistemológico de los enunciados de las ciencias empíricas pues, finalmente, el naturalismo no considera válido el conocimiento *a priori*. En definitiva, debemos juzgar a la Matemática, según afirmaba Stuart Mills, como una ciencia empírica más.

Presentaremos a continuación una reflexión que consideramos pertinente a propósito de los detalles de la postura filosófica de Quine y, por ende, del referente filosófico del AIM.

3.1.3.3 Realismo naturalizado

A partir de la especificación de los referentes que dieron origen al AIM, y de las claras diferencias entre el movimiento realista y las doctrinas naturalistas y holistas, surge inmediatamente una pregunta bastante inquietante: ¿cómo es posible que una tesis que nace a la luz de referentes naturalistas y holistas, sirva para los propósitos de una tendencia como el realismo que es, en muchos aspectos, opuesta a dichos referentes?

De Sagarra (2011) en su tesis doctoral ofrece una respuesta a dicha pregunta desde su perspectiva. Él afirma que el AIM nace de una interpretación poco adecuada de los escritos de Quine por parte de los filósofos interesados en el tema. El autor de la tesis asegura que cuando los filósofos, en particular los filósofos realistas, se refiere a los conceptos de *verdad*, *existencia* y *realidad*, interpretan estas nociones desde su punto de vista, es decir, desde una perspectiva absoluta, independiente y descontextualizada (alejada del mundo externo).

Evidentemente el argumento expuesto por este autor es contundente, debido a que si bien es posible concebir esos tres términos desde la mirada tradicional, dicha concepción no se corresponde con sus versiones naturalizadas (relativas, dependientes y contextualizadas a las ciencias naturales), las cuales detallamos en la sección anterior.

No obstante, haremos una especificación de nuestra postura al respecto teniendo en cuenta una aclaración que hicimos anteriormente. Como la propuesta naturalista implica la adopción de unas posturas radicales que, a su vez, suponen un gran cambio en la forma de hacer y pensar en Filosofía, la mayor parte de los integrantes de la comunidad académica no otorgan una valoración positiva a esta tendencia. Así lo hace ver Monterroza (2011):

> Estos argumentos contra el relativismo [que se sustenta en la aceptación del naturalismo] han hecho que sea una postura rechazada por la mayoría de corrientes a lo largo de la historia de la filosofía, por esta razón, se le considera el paria filosófico por excelencia (p. 81). [23]

Claramente al aceptar el naturalismo es necesario dejar de lado la creencia de que la Filosofía es la ciencia de todas las ciencias, el marco teórico en el que se construyen los fundamentos de nuestro quehacer diario, no solo en la ciencia sino en toda conducta humana. Es traicionar, en cierto sentido, los ideales de muchos pensadores de la antigüedad que vieron en esta disciplina, la vía correcta para dar sustento y justificación a las visiones del mundo. En síntesis, se debe renunciar a la forma tradicional de hacer Filosofía por un nuevo camino que la *reduce* a ser solo una ciencia empírica más.

La idea que indicamos anteriormente, creemos que engendra la necesidad de muchos filósofos como Colyvan, Maddy y Field, de analizar el AIM desde la visión tradicional de la Filosofía y por tanto desde el realismo cimentado en las tres premisas que expusimos en el inicio de la sección de naturalismo de este capítulo. Claramente, desde esta óptica los conceptos de existencia, verdad y realidad tienen un carácter diferente debido a que debemos pensarlos de forma metafísica: absoluta e independiente. En síntesis, no creemos que sea una mal interpretación de los escritos de Quine, sino una tendencia a analizar el problema desde los marcos admitidos y aceptados por la mayoría, debido a su tradicionalidad. En este sentido preferimos pensar en *otras interpretaciones*, más que en mal interpretaciones.

Ahora bien, si concebimos una óptica diferente al realismo tradicional ¿será posible analizar el AIM desde esta nueva perspectiva? La respuesta es afirmativa. De Sagarra (2011) intenta,

[23] El autor muestra los argumentos que Platón esgrimió en contra del relativismo. El primero de ellos relacionado con la contradicción que supondría el no poder creer en algo. El segundo relacionado con el desprestigio de la enseñanza al aceptar esta tendencia particular.

sin mucho éxito, analizar este caso por medio de una sección de su tesis la cual titula precisamente como “realismo naturalizado”. Y referimos “sin mucho éxito” porque el autor se concentra en esgrimir argumentos de crítica sobre las interpretaciones que de los textos de Quine hacen otros filósofos de la ciencia, pero no es claro en detallar la forma de esta nueva tendencia, es decir, hasta qué punto este nuevo movimiento será realismo o en dónde inicia el naturalismo.

No obstante, en dicha sección de este trabajo doctoral encontramos una idea que nos permite elaborar de forma clara la estructura básica de un realismo naturalizado sobre el cual se pueda analizar el AIM. La primera de ellas la evidenciamos en el siguiente argumento:

> Volvamos a la posición de Quine. Todos somos naturalmente realistas. Nuestro esquema conceptual y nuestro modelo cognitivo se basa […] en los objetos físicos, en la realidad externa, que extrapolamos a diversas abstracciones y constructos (matemáticos, sociales, etc.). Entonces, desde dentro de nuestra teoría […] vemos los objetos introducidos o postulados en ella como algo absoluto, incuestionado […]. Como dice Quine, los objetos postulados [*posits*] en las teorías (objetos físicos, objetos matemáticos) tienen carácter de mitos, como los dioses de Homero, aunque son epistemológicamente superiores (p. 65).

Esta cita nos permite ver un fuerte argumento en favor de la construcción de un realismo naturalizado. Esto es, la aceptación de algo externo al sujeto, que se abstrae utilizando nuestro esquema conceptual. Cabe resaltar que esto ya lo habíamos mencionado cuando caracterizamos la versión naturalizada de la *realidad*. Si bien para el naturalismo deja de tener importancia la descripción de un algo externo, no significa que abandone la creencia de ese algo externo.

Ahora bien, como explicitamos anteriormente la adhesión a una posición naturalista implica la aceptación del relativismo en conceptos básicos de la epistemología, debido a la atención que se presta a la evolución del ser humano y su entorno socio-cultural. Con base en esto analizamos la siguiente consideración de Monterroza (2011):

> El relativismo evolutivo no niega que haya algo fuera de nosotros, y que, efectivamente, se nos impone y nos pone restricciones y necesidades (alimento, supervivencia, reproducción, etc.).

> Lo que propone esta forma de naturalismo […] es que debemos cambiar lo que se entiende por realidad. (p. 90).

El anterior razonamiento nos permite confirmar nuestra interpretación acerca de la existencia de un mundo externo para el naturalismo. En suma, si lo queremos ver desde el ámbito científico, el naturalismo no se opone a la primera premisa que comentábamos al inicio de este capítulo y que hace parte de la caracterización del realismo. Más bien objeta las restantes dos proposiciones. Si determinamos al realismo teniendo en cuenta las tres premisas planteadas, entonces un realista no puede ser un naturalista.

Pero ¿qué sucede si reflexionamos acerca de una forma alternativa de realismo? En este punto, para dar respuesta a esta pregunta, queremos retomar nuestra concepción de realismo la cual expusimos en el segundo capítulo. De acuerdo con nuestra consideración para ser un realista basta con *concebir un mundo externo independiente de la mente u opiniones, en el cual se encuentra el conocimiento que es independiente del conocedor*.

Teniendo en cuenta esta definición podemos considerar a un naturalista también como un realista. Obviamente un realista bastante particular porque su idea de los conceptos primitivos de *existencia*, *realidad* y *verdad* no se adhieren a las creencias clásicas de la epistemología tradicional. Lo que queremos hacer ver, entonces, es que los filósofos realistas pueden dividirse, *grosso modo*, en dos clases: los filósofos realistas naturalizados y los filósfoso realistas no naturalizados. Para ambos existirá un mundo externo independiente de los sujetos, sin embargo, para los primeros la *realidad*, *existencia* y *verdad* estarán impregnados de nociones de *relatividad* y *evolución*, mientras que para los segundos, esos mismos conceptos llevarán inmersa la *absolutibilidad* y *trascendencia*.

En el presente trabajo estudiaremos el caso tradicional del AIM, es decir, el estudio que se hace de dicho argumento desde el punto de vista realista no naturalizado de la Filosofía de las Matemáticas. Sin embargo, es importante hacer notar que un análisis no conocido (al menos por nosotros) y que es pertinente e interesante sobre este tema, es posible realizarlo desde una óptica del realismo naturalizado que ilustramos anteriormente.

Otra posible vía para dar respuesta a nuestra pregunta inicial es la consideración de que el AIM se atribuye a dos autores principalmente: Quine y Putnam. Si bien Quine es un naturalista y holista, es necesario resaltar que Putnam fue siempre un realista[24]. Quizá sea esta una de las razones por la cuales se analiza el AIM desde esta particular visión. Para ello precisaremos en el siguiente apartado algunas de las características de la Filosofía de Putnam.

3.2 Filosofía de Putnam

Ahora hablaremos un poco de la filosofía que propugna Putnam en su contribución a la filosofía de la ciencia. Este filósofo fue considerado como un realista, desde la perspectiva metafísica o tradicional (como sea que el lector lo quiera considerar) durante algún tiempo en los inicios de su carrera académica. Dicha afirmación la justificamos al leer y analizar muchos de sus escritos publicados entre 1957 y 1976.

Hilary Putnam es un filósofo estadounidense que nació en julio de 1926. Realizó sus estudios en París y Estados Unidos, para luego convertirse en instructor de Filosofía, profesor asistente y profesor asociado en varias universidades de su país de origen.

Debido a que sus principales trabajos se encuentran enmarcados en un momento social y político en el que la filosofía analítica (hija del positivismo del Círculo de Viena), había perdido vigencia, este filósofo propuso durante muchos años una renovación de la Filosofía. Él sugería dicha renovación retornando a los pensamientos kantianos sobre la importancia de la filosofía en la orientación de la conducta humana. Así lo hace ver Polanco (1997) cuando afirma que Putnam sugería que “en definitiva, se trata de reconocer que Kant estaba en lo correcto al pensar que todas las preguntas de la filosofía están contenidas en la pregunta de Platón: *¿quién es el hombre?*” (p. 26).

La filosofía de este autor posee características comunes con la propuesta teórica de Quine, sobre todo, aquello que se relaciona con la concepción de la *realidad* como un conjunto de

[24] Dependiendo de las diferentes interpretaciones, algunos autores como Polanco (1997) consideran que Putnam ha atravesado tres etapas de realismo: el *metafísico* (dependiendo de la inclinación del filósofo, metafísico, tradicional o platonista), el *interno* y el *humano*. Haremos una síntesis de las ideas particulares en el realismo metafísico que es aquel que puede, en mayor o menor medida, impregnar las interpretaciones desde esta tendencia filosófica del AIM.

dos elementos que evolucionan continuamente: el individuo y el mundo externo con el que interactúa. Esto nos lleva a considerar a Putnam como un filósofo pluralista en el sentido de su aceptación de múltiples tipos de realidades.

Otro aspecto similar entre las posturas filosóficas de estos autores lo podemos identificar en las características de lo que podríamos considerar como holismo, porque, al igual que Quine, Putman piensa que en el marco de una teoría científica un suceso que refute una hipótesis no necesariamente refutará a toda la teoría que dio origen a dicha hipótesis. En este punto, ambos autores desvirtúan el planteamiento de Popper de pensar que un evento observacional que se usa para verificar una predicción, refutaría en su totalidad la teoría que dio paso a esta predicción.

No obstante, como bien era de esperarse, aunque algunas de las ideas del filósofo estadounidense convergen con la propuesta quineana, Putnam se ha caracterizado a lo largo de sus años por ser un filósofo de "media tinta" dirían algunos, debido a que siempre encontraba formular su propuesta en términos que no se encontraban sesgados respecto a alguna postura filosófica reconocida. Por ejemplo, adopta ideas en oposición a la *realidad metafísica*, la *epistemología tradicional* y el concepto de *objetividad absoluta* pero desprestigia, al mismo tiempo, el movimiento relativista y convencionalista. Así nos hace ver Polanco cuando afirma al respecto que:

> Aunque Putnam está de acuerdo con Rorty y con los antirrealistas actuales […] en rechazar la noción de verdad como correspondencia entre nuestros pensamientos y las cosas "tal como son en sí mismas" […] no cree que el abandono de esa noción nos obligue a abrazar el relativismo o el irracionalismo. (p. 25).

Con lo explicitado anteriormente, podemos ver que aunque las asunciones de este filósofo no se caracterizan, por ejemplo, en atribuir cierta trascendencia a la noción de verdad, tampoco se inclina por creer que dicha noción solo puede estar establecida en términos de los acuerdos de una comunidad particular. Es decir, piensa que si bien el conocimiento (específicamente el científico) es una creación humana, y como tal se encuentra determinado por un referente social, político y cultural (*i.e.*, es falible), no significa esto que debamos negar la creencia en una *realidad* que no es invención de la humanidad y que además nos ciñe para determinar qué tipo de conocimiento es o no aceptable.

Pormenorizaremos de forma breve algunas de las contribuciones relevantes de Putnam al realismo para la Matemática, que nos permitirán ver con claridad, una posible justificación a la tendencia de analizar el AIM desde esta visión por la mayoría de los filósofos que abordan este tema.

3.2.1 Filosofía de la Matemática: el aporte de Putnam

En el ámbito de la Filosofía de la ciencia, Putnam hizo varias contribuciones de gran importancia en el campo de la Matemática, que permitieron dar una vía alterna para la comprensión de algunos de los descubrimientos más importantes de la ciencia en el siglo XX. El ejemplo que más se conoce y que fue analizado por el filósofo estadounidense es el caso de la mecánica cuántica.

En el nacimiento y reconocimiento de la mecánica cuántica como una teoría que describía los fenómenos relacionados con partículas a nivel subatómico, se generaron grandes expectativas desde todos los ámbitos (científico, productivo, filosófico, entre otros). Precisando en el caso de la filosofía, esta teoría parecía no ceñirse a las leyes de la lógica clásica[25], debido a algunos comportamientos particulares en el microcosmos.

Putnam, a propósito de esta eventualidad, bosqueja una salida de tipo lógico, de forma que sea posible la interpretación y descripción de los fenómenos en el mundo microscópico. Este proyecto se basa en la concepción de una lógica en el que el sentido de verdadero y falso sea el mismo de la lógica aristotélica[26] pero que ponga en entredicho el principio de tercero excluido, de forma tal que se pueda integrar un tercer valor de verdad, el cual Putnam denomina *valor medio*.

---

[25] Entendiendo a esta como la lógica que planteó Aristóteles y que considera, entre otras cosas, dos valores de verdad: verdadero y falso.

[26] En otras palabras, que el concepto de verdad carece de un carácter epistémico, es decir, no depende de la verificación o la demostración.

El filósofo estadounidense dispone de esta propuesta para argumentar una tesis bastante controversial para algunos filósofos y matemáticos: la lógica es una ciencia empírica. Putnam sostiene al respecto que las leyes que nos impone la lógica clásica no se deben considerar como verdades *a priori*, ni mucho menos clasificarlas de verdades necesarias en todos los contextos, particularmente los contextos científicos. Y es coherente hacer esta afirmación debido a que con el nacimiento de la mecánica cuántica queda en entre dicho la infalibilidad de la lógica. Putnam, en suma, afirma que los principios de la lógica clásica son revisables y modificables en tanto que no se ajustan para hacer descripciones de, por ejemplo, el microcosmos.

Es necesario precisar que el hecho de que Putnam defendiera la posición de la estructuración de una nueva lógica (una trivalente), no implica necesariamente que desprestigiara la lógica clásica. Él pensaba que esta era válida, siempre y cuando tuviésemos en cuenta que su dominio de acción es reducido.

Esta forma de pensar y ver a la lógica que se ajusta a fenómenos prácticos, conduce a este filósofo a declarar una interpretación realista de la mecánica cuántica, tal como lo advierte Polanco (1997). Dicha interpretación se basa en tres principios, a saber: “(1) aceptar que la teoría cuántica es verdadera; (2) que los objetos a los que se refiere (electrones, protones, etc.) existen; y (3) que las propiedades y cantidades físicas a las que se refiere son “reales”. (p. 40).

Como se verá posteriormente, el AIM se esbozará, principalmente, en los dos primeros principios planteados por Putnam para la interpretación realista de la mecánica cuántica. La interpretación matemática se ilustraría como sigue: (1) debido a que se acepta la matemática como verdadera, entonces (2) los objetos a los que se refiere (números, conjuntos, funciones, etc) existen.

Ahora bien, el hecho de que él proponga que las leyes de la lógica son revisables desde la experiencia, no significa que abandone la idea de hacer distinciones entre verdades necesarias y contingentes, siempre y cuando la diferenciación la situemos en un marco relativo de saberes. Precisemos un poco más esta idea.

Situándonos en el campo del conocimiento científico, las comunidades buscan las verdades que permiten comprender la *realidad*, y lo hacen siempre teniendo en cuenta un marco conceptual determinado, por tanto, dichas verdades no son de tipo metafísico, pues estas últimas provendrían de una realidad última descontextualizada, lo cual para Putnam es absurdo. Son verdades que se esbozan desde lo que el ser humano (con su limitada visión caracterizada por prejuicios, experiencias previas, entre otros) logra concebir como *realidad*. Es decir, son verdades dependientes de las formas de pensamiento particular de los individuos que se dan en un momento histórico cultural por lo cual, evidentemente, no son *a priori* pues dependen justamente de los marcos conceptuales sobre los cuales fueron elaboradas.

Ahora bien, como los momentos históricos culturales, y por tanto los marcos conceptuales, cambian (evolucionan), podríamos llegar a pensar que las verdades que se erigen en el campo de conocimiento científico serán una cuestión de convención entre un conjunto de personas pertenecientes a una comunidad. No obstante, Putnam refuta esto debido a que "si la formulación de las leyes físicas y formales fuera puramente convencional, se daría el caso de que podríamos prescindir de la cuantificación de las propiedades; [… y] es imposible pensar en una ciencia que prescinda de tal exigencia." (Polanco, 2003, p. 48).

En lo anterior se puede vislumbrar la razón por la cual es necesario, por no decir "indispensable", generar conocimiento científico teniendo en cuenta la cuantificación sobre entidades matemáticas. Esta proposición será determinante para caracterizar el AIM que detallaremos en el siguiente capítulo.

Una precisión adicional sobre el caso de la lógica es necesario que la hagamos antes de pasar al caso de la Matemática: usualmente, las leyes que determinan la lógica las podemos considerar desde tres ópticas, tal como lo señala Casabán (2003): "desde una perspectiva lógica (semántica), que las tiene por verdaderas. Desde una perspectiva epistémica que las considera *a priori* y desde una perspectiva metafísica que las califica de necesarias" (p. 61). Para Putnam, el que las verdades no sean *a priori* no implican que no sean necesarias en un referente determinado. Por ejemplo, en la Geometría euclidiana, los postulados y las nociones comunes sobre los cuales se deducen los diferentes teoremas que conocemos, son verdades necesarias para la teoría en particular. Sin embargo, pueden ser verificadas empíricamente, lo que nos llevaría a concluir que no son verdades aplicables a determinados espacios físicos.

Por otro lado, respecto de la Matemática, Putnam también afirma que esta es empírica, tal como lo es la Lógica, pero en este caso se refiere al *empiricismo* en el sentido de que debemos tener en cuenta como criterio para determinar la verdad de las teorías matemáticas su éxito en ideas que son netamente prácticas, por lo cual, “el conocimiento matemático es corregible y no absoluto.” (Polanco, 1997, p. 61).

Un aspecto que resalta Putnam es la variedad de opciones posibles que hay para describir un determinado conocimiento. Por ejemplo, la teoría de la gravedad de Newton y la teoría de la relatividad de Einstein son dos alternativas para describir el movimiento de cuerpos en unos espacios determinados del universo. Ahora bien, el que Putnam catalogue a la Matemática como una ciencia empírica, no implica que la considere tan empírica como a otras ciencias, en el sentido de no haber varias formas de describirla, como lo hace ver Polanco (1997) al exponer que “las matemáticas son más estables: ‘mientras las partes principales de la lógica clásica, de la teoría de los números y del análisis no tengan alternativas […] la situación será como siempre ha sido’”. (p. 66).

Por otro lado, Putnam es consciente de la fuerza y contundencia del argumento que se utiliza para desvirtuar su posición acerca del carácter empírico de la Matemática: la forma de comprobar que un enunciado matemático es verdadero (en el sentido de verificabilidad), es por medio de la demostración matemática, la cual se apoya en elementos (axiomas y teoremas) con una apariencia apriorística. El filósofo estadounidense afirma que una manera de resolver este dilema es encontrar un método de verificación alterno y diferente a la demostración matemática. Con ello se podría probar que la Matemática no es *a priori* (Polanco, 1997).

Luego de estas delineaciones sobre las posturas filosóficas sobre las cuales se sustenta el AIM y la corriente realista, que usa esta tesis en favor de la demostración de la existencia de los objetos matemáticos, en el siguiente capítulo esbozaremos algunas reflexiones acerca de los aciertos y dificultades de las formulaciones del argumento, dotándolas de los elementos teóricos pormenorizados en este capítulo y el anterior.

Capítulo 4 – Estudio detallado de los AIM

En este capítulo retomaremos nuestra primera aproximación del AIM, la cual expusimos en el primer capítulo. Por supuesto, en este apartado pretendemos realizar un análisis con mayor profundidad sobre el planteamiento y las dificultades de cada una de las formulaciones de esta tesis (primera, segunda y tercera enunciación), teniendo en cuenta los elementos teóricos que examinamos en el segundo y tercer capítulo.

Cabe resaltar nuevamente, que las reflexiones y análisis que expondremos en este capítulo las hacemos teniendo en cuenta el marco de las críticas tradicionales y no desde el planteamiento filosófico naturalista quineano, sobre el cual se sustenta gran parte de esta tesis de la Matemática. En otras palabras, cuando nos refiramos a las nociones de verdad, existencia y realidad lo haremos desde las concepciones del realismo-platonismo científico y matemático.

Cabe resaltar que en este apartado daremos un nombre diferente al dado en el primer capítulo, a cada una de las versiones del AIM. Iniciemos nuestro estudio.

4.1 AIM basado en la noción de verdad a partir de la ciencia (primera enunciación)

Como mencionamos anteriormente, una de las primeras formulaciones del AIM se debe a Quine y Putnam. Antes de iniciar nuestro análisis pormenorizado de esta versión, creemos pertinente presentar dos proposiciones que nos sirven como un sustento para comprender esa primera formulación. En algunos documentos especializados en el tema se hace mención a alguna de estas premisas, sin embargo, en la gran mayoría las suponen conocidas por el lector. Dichas proposiciones se ilustran en la Tabla 1.

El enunciado P1 es mencionado por Asse (2011) y el enunciado P2 por Colyvan (2001). Como podemos observar, estas proposiciones, especialmente la proposición P2 se encuentra enunciada para ser aplicada a cualquier teoría científica, incluida la Matemática. Esta proposición P2, puede desembocar en la formulación del AI para la ciencia que expusimos en el primer capítulo cuando citábamos a Colyvan (2001), claro está, utilizando el fundamento del *compromiso ontológico*, lo cual haremos posteriormente.

P1	Tenemos buenas razones para creer que nuestras mejores teorías científicas son verdaderas.
P2	Debemos tener compromiso ontológico para todas aquellas entidades que son indispensables para nuestras mejores teorías científicas

Tabla 1: Proposiciones de AI científico

Ahora, retomemos la versión que propone Alemán (1999) sobre la formulación inicial del argumento Quine-Putnam, recordando el esquema que habíamos planteamos para esta (Figura 9).

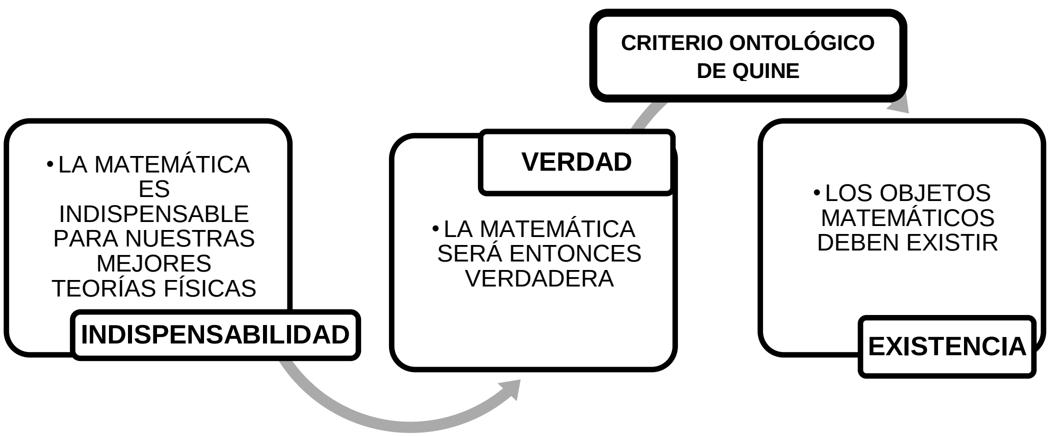

Figura 8: Formulación del argumento de indispensabilidad Quine-Putnam

Ya habíamos destacado los tres elementos principales que sustentan la formulación inicial del AIM los cuales son: la indispensabilidad, la verdad de la Matemática y la existencia de los entes matemáticos.

El punto de partida caracteriza la indispensabilidad de la Matemática para nuestras mejores teorías físicas, o como lo diría Quine, las teorías físicas mejores contrastadas por la experiencia y que por lo tanto aceptamos. A partir de lo anterior podemos afirmar que se tienen buenas razones para creer que las mejores teorías físicas son verdaderas gracias a la proposición P1.

Por ejemplo, una ciencia empírica como lo es la Física, hace predicciones y explica varios de los fenómenos que acontecen en nuestro entorno de una forma muy aproximada. Debido a que las predicciones son muy acertadas, en el sentido de ser muy próximas a los sucesos de la realidad que intenta modelar, consideramos a la ciencia física como verdadera.

Ahora bien, las predicciones y explicaciones las formula empleando a la Matemática como uno de sus indispensables instrumentos. No hay alguna duda, por lo menos a simple vista, de esta indispensabilidad porque no parece haber modo alguno en que dicha ciencia logre proporcionar sus resultados sin hacer antes algunos cálculos matemáticos (Alemán, 1999).

Después de justificar la indispensabilidad de las matemáticas (y por tanto de sus entidades) en las teorías físicas, es suficiente con que apliquemos la proposición P2 para determinar que debemos tener un *compromiso ontológico* con dichas entidades. Una consecuencia de dicha aplicación del *compromiso ontológico* es la de concluir, por tanto, que los objetos matemáticos existen.

Como habíamos indicado anteriormente, vamos a aclarar cómo por medio del uso del compromiso ontológico de la proposición P2, es posible llegar a la formulación del AI en la ciencia que se mencionó en la introducción del primer capítulo, o más precisamente cómo podemos llegar a concluir la existencia de las entidades matemáticas.

Por lo planteado en el segundo capítulo y por lo mencionado en Asse (2011), sabemos que la semántica tarskiana sostiene que “la verdad de una teoría implica los objetos a los que ella refiere” (p. 49). Esta proposición se sostiene en tanto que la teoría de la verdad como correspondencia de Tarski, establece, como su nombre lo indica, una *correspondencia* entre los enunciados de una teoría y un hecho de la realidad. A partir de esto se establece la verdad del enunciado sí y solo sí el hecho de la realidad sucede en dicha realidad.

El ejemplo que propusimos en el segundo capítulo, que era el enunciado "está lloviendo afuera en este momento", y el hecho "está lloviendo afuera en este momento", muestra claramente esa correspondencia. Ahora, si el enunciado "está lloviendo afuera en este momento" es verdadero es porque en la realidad existe la *lluvia* y el fenómeno *llover en este momento*.

Regresemos al tema que estamos tratando (la formulación del AIM). Como establecimos que las mejores teorías físicas son verdaderas, entonces existen unos hechos en la realidad que se corresponden con los enunciados de esas teorías. Y como los enunciados de las mejores teorías físicas se encuentran formulados en términos matemáticos entonces las entidades involucradas deben existir. Esta razón de la existencia en la semántica de Tarski es lo que describe y justifica al *compromiso ontológico* que se presenta en la proposición P2, y lo que nos permite concluir la existencia de las entidades matemáticas.

Es importante notar que para concluir la existencia de los objetos matemáticos no hemos hecho mención explícita al paso intermedio que propone Alemán (1999) para la formulación del argumento: suponer que la Matemática es verdadera. Este paso, si bien en muchos documentos no se hace evidente, es importante porque nos justifica el usar a las teorías matemáticas como herramienta para las mejores teorías físicas. Si las teorías matemáticas no fuesen verdaderas, entonces no deberían ser tan útiles como de hecho sucede. Cabe aclarar, de nuevo, que la Matemática indispensable en las mejores teorías físicas es verdadera en el sentido del realismo científico, es decir, que son capaces de proporcionar una *imagen real* y *fiel* de la *realidad* que pretenden describir (Marín, 2008).

Veamos ahora algunas de las principales dificultades de esta formulación las cuales se convierten en los obstáculos para aceptarla. Una primera cuestión es la que parte de la aceptación de una aplicación de la Matemática a las ciencias empíricas. Esta es una de las características más intrigante y sobresaliente de la Matemática, a tal punto que es muy difícil pensar en hacer ciencia sin ella. La pregunta ¿por qué la Matemática es aplicable en tan gran variedad de situaciones? no es sencilla de responder y es uno de los asuntos más complejos de los que trata la Filosofía de las Matemáticas. Sin embargo, claramente esta presentación del AIM, sin mayor discusión, parte de la suposición de que la Matemática sirve como instrumento predilecto para trabajar en las ciencias empíricas[27].

La siguiente dificultad se encuentra relacionada con la demostración de la verdad de las teorías físicas que utilizan a la matemática como herramienta, o en otras palabras, que cuantifica sobre entidades matemáticas. Esta empresa no es posible y esto se sustenta debido al criterio que Popper propone, el cual mencionamos en el capítulo anterior, para determinar el carácter de una teoría científica: la falsación. Recordemos que para este filósofo no es posible determinar la verdad de una teoría científica (excepto la Matemática y la Lógica), y por ello, dicha verdad se convierte en la idea a la que debe aspirar a la ciencia aunque nunca lo logre. En síntesis, probar la verdad de las mejores teorías físicas no es una opción que contribuya positivamente a sostener como correcta esta formulación del AIM.

Pero bueno, podríamos pensar que como Popper excluyó a la Matemática y la Lógica de la imposibilidad de determinar la verdad, opinaríamos entonces que estas últimas sí son verdaderas. Esto último, es el siguiente asunto que debemos tratar: inferir, a partir de la aplicabilidad de la Matemática, el carácter verdadero de esta. Esta última inferencia no es en sí obvia y es el germen que genera la mayor dificultad para aceptar esta versión del argumento. A continuación detallaremos un poco esta dificultad.

De acuerdo con las consultas que hemos realizado, existen dos formas de probar la verdad de la matemática. Ambas formas implican el uso de *una* teoría de la correspondencia de la verdad. La primera, es la que parece ser planteada en la versión original del AIM, sugiriendo que la existencia de las entidades matemáticas es una consecuencia de nuestro compromiso ontológico debido a la indispensabilidad de estas en las teorías físicas. Es decir, debemos partir de las teorías físicas, con sus realidades particulares, de tal forma que dicha realidad se corresponda con los enunciados (expresados en términos matemáticos), de dicha teoría,

[27] En líneas posteriores ejemplificaremos una propuesta que justamente trata de probar la no aplicabilidad de la Matemática a las ciencias empíricas demostrando que es posible hacer ciencia sin ella. Sin embargo, continuemos con la suposición de esta aplicabilidad.

asumiendo que las teorías científicas son verdaderas y, por lo tanto, también lo será la Matemática empleada en ella.

La segunda, es la de justificar la existencia de los objetos matemáticos, igualmente por medio de un compromiso ontológico, pero reconociendo que dichos objetos son indispensables para las teorías matemáticas y que estas a su vez son verdaderas porque se corresponden con una *realidad matemática*.

Precisemos un poco más esta idea. Para ello, retomemos la propuesta de platonismo en Matemáticas que plantea Balaguer (1998), y que se presentó en el capítulo anterior. Esta propuesta se formula con base en dos premisas: *i*) Existen los objetos matemáticos abstractos y *ii*) Las teorías matemáticas se constituyen, por tanto, en relatos o descripciones verdaderas de dichos objetos. Esta sugerencia de platonismo invita a pensar que cuando el autor se refiere a "relatos o descripciones verdaderas de dichos objetos", alude a una realidad abstracta en donde suceden hechos matemáticos que las teorías matemáticas intentan reproducir, en síntesis, existe una *realidad matemática.* Claramente, la naturaleza de esta *realidad matemática* no es la misma que la naturaleza de las realidades de las ciencias empíricas, debido a su carácter abstracto. Esta intuición (que existe una realidad propia de la Matemática), la confirmamos al leer a Meléndez (2014) quien afirma que:

> En cierto sentido, decir de una proposición *p* que es verdadera o decir que es un hecho que *p*, equivale a afirmar *p*… como expresando algo que realmente ocurre en la realidad matemática. La proposiciones de las matemáticas tendrían sentido y serían verdaderas porque lo que afirman se da efectivamente en una realidad independiente… La verdad matemática se entiende como correspondencia con ella (p. 126 – 127).

Ahora, determinamos que las teorías matemáticas son verdaderas porque se corresponden con esa *realidad matemática*. Es decir que, implícitamente utilizamos una teoría de la correspondencia de la verdad entre las teorías matemáticas y la *realidad matemática* que nos permite estar justificados en establecer la verdad de dichas teorías. Por supuesto, esta teoría de la verdad como correspondencia no es la misma que plantea Tarski aunque en esencia funcione de la misma manera. Y no debe ser la misma porque la teoría planteada por Tarski, la cual fue trabajada por Popper como indicamos en el capítulo anterior, la debemos emplear en las teorías físicas y sus realidades (todas físicas), excluyendo el caso de la Matemática y la Lógica. Esto hace necesario que esa nueva teoría de la correspondencia de la verdad sea reformulada para que pueda ser aplicada a realidades abstractas.

Pues bien, si optamos por la segunda opción que es la de demostrar la verdad de la matemática debido a que se corresponde con ella misma es un caso problemático, debido, justamente, a que la naturaleza de la realidad matemática es abstracta y no fáctica como las realidades de las teorías científicas. Al ser de esta naturaleza, por supuesto, no es posible conocerla por medio de la experiencia, por lo cual no tenemos razón alguna para estar justificados en afirmar que la matemática es verdadera. Meléndez (2014) así lo hacer ver cuando afirma que:

> A menos que podamos percibirlos [a los objetos matemáticos] o conocerlos de otra forma, si son invisibles daría igual que no existiera. Del mismo modo, si la realidad matemática, como se suele entender, es abstracta y no es perceptible sensiblemente, entonces a menos que se aclare cómo podríamos tener un acceso cognitivo a ella, su existencia no nos serviría para construir correctamente nuestro conocimiento matemático o para justificarlo. De nuevo, sería como si ella no existiese (p. 128).

Un ejemplo sencillo puede explicar mejor lo dicho anteriormente. La definición en los números naturales de la adición se hace por recurrencia, es decir que, para cualesquiera números naturales n y k se cumple que:

- $n + 0 = n$
- $n + k^{+} = (n + k)^{+}$

Donde n^{+} nota el sucesor de un número determinado[28]. Si, por ejemplo, $n = 1$ y $k^{+} = 4$ entonces

$$1 + 4 = (1 + 3)^{+} = 4^{+} = 5$$

En síntesis $1 + 4 = 5$. Esta es una igualdad que hemos aceptado pero la cual no podemos asegurar que sea un retrato de un hecho de la realidad matemática. Es posible que en esta

[28] En la axiomática de Guiusseppe Peano para cualquier número natural *n*, excepto el cero, existe un número que es el sucesor de este.

realidad $1 + 4 = 6$, hecho que no se corresponde con lo enunciado en la teoría, lo que nos lleva a pensar que las teorías matemáticas pueden ser todas falsas, aunque no se le haya descubierto como falsas aún.

Cabe resaltar que esta idea de que cualquier resultado es posible al sumar 1 y 4, puede tentarnos a caer en un relativismo matemático, es decir, no saber cuál es la opción más adecuada que represente el resultado de esta suma. Wittgenstein nos proporciona una vía para escapar de este relativismo y se basa en la utilidad del resultado $1 + 4 = 5$. Como en la realidad sensible podemos encontrar un hecho que represente esa igualdad (por ejemplo que si a un objeto le añadimos cuatro más del mismo tipo, esto nos permite tener como resultado cinco objetos del mismo tipo), entonces ese resultado es el que debemos aceptar y no otro. O sea, se acepta ese enunciado porque es lo que hemos visto y hecho toda la vida de la humanidad.

Es importante notar que todo esto no significa que debamos adoptar una posición pragmatista en la que se da a la utilidad el estatus de criterio para determinar la verdad de las teorías. Como Meléndez (2014) afirma:

> No se trata de identificar verdad con utilidad, sino de subrayar que es debido a que las reglas de las matemáticas, por ejemplo, las de la Aritmética elemental, se aplican en muchas actividades de nuestra vida, que nos obligamos a seguirlas de la misma manera y excluimos cualquier otra como incorrecta (p. 130).

Y este es justamente el meollo problemático de elegir la primera opción. No es posible equiparar la verdad con la utilidad de una teoría porque puede que esta sea útil pero igualmente falsa, por lo menos desde la visión y sustento del realismo en la Matemática. La tradicionalidad de utilizar unos resultados matemáticos en la vida cotidiana o en la producción de conocimiento científico fáctico, no nos ofrece alguna garantía para justificar por tanto que la matemática es verdadera. Es decir, nos enfrentamos a una noción de verdad trascendente a la experiencia.

Las dificultades antes presentadas para establecer la verdad de la Matemática es lo que lleva a algunos autores a redefinir el AIM, cambiando particularmente la idea de verdad trascendente por una más manejable: la de confirmación. Esta versión del argumento la mostraremos a continuación.

4.2 AIM basado en la noción de confirmación (segunda enunciación)

Regresemos con la segunda enunciación del AIM que describimos en el primer capítulo de este trabajo. Atendiendo al análisis que estamos proponiendo para cada una de las enunciaciones, retomemos el gráfico que sintetiza los principios de esta versión del AIM y que habíamos ilustrado en páginas anteriores. (Figura 10).

Figura 9: Formulación del argumento de indispensabilidad – Noción de confirmación

Al igual que el planteamiento original del AIM, esta redefinición se sustenta en tres núcleos (la indispensabilidad, la confirmación y la existencia) los cuales habíamos detallado anteriormente.

Resumamos: al igual que la formulación inicial de la tesis Quine-Putnam, el punto de partida es la aceptación de la indispensabilidad de la Matemática para las mejores teorías físicas. Esto nos lleva a establecer que la Matemática usada en las ciencias fácticas se confirma por medio de los sucesos que confirman dichas teorías, con lo cual, vía el uso del criterio de compromiso ontológico podemos determinar la existencia de las entidades matemáticas.

Sin embargo, ya habíamos manifestado nuestra inconformidad con este planteamiento del AIM por medio del ejemplo entre la teoría de la gravitación universal y la teoría de la relatividad. Un planteamiento similar a nuestro desconcierto lo podemos hallar en Alemán (1999), quien pone de manifiesto las irregularidades que se presentan al adoptar esta formulación del AIM, cambiando la noción de verdad trascendente por la de confirmación. Ilustraremos esas irregularidades a continuación con apoyo del siguiente gráfico. (Figura 11).

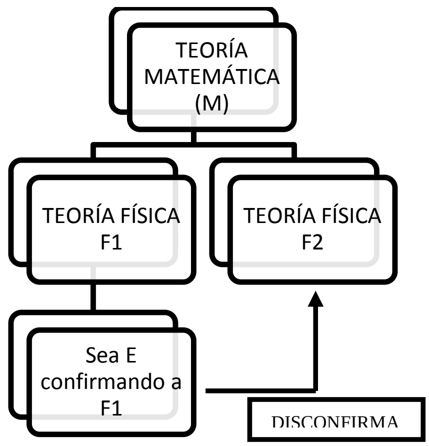

Figura 50: Esquema sobre dificultades del AIM – Noción de confirmación

En el anterior esquema se suponen dos teorías físicas *F1* y *F2* tales que cumplen dos condiciones: *i*) se encuentran formuladas a partir de la misma teoría matemática *M* y *ii*) son teorías físicas rivales, es decir, los enunciados que suceden y poseen certeza en una de ellas no sucede en la otra.

Ahora bien, imaginemos que hay un suceso *E* que se verifica en una de las teorías físicas, por ejemplo *F1*. Este suceso, de acuerdo con la versión del AIM con base en la noción de confirmación, hace que la teoría física *F1* se confirme, por lo cual la teoría matemática *M* sobre la cual está formulada la teoría física *F1* también se confirma gracias a este suceso.

Ahora, si aceptamos que este suceso *E* permite confirmar la teoría física *F1*, también será necesario que aceptemos que esa misma verificación del suceso hablado pone en cuestión a *F2*, es decir, verificar el suceso *E* nos justifica en decir que F2 no se encuentra confirmada, por cuanto *F1* y *F2* son teorías físicas rivales. La consecuencia lógica de esto, de acuerdo al AIM basado en la noción de confirmación, es que la teoría matemática *M*, sobre la cual se basa también la teoría *F2* no se encuentra confirmada por la susodicha *F2*. En síntesis, gracias a la verificación del suceso *E*, la teoría matemática *M* se confirma y a su vez no se confirma, lo cual es una inconsistencia.

Esto que acabamos de describir, y que se convierte el en principal inconveniente para aceptar esta formulación del AIM, se constituye en el *problema holístico de la contrastación empírica*. Para detallar un poco este problema y su relación con lo expuesto anteriormente, miremos ahora la estructura básica[29] que define el método hipotético-deductivo en su versión confirmacionista por medio del siguiente gráfico. (Figura 12).

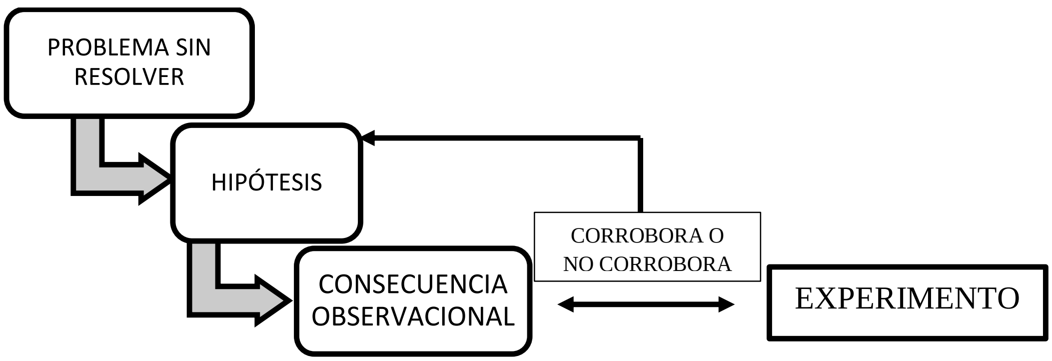

Figura 61: Esquema del método hipotético-deductivo confirmacionista

Expliquemos ahora brevemente el esquema que plantemos. Suponemos una teoría en la cual se nos presenta un problema que aún no ha sido resuelto. Para resolverlo generamos una hipótesis o conjetura de aquel suceso que contribuya a dar solución a este problema. Esta hipótesis implica el establecer un enunciado observacional, es decir, un enunciado que sea contrastable con un hecho de la realidad por medio de un experimento. Si el experimento corrobora la consecuencia observacional, entonces corrobora la hipótesis de la que fue extraída dicha consecuencia. Si por el contrario el experimento no corrobora la consecuencia observacional, tampoco corroborará la hipótesis inicial.

Ahora bien, lo que hemos llamado como *hipótesis* no implica exclusivamente a un conjunto con un solo elemento. Puede haber allí una conjunción de diferentes hipótesis, o de hipótesis y enunciados que asistan la formulación de la consecuencia observacional. Incluso, los elementos de esa conjunción (entre hipótesis o entre hipótesis y enunciados) pueden pertenecer a diferentes teorías cada uno.

[29] Una versión más detallada de este método la puede encontrar el lector interesado en Klimovsky (1994).

Pensemos en el ejemplo de Alemán (1999) que ilustramos anteriormente. La teoría física F_1 conjuga sus hipótesis con los enunciados matemáticos para generar el suceso E. Por otro lado, la teoría física F_2, al igual que su teoría rival F_1 conjuga sus hipótesis con los mismos enunciados matemáticos para generar el suceso *no* E. Ambos sucesos E y *no* E permitirán confirmar o no la teoría que les dio vida, por medio de un experimento. Ilustremos esto último con un lenguaje lógico:

$$(H_1 \wedge A) \Vdash E$$

$$(H_2 \wedge A) \Vdash no\ E$$

donde H_1 es un conjunto de hipótesis de la teoría física F_1, H_2 un conjunto de hipótesis F_2 y A un conjunto de proposiciones matemáticas.

El *problema holístico de la contrastación empírica* indica, a grandes rasgos que la confirmación no es distributiva, es decir que si un suceso confirma a una hipótesis, o mejor a una conjunción de hipótesis no implica esto que cada una de ellas sea confirmada particularmente. Expliquemos esto con el ejemplo que propuso Alemán (1999) y para esto supongamos que debido al experimento logramos deducir que E es el caso, entonces:

Si E es verdadero entonces la conjunción $(H_1 \wedge A)$ *se encuentra confirmada*

Claramente la conjunción se confirma al corroborarse E. Sin embargo, afirmar entonces que H_1 y A se encuentran particularmente confirmadas por este evento no es correcto debido a que solo la conjunción es la que se verifica.

Miremos otro asunto relacionado igualmente. Si E es el caso, entonces *no* E no es el caso lo que nos conduce a aseverar que:

> *Si E es verdadero entonces la conjunción* $(H_2 \wedge A)$ *no se encuentra confirmada, por lo cual si E es verdadero se tiene* $\sim(H_2 \wedge A)$

Con esta última afirmación tenemos algo muy similar a lo anterior. Al confirmase el suceso E se niega la conjunción entre hipótesis y enunciados de la teoría física F_2. Ahora, esto no implica la no confirmación de H_2 y A particularmente pues:

$$\sim(H_2 \wedge A) = \sim H_2 \vee \sim A$$

Lo que significa que al confirmarse *no* E por medio de la certeza que tenemos sobre E, no supone un conocimiento sobre la dificultad de la hipótesis, es decir, no podemos saber si se dejan de confirmar el conjunto de hipótesis H_2 de la teoría F_2, o el conjunto de proposiciones matemáticas que asistió el surgimiento del suceso *no* E, o ambos.

El inconveniente expuesto anteriormente, en el cual podemos ver de forma evidente que la confirmación de una teoría matemática no puede supeditarse a la confirmación de la teoría física que cuantifica sobre ella, debido a las inconsistencias que en el camino debemos enfrentar, es la razón por la cual esta formulación del AIM no es aceptable lo que nos debe llevar a revisarla y modificarla.

El filósofo de la Matemática Michael David Resnik, presenta una propuesta en la que procura solventar los obstáculos que exhiben tanto la primera versión de AIM (Tesis Quine-Putnam), así como esta segunda de la cual hemos detallado su principal dificultad. A continuación se muestra su propuesta y los cambios efectuados, en el siguiente apartado.

4.3 AIP de Resnick basado en la noción de verdad como inmanencia (tercera enunciación)

En el primer capítulo habíamos ilustrado el planteamiento de Resnik, desde su postura filosófica resaltando la intención de este filósofo de retomar la idea de demostrar el carácter verdadero de la Matemática por medio de la concepción de verdad como inmanencia. Es decir, una verdad que pueda comprobarse dentro de la misma Matemática.

Para lograr su objetivo (demostrar la existencia de los objetos matemáticos), hace una modificación a las intenciones de la versión original. Recordemos que en la formulación de Quine – Putnam se prueba la existencia de los objetos matemáticos a partir de las teorías físicas que cuantifican sobre ellos. Como estamos justificados en creer que nuestras mejores teorías científicas son verdaderas, entonces tenemos un compromiso ontológico con todas las entidades *indispensables* para la construcción de dichas teorías, en síntesis, las entidades *indispensables* (particularmente las matemáticas) deben existir.

Ahora bien, como analizamos en las dos formulaciones del AIM anteriormente, reconocimos que no es posible determinar la verdad o confirmar a la Matemática partiendo la determinación de la verdad o la confirmación de la teoría empírica que se encuentra formulada y cuantifica sobre esta. Debido a esto, con lo habíamos indicado, se hace necesario demostrar la verdad de las teorías Matemáticas al margen de su posible aplicación, es por esto que se habla de una noción inmanente de verdad.

Vamos ahora a retomar el gráfico que presentamos para esta versión del AIM. No obstante, haremos algunas modificaciones a este. Dichas modificaciones nos permiten simplificar el razonamiento de Resnik, además de contribuir significativamente para iniciar nuestro análisis pormenorizado. (Figura 13).

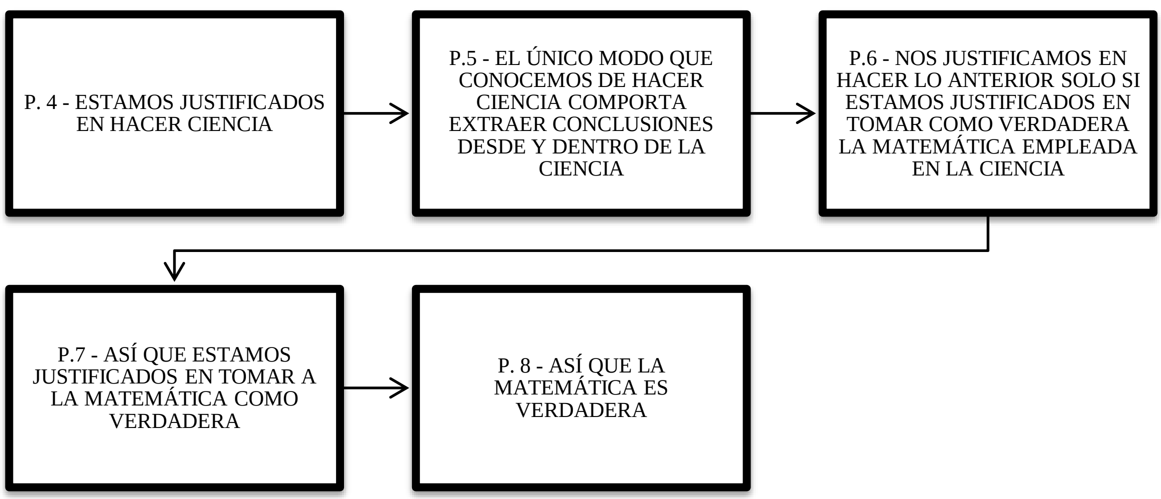

Figura 72: Tesis del AIM pragmático

Como mencionamos, lo fundamental de esta versión del AIM es que, sin importar si las ciencias físicas (empíricas) que cuantifican sobre entidades matemáticas son falsas, verdaderas o meramente confirmadas se puede demostrar en cualquier caso el carácter de verdad de la Matemática. Esto lo podemos apreciar, especialmente, en la sexta premisa de esta versión modificada del gráfico en la cual se indica que la principal condición para seguir justificados en hacer ciencia en el modo en que lo hacemos es que la Matemática involucrada sea verdadera. Caso diferente a las versiones anteriores que tenían como inicio la verdad de las mejores teorías físicas deduciendo por tanto la verdad de la Matemática que empleaban en estas.

El propósito de Resnik, luego de cumplir el objetivo parcial de determinar el carácter verdadero de la Matemática, es demostrar la existencia de los objetos matemáticos. Esto es, *prima facie,* un trámite sencillo pues basta aplicar el criterio de compromiso ontológico para concluir con la demostración que se exigía.

Alemán (1999) nos advierte de una singularidad entre las proposiciones P7 y P8. Dicha singularidad se sustenta en la forma particular de obtener la proposición P8 a partir de la proposición P7. Resnik, muy audazmente parte de la justificación de tomar a la Matemática como verdadera para concluir que esta lo es de hecho. No es sencillo admitir este paso, porque una cosa es considerar o creer que la Matemática es verdadera, y otra muy diferente, que esta ciencia lo sea en las cuestiones de *facto*. Eso es tanto, sin intención de ser peyorativos, como concluir que Dios existe solo porque muchos cristianos consideran o creen que realmente existe.

Resnik explica el sustento para poder obtener dicha conclusión. A continuación mostramos su justificación la cual es citada por Alemán (1999):

> Así que el salto que estamos intentando cumplimentar es el que hay entre estar justificado al creer algo y su ser verdadero. Verdad aquí es verdad desentrecomillada, así en el caso de un enunciado particular *p*, estamos intentando cubrir el salto entre estar justificado en creer que *p*, y *p*. No hay incoherencia en decir de algún otro que está justificado en creer que *p*, pero no *p*. Pero hay una clase de incoherencia (¿una incoherencia pragmática?) en reconocer que uno está justificado en creer que *p* mientras se niega *p*. Y esto, aduzco, apoya [supports] la inferencia: estamos justificados en creer que *p*, por consiguiente *p* [op. cit., p.172] (p. 53).

Ahora, analicemos un poco el detalle de la cita anterior. Efectivamente se presenta una clase de incoherencia cuando uno está justificado en creer que sucede un evento *p* pero a su vez niega que ese evento suceda. Es decir, si se tiene:

- *p*, pero no creo que *p*, o

- *p*, pero creo que no *p*.

Las oraciones que se construyen a partir del esquema anterior se conocen como oraciones mooreanas porque pertenecen al estudio de la "Paradoja de Moore"[30]. Sin querer ser exhaustivos, en estas oraciones

> Existe un enunciado que, en principio no tiene ningún problema formal, pero resulta ser un enunciado absurdo. Tradicionalmente, la paradoja se caracteriza por un consenso sobre el carácter absurdo de tales oraciones, a la vez que no existe ninguna contradicción en la oración en sí misma (Borgoni, 2008, p. 146).

Claramente, en el esquema de construcción de estas oraciones, si una persona afirma que no cree en un suceso (o cree que un suceso no es el caso), teniendo una creencia justificada de que dicho suceso si es el caso, entonces generará una incoherencia entre lo que es y lo que se cree que es. Intuimos que esta es la justificación a la que acude Resnik para sustentar sus dos últimas proposiciones.

Ahora bien, al analizar detalladamente esta versión, que aunque en apariencia solventa las dificultades de la versión del AIM basado en la concepción de confirmación, también genera sus propios inconvenientes. El principal, obviamente está relacionado con la justificación del último paso. Si bien es cierto que es posible generar incoherencias cuando se trata con un tipo particular de oraciones, creemos que el uso que da Resnik de dicha incoherencia no es suficiente para justificar el paso de la proposición P7 a la proposición P8 por una simple razón: no hay tal incoherencia en su versión del AIM. Vamos a detallar esto.

Para que unas determinadas oraciones sean catalogadas como mooreanas deben cumplir una condición: que el sujeto de dicha oración sea establecido en primera persona. Por ejemplo, las oraciones "está lloviendo, pero yo creo que no está lloviendo" o "está lloviendo, pero yo no creo que este lloviendo" son oraciones mooreanas porque la conjunción entre un suceso y la no creencia de dicho suceso están redactadas en primera persona. Borgoni (2008) explica

[30] Aunque el primero en notar que las oraciones presentadas eran incoherentes fue G.E. Moore, el que le atribuyó al problema el nombre de "Paradoja de Moore" y lo popularizó fue Ludwig Wittgenstein, debido a que este último consideraba este planteamiento una de las mayores contribuciones en la Filosofía.

que “debemos rechazar que alguien afirme algo a la vez que afirma la ausencia de su creencia en tal cosa” (p. 147).

Por su parte, las oraciones “está lloviendo, pero ella no cree que esté lloviendo” o “está lloviendo, pero yo creía que no estaba lloviendo”, no son oraciones mooreanas porque el sujeto se establece en tercera persona. En el primer cuando se aduce a la no creencia del evento, se refiere a una persona externa a sí misma. En el segundo caso, aunque la persona que enuncia la oración se refiere a sí mismo, lo hace en una versión del pasado que no creía en el evento pero que en la actualidad seguramente sí cree en el.

O sea que, cuando la oración no está redactada exclusivamente en primera persona, entonces deja de ser una oración mooreana, por lo cual, no hay incoherencia. Retomemos el caso de la conclusión que da Resnik en su formulación del AIM. Si bien la proposición P7 se encuentra redactada en primera persona, la proposición P8 no lo está. De hecho, el conocimiento de que la Matemática es verdadera, es completamente independiente de mi propia persona. Aunque yo crea justificadamente en que la Matemática es verdadera puede darse el caso que no lo sea, y como este último suceso es independiente de la propia persona que lo enuncia, entonces no hay contradicción.

Aleman (1999) resalta algo similar a lo que hemos mencionado, agregando que la justificación de Resnik sería válida si la conclusión de la proposición P8 fuese sustituida por afirmaciones como: “por lo cual *creemos* que *p*” o “*creemos* que *p* es verdadera”. En este caso, quién enuncia la oración se refiere a sí mismo por lo cual, pensar en negar esas oraciones nos llevaría a no aceptarlas por lo casos de la “paradoja de Moore”. No obstante, la solución no es tan simple, porque Resnik no busca probar que “*creemos* que la Matemática es verdadera” sino que “de hecho la Matemática es verdadera” por lo cual no es posible que consideremos que la vía propuesta por Resnik sea la adecuada para tal fin.

Una segunda dificultad en la propuesta de Resnik se puede evidenciar en la proposición P6.

> Nos justificamos en extraer conclusiones desde y dentro de la ciencia solo si estamos justificados en tomar como verdadera la matemática empleada en la ciencia (Alemán, 1999, p. 54).

En dicha tesis se afirma que es necesario que la Matemática involucrada en una determinada teoría física sea verdadera para continuar haciendo ciencia de la forma en que lo hacemos, o sea, extrayendo conclusiones desde y dentro de la ciencia. Sin embargo, no es cierto que la condición necesaria para hacer ciencia sea que la Matemática incluida en ella se verdadera. En realidad la condición es mucho más simple: basta con que la Matemática que se aplica (o la lógica) sea consistente (Field, 1980) o, portadora de la verdad (Aleman, 1999).

Algunos filósofos formalistas asegurarían, que es posible considerar a un sistema lógico empleado para formular una ciencia física verdadero sencillamente por ser correcto, o sea, que de unas premisas o axiomas verdaderos, solo puedo obtener conclusiones verdaderas. Sin embargo, esto no favorece el propósito de Resnik, lo cual vamos a explicar a continuación.

Recordemos que al decir que la Matemática es verdadera, nos estamos refiriendo a que las teorías matemáticas son un retrato fiel de un mundo, independiente de los conocedores, en donde suceden hechos matemáticos. Anteriormente, en este documento, llamamos a este mundo *realidad matemática*. Ahora bien, pudimos ver que la Matemática de la que hoy disponemos puede no ser ese retrato fiel de la *realidad matemática* y ha sido aceptada, en gran medida, por su utilidad. Es decir, aunque el matemático y filósofo formalista construya una teoría lógicamente correcta, puede postular y concluir cosas que en realidad pueden no existir o que no se corresponda con esa *realidad matemática*. Esta última particularidad es la que no va en consonancia con el fin de Resnik porque él justamente trata de demostrar que la Matemática sí es un retrato fiel de un mundo de hechos matemáticos que está previamente ahí. Alemán (1999), explícita esto afirmando que “Se trata de la vieja idea de que un ladrón (una teoría matemática falsa) no es menos ladrón (menos falsa) por no haber sido cogido *in fraganti* (en contradicción)”.

Luego de hacer la explicación y debidas precisiones de las diversas dificultades de los AIM que estudiamos, analizaremos una propuesta de tipo ficcionalista bastante controversial, que en lugar de proponer un cambio en la versión inicial del argumento de forma que se superen las dificultades, busca deslegitimar la validez de la tesis Quine-Putnam. Todo esto lo hace probando que, en una teoría física, los objetos matemáticos son entes ficticios, por lo cual podemos prescindir de ellos y plantear dicha teoría sin estos elementos.

Capítulo 5 – Una postura que siembra duda

Como indicamos en el inicio del presente documento, estudiaremos a grandes rasgos una propuesta de nominalización de la teoría de la gravitación de Newton, con base en el libro *Science Without Numbers* del filósofo de la ciencia Hartry Field. Para conseguir nuestro objetivo iniciaremos con la descripción de algunos conocimientos que son necesarios para lograr comprender el planteamiento del proyecto Field.

Luego de lo anterior ilustramos dos ejemplos de teorías (desde la aritmética y la geometría) en las que se evidencia la dispensabilidad de las entidades matemáticas para realizar demostraciones de algún hecho establecido en cada una de ellas. Para finalizar exponemos (sin querer ser exhaustivos) el fundamento de la propuesta de nominalización de la teoría de la gravedad de Newton. Iniciemos.

5.1 Ideas preliminares

En este apartado presentaremos algunas ideas que son importantes para comprender los ejemplos de formulaciones sobre teorías nominalizadas. Estas ideas se encuentran estrechamente relacionadas con las asunciones del nominalismo, las diferencias entre las entidades postuladas es un determinada teoría y la definición de las extensiones conservativas. Iniciemos.

5.1.1 Asunciones general sobre el nominalismo

Algunos filósofos de la ciencia suelen distinguir entre el nominalismo y el ficcionalismo[31], clasificando el proyecto Field como una versión más de ficcionalismo. Sin embargo, en el transcurso de todo su documento, el autor se refiere a los términos “*nominalism*” y “*nominalizing*” asumiendo con esto la posición nominalista en lugar de la ficcionalista. No obstante, en este escrito se consideran a ambas posturas como una sola.

[31] El nominalismo y el ficcionalismo se diferencian el uno del otro básicamente porque el primero suele abordar cuestiones ontológicas desde lo metafísico y el segundo desde lo semántico. Sin embargo, esto no es relevante en la materia de estudio de este capítulo.

En la introducción de su capítulo, Field (1980) deja clara su posición respecto a la inexistencia de las entidades abstractas (refiriéndose a números, funciones, conjuntos entre otros) cuando afirma que "In defending nominalism therefore I am denying that numbers, functions, sets, or any similar entities exist" (p. 1).

Con base en su postura acerca de la ontología de las entidades abstractas (particularmente de los objetos de las Matemáticas), este filósofo inicia un proyecto, el cual pretende, en un cierto sentido, desprestigiar el AIM vía la demostración de:

- La utilidad de la Matemática y su éxito en las teorías físicas como aspectos que no dependen de su verdad sino de su consistencia[32]. Es decir, Field refuta la justificación quineana de la utilidad de la Matemática en las ciencias empíricas ilustrada en el AIM a partir del carácter verdadero de esta, y por su parte asegura que dicha utilidad se encuentra estrechamente relacionada con la propiedad de la Matemática de conservar la verificabilidad. En suma, la Matemática aplicada puede ser falsa pero conservará un carácter funcional.

- La dispensabilidad de la Matemática, la cual ilustra por medio de tres ejemplos, a saber: *i*) el caso de la dispensabilidad de la Aritmética para una teoría que se constituye de proposiciones nominalistas[33], *ii*) la teoría de la Geometría de Hilbert a la cual se le "añade" la teoría de los números reales y *iii*) el controversial ejemplo de la teoría de la gravitación de Newton. Para este punto se apoya en la prueba de la conservatividad de la Matemática.

Claramente la propuesta de este autor esgrime ataques sobre los núcleos fundamentales del AIM, los cuales son: *i*) la indispensabilidad de la Matemática en las mejores teorías físicas y *ii*) el carácter verdadero de esta. No obstante, filósofos como Mark Colyvan aseguran que el proyecto Field no alcanza su objetivo completamente por lo cual el AIM continuará siendo

[32] En algunas ocasiones, Field aduce a la noción de conservatividad en lugar de la de consistencia. Posteriormente se aclarará la estrecha relación de estas dos nociones.

[33] Es decir, proposiciones que no aducen a entidades matemáticas.

una herramienta importante en defensa de la existencia de los objetos matemáticos para la postura realista de la Filosofía[34].

Teniendo en cuenta este esbozo general del planteamiento de Field para conseguir su objetivo, analicemos ahora la diferencia que establece este filósofo entre las entidades físicas y las entidades matemáticas de una teoría.

5.1.2 Diferencia entre la utilidad de las entidades físicas y las entidades matemáticas

Cuando de postular entidades en una teoría física se trata, Field (1980) distingue entre dos clases: las entidades físicas y las entidades propias de la Matemática. Argumenta además que la diferencia principal entre estas dos clases de entidades es su utilidad en dicha teoría.

La utilidad de las entidades físicas en las ciencias empíricas la sustenta el autor con base en dos premisas:

- *Primera*: las entidades físicas desarrollan un papel fundamental en teorías poderosas, y por lo tanto contribuyen a que estas logren describir un amplio rango de fenómenos de la naturaleza.
- *Segunda*: no hay teorías alternativas (conocidas y parecidas) que describan esos mismos fenómenos sin el uso de dichas entidades.

Las dos características de las entidades físicas presentadas anteriormente se constituyen en las razones por las cuales consideramos a estos objetos como *teóricamente indispensables*. No obstante, las entidades propias de la Matemática, dice Field, si bien satisfacen la primera condición, no lo hacen con la segunda.

> […] en la monografía argumentaré que las entidades matemáticas no son teóricamente indispensables: aunque ellas juegan un rol en poderosas teorías de la Física moderna, podemos dar reformulaciones atractivas de tales teorías en las que las entidades matemáticas no jueguen algún rol. (Field, 1980, p. 8).

[34] Para mayor información, el lector interesado puede remitirse a Colyvan (2001).

En lo que sigue analizaremos un aspecto importante de la propuesta de Field: la conservatividad de la Matemática (definición y características) y su estrecha relación con la consistencia de esta.

5.1.3 Extensiones conservativas

Hablemos ahora de lo que involucra, para Field, el poder demostrar que la Matemática es dispensable. Este filósofo afirma que, debido a que la justificación para el uso de las teorías matemáticas en las ciencias empíricas no es su carácter verdadero, entonces es posible prescindir de tales teorías. El argumento poderoso para demostrar esto es verificando que la Matemática aplicada en las ciencias fácticas sea conservativa, pues al establecer esto la falsedad o verdad de dicha Matemática es irrelevante para considerar su uso en las ciencias que se fundamentan en la experiencia.

Este punto sobre la conservatividad de la matemática es el objeto de estudio de esta sección. Hablemos ahora de la definición que proporciona Colyvan (2001) acerca de la teoría matemática conservativa:

> Una teoría matemática *M* se dice que es conservativa si, para cualquier cuerpo de proposiciones nominalistas *S* y cualquier afirmación nominalista particular *C*, entonces *C* no es una consecuencia de *M*+*S* a no ser que esta sea una consecuencia de *S*. (p. 70).

Precisemos un poco la definición antes presentada. En la primera parte de la definición, para poder hablar de la conservatividad de la Matemática, se parte de dos elementos: un conjunto *S* de proposiciones nominalistas (es decir una teoría que haga referencia en alguna de sus afirmaciones particulares a alguna entidad matemática) y una teoría matemática *M* cualquiera. Ahora bien, es necesario unir la teoría nominalista *S* con la teoría matemática *M* para obtener una teoría que por un lado posee afirmaciones nominalistas pero que además tiene la posibilidad de cuantificar sobre entidades abstractas como números, conjuntos, funciones, entre otras.

Ya la segunda parte de la definición establece que dadas las dos teorías *S* y *M*+*S*, todo teorema o conclusión que se pueda deducir de *M*+*S* implica que es un teorema o conclusión en *S* sola. En otras palabras, *M*+*S* es una *extensión conservativa* de *S*.

En este punto especificaremos la definición de *extensión conservativa*. Una definición formal la podemos observar a continuación utilizando los mismos elementos que hemos venido trabajando:

Sean: *i*) *M* una teoría matemática, *ii*) *S* un conjunto de afirmaciones nominalistas y *iii*) *A* como representante de la unión *M*+*S* $(A \coloneqq M + S)$. Se dice que A es una extensión conservativa de *S* pues cumple las siguientes condiciones:

- Existe una función *t* (denominada función traducción) de *S* en *A* tal que:
$$(\forall \alpha \in S)\ (t(\alpha) = \beta, \beta \in A)$$
- Cada teorema de *S* es también un teorema en *A*.
- Todo teorema de *A* que contenga solo signos de *S* o traducciones de los mismos es también un teorema de *S*.

Esta noción se establece o es aplicable en el caso exclusivo en el que se pretende caracterizar el comportamiento de dos teorías. Lo que a grandes rasgos nos indica la definición de *extensión conservativa* es que una de las teorías involucradas se comporta, en cierto sentido, como un *isomorfismo* de la otra. En nuestro caso particular al ser la teoría *M*+*S* una extensión conservativa de *S* entonces cada teorema deducible en *M*+*S* es finalmente el producto de una traducción de un teorema de *S*.

Esto último que acabamos de mencionar, y que hace parte de la definición de extensión conservativa, es lo que Field denomina en su libro el *Principio C* de conservatividad. No obstante, Field se percata y aclara que el hecho de establecer una unión entre la teoría matemática *M* y la teoría de afirmaciones nominalistas *S* puede conducir a que *M*+*S* sea inconsistente pues puede darse el caso de haber una afirmación ϑ en *S* que no haga referencia a una entidad matemática particular y que a su vez exista $\neg\vartheta$ en *M* la cual se referirá expresamente a tal entidad matemática.

Para dar solución a este inconveniente, Field elabora una versión *agnóstica de S*, introduciendo un predicado $M(x)$ el cual indica que $\forall x, x\ es\ una\ entidad\ matemática$. Teniendo en cuenta este predicado, es posible tomar un teorema ϑ en *S* de forma que se este se transforme en ϑ^* la cual es una afirmación que resulta de restringir cada cuantificador de ϑ con el predicado $\neg M(x)$ para algún *x* dado. Es decir:

- Si se tiene $\vartheta(x_i) \in S$ tal que $\vartheta(x_i) \coloneqq \forall x_i(\dots)$ entonces $\vartheta^*(x_i) \coloneqq \forall x_i(si\ \neg M(x_i)\ entonces\ \dots)$.
- Si se tiene $\vartheta(x_i) \in S$ tal que $\vartheta(x_i) \coloneqq \exists x_i(\dots)$ entonces $\vartheta^*(x_i) \coloneqq \exists x_i(\neg M(x_i)\ y\ \dots)$.

Con las restricciones hechas sobre las afirmaciones de *S* se genera entonces un conjunto S^* que contiene, por supuesto, a todas las expresiones $\vartheta^*(x_i)$. Este nuevo conjunto de proposiciones es lo que Field, denomina como una versión agnóstica de *S* y aclara que debido a que no puede ser una teoría vacía, es necesario que haya al menos un x_i que cumpla las condiciones y restricciones dadas. Por todo esto se formula a $S^* + M + "\exists x\ - M(x)"$ como una extensión conservativa de *S*, la cual no es potencialmente inconsistente.

Por último precisemos la relación entre consistencia y conservatividad. De acuerdo con la definición de conservatividad para la Matemática, se puede deducir que esta es consistente, pues de lo contrario podría, al unirse a una teoría nominalista, generar inferencias incorrectas al demostrar un determinado teorema o consecuencia. Es decir, basta con observar en cierto sentido que la Matemática aplicada en una teoría sobre una ciencia empírica sea conservativa para determinar su consistencia. La conservatividad en últimas lo que asegura es que aun siendo consistente y a su vez falsa la teoría matemática, esta no "infectaría" a la teoría que resulta como unión de dicha Matemática con una teoría nominalista.

Continuemos ahora con el estudio de las tres ilustraciones que expone Field para conseguir su propósito de desprestigiar el AIM.

5.2 Las tres ilustraciones que explican la utilidad y dispensabilidad de la Matemática

Para hablar de los casos que ilustra Field, los cuales contribuyen con su propósito de demostrar la dispensabilidad de la Matemática, es necesario que revisemos el siguiente esquema, el cual será de gran importancia para comprender cada uno de estos ejemplos. Veamos el mencionado esquema (Figura 14):

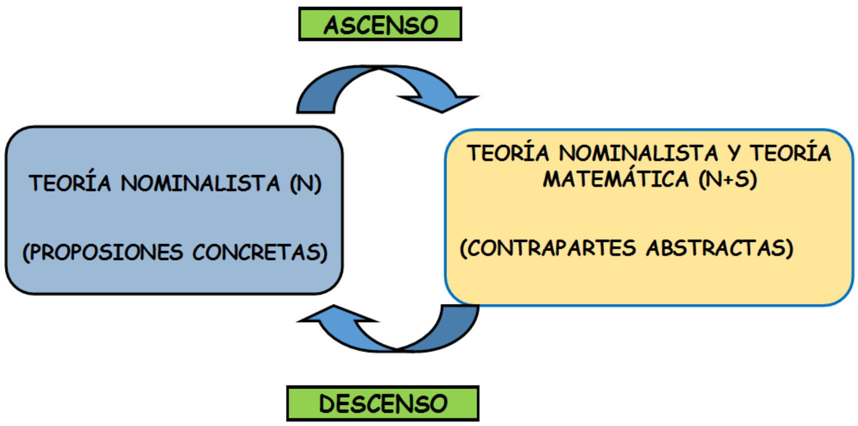

Figura 83: Esquema de ascenso y descenso entre teorías

Expliquemos brevemente dicho esquema. Como la teoría $N+S$ es una extensión conservativa de N, entonces por el principio de conservatividad C, cada teorema que sea demostrable en $N+S$ también es demostrable en N sola.

Ahora bien, cada proposición concreta de la teoría nominalística debe tener un enunciado que se corresponda, en la teoría $N+S$. A dicho enunciado perteneciente a $N+S$ se le denominará la *contraparte abstracta* de la *proposición concreta*. Obtener esta contraparte abstracta es relativamente sencillo vía el uso de la función traducción t que se definió en la sección anterior.

Field plantea que para demostrar algún teorema T en N, el cual implique en su demostración el uso de un número determinado de premisas P_i, se debe realizar, *grosso modo*, el siguiente procedimiento:

- Efectuar un proceso de "ascenso" a la teoría $N+S$, estableciendo las contrapartes abstractas de T y de P_i.
- Se procede a demostrar la contraparte abstracta de T con apoyo de las contrapartes de P_i en $N+S$.

- Luego, debido al principio de conservatividad C, se realiza un “descenso” a las proposiciones T y P_i, habiendo demostrado lo requerido.

Veamos ahora el procedimiento anteriormente descrito en las ejemplificaciones que hemos venido anunciando a lo largo de este capítulo.

5.2.1 El caso de la Aritmética

El primer ejemplo se encuentra relacionado, en *primer lugar*, con demostrar que la utilidad de la Matemática en una teoría nominalística no radica en su carácter verdadero; y en *segundo lugar*, con poner de manifiesto la dispensabilidad de la teoría aritmética de los números naturales (y algunos rasgos de teoría de conjuntos) para una teoría nominalística particular.

Entremos en materia. Field considera una teoría nominalista, la cual denomina N, en la que se encuentra incluido el símbolo de identidad o igualdad (=) con sus particulares propiedades, los cuantificadores ∀ y ∃ y los siguientes tres axiomas:

- Axioma 1: $\left(\exists_{\geq 0} x A(x) \leftrightarrow \exists x A(x)\right)$
- Axioma 2: $\left(\exists_{\geq k} x A(x) \leftrightarrow \exists x [A(x) \wedge \exists_{\geq j} y(y \neq x \wedge A(y))]\right)$
- Axioma 3: $(\exists_{j} x A(x) \leftrightarrow \exists_{\geq j} x A(x) \wedge -\exists_{\geq k} x A(x)$

donde $\exists_{\geq k}$ significa “hay al menos k objetos”, $\exists_j$ “hay exactamente j objetos” y k es el numeral decimal que sigue inmediatamente a j. Como N es una teoría nominalística, no debe contener referencias a entidades matemáticas ni establecer objetos singulares como por ejemplo “87”. Estas referencias deben estar referidas a partir de los cuantificadores.

En este punto Field propone el siguiente argumento en N:

1. Hay exactamente veintiún hormigueros $(\exists_{21} x A(x))$
2. En cada hormiguero hay exactamente tres hormigas[35].
3. Cada hormiga está exactamente en un hormiguero, entonces

[35] En el documento la proposición es “on each aardvark there are exactly three bugs”. La palabra “bugs” refiere en español al término “bicho”. Sin embargo, para dar continuidad al contexto del argumento reemplazamos la referencia por la palabra “hormiga”.

4. Hay exactamente sesenta y tres hormigas.

Este argumento es posible demostrarlo desde la teoría N, no obstante, Field afirma que con los axiomas y elementos disponibles, esta demostración es un proceso difícil y engorroso. Ahora bien, realicemos el "ascenso" a la teoría N+S, donde S es la teoría aritmética de los números naturales y algunas asunciones de teorías de conjuntos, estableciendo las contrapartes abstractas de las premisas propuestas en el argumento, así:

- **1'**[36]: La cardinalidad del conjunto de hormigas es 21.
- **2'**: Todos los conjuntos en el rango de la función cuyo dominio es el conjunto de los hormigueros, y que asigna a cada entidad en su dominio el conjunto de hormigas de tal entidad, tiene cardinalidad 3.
- **3'**: La función mencionada en 2' es biyectiva[37] y su rango forma una partición del conjunto de todas las hormigas.
- **4'**: La cardinalidad del conjunto de todas las hormigas es 63.

Este argumento lo podemos apoyar en las siguientes proposiciones que pertenecen y son demostrables en N+S:

a) Si todos los miembros de la partición de un conjunto X tiene cardinalidad α, y la cardinalidad del conjunto de miembros de la partición es β, entonces la cardinalidad de X es $\alpha \times \beta$.

b) El rango y dominio de una función biyectiva tienen la misma cardinalidad.

c) $3 \times 21 = 63$.

Podemos evidenciar que 1', 2'y 3' en conjunción con a), b) y c) son la inferencia necesaria para obtener 4'. Como 1', 2', 3' y 4' son las contrapartes abstractas de 1, 2, 3 y 4 podemos afirmar que 4 se ha demostrado en N+S. Por el principio de conservatividad C, podemos concluir que 4 es un teorema en N sola.

[36] Para cada proposición concreta *i*, *i'* es su contraparte abstracta.

[37] En la frase original no se menciona a una función biyectiva, sino a una función que es "I-I". Esto puede interpretarse como una función uno a uno, o biyectiva.

Con este ejemplo son claros dos aspectos que son la base del trabajo de Field: la utilidad de la Matemática como parte de la extensión conservativa de la teoría N, hace que se nos facilite la demostración del argumento planteado en N debido al ascenso de dicho argumento a N+S. No implica esto que la teoría matemática empleada sea verdadera, sencillamente tiene un carácter funcional el cual se ha empleado para obtener la inferencia necesaria.

Por otro lado, la Matemática empleada en este ejemplo, si bien simplifica el procedimiento para obtener la demostración requerida, no es necesaria debido a que este mismo argumento puede ser demostrado a partir de los elementos y axiomas disponibles en N. Con estas dos últimas precisiones Field muestra por medio de un ejemplo la dispensabilidad de la Matemática y la razón de su utilidad.

5.2.2 El caso de la Geometría

Estudiemos ahora el caso ejemplo que propone a partir de la axiomatización de la Geometría euclidiana de Hilbert y la teoría de los números reales.

Para ilustrar su ejemplo sobre el caso de la geometría de Hilbert, Field (1980) hace una aclaración acerca del "ascenso": "… the key to carrying out the general strategy of finding 'abstract counterparts' is proving a *representation theorem*" (p. 24)[38].

El *teorema de representación* básicamente busca que, para una teoría nominalística N dada, sea posible encontrar una estructura ξ en su extensión conservativa $N+S$, de forma que sea posible determinar un homomorfismo entre un número significativo de proposiciones concretas en N y sus contrapartes abstractas en ξ. Este homomorfismo establecido sirve entonces de puente para realizar el "ascenso" o "descenso" entre N y $N+S$. En síntesis, la estructura ξ es una representación de N. Veamos este teorema en el ejemplo que ilustra Field.

Es sabido que la formulación de la geometría Euclidiana de Hilbert se ocupa enteramente de los asuntos geométricos, es decir, es una axiomatización sobre el espacio físico y su propósito

[38] Esta cita en particular se conservó en el idioma original debido a que creemos que una traducción en el idioma Español oculta la fuerza y connotación de la oración.

de estudio es dicho espacio[39]. No incluye por tanto una teoría matemática que cuantifique sobre entidades matemáticas (en particular no incluye la teoría sobre los números reales).

En esta teoría se incluyen las siguientes tres (y muy importantes para el propósito de Field) relaciones entre los objetos de la geometría de Hilbert (puntos, segmentos y ángulos)[40]:

a) Una relación ternaria[41] denominada "entre", donde "*y* está entre *x* y *z*" (simbólicamente, "*y* entre *xz*") en la que se entiende intuitivamente que *y* es un punto sobre el segmento cuyos extremos son *x* y *z*. El caso en que $y = x$ o $y = z$ es permitido, es decir, tratamos con lo que llamaríamos una relación *entre inclusivo*.

b) Una relación cuaternaria[42] denominada *segmento-congruencia*, que se escribe como "*xy* cong *zw*", entendido intuitivamente que la distancia desde el punto *x* al punto *y* es la misma que la distancia desde el punto *z* al punto *w*.

c) Una relación senaria[43] denominada ángulo-congruencia, que se escribe como "*xyz* A-cong *tuv*", entendiendo intuitivamente que el ángulo formado por los puntos *x*, *y* y *z* con vértice en *y* es de la misma medida que el ángulo formado por los puntos *t*, *u* y *v* con vértice en *u*.

La explicación de las relaciones anteriormente descritas, solo se puede efectuar acudiendo a la intuición, pues en esta teoría no tiene sentido una definición numérica de distancia o

[39] Una discusión interesante al respecto de la iniciativa de Hilbert para la axiomatización de la geometría Euclidiana de forma que fuese una teoría que tratase exclusivamente del espacio es posible encontrarla en Giovannini (2015). El aspecto más importante de la discusión es el reflexionar acerca de la naturaleza de teorías como la de números, conjuntos, entre otras; en comparación con la naturaleza de la Geometría, pues las primeras parecen ser teorías puras (debido a que la producción de estas ocurre en lo abstracto) mientras que la segunda parece ser de tipo mixto pues estudia un entorno que se es impuesto fuera de la mente y al cual solo accedemos por medio de los sentidos. Preservar la naturaleza de la Geometría fue una de las banderas del proyecto de Hilbert el cual defendía la forma sintética de producir conocimiento en esta materia.

[40] Estas tres relaciones se extraen y traducen del libro de Hartry Field (1980), página 25 y 26.

[41] La traducción no es fiel al nombre que asigna Field a las relaciones. En este caso el enunciado inicia como sigue "*a three-place predicate*" (Field, 1980, p. 25). Lo denominamos relación ternaria porque en ella se involucran tres elementos.

[42] En el texto original (Field, 1980) se refiere a "*a four-place predicate of segment-congruence* […]" (p. 26).

[43] Si bien la traducción del enunciado original "*a six-place of angle-congruence*" (Field, 1980, p. 26) no es fiel, nuevamente asignamos el nombre de una relación teniendo en cuenta la cantidad de elementos involucrados los cuales, para este caso particular, son seis.

medida de ángulos debido a que no se cuenta con la teoría de los números reales. Inclusive, algunos teoremas que tratan explícitamente con demostraciones de medidas longitudinales y angulares acarrearían un trabajo difícil debido a la falta de formulación formal de las nociones "distancia" y "medida".

No obstante, dado un espacio que se formule con base en las nociones de Hilbert, el teorema de representación permite obtener una asignación, llamémosla d, tal que a una pareja de puntos de dicho espacio un número real positivo tal que se cumplen las siguientes condiciones[44]:

- Para cualesquiera cuatro puntos x, y, z y w, xy cong zw si y solo si $d(x,y) = d(z,w)$.
- Para cualesquiera tres puntos x, y y z, y esta entre x y z si y solo si $d(x,y) + d(y,z) = d(x,z)$.

Esta representación del espacio definido de acuerdo con las asunciones de Hilbert, permite establecer las contrapartes abstractas de las proposiciones formuladas para los objetos de este espacio. Es decir, en la estructura de los números reales podemos demostrar teoremas de la geometría de Hilbert, inclusive de aquellas proposiciones que hagan referencias a medidas longitudinales y angulares, como por ejemplo la demostración del teorema de Pitágoras y su recíproco.

Examinemos ahora el siguiente argumento geométrico (Figura 15):

a) Sean a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3 triángulos rectángulos con su ángulo recto en a_2 y b_2.
b) Hay un segmento $\overline{cd}$ tal que $\overline{a_1a_2}$ es el doble de la longitud de $\overline{cd}$[45], $\overline{a_2a_3}$ es cinco veces la longitud de $\overline{cd}$ $\overline{b_1b_2}$ es tres veces la longitud de $\overline{cd}$, y $\overline{b_2b_3}$ es cuatro veces la longitud de $\overline{cd}$.

Demostrar, por ejemplo, que el segmento $\overline{a_1a_3}$ es más largo que $\overline{b_1b_3}$ con los axiomas de la geometría de Hilbert puede llegar a ser complicado y dispendioso. No obstante, si se utiliza

[44] Las condiciones que se presentan se toman de Field (1980, p. 26).

[45] "Se dice que $\overline{a_1a_2}$ es el doble de la longitud de $\overline{cd}$ si existe un punto x entre a_1 y a_2 tal que a_1x cong cd y xa_2 cong cd." (Field, 1980, p. 28).

el *teorema de representación* de forma que se hallen las contrapartes abstractas de las premisas necesarias para obtener la conclusión deseada, fácilmente se puede recurrir al teorema de Pitágoras para ver que $\overline{b_1 b_3}$ es cinco veces $\overline{cd}$, que $\overline{a_1 a_3}$ es $\sqrt{29}$ veces $\overline{cd}$, y por lo tanto que la medida de la longitud de $\overline{b_1 b_3}$ es menor que la medida de la longitud de $\overline{a_1 a_3}$.

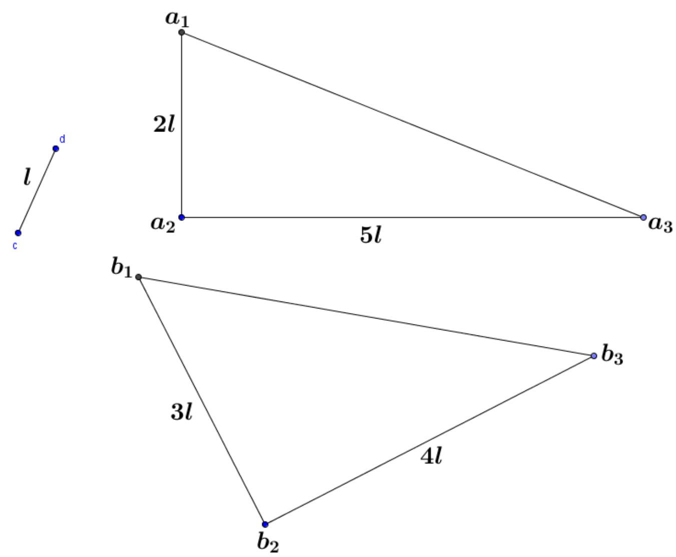

Figura 94: Gráfica del argumento geométrico en la axiomatización de Hilbert

Ahora examinemos el caso principal de libro de Field que trata sobre la "nominalización" de la teoría de la gravedad de Newton. Para esto es necesario tener en cuenta lo explicitado en la sección que acabamos de estudiar.

5.2.3 El caso de la teoría de la gravedad de Newton

Para ilustrar el caso de la teoría de la gravedad de Newton, Field se apoya en los teoremas de representación y unicidad de la geometría de Hilbert. Field expone muy claramente las razones por las cuales se basa en este particular tipo de Geometría Euclidiana para llevar a cabo sus propósitos. La primera de ellas se debe a que la axiomatización de Hilbert es un claro ejemplo de descripción de sucesos del espacio de una forma sintética (sin la imposición de estructuras numéricas para la demostración de hechos geométricos). Field argumenta que al haber ilustrado un camino sintético de la Geometría, es posible hallar una forma similar para generar inferencias en el ámbito de las ciencias empíricas.

Por otro lado, Field cree que al hablar, por ejemplo, la teoría de la gravedad de Newton sobre el espacio físico, la formulación axiomática de la geometría que propuso Hilbert puede servir como sustento para su prueba de la nominalización de las teorías del espacio (y particularmente del espacio-tiempo).

Además, para generar un verdadero planteamiento nominalizado de la teoría de la gravitación de acuerdo con Field, es necesario que este cumpla tres aspectos, a saber: *i*) debe ser una formulación atractiva en el sentido de ser tan útil y usada como la versión platonista de la misma teoría, *ii*) debe ser una formulación "puramente intrínseca", es decir, no debe haber dispositivos adicionales a su formulación (como por ejemplo una teoría matemática) que sirvan para obtener inferencias ciertas, y *iii*) es una formulación que no aduce a objetos arbitrarios que sirvan como unidades de longitud, como sistema coordenado, entre otros.

Entremos en materia. Para poder obtener una nominalización de la teoría de la gravedad es necesario dar un tratamiento nominalista a las dimensiones espacio-tiempo. La teoría Hilbert (con ciertos ajustes), es una potencial teoría nominalista del espacio. No obstante, al considerar el espacio-tiempo debe haber algunos cambios debido a que no poseemos una forma euclidiana de comparar las distancias en el espacio y las distancias en el tiempo.

Para poder lograr dar un tratamiento nominalista al espacio tiempo debemos considerar nuevamente los teoremas principales que planteó Hilbert en su geometría euclidiana. A continuación formulamos el teorema de representación (el cual ilustramos anteriormente) y el teorema de unicidad (el cual aún no hemos mostrado) de una manera más rigurosa, tal y como lo expone Field (1980, p. 50).

Teorema de representación: Una estructura $\langle \mathcal{A}, Entre_{\mathcal{A}}, Cong_{\mathcal{A}} \rangle$ (donde $Entre_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ y $Cong_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}$) es un modelo de la axiomática de Hilbert sí y solo sí hay una función uno a uno ϕ de $\mathcal{A}$ en $\mathbb{R}^3$ (el conjunto de las triplas ordenadas de números reales) tales que si definimos $d_{\phi}(x, y)$ para x e y en $\mathcal{A}$ como

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(\phi_i(x)-\phi_i(y)\right)^2}$$

(donde $\phi_i(x)$ es la i-ésima componente de la tripla $\phi(x)$) entonces

a) $\forall x, y, z[y\ Entre_{\mathcal{A}}\ xz\ \leftrightarrow d_\phi(x,y)+d_\phi(y,z)=d_\phi(x,z)]$
b) $\forall x, y, z, w[xy\ Cong_{\mathcal{A}}\ zw\ \leftrightarrow d_\phi(x,y)=d_\phi(z,w)]$

Teorema de unicidad: Dado un modelo de un sistema axiomático y cualesquiera dos funciones ϕ y ϕ' cuyos dominios es el dominio del modelo: si ϕ satisface las condiciones del teorema de representación, entonces ϕ' satisface estas condiciones sí y solo sí esta posee la forma $T\circ\phi$; donde T es una transformación euclidiana de $\mathbb{R}^3$, es decir, una transformación que puede ser obtenida por alguna combinación de cambio de origen, reflexión, rotación de los ejes, y multiplicación de todas las coordenadas por una constante positiva (y donde $\circ$ indica la composición de funciones)[46].

A partir de estos teoremas y de las relaciones que se establecen en la estructura del teorema de representación, Field propone la nominalización de la teoría de la gravedad de Newton. La clave de este proyecto radica en el cambio de las nociones, comúnmente usadas en la teoría general de la gravedad, de *distancia* y *localización* por los predicados comparativos de la teoría del espacio de Hilbert que hemos establecido en la sección anterior como *entre* y *congruente*.

Consecuentemente, al reemplazar estas nociones de la teoría física por unas nociones que tratan exclusivamente del espacio y las relaciones que cumplen los puntos de este, Field logra establecer una teoría de la gravitación que abandona la cuantificación sobre la estructura de los números reales acogiendo, por su parte, la *aritmética de los segmentos* que determinó Hilbert en su axiomatización de la Geometría euclidiana.

[46] A este tipo de transformaciones las conocemos generalmente como transformaciones generales de Galileo o transformaciones galileanas.

Ahora bien, es necesario extender los dos teoremas antes vistos para las dimensiones espacio-tiempo. Es conllevará, por supuesto a una formulación de axiomas para tales dimensiones que sirva en el planteamiento nominalizado de la teoría de la gravedad de Newton. En este punto Field aduce al sistema de axiomas formulados por Szczerba y Tarski[47] en los cuales se puede encontrar una analogía para el teorema de representación considerando cuatro dimensiones. Tal teorema se formula como el descrito anteriormente con un cambio en la siguiente expresión:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{4}\left(\phi_i(x)-\phi_i(y)\right)^2}$$

Teniendo en cuenta la expresión anterior es preciso agregar dos premisas que permitan establecer una relación binaria de simultaneidad y una relación cuaternaria de congruencia espacial de forma que se pueda reformular el teorema de representación de Hilbert por completo considerando las dimensiones espacio-tiempo. Estas premisas serán el reemplazo del literal b) del teorema de representación antes expuesto y los podemos formular como sigue:

- $\forall x, y\ [x\ Simul\ y\ \leftrightarrow \phi_4(x) = \phi_4(y)]$
- $\forall x, y, z, w[xy\ S - Cong\ zw\ \leftrightarrow \phi_4(x) = \phi_4(y)\ \wedge \phi_4(z) = \phi_4(w)\ \wedge$ $d_\phi(x, y) = d_\phi(z, w)]$

El teorema de unicidad extendido para las cuatro dimensiones será el mismo que expusimos con anterioridad con la consideración de reemplazar las transformaciones galileanas por un tipo de transformaciones más generales denominadas transformaciones afines.

Luego de esto, Field considera el planteamiento de los campos escalares que se deben involucrar en la forma extendida del teorema de representación. Los escalares que incluye en el forma amplia del teorema de cuestión son la función de *densidad de masa* y *potencial*

[47] Los cuales se encuentran enteramente formulados bajo el predicado comparativo *entre* el cual se considera desde este sistema como una noción primitiva.

gravitacional. Con estas adiciones el teorema de representación extendido que permite determinar las contrapartes abstractas de la teoría de la gravedad, es:

Teorema de representación extendido de Field[48]: Para cualquier modelo de una teoría N con espacio-tiempo S que utiliza predicados comparativos pero no funtores numéricos, hay:

- Una función uno a uno espacio-temporal $\Phi: S \rightarrow \mathbb{R}^4$ que se aplica a las transformaciones galileanas generalizadas.
- Una función de densidad de masa $\rho: S \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que se aplica a transformaciones multiplicativas positivas, y
- Una función de potencial gravitacional $\psi: S \rightarrow \mathbb{R}$ que se aplica a transformaciones lineales positivas.

Habiendo logrado ampliar la versión del teorema de representación de forma que la teoría de la gravedad de Newton se refiera exclusivamente a puntos en el espacio y que cualquier teorema o suceso sea demostrable o verificable con las contrapartes abstractas que se pueden obtener vía este teorema, Field explica los diversos procedimientos que se pueden efectuar con la teoría, como por ejemplo: comparación de productos y razones, continuidad, derivadas de primer orden, derivadas de segundo orden, operador laplaciano, gradientes, diferenciación de campos vectoriales y leyes del movimiento.

Los detalles de lo anterior son de tipo técnico y no los exponemos en el presente trabajo, por dos razones principalmente: la primera, porque el detallar cada uno de los aspectos lleva a una reflexión amplia sobre el tratamiento que da Field a cada uno de estos objetos y, segundo, porque la materia de estudio del presente documento no es precisamente dichos detalles técnicos pues estos, por si solos, constituyen una monografía completa que los pormenorice. Esperamos que lo expuesto anteriormente dé, al menos de forma rápida, una noción al lector de la posibilidad de una formulación de las teorías físicas sin la referencia a estructuras numéricas o entidades matemáticas, lo cual nos lleva a pensar que en un futuro no muy lejano

[48] Esta formulación se extrae de Colyvan (2001, p. 74).

dejemos de considerar indispensables a la Matemática en cuanto a la producción de conocimiento científico se refiere.

CONCLUSIONES

En este punto mencionaremos algunas de las conclusiones a las que podemos llegar luego del estudio del AIM que presentamos en los cinco capítulos anteriores. La primera de ellas es retomar la idea de la interpretación desde los marcos del realismo platónico. Es evidente que en el estudio del sustento filosófico de esta tesis se involucran interpretaciones de las nociones de *existencia*, *realidad* y *verdad* que no son compatibles con las interpretaciones de estas mismas nociones desde la tendencia realista-platonista. El hecho de una explicar este argumento desde una tendencia tan opuesta a sus orígenes obliga a reflexionar sobre un nuevo análisis que involucre aspectos que se encuentren más relacionados con las concepciones e ideas naturalistas, holistas y realistas (estas últimas desde la mirada de Putnam que, claramente, no es igual al realismo platónico).

Otro de los aspectos importantes que podemos concluir se encuentra relacionado con la sorpresa que genera el conocer una propuesta que desafía una creencia general desde tiempos antiguos, sobre la indispensabilidad de las Matemáticas en el quehacer diario de la producción de conocimiento científico. Consideramos que esta idea es el germen que produce nuevas formas de pensamiento en la creación matemática y científica que pueden llegar a ser muy fructíferas en el campo de la Filosofía de la ciencia.

Ahora bien, consideramos importante comentar algunos aspectos relacionados con la influencia de la Filosofía de las Matemáticas en la formación de docentes de las matemáticas. Cuando ingresamos a una institución educativa de nivel superior para formarnos como docentes de matemáticas tenemos algunas creencias y concepciones sobre nuestro quehacer docente y particularmente sobre las Matemáticas. Algunas de esas creencias se encuentran firmemente ligadas con lo que suponemos significa *la verdad de la Matemática* y *la existencia de los objetos matemáticos,* casi siempre desde la visión usual, es decir, desde la visión platonista.

Teniendo en cuenta esas creencias concebimos a su vez la enseñanza de la Matemática (limitándonos en este punto a la enseñanza en la escuela) como una presentación de un conjunto de verdades que si bien funcionan en contextos de las realidades de cada uno de los estudiantes, la certeza sobre las proposiciones de esta ciencia no dependen de esos contextos particulares en los cuales son útiles. Considero que yo pertenecía a este grupo de formadores.

Debido a este trabajo casual[49], se han transformado mis pensamientos acerca de lo que debería concebir como Matemática. Desde este trabajo he desmentido mis pensamientos y creencias sobre la verdad absoluta de la Matemática. No porque crea ahora que su verdad es relativa a un contexto particular sino más bien porque ahora soy consciente de que no me encuentro desde mi conocimiento teórico en justificar ese discurso.

Además, tampoco tengo argumentos sustentados desde la teoría de la filosofía de la ciencia para afirmar que la Matemática es o no indispensable en las teorías físicas pues, como se observó a lo largo del trabajo, existe una línea de trabajo (muy llamativa por estos tiempos) demostrando que la Matemática es potencialmente dispensable en la formulación de las teorías físicas más conocidas.

Sin embargo no todas mis reflexiones son negaciones de cosas que creía. Si bien no puedo argumentar ni la verdad, ni la indispensabilidad de la Matemática, hay un aspecto del cual, no solo estoy segura, sino que además cada día me convence más: la Matemática es útil. Y para reafirmar solo basta con detallar el sinnúmero de ejemplos en la historia de la construcción del conocimiento científico a través de la historia.

Todo esto tiene como consecuencia un cambio, igualmente, en mi concepción de lo que es y debe ser la enseñanza de la Matemática en la escuela. Debido a que la única convicción que tengo hasta el momento y en lo que me encuentro ampliamente justificada sobre la Matemática, es su utilidad, debería concentrar mis esfuerzos en mostrar esta faceta a mis estudiantes y no otra. No considero correcto enseñar un papel de la Matemática del cual ni

[49] Porque hay que agregar que no se constituye en una base fundamental de mi formación, al menos en cuanto al plan de estudios que propone la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional se trata.

siquiera ya me encuentro convencida. Es un conflicto ético que se me ha revelado a partir del estudio del AIM.

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, pienso que se hace necesario involucrar el estudio de la Filosofía de la Matemática en la formación de profesores de Matemáticas, y en particular en el plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, de forma que se generen reflexiones en las aulas sobre la producción e interpretación del conocimiento matemático y para que de esta forma cada uno de los estudiantes pueda tener una idea propia con más elementos teóricos acerca de la enseñanza de esta materia en la Escuela.

BIBLIOGRAFÍA

Alemán, A. (1999). El argumento de indispensabilidad en Matemáticas. *Teorema, 18*(2), 49-61.

Asse, J. (Enero - Junio de 2011). Naturalismo, ficción y objetos matemáticos. *Signos Filosóficos, 13*(25), 47 - 71.

Balaguer, M. (1998). *Platonism and Anti-pltonism in Mathematics.* New York: Oxford University Press.

Baum, R. (1973). *Philosophy and Mathematics.* San Francisco: Freeman, Cooper & Company.

Borgoni, C. (2008). Interpretando la paradoja de Moore: la irracionalidad de una oración mooreana. *THEORIA, 23*(62), 145-161.

Casabán, E. (2003). Sobre la naturalización de la lógica. *Revista de filosofía, 28*(1), 59-75.

Cassini, A. (2003). Confirmación hipotetico-deductiva y confirmación bayesiana. *Análisis filosófico, 23*(1), 41-84.

Colyvan, M. (2001). *The Indispensability of Mathematics.* New York: Oxford University Press.

Creath, R. (Marzo de 2014). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Recuperado el 25 de Marzo de 2015, de http://plato.stanford.edu/entries/logical-empiricism/

De Sagarra, J. (octubre de 2011). *La ontología de Quine y sus raíces en la filosofía de Carnap.* Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Diéguez, A. (1998). *Realismo científico: Una introducción al debate actual en filosofía de la ciencia.* Málaga: Universidad de Málaga.

Echeverría, J. (1994). *Introducción a la metodología de la ciencia: la filosofía de la ciencia en el siglo XX.* Madrid: Barcanova.

Fayos, R. (2001). *Verdad y realismo en la obra de Karl Raimund Popper.* Roma: Pontificio Ateneno Regina Apostolorum.

Feussier, H. (2005). Naturalismo y filosofía: las visiones científicas de la realidad. *Realidad*(105), 435-459.

Field, H. (1980). *Science Without Numbers.* New Jersey: Princenton University Press.

Giovannini, E. (2015). Aritmetizando la geometría desde dentro: el cálculo de segmentos de David Hilbert. *Scientle Studia, 13*(1), 11-48.

Hempel, C. (1968). Sobre la naturaleza de la verdad matemática. En J. Newman, *Sigma el mundo de las matemáticas* (Vol. 5, pág. 2581). Barcelona: Grijalbo.

Hempel, C. (1980). *Filosofía Natural de la Ciencia.* Madrid: Alianza Editorial.

Klimovsky, G. (1994). *Las desventuras del conocimiento científico: Una introducción a la epistemología.* Buenos Aires: A-Z Editora.

Körner, S. (1968). *The Philosophy of Mathematics: An Introductory Essay.* Londres: Hutchinson.

Maddy, P. (1980). Perception and Mathematical Intuition. *Philosophical review, 89*(2), 163-196.

Maddy, P. (1990). *Realism in Mathematics.* New York: Oxford University Press.

Marín, J. (2008). Planteamiento epistemológico de la Pedagogía vista desde el realismo científico y filosófico. *Magistro, 2*(3), 25-37.

Martínez, M. (2008). *Realismo científico: lecturas para un seminario.* (J. Vargas-Mendoza, Ed.) Oaxaca de Juárez: Asociación Oaxaqueña de Psicología A.C.

Meléndez, R. (2014). Descubrimiento o invención: dos analogías para comprender el quehacer del matemático. *Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia, 14*, 123-146.

Miller, F. (2012). Aristotle's Political Theory. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Monterroza, Á. (2011). Relativismo evolutivo, una alternativa epistemológica. *Trilogía*(4), 79-93.

Palacio, R. (Abril de 1995). Criterio de compromiso ontológico, ontología y relatividad ontológica. *Ideas y valores*, 89-114.

Pérez, M., & García-Carpintero, M. (2005). *Filosofía del lenguaje.* Barcelona: Edicions de la Universitat de Barcelona.

Polanco, M. (1997). *Realismo y pragmatismo: biografía intelectual de Hiary Putnam.* Pamplona, España: Universidad de Navarra.

Polanco, V. (2003). *Historia de la Filosofía.* Madrid: Biblioteca Nueva.

Reyes, P. (2011). Un caso de convergencia entre estructuralismo matemático y realismo científico. *Revista Tales*, 219-228.

Russell, M. (s.f.). *Internet Encyclopedia of Philosophy*. Recuperado el 1 de Marzo de 2015, de http://www.iep.utm.edu/indimath/#H4

Van Fraassen, B. (1979). *La estructura de las teorías científicas.* Madrd: Ed. Nacional.

van Fraassen, B. (1980). *The Scientific Image.* Londres: Oxford University Press.

Videla, C. (2006). El décimo problema de Hilbert, curvas elípticas y la conjetura de Mazur. *Lecturas Matemáticas*, 185-209.

Zuluaga, M. (2008). The relationship between Holism and Empiric Theories. *Práxis filosófica*(26), 51-62.