

Beiträge zur Analyse und Bewertung von 3D-Spannungssingularitäten mittels einer angereicherten Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode

Vom Fachbereich Maschinenbau
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte

Dissertation

von

Sascha Hell, M.Sc.

aus Rüsselsheim

Referent:	Prof. Dr.-Ing. habil. Wilfried Becker
Korreferent:	Prof. Dr.-Ing. habil. Christian Mittelstedt
Tag der Einreichung:	18. Juni 2018
Tag der mündlichen Prüfung:	16. Oktober 2018

Darmstadt 2018
D17

Hell, Sascha

Beiträge zur Analyse und Bewertung von 3D-Spannungssingularitäten mittels einer angereicherten Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode

Darmstadt, Technische Universität Darmstadt


Jahr der Veröffentlichung der Dissertation auf TUpriints: 2018

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-81285

Tag der mündlichen Prüfung: 16.10.2018

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

 Creative Commons Lizenz (CC BY-NC-ND 4.0 International), 2018.

Freies Vervielfältigen und Weiterverbreiten – Namensnennung –

Nicht-kommerziell – Keine Bearbeitung

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Strukturmechanik der Technischen Universität Darmstadt entstanden. Dort bekam ich die Gelegenheit mich tiefergehend mit der Analyse und Bewertung von Struktursituationen, die 3D-Spannungssingularitäten enthalten, zu beschäftigen. Im Zuge dessen habe ich die Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode um eine Anreicherung der Ansatzfunktionen erweitert und darauf aufbauend eine asymptotische Methode zur effizienten Berechnung von Energiefreisetzungsraten für von Ecken ausgehende Risse entwickelt. Diese Arbeit wurde finanziell durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Projektes „Analyse von Riss-Interaktionen in Laminaten mittels der Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode“ (BE 1090/35-1 und -2) gefördert. An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die mich unterstützt und zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein erster Dank für die Betreuung und Unterstützung sowie die mir gewährten Freiheiten bei der wissenschaftlichen Arbeit gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Wilfried Becker, dessen Tür bei Fragen immer für mich offen stand.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Christian Mittelstedt vom Lehrstuhl für Konstruktiven Leichtbau und Bauweisen, ebenfalls an der TU Darmstadt, möchte ich für das entgegengebrachte Interesse an meiner Arbeit und die bereitwillige Übernahme des Korreferats danken.

Meinen Kollegen, am Fachgebiet Strukturmechanik sowie in den benachbarten Arbeitsgruppen, danke ich für die vielfältigen Beiträge zum Gelingen dieser Arbeit, für die konstruktiven, immer erfrischenden Gespräche und Diskussionen und für die sehr angenehme Arbeitsatmosphäre.

Mein herzlicher Dank gilt weiter meinen Freunden und meiner Familie, darunter besonders meinen Eltern und Großeltern für die vielfältige und stete Unterstützung über die vielen Jahre des Lernens hinweg. Schließlich gilt mein besonderer und großer Dank meiner Ehefrau Denise sowie meinen beiden Söhnen Noah und Jakob für ihre Unterstützung, ihre ewige Geduld und ihr Verständnis für die vielen aufgebrachten Stunden für das Gelingen dieser Arbeit.

Kurzfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wird demonstriert, wie mit Hilfe der Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode sowohl die Analyse als auch die Bewertung von 3D-Spannungssingularitäten effizient durchgeführt werden kann.

Spannungssingularitäten sind Orte mit theoretisch unendlich großer Materialbeanspruchung. In der Realität können natürlich keine unendlichen Beanspruchungswerte vorliegen, da sie vorher durch lokale inelastische Verformungen, wie Materialfließen oder die Mikrorissbildung, abgebaut werden. Dennoch stehen Spannungssingularitäten als Idealisierung häufig im Fokus einer Versagensbewertung hochbelasteter Strukturbauteile.

Diese Arbeit widmet sich einer Untergruppe von Spannungssingularitäten: Punktsingularitäten (oder auch 3D-Spannungssingularitäten), die ein charakteristisches *dreidimensionales* Abklingverhalten aufweisen und gleichzeitig Liniensingularitäten enthalten. Liniensingularitäten existieren beispielsweise entlang von Rissfronten, Kerbfronten oder Kanten von Materialfüllungen und treten entsprechend häufig in technischen Anwendungen auf. Im Gegensatz zu Punktsingularitäten weisen sie ein charakteristisches *zweidimensionales* Abklingverhalten auf und werden daher auch als 2D-Spannungssingularitäten bezeichnet. Im Allgemeinen sind überall dort, wo Liniensingularitäten eine Unstetigkeit erfahren, also beispielsweise an einem Bauteilrand enden, ihre Richtung ändern oder auf eine andere Liniensingularität treffen, 3D-Spannungssingularitäten zu erwarten.

Die Analyse von Spannungssingularitäten stellt sich besonders anspruchsvoll dar, weil hier sehr hohe Spannungsgradienten abzubilden sind. Gerade in 3D-Problemstellungen führen meist nur noch numerische Verfahren wie die weit verbreitete Finite-Elemente-Methode (FEM) zu einer Lösung. Hierbei ergibt sich die Problematik, dass die in der FEM verwendeten, einfachen Ansatzpolynome diese hohen Gradienten nur unzureichend annähern. Es resultiert eine verminderte Konvergenzrate und Genauigkeit der numerischen Lösung. Dadurch wird eine sehr feine Diskretisierung mit sehr vielen Freiheitsgraden notwendig und der Berechnungsaufwand fällt entsprechend groß aus.

In der vorliegenden Arbeit kommt die semi-analytische *Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode* (engl.: Scaled Boundary Finite Element Method, SBFEM) zur Analyse von 3D-Spannungssingularitäten zum Einsatz. Sie beinhaltet eine Diskretisierung allein des Gebietsrandes und bietet eine analytische Betrachtung in der radialen Richtung zur Punktsingularität hin. Die hohen Gradienten in dieser (radialen) Richtung können so analytisch abgebildet werden. Um den ebenfalls auftretenden Liniensingularitäten angemessene Rechnung zu tragen, wird eine angereicherte Formulierung der SBFEM (engl.: enriched SBFEM / enrSBFEM) vorgeschlagen und in MATLAB[®] implementiert: Der klassische Separationsansatz für die Verschiebungen wird hierbei um 2D-Nahfeldlösungen der Liniensingularitäten ergänzt, sodass auch diese adäquat abgebildet werden. Dadurch werden die gewünschten Konvergenzraten sowie eine hohe Genauigkeit der Lösung erlangt und der Berechnungsaufwand kann wesentlich reduziert werden. Die Entwicklung und Implementierung einer Spannungsglättung, die der neuen, angereicherten Formulierung der SBFEM angepasst ist, macht die Methode schließlich zu einem äußerst genauen und effizienten Werkzeug für die Spannungsanalyse

von Struktursituationen mit 3D-Spannungssingularitäten. Dies wird anhand einiger Beispiele gezeigt.

Zu einer Einordnung, wie kritisch eine Spannungssingularität zu bewerten ist, können zunächst ihre zugehörigen Singularitätsexponenten herangezogen werden. Diese bestimmen das charakteristische Abklingverhalten und hängen nur von Geometrie und Materialeigenschaften ab. Die Intensität der Singularität, und damit die eigentliche Höhe der Spannungen in der Umgebung der Spannungssingularität, wird durch die äußere Belastung festgelegt und stellt ebenfalls einen Indikator für die Kritikalität einer Spannungssingularität dar. Im Rahmen dieser Arbeit sind dazu ausführliche Untersuchungen für 3D-Spannungssingularitäten in erstgeschädigten Faserverbundlaminate verschiedener Materialeigenschaften und Lagenaufbauten durchgeführt. Erstgeschädigte Faserverbundlaminat weisen typischerweise Zwischenfaserrisse und/oder Delaminationen auf, die auf die anisotropen Steifigkeits- und Festigkeitseigenschaften der Laminatlagen einerseits sowie den geschichteten Aufbau als Laminat andererseits zurückzuführen sind. Im Speziellen werden Struktursituationen betrachtet, in denen solche rissähnlichen Defekte aufeinander oder auf einen freien Rand treffen. Die Analysen ergeben, dass solche Struktursituationen zu 3D-Spannungssingularitäten führen und häufig als kritischer zu beurteilen sind als die einzelnen Defekte allein.

Die Bewertung spröder Strukturen mit Spannungssingularitäten mittels eines Versagenskriteriums, das unmittelbar auf der Verwendung von Spannungssingularitätsexponenten und der Intensität der Singularitäten basiert, ist zwar möglich, häufig muss ein gefundenes Kriterium dann aber für neue Lastfälle und Geometriesituationen angepasst werden. Aus diesem Grund wird ein allgemeineres Kriterium zur Versagensbewertung in Betracht gezogen, das nur die materialspezifischen Versagensparameter Festigkeit und Bruchzähigkeit erfordert: ein gekoppeltes Spannungs- und Energiekriterium im Rahmen der Bruchmechanik finiter Risse. Im Gegensatz zu klassischen, rein spannungsbasierten Festigkeitskriterien ist es in der Lage, die bei Spannungssingularitäten auftretende Problematik theoretisch unendlich großer Spannungen durch eine nicht-lokale Auswertung zu umgehen. Gleichzeitig kann es auch auf andere als die klassische Spannungssingularität an einer Rissfront angewendet werden. Um das Spannungs-Teilkriterium auswerten zu können, ist stets nur *eine* Spannungsanalyse notwendig. Zur Auswertung des Energie-Teilkriteriums sind inkrementelle Energiefreisetzungsraten (bei Rissentstehung pro neu entstandener Rissfläche freigesetzte Energie) für *alle* kinematisch zulässigen Risskonfigurationen zu bestimmen.

Für die Berechnung der inkrementellen Energiefreisetzungsraten in Abhängigkeit der Rissgröße wird eine sehr effiziente, asymptotische Methode präsentiert. Sie basiert auf der SBFEM und liefert für die gesuchten Energiefreisetzungsraten eine semi-analytische, matrixbasierte Reihendarstellung, die die Rissgröße als expliziten Eingangsparameter enthält. Die Anwendbarkeit und Effektivität dieser Methodik, der enrSBFEM mit Spannungsglättung zur Auswertung des Spannungs-Teilkriteriums einerseits und der aus der SBFEM abgeleiteten asymptotischen Methode zur Bestimmung von Energiefreisetzungsraten für die Auswertung des Energie-Teilkriteriums andererseits, wird schließlich anhand des Beispiels zweier in einem Faserverbundlaminat aufeinander treffender Zwischenfaserrisse unter biaxialer Last demonstriert.

Abstract

In this work, it is shown how the Scaled Boundary Finite Element Method (SBFEM) can be employed for the efficient analysis and assessment of 3D stress singularities, and the required tools are provided.

Stress singularities involve theoretically infinite material stress. But, of course, no material can sustain infinite stresses so that in real-life applications (locally confined) inelastic deformations like yielding of the material and nucleation of micro cracks occur. Nevertheless, stress singularities as an idealization often are in the spotlight of failure assessment of highly stressed structures.

This work treats a subcategory of stress singularities: point singularities (also called 3D stress singularities), which exhibit a characteristic three-dimensional decay behavior and at the same time also exhibit line singularities. Line singularities e.g. occur along crack fronts, notch fronts and edges of bonded materials and accordingly are very common in engineering applications. In contrast to point singularities, line singularities show a characteristic two-dimensional decay behavior. Hence, they are also called 2D stress singularities. Generally, 3D stress singularities are to be expected wherever line singularities exhibit a discontinuity, like e.g. ending at a free edge of a corresponding component, abruptly changing their orientation or meeting another line singularity.

The analysis of stress singularities is particularly demanding, because very high stress gradients have to be resolved. Especially 3D problems can often only be solved using numerical methods like the commonly employed and established Finite Element Method (FEM). But the standard shape functions which are employed in the FEM are not capable of adequately approximating the high gradients. This results in reduced convergence rates and a reduced accuracy of the numerical solution, so that a very fine discretization, accompanied by a large computational effort, becomes necessary.

In this work, the semi-analytical SBFEM is employed for the analysis of 3D stress singularities. In this method, only the boundary of the considered domain needs to be discretized, while the solution is considered to be analytical in a radial direction towards the point singularity. Thus, the high stress gradients in the radial direction can be appropriately reproduced by analytical functions. To also properly account for the likewise present line singularities, an enriched formulation of the SBFEM (enrSBFEM) is proposed and implemented in MATLAB[®]. The classical separation of variables approach for the displacements is supplemented and extended by 2D near-field solutions of the line singularities, which are determined either by the purely analytical method of complex potentials or the semi-analytical SBFEM for 2D problems. As a result the desired, uncorrupted convergence rates as well as a high accuracy are retrieved and the required computational effort is strongly reduced. Additionally, a superconvergent patch recovery for the recovery of smoothed and more accurate stresses, that is adequately adapted to the enrSBFEM, is developed and implemented. It completes the proposed approach to be an outstandingly efficient tool for the stress analysis of structures containing 3D stress singularities.

For a first estimate of the criticality of a stress singularity, the associated stress singularity exponents can be used. These determine the characteristic decay behavior and only depend on the local geometry and the material involved. The intensity of the singularity is determined by the external loads and presents a measure for the actual magnitude of stresses in the immediate vicinity of the singularity. Accordingly, it can also serve as a measure for how critical a stress singularity is. This work contains a detailed study of 3D stress singularities in fiber-reinforced composite laminates (with respect to singularity exponents and intensity) considering different material properties and laminate lay-ups. Such composite laminates tend to develop intra- and inter-laminar cracks due to their laminar composition on the one hand and the highly anisotropic stiffness and strength properties of the individual laminate plies on the other. In particular, structural situations of such crack-like defects meeting each other or a free edge are considered. They are found to lead to 3D stress singularities that often are to be classified as more critical than the single 2D defects.

The assessment of brittle structures which include stress singularities using a failure criterion that is based on singularity exponents and intensities of the singularities is not very efficient and effective. A corresponding failure criterion would usually need to be adjusted for different load cases and geometries. As a consequence, a more general, physically-consistent criterion which is only based on the material properties strength and fracture toughness is employed: a coupled stress and energy criterion in the framework of Finite Fracture Mechanics. In contrast to classical, purely stress-based failure criteria, it avoids the difficulty of assessing infinite stresses. At the same time and contrary to purely energy-based criteria, it is not restricted to be only applied to the classical crack singularity. For the evaluation of the stress criterion, generally, only *one* stress analysis calculation is required. However, for the evaluation of the energy criterion, incremental energy release rates (released energy per newly created crack surface) need to be calculated for *every* kinematically admissible crack configuration (different crack orientation, origin, shape).

A very efficient asymptotic method to calculate incremental energy release rates directly as a function of crack size is presented. It is based on the SBFEM and yields a semi-analytical, matrix-based exponential series representation. Finally, the applicability and effectiveness of the overall methodology, using the enrSBFEM with stress smoothing for the evaluation of the stress criterion and the asymptotic method to efficiently determine energy release rates for the energy criterion evaluation, is demonstrated. To this end, the example of two intra-laminar cracks meeting in the interface between two laminate plies is considered for the case of a biaxial tension load in the laminate plane.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	v
Abstract	vii
Nomenklatur	xi
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Aufbau und Ziel der Arbeit	5
2 Theoretische Grundlagen	9
2.1 Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie	9
2.1.1 Grundgleichungen	9
2.1.2 Energiebetrachtungen	17
2.2 Einführung in die Festigkeits- und Bruchmechanik	21
2.2.1 Festigkeitskriterien	21
2.2.2 Asymptotische Nahfelder und Spannungssingularitäten	26
2.2.3 Lineare Bruchmechanik für spröde Werkstoffe	29
2.2.4 Bruchmechanik finiter Risse und gekoppeltes Spannungs- & Energiekriterium	37
2.3 Finite-Elemente-Methoden (FEM)	42
2.3.1 Klassische, verschiebungsbasierte FE-Formulierung für 3D-Randwertprobleme der linearen Elastizitätstheorie	43
2.3.2 Spannungsrückrechnung und -glättung	48
2.3.3 Fehlernormen und ihre Konvergenz in der FEM	51
2.3.4 Anreicherung der Finite-Elemente-Ansätze	55
3 Stand der Forschung	59
3.1 Analyse von 3D-Randwertproblemen mit Spannungssingularitäten	59
3.1.1 Problemstellungen mit einfachen Liniensingularitäten	60
3.1.2 Einschub: Numerische Methoden in Gegenwart singulärer Felder	61
3.1.3 Bestimmung dreidimensionaler asymptotischer Nahfelder – Deformationsmoden und Spannungssingularitätsexponenten	63
3.1.4 Bestimmung dreidimensionaler asymptotischer Nahfelder – generalisierte Spannungintensitätsfaktoren (GSIF)	73
3.2 Bewertung spröder Struktursituationen mit 3D-Spannungssingularitäten	75
4 Die Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode zur Analyse von 3D-Defektinteraktionen	85
4.1 Die Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode (SBFEM)	85
4.1.1 Formulierung im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie	87
4.1.2 Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems	93
4.1.3 Berücksichtigung von Randbedingungen am diskretisierten Gebietsrand	98

4.1.4	Berücksichtigung von Eigendehnungen	102
4.2	Analyse von Defektinteraktionen in faserverstärkten Verbund-Laminaten . .	104
4.2.1	Asymptotische Nahfelder der 2D-Struktursituationen	106
4.2.2	Asymptotische Nahfelder der 3D-Struktursituationen	109
4.2.3	Randwertprobleme und daraus resultierende modale Wichtungsfaktoren bzw. generalisierte Spannungintensitätsfaktoren	126
5	Erweiterung der SBFEM um eine Anreicherung mit 2D-Nahfeldlösungen	143
5.1	Die angereicherte Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode (enrSBFEM) . .	147
5.1.1	Skaliertes Rand-Koordinatensystem	147
5.1.2	Angereicherter Separationsansatz	149
5.1.3	Spannungen und Verzerrungen	151
5.1.4	Implementierung der enrSBFEM	152
5.1.5	Interaktion von 2D- und 3D-Singularitäten	155
5.1.6	Bestimmung von Anreicherungsfunktionen	157
5.2	Konvergenzanalyse für einige kanonische Beispiele	159
5.2.1	Riss in homogen-isotropem Kontinuum	162
5.2.2	Zwei aufeinander treffende Risse im homogen-isotropen Kontinuum .	174
5.2.3	Zwischenfaserriss trifft auf Grenzfläche im Kreuzverbund	177
5.2.4	Zwei aufeinander treffende Zwischenfaserrisse im Kreuzverbund . . .	179
5.3	Spannungsglättung für die enrSBFEM	181
6	Asymptotische Lösung von Zwei-Rand-Problemen im Rahmen der SBFEM	189
6.1	Einführendes Beispiel zur Vorgehensweise: Hohlkugel unter Außendruck . . .	191
6.1.1	Analytische Lösung	193
6.1.2	Asymptotische / Iterative Lösung	194
6.2	Das skalierbare Zwei-Rand-Problem in der SBFEM und seine Lösung mittels asymptotischer Reihenentwicklungen	198
6.2.1	Modale Formulierung	198
6.2.2	Verschiebungsbasierte Formulierung für Problemstellungen mit Ge- bietszerlegung und gemischten Randbedingungen	206
6.3	Extraktion von Energiefreisetzungsraten	213
7	Bewertung von 3D-Spannungssingularitäten mittels eines gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums	215
7.1	Doppelrissituation in einem Faserverbundlaminat	215
7.1.1	Spannungen und Materialanstrengung der Deformationsmoden mit 3D-Spannungssingularitäten	216
7.1.2	Versagensbewertung nach gekoppeltem Spannungs- und Energiekriteri- um für Randwertprobleme biaxialer Zugbelastung	220
7.1.3	Fazit	232
8	Zusammenfassung und Ausblick	235
8.1	Zusammenfassung	235
8.2	Ausblick	237
A	Materialdaten	239
	Literaturverzeichnis	241

Nomenklatur

Abkürzungen und Eigennamen

bzw.	beziehungsweise
d. h.	das heißt
engl.	englisch
etc.	et cetera
i. A.	im Allgemeinen
vgl.	vergleiche
z. B.	zum Beispiel
ABAQUS [®]	kommerzielles Finite-Elemente-Programm
MATHEMATICA [®]	Computeralgebrasystem
MATLAB [®]	Computeralgebrasystem
2D, 3D	zweidimensional/dreidimensional
CFK	kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff
co1, co2	Deformationsmoden der Doppelrißkonfiguration
cs1, cs2	
ct1, ct2	
DEL	Delamination, Delaminationsriß, interlaminarer Riß
DGL(S)	Differentialgleichung(ssystem)
DOF	Freiheitsgrade, englisch: degrees of freedom
enrSBFEM	angereicherte Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode, englisch: enriched Scaled Boundary-Finite-Element-Method
ESZ	ebener Spannungszustand
EVZ	ebener Verzerrungszustand
FEM	Finite-Elemente-Methode
FF	Faserbruch, englisch: fiber failure
FKV	Faser-Kunststoff-Verbund
FMC	Versagensmoduskonzept nach Cuntze englisch: failure mode concept
GEVZ	generalisierter ebener Verzerrungszustand
GFK	glasfaserverstärkter Kunststoff
(G)SIF	(generalisierter) Spannungsintensitätsfaktor, englisch: generalized stress intensity factor
IFF	Zwischenfaserbruch, englisch: inter fiber failure
IMC	Imaginary Crack Method
KOS	Koordinatensystem
LEBM	linear-elastische Bruchmechanik
LGS	lineares Gleichungssystem
(S)BFEM	(Skalierte-)Rand-Finite-Elemente-Methode, englisch: (Scaled) Boundary Finite Element Method
SPR	Superconvergent Patch Recovery (Spannungsglättung)

SRB	Spannungsrandbedingungen
TCD	Theorie kritischer Distanzen
URB	Verschiebungsrandbedingungen
ZFR	Zwischenfaserriss

Indizes und Schreibweisen

bdiag	Blockdiagonale einer Matrix
det	Determinante
Re	Realteil
Im	Imaginärteil
δ	Operator für virtuelle Größen
$\ \cdot\ $	Euklidische Vektornorm
$\ \cdot\ _{a(\Omega)}$	Energienorm auf Gebiet Ω
$\ \cdot\ _{H^m(\Omega)}$	Sobolev-Norm der Ordnung m auf Gebiet Ω
$\ \cdot\ _{L_2(\Omega)}$	L_2 -Norm auf Gebiet Ω
$(\cdot)_a, (\cdot)_i$	Wert am Außen-/Innenrand
$(\cdot)_e$	auf finites Element bezogene Größen
$(\cdot)_f$	Wert bei Versagen (engl.: failure)
$(\cdot)_p, (\cdot)_n$	zugehörige Anteile des positiven/negativen Eigenwertspektrums
$(\cdot)_T$	auf thermische Dehnungen zurückzuführende Größe
$(\cdot)_{\max}, (\cdot)_{\min}$	Maximal-/Minimalwert
$(\cdot)^{-1}$	Inverse
$(\cdot)^{2D}, (\cdot)^{3D}$	2D-/3D-Singularitäten zugehörige Größe
$(\cdot)_{\text{ext}}$	extrapolierter Wert aus Richardson-Extrapolation
$(\cdot)^{\text{st}}, (\cdot)^{\text{enr}}$	Anteile aus Standard-/Anreicherungsanteil
$(\cdot)^T$	Transponierte
$(\cdot)'$	Ableitung nach der Skalierungskordinate ξ
$[\cdot/\cdot]_s$	symmetrischer Lagenaufbau

Lateinische Formelzeichen

a	Risslänge
a^*, a^{**}	charakteristische Risslängen
A	Fläche, Rissfläche
b	Breite
b_{\perp}, b_{\parallel}	Kurvenparameter für FMC
B	Ableitungen der Matrix der Formfunktionen
c, c_u, c_{σ}	modale Wichtungsfaktoren, generalisierte Spannungsintensitätsfaktoren
c_{ijkl}	Komponenten des Elastizitätstensors
\hat{C}_{ij}	Komponenten der Steifigkeitsmatrix
C	Elastizitätstensor / Steifigkeitsmatrix
c, c^{2D}, c^{3D}	Vektorfunktionen der modalen Wichtungsfaktoren (der 2D-/3D-Deformationsmoden)
\hat{c}_p, \hat{c}_n	modifizierte modale Wichtungsfaktoren des positiven/negativen Eigenwertspektrums
$\hat{c}_p^{(i)}, \hat{c}_n^{(i)}$	modifizierte modale Wichtungsfaktoren i -ter Iteration
$\hat{c}_p^{(0)}, \hat{c}_n^{(0)}$	modifizierte modale Wichtungsfaktoren für $\epsilon = 0$
D	dissipierte Energie
e_{λ}	relativer Fehler der Abklingexponenten

$e_{u,a}, e_{u,L_2}$	relativer Verschiebungsfehler in Energie-/ L_2 -Norm
e_i, e_j	Einheitsvektoren
e^h	Hauptrichtungen
E	spezifische innere Energie
E	Elastizitätsmodul
\mathbf{E}_i	Systemmatrizen der SBFEM-Gleichung ($i = 0, 1, 2$)
\mathcal{E}	lokale Materialanstrengung, englisch: effort
\mathcal{E}_{del}	Grenzflächenanstrengung
\mathcal{E}_{res}	resultierende Materialanstrengung nach Cuntze
f_i	Volumenkräfte, Komponenten des Volumenkraftvektors
f_{red}	Abminderungsfaktor für Grenzflächenfestigkeiten in Laminat
\mathbf{f}	Volumenkraftvektor
F	Anreicherungsfunktionen
F_{xy}	Eckenkraft
\mathbf{F}	Matrix der Anreicherungsfunktionen
\mathcal{F}	spannungsbasierte Versagensfunktionen
G	Schubmodul
$\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}$	differentielle, inkrementelle Energiefreisetzungsrate
\mathcal{G}_c	Bruchzähigkeit, kritische Energiefreisetzungsrate
h	charakteristische Elementabmessung
I_1, I_2, I_3, I_4, I_5	Invarianten des Spannungstensors für transversale Isotropie
$\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3$	Invarianten des Spannungstensors
\mathbf{I}	Einheitsmatrix
\mathbf{J}	Jacobimatrix
\mathbf{J}_η	Jacobimatrix des skalierten Rand-KOS bei $\xi = 1$
$\mathbf{J}_{\Gamma\varphi}$	Jacobimatrix des Kegel-KOS bei $\xi = 1$
K_I, K_{II}, K_{III}	Spannungsintensitätsfaktoren der klassischen Rissmoden
K_{IV}, K_V, K_{VI}	Spannungsintensitätsfaktoren der höheren Rissmoden
$\mathbf{k}_p^*, \mathbf{k}_n^*$	Transfermatrizen
\mathbf{K}, \mathbf{K}_e	Gesamtsteifigkeitsmatrix/Elementsteifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_B^c, \mathbf{K}_B^u$	modale/Verschiebungs-Randsteifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}^{\text{enr}}, \mathbf{K}^{\text{st}}, \mathbf{K}^{\text{st/enr}}$	Anteil der Gesamtsteifigkeitsmatrix aus Anreicherung, klassischem Verschiebungsansatz und Kopplungen dieser beiden
$\mathbf{K}_a, \mathbf{K}_i$	Steifigkeitsmatrix des äußeren/inneren Gebiets Ω^a, Ω^i
$\mathbf{K}_{\text{ag}}, \mathbf{K}_{\text{ig}}$	Steifigkeitsmatrix des äußeren/inneren Randwertproblems
$\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_n$	Verschiebungs-Randsteifigkeitsmatrix ohne Innen-/Außenrand
$\mathcal{K}, \mathcal{K}_H$	Koeffizientenmatrix des SBFEM-DGLS (in Hamilton-Form)
\mathcal{L}	Differentialoperator
l	Länge des Balkens / des Laminats
l_s	Längenabmessung Superelement
m	Interaktionskoeffizient für FMC
m_λ, m_a, m_{L_2}	Konvergenzraten der Abklingexponenten/Energienorm/ L_2 -Norm
M_x, M_y, M_{xy}	Streckenbiege-/drillmomente in Laminat
n_{dim}	Raumdimension
n_e	Elementanzahl
$n_{k,e}$	Knotenanzahl in Element
n_t	Anzahl der Laminatlagen
n_s	Anzahl singulärer Punkte

\mathbf{n}	Schnittnormale
\mathbf{n}	Randnormalenvektor
N	Formfunktionen
N_x, N_y, N_{xy}	Streckennormalkräfte in Laminat
\mathbf{N}	Matrix der Form-/Ansatzfunktionen
\mathcal{N}	Menge aller Knoten
\mathcal{O}	Landau-Symbol
p	Polynomordnung
$p_{\perp\psi}^{c/t}, p_{\perp\perp}^{c/t}, p_{\perp\parallel}^{c/t}$	Neigungsmaße
$\mathbf{p}, \mathbf{p}_\Omega, \mathbf{p}_\Gamma$	Knotenlastvektoren
\mathbf{p}^{enr}	Anteil der Knotenlastvektoren aus Anreicherung
\mathbf{p}^{st}	Anteil der Knotenlastvektoren aus klassischem Verschiebungsansatz
\mathbf{P}	Polynomansatzvektor für SPR
P	Lastparameter
P_s^S	Punkt, wo Liniensingularität auf diskretisierten Gebietsrand trifft
\mathcal{P}	Menge der Knoten in angereichertem Gebiet
Q	spezifische Wärme
Q_x, Q_y	Streckenquerkräfte in Laminat
r	radiale Koordinate in polarem Kegel- oder Kugel-KOS
r_p	plastischer Radius
R	radiale Koordinate im Zylinderkoordinatensystem
R_t, R_c	Zug-/Druckfestigkeit
R_k	Kohäsionsfestigkeit
$R_{\parallel}^t, R_{\parallel}^c$	Zug-/Druckfestigkeit in Faserrichtung
R_{\perp}^t, R_{\perp}^c	Zug-/Druckfestigkeit quer zu Faserrichtung
$R_{\perp\parallel}$	Scherfestigkeit
$R_{\perp\psi}^A, R_{\perp\perp}^A$	Bruchwiderstände in der Wirkebene
S	Skalierungszentrum
S	Entropie pro Volumen
\mathbf{S}	Schurzerlegung einer Matrix
\mathcal{S}	Nachgiebigkeitstensor/-matrix
t	Dicke, Lagendicke
t_g	Laminatgesamtdicke
\mathbf{t}	Oberflächenkräfte / Spannungsvektor
T	Temperatur
\mathbf{T}	Transformationsmatrix
\mathbf{t}^*	Kräfte auf dem Rand / der Oberfläche eines Körpers
u, v, w	Verschiebungen in x, y, z -Richtung
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
$\mathbf{u}_I, \mathbf{u}_{II}, \mathbf{u}_{III},$ $\mathbf{u}_{IV}, \mathbf{u}_V, \mathbf{u}_{VI}$	Verschiebungsfunktionen der Rissmoden,
$\tilde{\mathbf{u}}$	Näherungslösung für Verschiebungen
$\tilde{\mathbf{u}}^{\text{enr}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{enr}}$	Anreicherung für Verschiebungsansatz und Knotenwerte
$\tilde{\mathbf{u}}^{\text{st}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{st}}$	klassischer Verschiebungsansatz und Knotenwerte
$\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}$	Knotenverschiebungen / Verschiebungsfunktionen in ξ
$\hat{\mathbf{u}}_j, \hat{\mathbf{q}}_j$	Deformations-/Lastmoden
$\hat{\mathbf{u}}_a, \hat{\mathbf{u}}_i$	Knotenverschiebungen in Skalierungsgebiet Ω^{sc} am Außen-/Innenrand
$\hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}}, \hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}}$	Knotenverschiebungen des äußeren/inneren Gebiets Ω^a, Ω^i

$\hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}}^*, \hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}}^*$	Verschiebungsmatrizen der verallgemeinerten Ersatzprobleme
U	spezifisches elastisches Potential
U_G	Gestaltänderungsenergiegedichte
V	Volumen
\mathbf{V}	orthogonale Transformationsmatrix der Schurzerlegung
$W, W^{(d)}$	spezifische (dissipative) Arbeit
W_a, W_i	Arbeit der äußeren / inneren Kräfte
\bar{W}_a, \bar{W}_i	Komplementärarbeit der äußeren / inneren Kräfte
\mathcal{W}	Energieinteraktionsmatrix
x, y, z	kartesische Koordinaten (kartesisches Koordinatensystem)
x_1, x_2, x_3	kartesische Koordinaten
\mathbf{x}	Ortsvektor
$\hat{\mathbf{x}}_{ek}$	Knotenkoordinaten eines Elements
$\hat{\mathbf{x}}_\eta$	Ortsvektoren eines (virtuellen) Randes
\mathbf{Y}	Transformationsmatrix für Blockdiagonalisierung

Griechische Formelzeichen

α	Winkel zwischen zwei Liniensingularitäten
α_T	thermischer Ausdehnungskoeffizient
β, β_1, β_2	Neigungswinkel eines Zwischenfaserrisses
$\boldsymbol{\alpha}_T$	Tensor/Matrix thermischer Ausdehnungskoeffizienten
γ	technische Gleitung
Γ	Gebietsrand
Γ_u, Γ_t	Gebietsrand mit Verschiebungs-/Spannungsrandbedingungen
Γ_c	potentielle Bruchfläche
Γ_a, Γ_i	Außen-/Innenrand
$\Gamma_d, \Gamma_s, \Gamma_{\text{ns}}$	diskretisierter Gebietsrand (mit/ohne Singularität)
Γ_R	Rand entlang Skalierungsstrahlen
Γ^{sc}	Rand des Skalierungsgebiets Ω^{sc}
Γ	Eulersche Gammafunktion
δ	Bruchflächenenergie
Δ	Differenz
ϵ	Skalierungs- bzw. Störungsparameter
ε	Dehnung
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	Hauptdehnungen
ε_{ij}	Komponenten des Verzerrungstensors
ε_m	mittlere Dehnung
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Verzerrungstensor, Verzerrungstensor in Voigt-Notation
$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{dev}}$	deviatorischer Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\varepsilon}_m, \boldsymbol{\varepsilon}_T$	mechanischer/thermischer Anteil des Verzerrungstensors
$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$	approximiertes Verzerrungsfeld
$\eta_1^e, \eta_2^e, \eta_3^e$	lokales kartesisches KOS für Elementeinheitsgebiet
$\boldsymbol{\eta}^e$	Ortsvektor in lokalem kartesischen KOS auf Elementeinheitsgebiet
θ	Lagenwinkel
θ_{ip}^c	Bruchwinkel
ϑ	Winkelcoordinate im Kugel-KOS (polare Coordinate)
κ	Materialparameter
λ	Abklingexponent / Eigenwert

$\lambda^{2D}, \lambda^{3D}$	Exponent für charakteristisches 2D/3D-Abklingverhalten
$\lambda_{\max}^{\text{enr}}, \lambda_{+1}^{\text{enr}}$	höchster Abklingexponent der Anreicherung und nächsthöherer, nicht ganzzahliger Abklingexponent
Λ	Menge von Abklingexponenten
$\mathbf{\Lambda}$	Diagonalmatrix der Abklingexponenten / Eigenwerte
$\bar{\mathbf{\Lambda}}$	Diagonalmatrix des zur Null symmetrischen Eigenwertspektrums
ν	Querkontraktionszahl
ξ, η_1, η_2	Koordinaten im skalierten Rand-Koordinatensystem
ξ_a, ξ_i	Skalierungscoordinate am Außen-/Innenrand
π	Kreiszahl
Π	Gesamtpotential
Π^a, Π^i	äußeres und inneres/elastisches Potential
Π_0^i	elastisches Potential der Konfiguration ohne Innenrand ($\epsilon = 0$)
${}_a^j \Pi^i, {}_a^j \Pi_{\text{red}}^i$	(reduziertes) elastisches Potential in j -ter Iteration
${}_i \Pi_p, {}_i \Pi_n$	i -tes Glied matrixbasierter Reihendarstellung des Gesamtpotentials
${}_0 \Pi_p, {}_0 \Pi_n$	Gesamtpotential der Konfiguration ohne Innen-/Außenrand
Π_{mh}	gemischt-hybrides Variationsfunktional
Π_σ	Variationsfunktional für Spannungsglättung
ρ	auf Außenrandradius bezogene, radiale Koordinate
σ	mechanische (Normal-)Spannung
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannungen
σ_{ij}	Komponenten des Spannungstensors
$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$	Spannungen in Materialkoordinatensystem
$\tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}$	mit 1-Richtung in Faserrichtung
$\sigma_n, \tau_{n1}, \tau_{nt}$	Spannungen in Wirkebene
σ_m	mittlere Normalspannung
σ_c	Festigkeit
$\sigma_x^{\text{eq}}, \sigma_y^{\text{eq}}, \tau_{xy}^{\text{eq}}$	äquivalente Randspannungen
${}_i^j \Delta \sigma_r, {}_a^j \Delta \sigma_r$	Spannungskorrektur in j -ter Iteration an Innen-/Außenrand
$\boldsymbol{\sigma}$	Spannungstensor, Spannungstensor in Voigt-Notation
$\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}}$	deviatorischer Spannungstensor
$\boldsymbol{\sigma}_I, \boldsymbol{\sigma}_{\text{II}}, \boldsymbol{\sigma}_{\text{III}},$ $\boldsymbol{\sigma}_{\text{IV}}, \boldsymbol{\sigma}_V, \boldsymbol{\sigma}_{\text{VI}}$	Spannungsfunktionen der Rissmoden,
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$	approximiertes Spannungsfeld
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{cont}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{disc}}$	in den Randkoordinaten (dis)kontinuierliche Anteile des approximierten Spannungsfeldes
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^*$	geglättetes Spannungsfeld
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$	Patchspannungen in SPR
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^*$	Knotenwerte des geglätteten Spannungsfeldes
τ	Schubspannung
$\phi_{uj}, \phi_{\sigma_j}$	tensorielle Winkelfunktionen der Deformationsmoden
ϕ_j	Eigenvektoren aus Lösung des SBFEM-DGLS
Φ	Matrix der Eigenvektoren ϕ_j
Φ^u, Φ^q	Verschiebungs-/Lastanteil in Matrix der Eigenvektoren
φ	Winkelcoordinate in polarem, Kegel- oder Kugel-KOS
ψ	freie Helmholtzenergie
Ω	Gebiet
$\tilde{\Omega}$	diskretisiertes Gebiet

Ω_e	Elementgebiet
Ω^a, Ω^i	äußeres/inneres Teilgebiet
Ω^{bl}	Übergangsbereich zwischen angereichertem und nicht angereichertem Gebiet, englisch: blending domain
Ω^{enr}	angereichertes Gebiet
Ω^{sc}	Skalierungs(teil)gebiet

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Die Bewertung von Strukturen und Bauteilen hinsichtlich ihres Versagens ist wesentlich für jeden Auslegungsprozess – besonders dann, wenn der Schadensfall schwerwiegende oder gar katastrophale Konsequenzen zu Folge haben kann (Lancaster, 2005, Yosibash, 2012). Dies gilt neben anderen Industrien für die Luft- und Raumfahrt, den Fahrzeugbau, aber auch Behälterbau, Mikrosystemtechnik und Reaktortechnik. Gerade in den erstgenannten, mobilitätsnahen Industrien spielt neben der zusätzlichen Forderung nach Wirtschaftlichkeit des Materialeinsatzes die Forderung nach Leichtbau zur Reduktion der Betriebskosten eine wesentliche Rolle. Im Spannungsfeld dieser einander entgegengesetzten Anforderungen für Sicherheit einerseits und Wirtschaftlichkeit andererseits nehmen die Disziplinen der Struktur- und Bruchmechanik einen wichtigen Platz ein.

Die Bruchmechanik stellt Versagenskonzepte zur Verfügung, die zur *Versagensbewertung* der zu betrachtenden Bauteile und Strukturen unter den gegebenen Belastungen heranzuziehen sind. Die Strukturmechanik wiederum liefert effiziente Berechnungsverfahren und Modelle für die *Strukturanalyse* und damit für die Größen¹, die neben den materialspezifischen Versagensparametern² zur Anwendung der bereitgestellten Versagenskonzepte benötigt werden. Die Strukturanalyse dient dabei auch dem tieferen Verständnis der betrachteten Struktur- und Lastsituation – nicht nur hinsichtlich der Versagensneigung, sondern genauso bezüglich Verformbarkeit und Funktionalität, die im Auslegungsprozess genauso eine wesentliche Rolle spielen. Die Effizienz der zur Verfügung gestellten Berechnungsverfahren begünstigt Parameterstudien und algorithmische Optimierung. Im Zusammenspiel mit werkstoffwissenschaftlichen Untersuchungen zur Bestimmung der Versagensparameter erlauben die Modelle der Struktur- und Bruchmechanik eine bestmögliche Werkstoffausnutzung und damit eine hohe Wirtschaftlichkeit des angestrebten Produktes. Durch Anwendung zuverlässiger Berechnungsverfahren und Versagensmodelle kann schließlich die Anzahl notwendiger (und teurer) Experimente und Tests verringert werden.

Im Fokus dieser Arbeit stehen Strukturen, die sogenannte 3D-Spannungssingularitäten enthalten. Spannungssingularitäten treten typischerweise an Punkten mit Diskontinuitäten von Rändern, Randbedingungen und Materialeigenschaften (z. B. Steifigkeit, Temperaturdehnung, etc.) auf. Klassische Beispiele für Struktursituationen mit Spannungssingularitäten sind Risse, Spitzkerben und Mehrmateriallecken (Abb. 1.1, 1.2). Orte in der Struktur, wo eine

¹ typischerweise Spannungen, Deformationen, Energiefreisetzungsraten, etc.

² meist Festigkeit und/oder Bruchzähigkeit

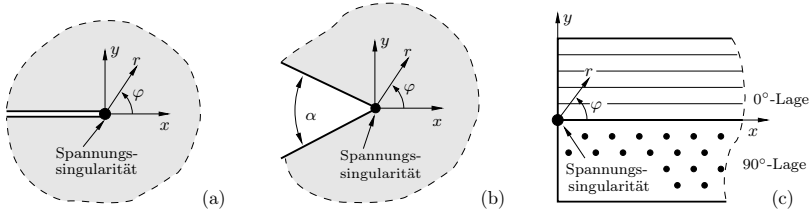


Abbildung 1.1: Beispiele für zweidimensionale Struktursituationen mit Spannungssingularitäten: (a) Riss; (b) Spitzkerbe; (c) Laminatrandeffekt.

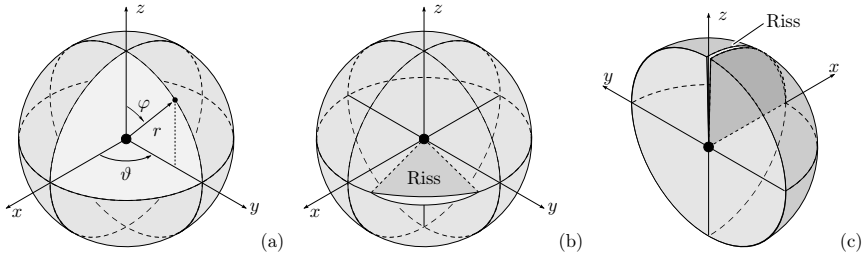


Abbildung 1.2: Beispiele für dreidimensionale Struktursituationen mit Spannungssingularitäten: (a) Fichera-Ecke, drei Kerbkanten treffen in einem Punkt aufeinander; (b) keilförmiger Riss, Ecke in der Rissfront; (c) Rand-Riss, Rissfront mündet an einem freien ebenen Rand.

Spannungssingularität existiert, zeichnen sich durch eine formal unendlich große Beanspruchung des Materials aus und sind besonders versagenskritisch.³ In der industriellen Praxis etablierte, spannungsbasierte Festigkeitskriterien, wie das Hauptspannungskriterium, werden hier bedeutungslos. Sie würden schon für die kleinste denkbare Last Versagen postulieren, was jedoch der experimentellen Erfahrung widerspricht. Natürlich kann trotzdem kein Material so hohen Spannungen standhalten. Sie werden unter inelastischen Deformationen⁴ abgebaut. Dabei werden die Lasten nur lokal umgelagert und ein vollständiges Versagen bleibt (zunächst) aus. Wenn der Bereich der inelastischen Deformationen klein ist, spricht man von sprödem Materialverhalten. Beispiele für spröde versagende Strukturen sind Keramiken, viele Faserverbundlaminare und Strukturklebungen mit hochfesten Klebstoffen. Ist der Bereich der inelastischen Deformationen aufgrund spröden Materialverhaltens hinreichend klein, bleibt die Spannungslösung nach linearer Elastizitätstheorie eine gute Näherung. Sie ist ebenfalls eine gute Näherung, wenn die geometrischen Abweichungen⁵ von der Struktursituation mit Spannungssingularität hinreichend klein sind. Die Kenntnis von Spannungssingularitäten und ihrem Abklingverhalten ist also von zentraler Bedeutung für eine Versagensbewertung spröder Strukturen.

³ Die mechanischen Spannungen, d.h. die lokale Materialbeanspruchung, werden dort im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie unendlich groß (singular).

⁴ z. B. durch plastisches Fließen, Schädigung, Mikrorisse, Porenbildung, etc.

⁵ Beispielsweise sind Spitzkerben typischerweise nicht gänzlich spitz sondern im Kerbgrund doch in irgendeiner Form ausgerundet. Dann tritt hier zwar keine Spannungssingularität mehr auf, aber eine hohe Spannungskonzentration, die ein ähnliches Abklingverhalten aufweist.

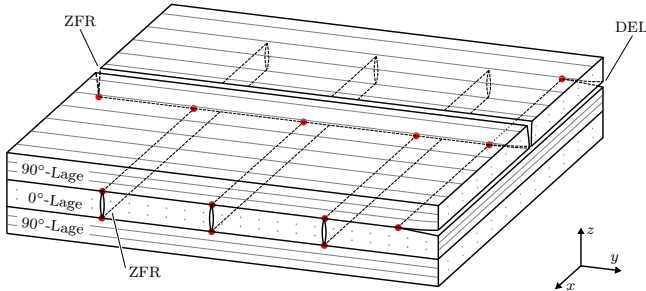


Abbildung 1.3: Erstgeschädigtes Faserverbund-Laminat als Beispiel für Struktursituationen mit 3D-Spannungssingularitäten.

Es wird zwischen Linien- und Punktsingularitäten unterschieden. Liniensingularitäten (2D-Spannungssingularitäten) beschreiben singuläre Spannungen entlang einer Linie (z. B. einer Rissfront, Kerbfront, Bimaterialkante am Laminatrand) und sind durch ein spezielles *zweidimensionales* Abklingverhalten senkrecht zu dieser Linie charakterisiert. Punktsingularitäten (3D-Spannungssingularitäten) treten beispielsweise an Diskontinuitäten von Liniensingularitäten auf (Abb. 1.2) und sind durch ein spezielles *dreidimensionales* Abklingverhalten charakterisiert. Das Abklingen der Spannungen σ mit zunehmendem Abstand r von der Singularität folgt einem Potenzgesetz und wird maßgeblich durch den sogenannten Spannungssingularitätsexponenten $1 - \lambda$ bestimmt. Die Intensität der Spannungssingularität wird durch den sogenannten (generalisierten) Spannungsintensitätsfaktor c_σ (GSIF) beschrieben.

$$\sigma = \frac{c_\sigma}{r^{1-\lambda}} \phi_\sigma(\varphi, \vartheta).$$

Die Funktion ϕ_σ beschreibt die Variation der Spannungen in den Winkelkoordinaten φ, ϑ .

Laminatstrukturen weisen durch ihre hohe Anzahl an Materialübergängen naturgemäß viele Stellen mit potentiell singulären Spannungen auf. Aufgrund ihrer Variabilität und Anpassungsfähigkeit an Strukturanforderungen nimmt ihr industrieller Einsatz stetig zu. Besonders Faserverbundlaminat und unter ihnen Laminat aus endlosfaserverstärkten Kunststoffen sind aufgrund ihrer hohen spezifischen Steifigkeiten und Festigkeiten in der Luft- und Raumfahrtindustrie etabliert. Gleichzeitig ist ihre Strukturanalyse und Versagensbewertung wegen ihres stark anisotropen Materialverhaltens sowie des schichtweisen Aufbaus besonders herausfordernd. So neigen sie zur Rissbildung zwischen den Fasern einzelner Laminatlagen (Zwischenfaserrisse, ZFR). Auch die Rissbildung in den Grenzflächen zwischen den Laminatlagen enthält durch den Laminatrandeffekt Liniensingularitäten entlang der Laminatränder und Punktsingularitäten an den Laminatenden. Nochmals komplexer stellt sich die Situation in durch ZFR und/oder DEL erstgeschädigten Laminaten dar. Hier liegen zusätzlich Liniensingularitäten entlang der ZFR und DEL vor. Weiterhin existieren 3D-Spannungssingularitäten an Punkten, wo ZFR oder DEL auf einen Laminatrand treffen (ZFR-Rand, DEL-Rand), oder wo ZFR auf ZFR oder DEL treffen (ZFR-ZFR, ZFR-DEL, Abb. 1.3).

Die Kritikalität einer Spannungssingularität lässt sich bereits mit Kenntnis des GSIF und des Spannungssingularitätsexponenten grundsätzlich einordnen: Größere Spannungssingularitätsexponenten weisen auf eine höhere Kritikalität hin. Gleiches gilt für GSIFs. Allerdings

ist eine Vergleichbarkeit zwischen Spannungssingularitätsexponenten und GSIFs i. A. nicht mehr gegeben.⁶

Anhand des Spannungssingularitätsexponenten lassen sich die Spannungssingularitäten weiter klassifizieren (z. B. Leguillon u. Sanchez-Palencia (1999)):

$$\begin{aligned} \text{klassisch :} & \quad \operatorname{Re}(\lambda) = 1/2 \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Re}(1 - \lambda) = 1/2 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{G} > 0, \\ \text{schwach :} & \quad 1/2 < \operatorname{Re}(\lambda) < 1 \quad \text{bzw.} \quad 0 < \operatorname{Re}(1 - \lambda) < 1/2 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{G} = 0, \\ \text{stark :} & \quad 0 < \operatorname{Re}(\lambda) < 1/2 \quad \text{bzw.} \quad 1/2 < \operatorname{Re}(1 - \lambda) < 1 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{G} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Die klassische Rissspitzensingularität tritt typischerweise bei Rissen in homogenen Materialien oder bei Grenzflächenrissen auf. \mathcal{G} stellt die differentielle Energiefreisetzungsrates dar, die im Rahmen des sogenannten Griffith-Kriteriums verwendet wird, um die energetische Zulässigkeit von Risswachstum und damit einen Versagensfortschritt vorherzusagen.⁷ Dazu wird \mathcal{G} mit einem experimentell ermittelten Vergleichswert, dem Materialparameter Bruchzähigkeit \mathcal{G}_c , verglichen

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_c.$$

Es ist offensichtlich, dass das Griffith-Kriterium bei starken wie schwachen Spannungssingularitäten, genauso wie spannungsbasierte Festigkeitskriterien, nicht mehr sinnvoll anwendbar ist. Eine allgemeingültige Versagensbewertung dieser nicht-klassischen Spannungssingularitäten ist Gegenstand aktueller Forschung.

Ein Bewertungskonzept, das sich bereits in vielen Fällen für schwache Spannungssingularitäten sowie nicht-singuläre Spannungskonzentrationen bewährt hat, ist das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium im Rahmen der Bruchmechanik finiter Risse (Leguillon, 2002, Hashin, 1996). Es postuliert die instantane Entstehung eines Risses finiter Größe, wenn der gesamte Bereich, auf dem der Riss entstehen soll, nach dem Spannungskriterium überbeansprucht und zusätzlich dieser Riss nach dem Energiekriterium energetisch zulässig ist. Zur Bestimmung, ob das Spannungskriterium erfüllt ist, reicht eine Spannungsanalyse der ungerissenen Struktur. Zur Überprüfung der energetischen Zulässigkeit ist jedoch im Allgemeinen auch jede mögliche gerissene Strukturkonfiguration zu berücksichtigen, wodurch die Auswertung des gekoppelten Kriteriums bei einer entsprechenden Anzahl zu berücksichtigender Rissvarianten (Ort, Geometrie, Abmessungen) sehr aufwendig werden kann. Dies gilt für dreidimensionale Betrachtungen noch mehr als für zweidimensionale, sodass hier effiziente Berechnungsverfahren besonders gefragt sind.

Die Finite-Elemente-Methode (Bathe, 2004, Zienkiewicz et al., 2013) ist ein sehr vielseitig einsetzbares Werkzeug zur Analyse von Randwertproblemen der Elastizitätstheorie und in der industriellen Praxis weit verbreitet. In ihrer klassischen Form, mit Diskretisierung in allen Modelldimensionen und ausschließlichem Einsatz von Lagrange-Polynomen als Ansatzfunktionen, weist sie bei der Lösung von Randwertproblemen mit Spannungssingularitäten jedoch Defizite auf: Sie kann die Spannungsgradienten nahe der Spannungssingularitäten nur unzureichend annähern, was in verschlechtertem Konvergenzverhalten sowie verminderter Genauigkeit resultiert. Der simpelste, aber gleichzeitig auch recht aufwendige Lösungsansatz beinhaltet eine einfache Verfeinerung der Diskretisierung zur Spannungssingularität hin.

⁶ Zwei unterschiedliche Strukturen und Lastfälle können also bei gleichzeitig unterschiedlichen Spannungssingularitätsexponenten und GSIFs nicht sinnvoll verglichen werden.

⁷ Bei der Versagensbewertung von Rissen scheitern spannungsbasierte Festigkeitskriterien, da entlang der Rissfront eine Spannungssingularität vorliegt.

Einen besonders eleganten und effizienten Ansatz für die Analyse von zweidimensionalen Problemstellungen mit Spannungssingularitäten bietet die semi-analytische Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode (engl.: Scaled Boundary Finite Element Method, SBFEM) nach Song u. Wolf (1997), Wolf (2003). Sie ist eine spezielle Finite-Elemente-Methode, in der nur in den Randkoordinaten eines Gebietes diskretisiert wird, während das Verhalten der Feldgrößen in einer radialen Richtung analytisch abgebildet wird. Somit wird die Notwendigkeit einer besonders feinen Diskretisierung in radialer Richtung zur angemessenen Annäherung der hohen Spannungsgradienten umgangen.

In Struktursituationen mit 3D-Spannungssingularitäten, die auch Liniensingularitäten enthalten, verlaufen diese Linien mit singulären Spannungen selbst in radialer Richtung⁸ und ihr 2D-Abklingverhalten (senkrecht zur radialen Richtung) ist von der Diskretisierung in den Randkoordinaten abzubilden. Dann treten ähnliche Defizite zu Tage, wie sie bei der klassischen FEM-Formulierung zu beobachten sind. Der einfache Lösungsansatz einer Verfeinerung der Diskretisierung in den Randkoordinaten ist in der SBFEM aber besonders aufwendig, da hier ein Eigenwertproblem zu lösen ist, dessen Berechnungsaufwand kubisch mit der Anzahl an Modellfreiheitsgraden steigt. Somit geht im 3D-Fall der wesentliche Vorteil der Methode, die hohen Spannungsgradienten um Spannungssingularitäten rein analytisch abbilden zu können, in Teilen verloren.

1.2 Aufbau und Ziel der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist die Bereitstellung effizienter Werkzeuge zur Analyse sowie Versagensbewertung von 3D-Spannungssingularitäten. Die Basis in der Entwicklung dieser Werkzeuge stellt die Skalierte Rand-Finite-Elemente-Methode (SBFEM) dar. Der Fokus soll auf der Betrachtung von Punktsingularitäten an sich treffenden Liniensingularitäten in spröden Faserverbundlaminate liegen. Hierfür sind einerseits Spannungssingularitätsexponenten und zugehörige Deformationen zu bestimmen, um die gewählten Struktursituationen einem tieferen Verständnis zugänglich zu machen. Andererseits sind generalisierte Spannungsintensitätsfaktoren (GSIFs) für ausgewählte Lastsituationen zu berechnen.

Weiterhin wird eine Methodik für eine allgemeingültigere Bewertung der Kritikalität von 3D-Spannungssingularitäten angestrebt. Dies soll anhand des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums im Rahmen der Bruchmechanik finiter Risse erfolgen. Dazu sind zunächst effiziente Verfahren der Spannungsanalyse an 3D-Spannungssingularitäten im Kontext der SBFEM bereitzustellen. Insbesondere soll sich der Problematik der Effizienzeinbußen, die aus der notwendigen Abbildung der vorhandenen Liniensingularitäten im 3D-Problem folgen, angenommen werden. Zur Auswertung des Energieteilkriteriums ist eine effiziente Methodik zur Betrachtung einer Vielzahl möglicher Risskonfigurationen und zur Berechnung zugehöriger Energiefreisetzungsraten bereitzustellen. Schließlich ist das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium anhand einer Beispielsituation auszuwerten und Vorzüge sind aufzuzeigen.

In Kapitel 2 werden zunächst die theoretischen Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie sowie der Festigkeits- und Bruchmechanik eingeführt. Sie umfassen einerseits spannungsbasierte Festigkeitskriterien, darunter moderne Versagenskriterien für Faserkunststoffverbunde, und eine Darstellung zu asymptotischen Nahfeldern sowie Spannungssingularitäten. Andererseits wird in die lineare Bruchmechanik sowie die Bruchmechanik finiter Risse eingeführt und dabei

⁸ sofern diese Linien gerade sind und ihre Richtung nur an der Punktsingularität ändern

eine ausführliche energetische Betrachtung von schwachen sowie starken Spannungssingularitäten durchgeführt. Schließlich erfolgt eine Darstellung der Finite-Elemente-Methoden. Dabei werden ausführliche Angaben zur Prozedur der Spannungsglättung, zu Fehlerkonvergenz in Gegenwart von Spannungssingularitäten und zu Anreicherungsverfahren für die Verbesserung der Konvergenzeigenschaften gemacht.

Kapitel 3 stellt den aktuellen Stand der Forschung bezüglich der Analyse und Bewertung von 3D-Spannungssingularitäten umfassend dar. Dabei spielen numerische und semi-analytische Methoden eine wesentliche Rolle. Es wird ein Überblick über diese Methoden sowie deren Vor- und Nachteile gegeben. Dabei wird ausführlich auf die Defizite bei der Berücksichtigung von Spannungssingularitäten, besonders der rein numerischen Methoden, und mögliche Lösungswege eingegangen. Ebenso werden Bewertungskonzepte für spröde Strukturen mit Spannungssingularitäten und deren Anwendung diskutiert.

In Kapitel 4 wird die SBFEM ausführlich als spezielle Finite-Elemente-Methode dargestellt und hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile diskutiert. Es werden diverse Defektinteraktionen in erstgeschädigten Faserverbundlaminaten bezüglich ihrer asymptotischen Nahfelder untersucht und anhand der gefundenen Spannungssingularitätsexponenten hinsichtlich ihrer Kritikalität eingeordnet. Die Betrachtung von 3D-Problemen erfordert mitunter eine starke Verfeinerung der Gebietsranddiskretisierung. Schließlich wird ein vollständiges Randwertproblem eines $[0^\circ/90^\circ]$ - sowie eines $[0^\circ/45^\circ]$ -Zweilagelaminats aus kohlenstofffaserverstärktem Kunststoff (CFK) für verschiedene Belastungen gelöst und daraus resultierende generalisierte Spannungsintensitätsfaktoren (bzw. äquivalente modale Wichtungsfaktoren) angegeben.

Kapitel 5 ist der Behebung der Defizite der klassischen SBFEM-Formulierung bezüglich Konvergenz und Genauigkeit bei 3D-Randwertproblemen mit Spannungssingularitäten gewidmet. Es wird eine neue Formulierung der SBFEM für 3D-Probleme vorgestellt, die diese Defizite durch eine Anreicherung des Separationsansatzes sehr effizient behebt. Dabei wird auch auf die Bestimmung der Anreicherungsfunktionen eingegangen und dargestellt, wie die Interaktion von 2D- und 3D-Singularitäten in der vorgeschlagenen Formulierung besonders gut ersichtlich wird. Die Konvergenzeigenschaften der neuen Formulierung der SBFEM (enrSBFEM, *enriched* SBFEM) werden ausführlich anhand diverser Beispiele – isotrop wie anisotrop – untersucht und mit der klassischen Formulierung verglichen. Schließlich wird eine geeignet modifizierte Prozedur zur Spannungsglättung präsentiert und deren Vorteile werden herausgestellt.

Kapitel 6 befasst sich mit der näherungsweise, asymptotischen Lösung von Randwertproblemen, die sowohl einen Außen- als auch einen Innenrand beinhalten, im Rahmen der SBFEM (Zwei-Rand-Problem der SBFEM). Das zugrundeliegende Prinzip wird zunächst anhand des einfachen und noch rein analytisch betrachtbaren Beispiels einer Hohlkugel unter Außendruck dargelegt und im Anschluss für die Anwendung der SBFEM verallgemeinert. Dieses Prinzip führt auf matrixbasierte Reihendarstellungen für die Problemgrößen (z. B. Verschiebungen, Formänderungsenergie), die explizit vom Innenrand-Außenrand-Verhältnis abhängen. Es wird aufgezeigt, wie diese Zusammenhänge zur effizienten Bestimmung von Energiefreisetzungsraten an Spannungssingularitäten genutzt werden können.

Die vorgeschlagenen Berechnungsansätze aus Kapitel 5 und Kapitel 6 werden in Kapitel 7 zu einem Bewertungskonzept im Rahmen der Bruchmechanik finiter Risse zusammengeführt. Daraus wird die Materialanstrengung durch Anwendung eines geeigneten Spannungsteilkriteriums bestimmt. Im Anschluss werden, unter einer ausführlichen Diskussion zu Annahmen bezüglich der Rissgeometrie im Versagensfall, Struktursituationen mit verschiedenen Rissgrößen untersucht, die Konvergenz der Lösung betrachtet und die Wertigkeit

asymptotischer Näherungslösungen diskutiert. Schließlich werden Energiefreisetzungsraten berechnet und anhand detaillierter Finite-Elemente-Analysen verifiziert, bevor zum Abschluss des Kapitels eine Versagensvorhersage mittels des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums erfolgt.

Die Arbeit schließt mit Kapitel 8, das eine Zusammenfassung der Ergebnisse sowie einen Ausblick auf mögliche Folgearbeiten enthält.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

2.1 Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie

In diesem Kapitel werden die Grundlagen für die Analyse der Beanspruchungen und Deformationen elastischer Strukturen bereitgestellt. Ziel dieses Kapitels ist es eine Einführung in die Thematik zu geben sowie eine einheitliche Nomenklatur einzuführen. Eine detailliertere Darstellung findet sich beispielsweise in Becker u. Gross (2002), Mittelstedt u. Becker (2016), Klingbeil (1966), Bathe (2004), Zienkiewicz et al. (2013).

2.1.1 Grundgleichungen

Ein Körper (Gebiet) Ω kann durch Oberflächenkräfte \mathbf{t} und Volumenlasten \mathbf{f} belastet sein. Beide sind im Allgemeinen vektorielle Größen. Dabei können Oberflächenkräfte auf der gesamten Oberfläche $\Gamma = \partial\Omega$ oder auch nur auf einer Teilfläche Γ_t wirken. Weiterhin können, insbesondere bei statischen Problemstellungen, auf der Körperoberfläche Γ_u (Gesamtfläche oder auch nur Teilflächen) Verschiebungen vorgeschrieben sein. Die Definition des vollständigen Randwertproblems für einen belasteten, elastischen Körper ergibt sich weiter durch die Forderung nach Erfüllung der Feldgleichungen:

- Die *Gleichgewichtsbedingungen* in statischen Problemstellungen entsprechen der Forderung nach im Gleichgewicht stehender Kraftgrößen. Im Fall dynamischer Problemstellungen treten die Bewegungsgleichungen an die Stelle der Gleichgewichtsbedingungen.
- Die *kinematischen Beziehungen* verknüpfen die Verschiebungs- und Deformationsgrößen. Über sie werden auch die Verschiebungsrandbedingungen mit den Deformationsgrößen des Körpers in Zusammenhang gesetzt.
- Die *konstitutiven Gleichungen* geben schließlich einen Zusammenhang zwischen den Deformationsgrößen und den inneren Kraftgrößen an.

In dieser Reihenfolge werden die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie im Folgenden eingeführt.

Spannungen und Gleichgewichtsbedingungen

Die Belastung eines Körpers ruft innere Kräfte $F_i^{A\sigma}$ hervor, die bezogen auf die Fläche A_σ eines gedachten Schnittes durch den Körper ein Maß für die Beanspruchung der Struktur

darstellen. Im Grenzfall einer gegen null strebenden Schnittfläche $A_\sigma \rightarrow 0$ erhält man den mechanischen Spannungsvektor

$$\mathbf{t} = \lim_{A_\sigma \rightarrow 0} \frac{F_i^{A_\sigma}}{A_\sigma} .$$

Dieser ist außer vom Belastungszustand des Körpers und dem betrachteten materiellen Punkt mit Koordinaten \mathbf{x} im kartesischen Koordinatensystem auch noch von der Richtung der Schnittnormalen \mathbf{n} abhängig. Der Cauchysche Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ ist ein Tensor zweiter Stufe und beschreibt den Beanspruchungszustand des belasteten Körpers dann unabhängig von der betrachteten Schnittrichtung \mathbf{n} . Als Tensor zweiter Stufe sind einer Spannungskomponente σ_{ji} ($i, j = 1, 2, 3$) immer zwei Richtungen zugeordnet: die Schnittrichtung (erster Index) sowie die Richtung der Spannungsvektorkomponente in diesem Schnitt (zweiter Index)¹

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ji} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i . \quad (2.1)$$

Hierin stellen \mathbf{e}_j und \mathbf{e}_i jeweils Einheitsvektoren der Länge eins im gegebenen Koordinatensystem dar und „ \otimes “ beschreibt das dyadische Produkt. Entsprechend schreiben sich die Komponenten im kartesischen x, y, z -Koordinatensystem

$$[\sigma_{ji}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} , \quad (2.2)$$

wobei aufgrund der Forderung nach Erfüllung des lokalen Momentengleichgewichts

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

gilt, sodass anstatt neun nur sechs unabhängige Spannungskomponenten existieren. Der Cauchysche Spannungstensor ist also symmetrisch. Die Diagonalelemente werden Normalspannungen genannt, die Übrigen auch als Schubspannungen bezeichnet und alternativ $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ geschrieben.

Mit Hilfe des Cauchyschen Theorems kann der Spannungsvektor \mathbf{t} in einem beliebigen Schnitt mit der Schnittnormalen \mathbf{n} (Komponenten n_k und Vektorlänge $\|\mathbf{n}\| = 1$) aus dem Spannungstensor durch die Bildung des verjüngenden Produktes bestimmt werden

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = n_k \sigma_{ji} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i = n_k \sigma_{ji} \delta_{kj} \mathbf{e}_i = n_j \sigma_{ji} \mathbf{e}_i . \quad (2.3)$$

Der Wechsel der Basis des Spannungstensors aus einem x, y, z -Koordinatensystem mit Einheitsvektoren \mathbf{e}_i in ein gedrehtes $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ -Koordinatensystem mit Einheitsvektoren $\bar{\mathbf{e}}_k$ erfolgt durch Tensortransformation ($i, j, k, l = x, y, z$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ji} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i = \bar{\sigma}_{lk} \bar{\mathbf{e}}_l \otimes \bar{\mathbf{e}}_k \quad \longrightarrow \quad \bar{\sigma}_{lk} = \sigma_{ji} \bar{\mathbf{e}}_l \cdot \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_k = \sigma_{ji} R_{lj} R_{ik} . \quad (2.4)$$

Bei Anordnung der Spannungskomponenten in der Voigt-Notation, d. h. in einem Spaltenvektor

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T , \quad (2.5)$$

kann die Tensortransformation mittels einer Matrixmultiplikation

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{T}_\sigma(\bar{\mathbf{e}}_k, \mathbf{e}_i) \boldsymbol{\sigma} \quad (2.6)$$

¹ Dabei gelte die Einsteinsche Summenkonvention, wonach über zwei gleiche Indizes summiert wird: $\sigma_{ji} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \equiv \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sigma_{ji} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i$.

mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} R_{11}^2 & R_{12}^2 & R_{13}^2 & 2R_{12}R_{13} & 2R_{11}R_{13} & 2R_{11}R_{12} \\ R_{21}^2 & R_{22}^2 & R_{23}^2 & 2R_{22}R_{23} & 2R_{21}R_{23} & 2R_{21}R_{22} \\ R_{31}^2 & R_{32}^2 & R_{33}^2 & 2R_{32}R_{33} & 2R_{31}R_{33} & 2R_{31}R_{32} \\ R_{21}R_{31} & R_{22}R_{32} & R_{23}R_{33} & R_{22}R_{33} + R_{23}R_{32} & R_{21}R_{33} + R_{23}R_{31} & R_{21}R_{32} + R_{22}R_{31} \\ R_{11}R_{31} & R_{12}R_{32} & R_{13}R_{33} & R_{12}R_{33} + R_{13}R_{32} & R_{11}R_{33} + R_{13}R_{31} & R_{11}R_{32} + R_{12}R_{31} \\ R_{11}R_{21} & R_{12}R_{22} & R_{13}R_{23} & R_{12}R_{23} + R_{13}R_{22} & R_{11}R_{23} + R_{13}R_{21} & R_{11}R_{22} + R_{12}R_{21} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

durchgeführt werden.

Für jeden Spannungszustand existiert ein Hauptachsensystem \mathbf{e}^h , in dem die Schubspannungen verschwinden und nur noch die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ mit $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ verbleiben. Die Hauptspannungen stellen die Eigenwerte des Spannungstensors dar und berechnen sich zusammen mit den Hauptrichtungen aus

$$(\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I})\mathbf{e}^h = 0, \quad (2.8)$$

wobei \mathbf{I} den Einheitstensor zweiter Stufe darstellt. Das Gleichungssystem hat nichttriviale Lösungen, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet, was auf das charakteristische Polynom

$$\sigma^3 - \hat{I}_1\sigma^2 - \hat{I}_2\sigma - \hat{I}_3 = 0 \quad (2.9)$$

mit den Invarianten des Spannungstensors in Hauptspannungen

$$\hat{I}_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad \hat{I}_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3), \quad \hat{I}_3 = \det(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.10)$$

führt. Analog können auch Hauptschubspannungen ermittelt werden, allerdings sind die Normalspannungen in den entsprechenden Schnitten im Allgemeinen nicht null. Sie ergeben sich jeweils in den Schnittrichtungen, die gegenüber den Hauptachsenrichtungen um 45° gedreht sind, zu:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}. \quad (2.11)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen geben eine physikalische Beziehung für die Schnittkräfte an einem infinitesimalen Körpervolumen an. Unter der Berücksichtigung von Volumenkräften \mathbf{f} ergeben sich folgende Differentialgleichungen für die Spannungsfelder:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i = 0. \quad (2.12)$$

Diese lokale Formulierung des Kräftegleichgewichts ist im Allgemeinen statisch unbestimmt, da sie sechs unbekannte Spannungen enthält, aber nur drei Differentialgleichungen zur Verfügung stellt, sodass weitere physikalische Beziehungen zur Lösung des allgemeinen elastostatischen Randwertproblems notwendig sind.

Verzerrungen und Kinematik

Aus den inneren Kräften im belasteten Körper resultieren Deformationen, die sich in Verschiebungen der materiellen Punkte ausdrücken. Die Beanspruchung eines Materials ist jedoch nicht direkt von der Größe der Verschiebungen sondern von den relativen Verschiebungen benachbarter materieller Punkte abhängig. Diese benachbarten materiellen Punkte werden zu

einem infinitesimalen Linienelement zusammengefasst, dessen Deformation vollständig durch Rotations- und Verzerrungstensoren beschrieben werden kann. Im Falle kleiner Deformationen und auch Rotationen ist der infinitesimale (oder auch linearisierte) Verzerrungstensor zur Beschreibung hinreichend. Er ergibt sich aus dem symmetrischen Anteil des Verschiebungsgradienten mit den zugeordneten Richtungen \mathbf{e}_i (Ausrichtung des Linienelements) und \mathbf{e}_j (Richtung der relativen Verschiebung). Damit gibt der Verzerrungstensor die Längenänderung des Linienelements oder die halbe Winkeländerung zwischen zwei senkrecht aufeinander stehenden Linienelementen an

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad , \quad [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} . \quad (2.13)$$

Die Diagonalelemente enthalten die Dehnungen der entsprechend orientierten Linienelemente. In Abhängigkeit der übrigen Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors lassen sich die sogenannten technischen Gleitungen oder Schubverzerrungen $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$, $\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz}$, $\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$ angeben.

Der Wechsel der Basis des Verzerrungstensors aus einem x, y, z -Koordinatensystem mit Einheitsvektoren \mathbf{e}_i in ein gedrehtes $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ -Koordinatensystem mit Einheitsvektoren $\bar{\mathbf{e}}_k$ erfolgt wieder durch Tensortransformation. Bei Verwendung der Voigt-Notation

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}]^T \quad (2.14)$$

kann dementsprechend wieder eine Transformationsmatrix \mathbf{T}_ε definiert werden:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{T}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} \quad , \quad (2.15)$$

Sie ist der Transformationsmatrix \mathbf{T}_σ des Spannungstensors sehr ähnlich und hängt mit ihr wie folgt zusammen:

$$\mathbf{T}_\sigma^{-1} = \mathbf{T}_\varepsilon^T . \quad (2.16)$$

Wie für den Spannungstensor lassen sich auch für den Verzerrungstensor Hauptdehnungen $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ mit entsprechenden Hauptrichtungen durch Lösung eines Eigenwertproblems bestimmen, sowie eine additive Zerlegung des Tensors in einen volumetrischen sowie einen Gestaltänderungsanteil vollziehen

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_m \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{dev}} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_m = \varepsilon_{ii}/3 . \quad (2.17)$$

Die kinematischen Beziehungen zwischen Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ und Verzerrungsfeld $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ entsprechen, wie oben erwähnt, der Bildung des symmetrischen Anteils des Verschiebungsgradienten. Somit ist der Verzerrungstensor wie der Spannungstensor symmetrisch und besitzt zunächst sechs unabhängige Komponenten. In Indexschreibweise lauten sie

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) . \quad (2.18)$$

Da die sechs unabhängigen Komponenten mit Hilfe der kinematischen Beziehungen aus nur drei Verschiebungsgrößen abgeleitet werden können, müssen bei unbekanntem Verschiebungsgrößen Kompatibilitätsbedingungen für die sechs Verzerrungskomponenten vorliegen:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (2.19)$$

Drei unabhängige, daraus ableitbare Kompatibilitätsbedingungen sind:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = 0, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = 0. \quad (2.22)$$

Elastizitätsgesetz

Zur Verbindung von kinematischen Größen und Kraftgrößen ist ein Materialgesetz notwendig. Im Falle ideal-elastischen Materialverhaltens ist der Spannungszustand unabhängig von der Belastungsgeschichte und wird eindeutig durch den Deformationszustand festgelegt. Dabei können Spannungen und Verzerrungen auf ein spezifisches elastisches Potential U zurückgeführt werden, sodass für sein totales Differential dU gilt

$$dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}. \quad (2.23)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird sich auf linear-elastisches Materialverhalten beschränkt. Das entsprechende Elastizitätsgesetz wird auch Hookesches Gesetz genannt und ergibt sich zu

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{mit} \quad c_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = c_{klij}. \quad (2.24)$$

Hierin sind c_{ijkl} die Komponenten des symmetrischen Steifigkeitstensors, welcher ein Tensor vierter Stufe ist. Weitere Symmetrien des Steifigkeitstensors ergeben sich aus der Symmetrie des Spannungs- und Verzerrungstensors

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk}, \quad (2.25)$$

sodass von ursprünglich 81 Komponenten des Elastizitätstensors ($i, j, k, l = 1, 2, 3$) nur noch 21 unabhängige Materialkonstanten übrig bleiben. In Voigt-Notation ergibt sich für ein linear-elastisches anisotropes Material das Hookesche Gesetz zu

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ \text{sym.} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.26)$$

mit der symmetrischen Steifigkeitsmatrix \mathbf{C} . Unter Verwendung der ebenfalls symmetrischen Inversen \mathbf{C}^{-1} der Steifigkeitsmatrix, die Nachgiebigkeitsmatrix \mathbf{S} genannt wird, lässt sich das Elastizitätsgesetz auch folgendermaßen schreiben:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.27)$$

Die verwendeten Materialien der meisten technischen Anwendungen sind nicht vollständig anisotrop, sondern weisen Materialsymmetrien auf, wodurch die Anzahl notwendiger,

unabhängiger Steifigkeitsparameter weiter sinkt und viele Steifigkeitseinträge in \mathbf{C} unter geeigneter Koordinatensystemorientierung verschwinden. Praktisch besonders relevante Fälle sind orthotropes Materialverhalten, transversal isotropes Materialverhalten und isotropes Materialverhalten.

Orthotropes Materialverhalten mit drei senkrecht aufeinanderstehenden Symmetrieebenen und neun unabhängigen Elastizitätskonstanten liegt beispielsweise bei bestimmten aus Fasergeweben gefertigten Faser-Kunststoff-Verbunden vor. Stehen die Symmetrieebenen senkrecht auf den Achsen eines kartesischen x_1, x_2, x_3 -Koordinatensystems, kann die Nachgiebigkeitsmatrix mit den 12 Ingenieurkonstanten E_1, E_2, E_3 (Elastizitätsmoduli), G_{12}, G_{13}, G_{23} (Schubmoduli) sowie $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{31}, \nu_{23}, \nu_{32}$ (Querkontraktionszahlen) folgendermaßen angegeben werden

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

wobei aufgrund der Symmetrie der Nachgiebigkeitsmatrix folgende drei Beziehungen zwischen den Ingenieurkonstanten gelten müssen, sodass nur neun Unabhängige verbleiben:

$$\nu_{12}E_2 = \nu_{21}E_1 \quad , \quad \nu_{13}E_3 = \nu_{31}E_1 \quad , \quad \nu_{23}E_3 = \nu_{32}E_2 . \quad (2.29)$$

Bei *transversal isotropem* Materialverhalten liegen zusätzlich beliebig viele um eine Achse orientierte Symmetrieebenen und damit nur noch fünf unabhängige Elastizitätskonstanten vor. Diese Achse wird bei den für diese Arbeit besonders relevanten unidirektional faserverstärkten Kunststoffen durch die Faserorientierungen gebildet. Sind die Fasern in x_1 -Richtung orientiert, gelten zwischen den Ingenieurkonstanten folgende vier zusätzliche Beziehungen, sodass nur fünf unabhängige Elastizitätskonstanten verbleiben.

$$E_2 = E_3 \quad , \quad G_{12} = G_{13} \quad , \quad \nu_{12} = \nu_{13} \quad , \quad G_{23} = \frac{E_3}{2(1 + \nu_{23})} \quad (2.30)$$

Isotropes Materialverhalten ist schließlich das in technischen Anwendungen wohl am häufigsten vorkommende. Es ist gegenüber einer beliebigen Rotation des Bezugssystems invariant und lässt sich durch zwei unabhängige Elastizitätskonstanten beschreiben: einen Elastizitätsmodul E und eine Querkontraktionszahl ν . Der Schubmodul berechnet sich wie G_{23} bei gegenüber der x_1 -Achse transversal isotropem Materialverhalten aus Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl zu

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} . \quad (2.31)$$

Im Elastizitätsgesetz sind auch *Eigendehnungen* zu berücksichtigen. Diese können z. B. aufgrund chemischen Schrumpfes oder Feuchte- und Temperaturänderungen auftreten. Hier seien, stellvertretend für alle anderen, Temperaturdehnungen betrachtet. Sie werden durch entsprechende Ausdehnungskoeffizienten α_{Tij} ($i, j = 1, 2, 3$), die in der linearen Theorie als konstant angenommen werden, und die von einer Ausgangstemperatur T_0 ausgehende Temperaturänderung $\Delta T = T - T_0$ beschrieben. Die Gesamtverzerrungen ergeben sich also additiv

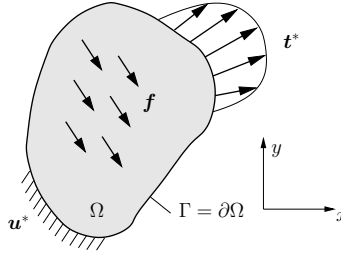


Abbildung 2.1: Beispielhafte Darstellung eines elastischen Gebiets Ω mit Berandung $\Gamma = \partial\Omega$ und unter der Belastung von Oberflächenkräften \mathbf{t}^* auf dem Teilrand Γ_t und Volumenkräften \mathbf{f} . Auf dem Teilrand Γ_u sind Verschiebungen \mathbf{u}^* vorgeschrieben. Es gilt $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$.

aus dem mechanischen Verzerrungsanteil $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ und dem Verzerrungsanteil aufgrund Temperaturänderung $\boldsymbol{\varepsilon}_T$. Das um Temperaturdehnungen ergänzte Elastizitätsgesetz in Voigt-Notation lautet dann mit $\boldsymbol{\alpha}_T = [\alpha_{T11}, \alpha_{T22}, \alpha_{T33}, \alpha_{T23}, \alpha_{T13}, \alpha_{T12}]^T$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_T = \boldsymbol{S} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha}_T \Delta T. \quad (2.32)$$

Bei orthotropen Werkstoffen vereinfacht sich der temperaturbedingte Anteil insofern, dass $\alpha_{T23} = \alpha_{T13} = \alpha_{T12} = 0$ sind. Bei transversal isotropen Werkstoffen mit obiger Wahl des Koordinatensystems ist außerdem $\alpha_{T22} = \alpha_{T33}$.

Formulierung des Randwertproblems

Zur Lösung eines Randwertproblems der linearen Elastizitätstheorie auf einem Gebiet Ω (Abb. 2.1) sind die bisher vorgestellten *Feldgleichungen* (Gleichgewichtsbedingungen (2.12), Kinematik (2.18) und Elastizitätsgesetz (2.24)) essentiell. Sie bestimmen den Verlauf der Zustandsgrößen Verschiebungen u_i , Verzerrungen ε_{ij} und Spannungen σ_{ij} im Inneren des Gebiets. Dabei sind alle Feldgleichungen der linearen Elastizitätstheorie lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Daher gilt das Superpositionsprinzip, wonach die Summe zweier Lösungen der Feldgleichungen wiederum eine Lösung derer darstellt.

Die Lösung des statischen Randwertproblems lässt sich erst eindeutig bestimmen, wenn auch entsprechende *Randbedingungen* auf dem Gebietsrand $\Gamma = \partial\Omega$ gestellt sind. Dabei ist zwischen Kraft- und Verschiebungsrandsbedingungen zu unterscheiden. In einem gemischten Randwertproblem sind beide Arten von Randbedingungen gegeben: Kraft- bzw. Spannungsrandsbedingungen auf dem Gebietsrand Γ_t und Verschiebungsrandsbedingungen auf dem Gebietsrand Γ_u ($\Gamma_t \cup \Gamma_u = \Gamma$). In Tensor Schreibweise lauten die Randbedingungen mit dem Randnormalenvektor \mathbf{n}_Γ :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_\Gamma \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{t} = \mathbf{t}^* & \text{auf } \Gamma_t, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* & \text{auf } \Gamma_u. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ebene Probleme – der generalisierte ebene Verzerrungszustand (GEVZ)

In vielen technisch relevanten Situationen ist eine Reduktion des eigentlich dreidimensionalen Randwertproblems zu einem zweidimensionalen vertretbar. Die Reduktion der Problem-

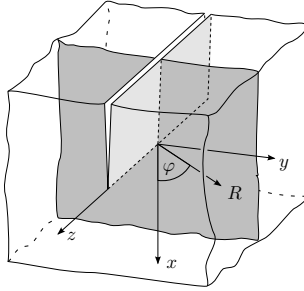


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung der Einbettung der quasi-zweidimensionalen Situation in der R, φ -Ebene mit zugrundeliegenden Annahmen des GEVZ in die dreidimensionale Struktursituation am Beispiel eines Risses.

mension ergibt dabei eine Verringerung der zu erfüllenden Gleichungen sowie unabhängigen Zustandsgrößen. Die so vereinfachte Problemstellung kann dann mit wesentlich geringerem Aufwand, in vielen Fällen sogar analytisch, gelöst werden.

Die Annahme, dass alle Spannungen in einer Raumdimension vernachlässigbar klein seien, führt auf die Gleichungen des ebenen Spannungszustands (ESZ). Die Annahme, dass alle Verzerrungen in einer Raumdimension null seien, führt wiederum auf die Gleichungen des ebenen Verzerrungszustands (EVZ).²

Im Folgenden wird ein generalisierter ebener Verzerrungszustand (GEVZ), der von Pipes u. Pagano (1970) zur Untersuchung von Problemstellungen mit Faserverbundlaminate eingeführt wurde, betrachtet. Für diesen werden die dreidimensionalen Verschiebungsfelder $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$ als Funktionen ebener Koordinaten x, y angenommen. Zusätzlich sind in z -Richtung konstante Dehnungen ε_{zz}^* erlaubt, sodass gelte:

$$u = u_{2D}(x, y) \quad , \quad v = v_{2D}(x, y) \quad , \quad w = w_{2D}(x, y) + \varepsilon_{zz}^* z \quad . \quad (2.34)$$

Folglich ergibt sich für die Verzerrungen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_{2D}}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_{2D}}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_{2D}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2D}}{\partial x} \quad , \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{zz}^* \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w_{2D}}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w_{2D}}{\partial y} \quad . \end{aligned} \quad (2.35)$$

Das Elastizitätsgesetz (2.26) lässt sich schreiben als:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & C_{55} & C_{56} \\ \text{sym.} & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{13} \\ C_{23} \\ C_{34} \\ C_{35} \\ C_{36} \end{bmatrix} \varepsilon_{zz}^* \quad (2.36)$$

² Nur für den EVZ sind alle dreidimensionalen Feldgleichungen exakt im Sinne der Theorie erfüllt. Für den ESZ sind die Kompatibilitätsbedingungen in der Raumdimension der vernachlässigten Spannungen nur näherungsweise erfüllt.

mit einer weiteren Gleichung zur nachträglichen Berechnung der Spannung

$$\sigma_{zz} = C_{33}\varepsilon_{zz}^* + C_{13}\varepsilon_{xx} + C_{23}\varepsilon_{yy} + C_{34}\gamma_{yz} + C_{35}\gamma_{xz} + C_{36}\gamma_{xy} . \quad (2.37)$$

Dadurch, dass die Verzerrungen (2.35) reine Funktionen der Koordinaten x und y sind, trifft dies natürlich auch auf die Spannungen zu, sodass sich die lokalen Gleichgewichtsbedingungen (2.12) ebenfalls vereinfachen:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \quad , \quad \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \quad , \quad \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + f_z = 0 . \quad (2.38)$$

Damit ist die Anzahl unabhängiger Zustandsgrößen weniger stark reduziert wie beispielsweise unter Annahmen des EVZ und ESZ. Der hauptsächliche Nutzen liegt hier in der Dimensionsreduktion und der gegenüber dem EVZ erweiterten Anwendbarkeit.³

2.1.2 Energiebetrachtungen

Es werden zunächst der erste und zweite Hauptsatz der Thermodynamik eingeführt und anschließend einige klassische Variations- und Energieprinzipien für deformierbare Körper dargestellt. Letztere beruhen auf der Grundlage, dass die materielle Oberfläche des behandelten Körpers bei Zustandsänderungen unverändert bleibt. Somit ist beispielsweise ein Risswachstum ausgeschlossen.⁴

Erster und zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Dieses Teilkapitel basiert im Wesentlichen auf den Ausführungen in (Ziegler, 1977, Kap. 4). Der erste Hauptsatz der Thermodynamik ist die Energiebilanzgleichung, nach der jede Änderung der Gesamtenergie eines Systems gleich dem Energietransport über die Systemgrenzen sein muss. Die Gesamtenergie lässt sich in Anteile aus der inneren Energie sowie der potentiellen und kinetischen Energie aufteilen. Der Energietransport über die Systemgrenze setzt sich generell aus der am System verrichteten Arbeit, der Wärmezufuhr sowie der mittels Massenströmen über die Systemgrenze transportierten Energie zusammen. Letztere besteht wiederum aus der Enthalpie, potentiellen und kinetischen Energie dieser Massenströme.

Hier sei sich auf den Spezialfall eines einzelnen unbewegten elastischen Festkörpers beschränkt, sodass die Gesamtenergie identisch mit der inneren Energie ist und keine Massenströme über die Systemgrenze hinweg zu berücksichtigen sind. Weiterhin seien zur Beschreibung des Zustands des betrachteten Körpers die Verzerrungen ε_{ij} (kinematische Größen) und die Temperatur T als unabhängige intensive, also volumenunabhängige, Zustandsgrößen gewählt. Die am infinitesimalen Würfelement dV bei infinitesimaler Änderung der kinematischen Zustandsgrößen $d\varepsilon_{ij}$ pro Volumen verrichtete Arbeit dW ist dann

$$dW = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \quad (2.39)$$

Die Wärmezufuhr pro Volumen für eine infinitesimale Änderung der Temperatur dT sei mit dQ bezeichnet. Dabei ist zu beachten, dass sowohl die über einen Zustandswechsel

³ Anmerkung: Wie der EVZ erfüllt auch der GEVZ alle Feldgleichungen der linearen Elastizitätstheorie (im Besonderen auch alle drei Kompatibilitätsbedingungen) exakt.

⁴ Erweiterte Energieprinzipien, mit denen ein Risswachstum möglich ist, führen auf Phasenfeldmodelle der Bruchmechanik (Francfort u. Marigo, 1998, Bourdin et al., 2000, 2008, Kuhn, 2013).

aufsummierte verrichtete Arbeit W , als auch Wärmezufuhr Q im Allgemeinen wegababhängig und somit selbst keine Zustandsgrößen sind. Demzufolge stellen weder dW noch dQ totale Differentialen dar. Die innere Energie $E(\varepsilon_{ij}, T)$ pro Volumen ist hingegen eine Zustandsfunktion der gewählten Zustandsgrößen. Entsprechend ist im ersten Hauptsatz das Inkrement der inneren Energie dE ein totales Differential:

$$dE = dW + dQ = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} + dQ . \quad (2.40)$$

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik basiert auf der Zustandsgröße Entropie $S(\varepsilon_{ij}, T)$ (hier pro Volumen) und besagt, dass diese für jegliche Zustandsänderungen in der Summe niemals abnehmen kann:

$$dS = \frac{dQ}{T} + d^{(\text{irr})}S \quad \text{mit} \quad d^{(\text{irr})}S \geq 0 . \quad (2.41)$$

Dabei ist dS wieder ein totales Differential, $\frac{dQ}{T}$ ist ein reversibler Entropietransportterm und $d^{(\text{irr})}S$ ein irreversibler Entropieproduktionsterm.

Auflösen des zweiten Hauptsatzes (2.41) nach der Wärmezufuhr dQ und Einsetzen in den ersten Hauptsatz (2.40) führt auf

$$dW = dE - TdS + T d^{(\text{irr})}S \quad \text{mit} \quad dW^{(d)} = T d^{(\text{irr})}S . \quad (2.42)$$

Die verrichtete Arbeit dW setzt sich also in Abhängigkeit von totalen Differentialen von Zustandsfunktionen zusammen, sodass sie auch geschrieben werden kann als

$$\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} = \left(\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_{ij}} - T \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial E}{\partial T} - \frac{\partial S}{\partial T} \right) dT + T d^{(\text{irr})}S . \quad (2.43)$$

Für reine Erwärmung wird keine Arbeit verrichtet und es lässt sich dann zeigen, dass der zweite Klammerausdruck infolge des zweiten Hauptsatzes (2.41) immer identisch null sein muss. Folglich hat der Entropieproduktionsterm $d^{(\text{irr})}S$ ebenfalls die Form einer Arbeit und sei als dissipativer Arbeitsanteil $dW^{(d)}$ bezeichnet. Die verrichtete Arbeit dW lässt sich so in einen reversiblen, nur von Zustandsgrößen abhängigen Anteil und einen dissipativen Arbeitsanteil $dW^{(d)}$ unterteilen. Der erste Klammerausdruck in Gleichung (2.43) stellt dann jene inneren Kräfte (bzw. Spannungen) dar, die der reversiblen, verrichteten Arbeit zuzuordnen sind.

Unter Verwendung der freien Helmholtz-Energie

$$\Psi(\varepsilon_{ij}, T) = E - TS \quad , \quad d\Psi = dE - TdS - SdT , \quad (2.44)$$

ergibt sich der erste Hauptsatz schließlich zu

$$dW = d\Psi + SdT + dW^{(d)} . \quad (2.45)$$

Dabei erfüllt die freie Helmholtz-Energie Ψ die Funktion eines Potentials. Die Ableitung nach der Temperatur, wieder unter Berücksichtigung der Reversibilität des reinen Erwärmungsprozesses, führt auf die Entropie S . Die partielle Ableitung nach den Verzerrungen ε_{ij} führt auf die nicht dissipativen (elastischen) Spannungen $\sigma_{ij}^{(e)}$.

$$S = \frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad , \quad \sigma_{ij}^{(e)} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial \varepsilon_{ij}} - T \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.46)$$

Demzufolge entspricht die freie Helmholtz-Energie bei isothermer Zustandsänderung ($dT = 0$) gerade dem spezifischen elastischen Potential bzw. der Formänderungsenergiegedichte U aus Gleichung (2.23)

$$U = \Psi \Big|_{T=\text{konst.}} \quad (2.47)$$

und die dissipierte Arbeit ergibt sich aus der Differenz der am Körper verrichteten Arbeit und der Änderung des spezifischen elastischen Potentials.

$$dW^{(d)} = dW - dU . \quad (2.48)$$

Die Integration über den Gesamtkörper V sowie die Zustandsänderung von Zustand 1 nach Zustand 2 führt schließlich auf die gesamte dissipierte Energie \mathcal{D}

$$\mathcal{D} = \int_V W^{(d)} dV = \int_V W dV - \int_V (U_2 - U_1) dV = W_a - (\Pi_2^i - \Pi_1^i) \quad (2.49)$$

mit den elastischen Potentialen Π_1^i im Zustand 1 und Π_2^i im Zustand 2. Existiert weiterhin auch ein Potential Π^a für die äußeren Kräfte, die die Arbeit W_a letztendlich verrichten, beispielsweise weil die äußeren Kräfte Totlasten⁵ sind, ergibt sich unter Definition eines Gesamtpotentials $\Pi = \Pi^a + \Pi^i$ und mit der Differenz des äußeren Potentials $\Pi_1^a - \Pi_2^a = W_a$:

$$\mathcal{D} = -(\Pi_2^a - \Pi_1^a) - (\Pi_2^i - \Pi_1^i) = -\Delta\Pi . \quad (2.50)$$

Variations- und Energieprinzipien

Ein beliebiges, statisch zulässiges Spannungsfeld $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ erfüllt die Gleichgewichtsbedingungen und die Randbedingungen auf ∂V_t . Gleichzeitig erfüllen ein beliebiges, kinematisch zulässiges Verschiebungsfeld $\mathbf{u}^{(2)}$ und dazu gehöriges Verzerrungsfeld $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$ die kinematischen Beziehungen und die Randbedingungen auf ∂V_u . Werden nun die Gleichgewichtsbedingungen für $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ mit den Verschiebungen $\mathbf{u}^{(2)}$ multipliziert und über das Volumen V integriert, so ergibt sich aus den Gleichungen (2.12, 2.18) unter Verwendung des Gaußschen Satzes der *allgemeine Arbeitssatz* in Tensorschreibweise

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} dV = \int_V \mathbf{f}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} dV + \int_{\partial V_t} \mathbf{t}^{*(1)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} dA + \int_{\partial V_u} \mathbf{t}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{*(2)} dA . \quad (2.51)$$

Zur Herleitung des *Prinzips der virtuellen Verrückungen* (PdvV) wird ein virtuelles kinematisches System $\delta u_i, \delta \varepsilon_{ij}$ in den allgemeinen Arbeitssatz (2.51) eingesetzt:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V f_i \delta u_i dV + \int_{\partial V_t} t_i^* \delta u_i dA . \quad (2.52)$$

Dabei gilt für die virtuellen Größen, dass sie infinitesimal klein, kinematisch zulässig und mit den geometrischen Randbedingungen verträglich sein müssen, weswegen der vierte Term aus Beziehung (2.51) verschwindet. Die Anwendung des PdvV ist gleichbedeutend mit der Forderung nach Erfüllung des Kräftegleichgewichts. Weil die linke Seite auch als innere

⁵ Totlasten sind solche, die unabhängig von Lage des Angriffspunktes und Zeit konstant wirken, und das sowohl bezüglich ihres Betrages als auch bezüglich ihrer Richtung. Ein Beispiel sind Gewichtskräfte, die auf gegenüber der Erde kleine Massen in Erdoberflächennähe wirken.

virtuelle Arbeit δW_i und die rechte Seite als äußere virtuelle Arbeit δW_a bezeichnet werden, wird es auch *Prinzip der virtuellen Arbeiten* genannt:

$$\delta W_i = \delta W_a . \quad (2.53)$$

Das *Prinzip der virtuellen Kräfte* (PdvK) ergibt sich durch Einsetzen einer virtuellen, statisch zulässigen Kräftegruppe $\delta\sigma_{ij}, \delta t_i, \delta f_i$, die auch die statischen Randbedingungen auf dem Rand ∂V_t erfüllt, in den allgemeinen Arbeitssatz (2.51):

$$\int_V \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} dV = \int_V u_i \delta f_i dV + \int_{\partial V_a} u_i^* \delta t_i dA . \quad (2.54)$$

Dabei gilt für die virtuellen Größen zusätzlich wieder, dass sie infinitesimal klein sein müssen. Weil die linke Seite auch als innere virtuelle Komplementärarbeit $\delta \bar{W}_i$ und die rechte Seite als äußere virtuelle Komplementärarbeit $\delta \bar{W}_a$ bezeichnet werden, wird es auch *Prinzip der virtuellen Komplementärarbeiten* genannt:

$$\delta \bar{W}_i = \delta \bar{W}_a . \quad (2.55)$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass sowohl das PdvK als auch das PdvV unabhängig vom Materialverhalten und auch für große Deformationen gelten.

Mit Einsetzen der wirklichen statischen und kinematischen Größen in den allgemeinen Arbeitssatz (2.51) sowie unter den Annahmen, dass die äußeren Kräfte als Totlasten angreifen und keine von Null verschiedenen Verschiebungen \mathbf{u}^* auf der Körperoberfläche ∂V_u vorgeschrieben sind, ergibt sich:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\partial V_t} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u} dA . \quad (2.56)$$

Der Ausdruck links des Gleichheitszeichens stellt unter den Annahmen der linearen Elastizitätstheorie (linear-elastischen Materialverhalten und kleine Verzerrungen sowie Rotationen) die zweifache im Körper gespeicherte Formänderungsenergie dar. Dies entspricht dem zweifachen inneren elastischen Potential $2\Pi^i$. Der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung bezeichnet die von den Totlasten geleistete Arbeit beim Übergang vom undeformierten in den deformierten Zustand und stellt gleichzeitig das aus den Totlasten folgende äußere Potential dar $W_{12}^a = -\Pi^a$. Damit ergibt sich der *Satz von Clapeyron*:

$$2\Pi^i + \Pi^a = 0 . \quad (2.57)$$

Zur Herleitung des *Satzes von Betti* seien nun zwei Deformations- und Belastungszustände (1) und (2) jeweils mit Kraftgrößen $\sigma_{ij}^{(k)}, t_i^{(k)}, f_i^{(k)}$ und kinematischen Größen $\varepsilon_{ij}^{(k)}, u_i^{(k)}$ betrachtet, wobei $k = 1, 2$. Unter weiterer Annahme der linearen Elastizität und Symmetrie des Elastizitätstensors \mathbf{C} gilt

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$$

und somit nach Einsetzen in den allgemeinen Arbeitssatz (2.51)

$$\int_V f_i^{(1)} u_i^{(2)} dV + \int_{\partial V} t_i^{(1)} u_i^{(2)} dA = \int_V f_i^{(2)} u_i^{(1)} dV + \int_{\partial V} t_i^{(2)} u_i^{(1)} dA . \quad (2.58)$$

2.2 Einführung in die Festigkeits- und Bruchmechanik

Dieses Kapitel dient der Einführung in die für diese Arbeit relevanten Themenfelder der Festigkeits- und Bruchmechanik sowie der ihnen zugrundeliegenden Annahmen. Es wird besonders auf die Teildisziplinen der Festigkeitsmechanik sowie der linear-elastischen Bruchmechanik (LEBM) zur Bewertung von Rissen eingegangen, bevor auch die noch junge Bruchmechanik finiter Risse rekapituliert wird. Für detailliertere Darstellungen, insbesondere auch anderer Teildisziplinen der Bruchmechanik, sei auf die vielfältig verfügbare Spezialliteratur verwiesen (Kanninen u. Popelar, 1985, Maugin, 1992, Lemaitre u. Chaboche, 1994, Anderson u. Anderson, 2005, Kuna, 2008, Gross u. Seelig, 2016).

2.2.1 Festigkeitskriterien

Isotrope Werkstoffe

In diesem Teilkapitel soll basierend auf dem Standardwerk von Gross u. Seelig (2016) ein Überblick über einige klassische Festigkeitshypothesen gegeben werden. Diese Festigkeitshypothesen wurden teilweise bereits Ende des 19. Jahrhunderts entwickelt. Sie haben sich vielfach etabliert und sind auch wegen ihrer Einfachheit in der Praxis weit verbreitet. Festigkeitshypothesen haben für gewöhnlich die Form

$$\mathcal{F}(\sigma_{ij}) = 1 \quad \text{oder} \quad f(\varepsilon_{ij}) = 1 \quad (2.59)$$

mit den Versagensfunktionen \mathcal{F} bzw. f , die eine Versagensfläche im Raum der Spannungs- bzw. Verzerrungstensorskomponenten bilden. In Form der Hauptspannungen bzw. -dehnungen ist diese Versagensfläche in einem dreidimensionalen Achsensystem noch vergleichsweise anschaulich darstellbar (Gross u. Seelig, 2016).

Die Verwendung dieser Festigkeitshypothesen setzt voraus, dass der Materialzustand beim Versagen unabhängig von der Deformationsgeschichte ist. Dies ist zutreffend, solange in einem Material weder die Fließgrenze noch die Bruchgrenze überschritten wurde. Allerdings eignen sich die klassischen Festigkeitskriterien vorwiegend für schwach inhomogene Spannungsfelder. An Spannungssingularitäten verlieren sie (ohne zusätzliche Annahmen) ihre Aussagekraft gänzlich, da mit ihnen für ins Unendliche wachsende Spannungen bzw. Verzerrungen Versagen schon für minimale Lasten postuliert wird, dies aber der experimentellen Erfahrung widerspricht.

Nach der *Hauptspannungshypothese* wird das Versagensverhalten durch zwei aus einem einachsigen Zugversuch ermittelten Materialkennwerte, die *Zugfestigkeit* R_t und die *Druckfestigkeit* R_c , bestimmt. Versagen wird für den Fall vorhergesagt, dass entweder die größte Hauptspannung die Zugfestigkeit über- oder die kleinste Hauptspannung die Druckfestigkeit unterschreitet.

$$\sigma_1 \geq R_t \quad \vee \quad \sigma_3 \leq -R_c \quad (2.60)$$

Sie eignet sich insbesondere zur Versagensvorhersage bei spröden Werkstoffen. Die Versagenhypothese führt auf eine Versagensfläche im Raum der Hauptspannungen, die der Oberfläche eines Würfels entspricht. Damit werden mögliche Interaktionen der Hauptspannungen vernachlässigt, was häufig der experimentellen Erfahrung widerspricht. Deshalb ist sie letztlich nur eingeschränkt anwendbar.

Nach der *Hauptdehnungshypothese* wird Versagen für das Erreichen einer kritischen, im einachsigen Zugversuch ermittelten Hauptdehnung vorhergesagt. Damit ist eine gewisse Interaktionswirkung der Hauptspannungen über die Querkontraktion vorgesehen. Aus der Versagenhypothese folgt direkt eine Druckfestigkeit von $R_c = R_t/\nu$, was wiederum den Erfahrungen aus Experimenten widerspricht, sodass sie in der Praxis kaum verwendet wird.

Die *Gestaltänderungsenergiehypothese nach von Mises* postuliert Versagen, wenn die Gestaltänderungsenergiegedichte U_G einen kritischen Wert erreicht:⁶

$$U_G = \frac{1 + \nu}{3E} R_t^2 \quad (2.61)$$

Das resultierende Spannungskriterium lautet:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2R_t^2. \quad (2.62)$$

Diese Hypothese liefert eine recht gute Vorhersage des Fließbeginns vieler duktiler Metalle und hat sich daher in der Praxis fest etabliert. Die Versagensfläche wird im Hauptspannungsraum von einem Zylinder um die hydrostatische Achse beschrieben. Daraus folgt, dass ein Versagen unter hydrostatischer Zugbeanspruchung mit diesem Kriterium nicht abbildbar ist.

Nach der *Coulomb-Mohr-Hypothese* wird nach Vorbild des Coulombschen Reibungsgesetzes Versagen bzw. Abgleiten des Materials auf einer Schnittfläche mit dort wirkender, resultierender Schubspannung τ und Normalspannung σ postuliert, wenn die Haftreibungskräfte plus Kohäsionsfestigkeit R_k in dieser Schnittfläche überwunden werden:

$$|\tau| = -\sigma \tan \rho + R_k. \quad (2.63)$$

Hierin stellt ρ den sogenannten Reibungswinkel dar. Der Zusammenhang zur im einachsigen Zugversuch ermittelten Zugfestigkeit R_t bzw. im Druckversuch ermittelten Druckfestigkeit R_c lautet

$$R_t = \frac{2R_k \cos \rho}{1 + \sin \rho}, \quad R_c = \frac{2R_k \cos \rho}{1 - \sin \rho}. \quad (2.64)$$

Die Hypothese findet aufgrund ihrer guten Aussagequalität für geologische und granulare Materialien breite Anwendung. Sie bildet weiterhin die Grundlage neuerer Zwischenfaserverbrückungskriterien für Faserverbundwerkstoffe.

Transversal isotrope Werkstoffe

Eine vergleichsweise verbreitete Gruppe transversal isotroper Werkstoffe sind unidirektional faserverstärkte Materialien (typischerweise Kunststoffe oder Keramiken), die als Schichten unterschiedlicher Orientierung zu einem Faserverbund-Laminat zusammengefügt werden (Mittelstedt u. Becker, 2016). In diesen Verbundwerkstoffen weisen die Fasern oft wesentlich und mitunter ganz erheblich größere Festigkeiten als die umgebende Matrix auf. Als eine Folge dieses Kontrastes entwickeln derlei Werkstoffe verschiedene Versagensmoden: Faserversagen,

⁶ Die Gestaltänderungsenergiehypothese ist von der Formänderungsenergiehypothese nach Beltrami abgeleitet. Wie die Spannungen und Verzerrungen kann die Formänderungsenergiegedichte U in einen volumen- und einen gestaltänderungsbedingten Anteil U_V bzw. U_G zerlegt werden. Gegenüber der Formänderungsenergiehypothese wird der volumenänderungsbedingte Anteil aus dem Kriterium ausgeschlossen.

Matrixversagen, Faser-Matrix-Ablösung. Im Falle eines Laminats können zusätzlich auch Ablösungen zwischen den Schichten, sogenannte Delaminationen, auftreten. Den unterschiedlichen Versagensmechanismen ist durch die Festigkeitskriterien Rechnung zu tragen.

Zur Charakterisierung der transversal isotropen Werkstoffe haben sich die Folgenden fünf Festigkeitswerte etabliert, angegeben in einem Materialkoordinatensystem, dessen 1-Richtung sich an der Faserausrichtung orientiert:

R_{\parallel}^t Zugfestigkeit in Faserrichtung,

R_{\parallel}^c Druckfestigkeit in Faserrichtung,

R_{\perp}^t Zugfestigkeit quer zu Faserrichtung,

R_{\perp}^c Druckfestigkeit quer zu Faserrichtung,

$R_{\perp\parallel}$ Scherfestigkeit.

Das *Kriterium maximaler Spannungen* entspricht einer Übertragung der Hauptspannungshypothese auf transversal isotrope Werkstoffe. Dementsprechend hat es den gleichen Nachteil, dass es jegliche in Experimenten beobachtete Interaktion der Spannungen nicht abbilden kann. Es postuliert Versagen, wenn eine der folgenden Bedingungen verletzt ist:

$$-R_{\parallel}^c < \sigma_{11} < R_{\parallel}^t, \quad \sigma_{\max}^{(23)} < R_{\perp}^t, \quad -\sigma_{\min}^{(23)} < R_{\perp}^c, \quad \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2} < R_{\perp\parallel}, \quad (2.65)$$

wobei $\sigma_{\max}^{(23)}, \sigma_{\min}^{(23)}$ die Hauptspannungen der Ebenen quer zur Faserrichtung (2,3-Ebene) seien:

$$\sigma_{\max}^{(23)}, \sigma_{\min}^{(23)} = \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2}\right)^2 + \tau_{23}^2}, \quad \sigma_{\max}^{(23)} > \sigma_{\min}^{(23)}. \quad (2.66)$$

In der für Laminats häufig ebenen Betrachtung (unter der Annahme vernachlässigbarer Spannungen in Laminatdickenrichtung $\sigma_{33} = \tau_{13} = \tau_{33} = 0$) vereinfacht sich das Kriterium dahingehend, dass $\sigma_{\max}^{(23)} = \sigma_{\min}^{(23)} = \sigma_{22}$ wird.

Eine gewisse Wechselwirkung der Spannungen wird im *Kriterium maximaler Verzerrungen* wieder durch die Querkontraktion erzielt. Hierfür sind im Kriterium maximaler Spannungen (2.65) einfach die Spannungen durch das entsprechende Produkt aus Elastizitätsmoduln und Verzerrungen zu ersetzen, sodass

$$-\frac{R_{\parallel}^c}{E_{11}} < \varepsilon_{11} < \frac{R_{\parallel}^t}{E_{11}}, \quad \varepsilon_{\max}^{(23)} < \frac{R_{\perp}^t}{E_{22}}, \quad -\varepsilon_{\min}^{(23)} < \frac{R_{\perp}^c}{E_{22}}, \quad \sqrt{\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2} < \frac{R_{\perp\parallel}}{G_{12}}. \quad (2.67)$$

Die Dehnungen $\varepsilon_{\max}^{(23)}$ und $\varepsilon_{\min}^{(23)}$ ergeben sich ebenfalls entsprechend.

Zwei der aktuell wohl leistungsfähigsten Festigkeitskriterien für transversal isotrope Werkstoffe (vgl. World-Wide-Failure-Excercise (Hinton et al., 2004, Kaddour u. Hinton, 2013)) sind das *Pucksche Wirkebenenkriterium* (Puck, 1996, Kap. 9, S. 160) und das *Versagensmodus-Konzept* nach Cuntze u. Freund (2004), Cuntze (2004, 2006) (engl. Failure-Mode-Concept, FMC). Puck unterschied schon Ende der 1960er Jahre (Puck, 1996) die unterschiedlichen Versagensmechanismen in Faser-Verbund-Laminaten und trug damit als einer der ersten dem gegenüber Metallen gänzlich unterschiedlichen Versagensverhalten der Faserverbundstrukturen Rechnung, die nicht duktil sondern spröde, aber trotzdem nicht plötzlich sondern schrittweise versagen. Insbesondere unterschied er faserdominierte (engl. fiber failure, FF) und

matrixdominierte (engl. inter fiber failure, IFF) Versagensmechanismen, von denen erstere normalerweise zum Totalversagen führen, während zweitere im Faserverbund-Laminat vergleichsweise früh auftreten, dafür aber häufig nur eine allmähliche Schwächung des Laminats verursachen.

Puck verwendet eine lokale Materialanstrengung \mathcal{E} (engl. effort) zur Definition seines Versagenskriteriums. Eine Überbeanspruchung wird postuliert, wenn die Materialanstrengung

$$\mathcal{E}(\sigma_{ij}, R_{\parallel}^{c/t}, R_{\perp}^{c/t}, R_{\perp\parallel}) = 1 \quad (2.68)$$

erreicht oder überschritten wird. Die Materialanstrengung ist dann derjenige Wert, durch den der lokale Spannungstensor dividiert werden muss, damit an diesem Punkt das Versagenskriterium gerade Materialversagen vorhersagt. Damit ist die Materialanstrengung ein lineares Maß dafür, wie nahe die aktuelle Beanspruchung einer Versagensvorhersage durch das Versagenskriterium ist, unterscheidet jedoch nicht zwischen lastinduzierten und übrigen Spannungen.⁷

Als Teilkriterien für die faserdominierten Versagensmoden empfiehlt Puck ein Kriterium auf Basis der Faserbeanspruchung in einem Faserverbundmaterial. Es liefert nur geringfügig höhere mögliche Lasten als ein Kriterium maximaler Dehnungen. Für detailliertere Ausführungen sei auf die Spezialliteratur verwiesen (Puck, 1996, Kap. 5.2). Die Teilkriterien für die matrixdominierten Versagensmoden stützen sich auf die physikalisch basierte Mohr-Coulomb-Hypothese. Sie werden für eine Wirkebene (engl.: action plane, A) mit dort freigeschnittenen Normalspannungen σ_n und Schubspannungen τ_{n1} , τ_{nt} definiert, die eine beliebige mit θ um die Faserachse rotierte Ebene sein kann. Sie lauten folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{IFF}} &= \left(\sqrt{\left(\frac{1}{R_{\perp}^t} - \frac{p_{\perp\psi}^t}{R_{\perp\psi}^A} \right)^2 \sigma_n^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^t}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n \right), \quad \sigma_n \geq 0 \\ \mathcal{E}_{\text{IFF}} &= \left(\sqrt{\left(\frac{p_{\perp\psi}^c}{R_{\perp\psi}^A} \right)^2 \sigma_n^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^c}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n \right), \quad \sigma_n < 0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

mit den sogenannten Neigungsmaßen $p_{\perp\psi}^t, p_{\perp\psi}^c$ und den Bruchwiderständen in der Wirkebene $R_{\perp\psi}^A, R_{\perp\perp}^A$. Dafür empfiehlt Puck folgende Interpolation:

$$\frac{p_{\perp\psi}^{c/t}}{R_{\perp\psi}^A} = \frac{p_{\perp\perp}^{c/t}}{R_{\perp\perp}^A} \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp\parallel}^{c/t}}{R_{\perp\parallel}} \sin^2 \psi \quad \text{mit} \quad \psi = \arctan(\tau_{n1}/\tau_{nt}).$$

Der Bruchwiderstand $R_{\perp\perp}^A$ ist schwer direkt zu messen, kann aber indirekt bestimmt werden, da bei Matrixversagen unter Druck quer zur Faserrichtung Schubversagen auftritt und dieser Bruchwiderstand in diesem Fall die entscheidende Rolle spielt:

$$R_{\perp\perp}^A = \frac{R_{\perp}^c}{2(1 + p_{\perp\perp}^c)}.$$

⁷ Die Materialanstrengung ist also nicht mit einem Reservelastfaktor zu verwechseln, der angibt, um welchen Faktor die anliegende Belastung weiter erhöht werden könnte, bis Versagen eintritt. Wenn keine Eigenspannungen vorhanden sind und ein sich linear verhaltendes System vorliegt, entspricht der Kehrwert der Materialanstrengung zwar gerade einem Reservelastfaktor, ansonsten ist das aber nicht der Fall.

Weiterhin bestimmen sich die Neigungsmaße mit dem unter reiner Druckbelastung auftretenden und von der Lastnormalen abweichenden Bruchwinkel θ_{fp}^c zu

$$p_{\perp\perp}^t = p_{\perp\perp}^c = -\frac{\cos(2\theta_{\text{fp}}^c)}{1 + \cos(2\theta_{\text{fp}}^c)}.$$

Die übrigen Neigungsmaße $p_{\perp\parallel}^{c/t}$ sind z. B. mittels einer Fehlerquadratmethode experimentellen Befunden anzupassen. Liegen keine ausreichenden experimentellen Daten vor, empfiehlt Puck die Neigungsmaße wie folgt anzunehmen:

$$p_{\perp\perp}^t = p_{\perp\perp}^c = 0,15 \quad (\hat{=} \theta_{\text{fp}}^c \approx 49^\circ) \quad , \quad p_{\perp\parallel}^c = 0,2 \quad , \quad p_{\perp\parallel}^t = 0,3 .$$

Die Anstrengungen sind abhängig von der betrachteten Wirkebene und somit eine Funktion von θ . Die Bruchebene θ_{fp} (engl. fracture plane) ist diejenige Wirkebene, für die die Materialanstrengung maximal wird. Sie ergibt sich also unter den Annahmen der linearen Elastizitätstheorie und in Abwesenheit von Eigendehnungen durch das Optimierungsproblem:

$$\max_{\theta \in [0, \pi/2]} \{ \mathcal{E}_{\text{IFF}}(\theta) \} \quad \longrightarrow \quad \theta_{\text{fp}} . \quad (2.70)$$

Cuntzes FMC ist teils eine Verallgemeinerung, teils aber auch eine Vereinfachung des Puckschen Wirkebenenkriteriums. Einerseits knüpft es die Anzahl der Versagensmoden an die Materialsymmetrien und damit an die Anzahl unabhängiger Elastizitätskonstanten. Andererseits basiert es nur auf Invarianten des Spannungstensors anstatt der Spannungen einer Wirkebene. Damit fällt die i. A. aufwendige Suche nach der kritischen Wirkebene θ_{fp} weg. Die Invarianten sind im Materialkoordinatensystem x_1, x_2, x_3 für transversal isotropes Materialverhalten definiert, wobei die 1-Achse in Faserrichtung zeigt:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11} , & I_2 &= \sigma_{22} + \sigma_{33} , & I_3 &= \tau_{13}^2 + \tau_{12}^2 , \\ I_4 &= (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 4\tau_{23}^2 , & I_5 &= (\sigma_{22} - \sigma_{33})(\tau_{13}^2 - \tau_{12}^2) - 4\tau_{23}\tau_{13}\tau_{12} . \end{aligned} \quad (2.71)$$

Cuntze postuliert die matrixdominierten Versagensmoden Matrixzugversagen (IFF1), Matrixschubversagen (IFF2) und Matrixdruckversagen (IFF3) sowie die faserdominierten Versagensmoden Faserzugversagen (FF1) und Faserdruckversagen (FF2). Die Anstrengungen bezüglich der einzelnen Versagensmoden errechnen sich damit zu

$$\begin{aligned} \text{IFF1} : \mathcal{E}_{\text{IFF1}} &= \left(I_2 + \sqrt{I_4} \right) / (2R_{\perp}^t) , & \text{FF1} : \mathcal{E}_{\text{FF1}} &= I_1 / R_{\parallel}^c , \\ \text{IFF2} : \mathcal{E}_{\text{IFF2}} &= \sqrt[3]{I_3^{3/2} + b_{\perp\parallel}(I_2 I_3 - I_5)} / R_{\perp\parallel} , & \text{FF2} : \mathcal{E}_{\text{FF2}} &= -I_1 / R_{\parallel}^t , \\ \text{IFF3} : \mathcal{E}_{\text{IFF3}} &= \left((b_{\perp} - 1)I_2 + \sqrt{4b_{\perp}I_4 + (b_{\perp} - 1)^2 I_5^2} \right) / (2R_{\perp}^c) . \end{aligned} \quad (2.72)$$

Die Werte für die Koeffizienten $b_{\perp\parallel}$ und b_{\perp} sind an Testergebnisse anzupassen. Cuntze gibt die Erfahrungswerte

$$0,05 < b_{\perp\parallel} < 0,15 \quad \text{und} \quad 1,0 < b_{\perp} < 1,6$$

an.⁸ Gerade für Versagensmodus IFF2 hat Cuntze diverse Variationen des Teilkriteriums vorgeschlagen (Cuntze u. Freund, 2004, Cuntze, 2006, 2012). Das hier präsentierte zeichnet sich durch seine Linearität in den Spannungen aus. Allerdings ist es möglich, dass

$$I_3^{3/2} + b_{\perp\parallel}(I_2 I_3 - I_5) \longrightarrow 0 ,$$

⁸Die Wahl zu $b_{\perp} = 1,2$ führt für eine reine Druckbelastung quer zur Faserrichtung auf eine Bruchwinkelvorhersage von $\theta_{\text{fp}}^c \approx 50^\circ$.

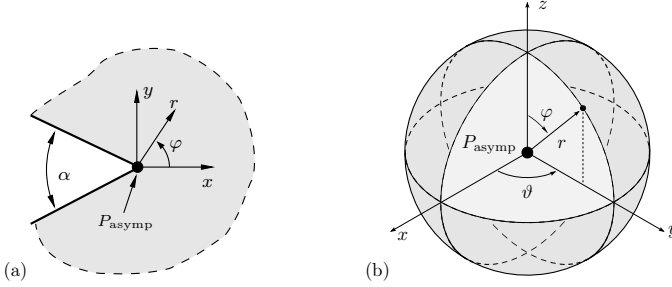


Abbildung 2.3: Beispielhafte Problemstellungen mit Spannungssingularität am Punkt P_{asypm} : (a) V-Kerbe, 2D; (b) Fichera-Ecke, 3D.

und damit auch die Anstrengung $\mathcal{E}_{\text{IFF}2}$ gegen Null tendiert, obwohl die Spannungsinvarianten $I_2, I_3, I_5 \neq 0$ und deshalb effektiv eine Materialanstrengung vorliegen sollte. Andere Formulierungen dieses Teilkriteriums besitzen diesen Schwachpunkt nicht, geben dafür aber die Linearität in den Spannungen auf.

Die Interaktion der verschiedenen Teilanstrengungen wird einfach durch Verwendung eines Interaktionsexponenten m abgebildet:

$$\mathcal{E}_{\text{res}} = [(\mathcal{E}_{\text{FF}1})^m + (\mathcal{E}_{\text{FF}2})^m + (\mathcal{E}_{\text{IFF}1})^m + (\mathcal{E}_{\text{IFF}2})^m + (\mathcal{E}_{\text{IFF}3})^m]^{1/m}. \quad (2.73)$$

Für den Interaktionsexponenten werden Werte zwischen $m = 2,5, \dots, 3,0$ empfohlen. Um das Auftreten negativer Anstrengungen zu unterbinden, sind nur diejenigen Anstrengungen in der Interaktionsformel (2.73) vorzusehen, die größer als Null sind, z. B. durch eine Modifikation folgender Art:

$$\mathcal{E}_{\text{res}} = \left[\left(\frac{\mathcal{E}_{\text{FF}1} + \|\mathcal{E}_{\text{FF}1}\|}{2} \right)^m + \dots \right]^{1/m}. \quad (2.74)$$

2.2.2 Asymptotische Nahfelder und Spannungssingularitäten

Asymptotische Nahfelder bezüglich eines Punktes P_{asypm} sind solche Verschiebungs- und zugehörigen Verzerrungs- sowie Spannungsfelder, die sowohl die Feldgleichungen⁹ sowie die lokalen Randbedingungen in der unmittelbaren Umgebung eines Punktes P_{asypm} erfüllen. Sie werden in zweidimensionalen Problemstellungen typischerweise in Polarkoordinaten r, φ oder in dreidimensionalen Problemstellungen in Kugelkoordinaten r, φ, ϑ als Potenzreihen folgender Form angegeben (mit Abstand r von Punkt P_{asypm}):

$$\mathbf{u}(r, \varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} c_{\text{u}j}^{2\text{D}} r^{\lambda_j^{2\text{D}}} \boldsymbol{\phi}_{\text{u}j}^{2\text{D}}(\varphi) \quad , \quad \boldsymbol{\sigma}(r, \varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} c_{\boldsymbol{\sigma}j}^{2\text{D}} r^{\lambda_j^{2\text{D}}-1} \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{\sigma}j}^{2\text{D}}(\varphi) \quad , \quad (2.75)$$

$$\mathbf{u}(r, \varphi, \vartheta) = \sum_{j=1}^{\infty} c_{\text{u}j}^{3\text{D}} r^{\lambda_j^{3\text{D}}} \boldsymbol{\phi}_{\text{u}j}^{3\text{D}}(\varphi, \vartheta) \quad , \quad \boldsymbol{\sigma}(r, \varphi, \vartheta) = \sum_{j=1}^{\infty} c_{\boldsymbol{\sigma}j}^{3\text{D}} r^{\lambda_j^{3\text{D}}-1} \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{\sigma}j}^{3\text{D}}(\varphi, \vartheta) \quad . \quad (2.76)$$

⁹ Gleichgewichtsbedingungen (2.12), Kinematik (2.18) und Elastizitätsgesetz (2.24)

Die Exponenten λ_j sind i. A. reelle Zahlen oder treten in komplex konjugierten Paaren auf. Sie werden hier als Abklingexponenten bezeichnet, da sie das Abklingverhalten der Verschiebungen zum Punkt P_{asympt} hin ($r \rightarrow 0$) charakterisieren. Wie die Abklingexponenten sind die tensoriellen Winkelfunktionen ϕ_{u_j} und ϕ_{σ_j} i. A. ebenfalls reell oder treten in komplex konjugierten Paaren auf. Die Terme $r^{\lambda_j} \phi_{u_j}$ werden als Deformationsmoden und die Terme $r^{\lambda_j-1} \phi_{\sigma_j}$ als Spannungsmoden bezeichnet und ergeben sich (bis auf einen Vorfaktor) eindeutig aus der asymptotischen Problemstellung zur Erfüllung der Feldgleichungen und lokalen Randbedingungen. Sie sind in der Potenzreihe jeweils mit ihren zugehörigen modalen Wichtungsfaktoren c_{u_j} bzw. generalisierten Spannungsintensitätsfaktoren c_{σ_j} (engl.: generalized stress intensity factor, GSIFs) gewichtet, welche sich aber erst eindeutig aus den globalen Randbedingungen bestimmen.¹⁰

Yosibash u. Szabó (1995) geben an, dass Kondrat'ev (1967) habe zeigen können, dass die angegebene Potenzreihe (2.75) einen vollständigen Funktionenraum für das isotrope linear-elastische Randwertproblem mit Multimaterialecken darstelle, gleichzeitig aber bisher kein gleichwertiger Beweis für den zweidimensionalen, anisotropen Fall geschweige denn den dreidimensionalen, anisotropen Fall gefunden worden sei. Dennoch werden diese Potenzreihen in zahlreichen Arbeiten erfolgreich angewendet und daher auch im Rahmen dieser Arbeit als valide angenommen.

Aus den Potenzreihen ist unmittelbar ersichtlich, dass der Spannungstensor bei P_{asympt} für $(\lambda_j - 1) < 0$ singularär wird. Dann werden die Exponenten im Nenner $(1 - \lambda_j)$ auch Spannungssingularitätsexponenten genannt. Diese sind in den häufig betrachteten homogen-isotropen Strukturkonfigurationen fast immer reell, aber in einigen (in der Masterarbeit von Brod (2015) aufgezeigten) Ausnahmefällen auch komplex. In Mehrmaterialkonfigurationen ist stets auch mit komplexen Spannungssingularitäten zu rechnen. Sie zeichnen sich aufgrund ihres Imaginärteils durch oszillierende Spannungen und Verschiebungen aus. Häufig sind die Imaginärteile der Spannungssingularitätsexponenten jedoch sehr klein, sodass sich die angesprochenen Oszillationen tatsächlich nur in einem vernachlässigbar kleinen Bereich um den Punkt singularärer Spannungen abspielen (Gross u. Seelig, 2016, Kap. 4.12 – Der Grenzflächenriss). Generell treten die Spannungssingularitäten wie ihre zugehörigen Deformationsmoden aber natürlich nur dann auf, wenn auch ihre zugehörigen GSIFs $c_{\sigma_j} \neq 0$ sind. Somit ist ihr tatsächliches Auftreten letztendlich vom gegebenen Lastfall abhängig.

Für die Spannungssingularitätsexponenten $(1 - \lambda_j)$ lässt sich aus der Forderung einer beschränkten Formänderungsenergie eine Obergrenze ableiten. Die Formänderungsenergie bzw. das innere Potential Π^i bestimmt sich durch Integration der Formänderungsenergiegedichte U über das Volumen V zu

$$\Pi^i = \int_V U \, dV .$$

Sowohl die Spannungen als auch Verzerrungen sind proportional zu r^{λ_j-1} , sodass für die Formänderungsenergiegedichte folgt:

$$\boldsymbol{\sigma} \propto r^{\lambda_j-1} , \quad \boldsymbol{\varepsilon} \propto r^{\lambda_j-1} \quad \longrightarrow \quad U \propto r^{2(\lambda_j-1)} .$$

¹⁰ Die modalen Wichtungsfaktoren und GSIFs sind dabei linear abhängig und daher von ihrer Bedeutung her weitgehend äquivalent. Eine ausführliche Diskussion hierzu findet sich zu Beginn von Kapitel 4.2.3.

Gleichzeitig ist das Volumendifferential in Polarkoordinaten $dV \propto r dr$ und in Kugelkoordinaten $dV \propto r^2 dr$, sodass sich der Integrand $U dV$ zu

$$U dV \propto r^{2(\lambda_j^{2D}-1)+1} dr \quad \text{in 2D und} \quad (2.77)$$

$$U dV \propto r^{2\lambda_j^{3D}} dr \quad \text{in 3D} \quad (2.78)$$

ergibt. Damit gilt für die Formänderungsenergie:

$$\Pi^i \propto r^{2\lambda_j^{2D}} \quad \text{in 2D und} \quad (2.79)$$

$$\Pi^i \propto r^{2\lambda_j^{3D}+1} \quad \text{in 3D} \quad (2.80)$$

und aus der Forderung nach Beschränktheit dieser ergeben sich die Untergrenzen für die Spannungssingularitätsexponenten $(1-\lambda_j)$

$$2\lambda_j^{2D} \geq 0 \quad \longrightarrow \quad (1-\lambda_j^{2D}) \leq 1 \quad \text{in 2D und} \quad (2.81)$$

$$2\lambda_j^{3D} + 1 \geq 0 \quad \longrightarrow \quad (1-\lambda_j^{3D}) \leq 1,5 \quad \text{in 3D.} \quad (2.82)$$

Wird auch eine Beschränkung der Verschiebungen \mathbf{u} gefordert, dann ergibt sich für zweidimensionale Problemstellungen kein Unterschied. Für dreidimensionale Problemstellungen folgt aber eine strengere Grenze, die dann mit derjenigen zweidimensionaler Problemstellungen zusammenfällt:

$$\lambda_j^{2D} \geq 0 \quad \longrightarrow \quad (1-\lambda_j^{2D}) \leq 1 \quad \text{in 2D und} \quad (2.83)$$

$$\lambda_j^{3D} \geq 0 \quad \longrightarrow \quad (1-\lambda_j^{3D}) \leq 1 \quad \text{in 3D.} \quad (2.84)$$

Es ist anzumerken, dass z.B. die Einzelkraftlösungen (weder 2D mit $\sigma_{ij} \propto 1/r$ noch 3D mit $\sigma_{ij} \propto 1/r^2$, vgl. z. B. Becker u. Gross (2002)) die Forderungen nach Beschränktheit sowohl der Verschiebungen als auch der Formänderungsenergie nicht erfüllen und trotzdem von elementarer Bedeutung für diverse Disziplinen der Mechanik sind.

Es ist zu beachten, dass ein Abklingexponent $\lambda_j = 0$ zu von der radialen Koordinate unabhängigen Verschiebungen ($r^0 = 1$) führt. Die zugehörigen Winkelfunktionen sind dann typischerweise auch konstant, sodass die entsprechenden Deformationsmoden gerade die Starrkörperverschiebungen abbilden.

Im Allgemeinen können auch logarithmische Deformationsmoden auftreten, die sich dadurch auszeichnen, dass ihr Verschiebungsfeld zusätzlich einen Faktor $\ln r$ enthält. Neben der Einzelkraftlösung im zweidimensionalen, linear-elastischen Randwertproblem (die auf den dreidimensionalen Fall übertragen eigentlich dem Einwirken einer Linienlast entspricht) stellen sie jedoch nur ausgesprochene Ausnahmefälle dar. Denn sie treten sonst nur dann auf, wenn durch Veränderung von Geometrie- bzw. Materialparametern gerade ein Übergang von zwei komplex konjugierten zu zwei reellen Deformations- bzw. Spannungsmoden stattfindet und können in einem Diagramm mit Darstellung der Spannungssingularitätsexponenten über Geometrie-/Materialparametervariationen als dort auftretende Verzweigungspunkte identifiziert werden (Sator, 2010). Aufgrund ihres dadurch äußerst unwahrscheinlichen Auftretens, seien sie hier nicht weiter berücksichtigt.

Schließlich sei noch die Klassifizierung von Spannungssingularitäten in die Untergruppen von starken und schwachen Singularitäten eingeführt. Diese Klassifizierung erfolgt anhand

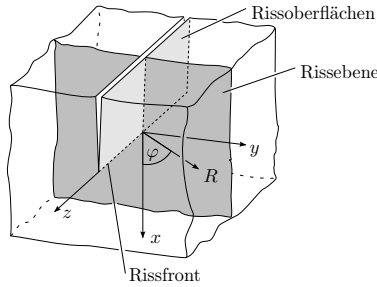


Abbildung 2.4: Kontinuum mit ebenem Riss.

der Spannungssingularitätsexponenten und orientiert sich damit am Abklingverhalten der Spannungen. Schwache Spannungssingularitäten sind solche, die einen Spannungssingularitätsexponenten mit $0 < \text{Re}(1 - \lambda) < 0,5$ aufweisen, während starke Spannungssingularitäten einen Spannungssingularitätsexponenten mit $\text{Re}(1 - \lambda) > 0,5$ besitzen. Auf diese Klassifizierung wird im Folgekapitel 2.2.3 nochmals genauer eingegangen.

2.2.3 Lineare Bruchmechanik für spröde Werkstoffe

Gegenstand der linear-elastischen Bruchmechanik (LEBM) ist in erster Linie die Bewertung von Rissen. Aus makroskopischer Sicht stellt ein Riss einen Schnitt in einem Körper dar. Seine gegenüberliegenden Berandungen sind die Rissoberflächen, werden aber auch Rissflanken oder Rissufer genannt (Abb. 2.4). Sie sind häufig, aber nicht notwendigerweise belastungsfrei¹¹. Der Riss endet an der Rissfront, die im Falle einer rein zweidimensionalen Betrachtung nur der Rissebene oft auch nur als Risspitze bezeichnet wird.

Die Bewertung eines Risses läuft typischerweise auf die Frage hinaus, ob der betrachtete Riss in einer gegebenen Struktur- und Lastsituation wachsen, also von einem stationären in einen instationären Zustand übergehen wird. Beim Risswachstum wird weiterhin zwischen stabilem und instabilem Risswachstum unterschieden: *Stabiles Risswachstum* liegt vor, wenn für das weitere Risswachstum eine Steigerung der Belastung notwendig ist. Bei *instabilem Risswachstum* breitet sich der Riss auch ohne weitere Erhöhung der Belastung spontan aus. Kommt ein Riss danach wieder zum Stillstand, wird dies *Rissarrest* genannt.

Hinsichtlich der Deformation eines Risses werden drei Rissöffnungsmoden unterschieden (s. Abb. 2.5): Modus I zeichnet sich durch rein ebene, zur Ebene der Rissflanken *symmetrische* Verschiebungen

$$u(x, y) = u(x, -y) \quad , \quad v(x, y) = -v(x, -y) \quad , \quad w = 0 \quad (2.85)$$

und Modus II durch ebenfalls rein ebene, aber bezüglich der Ebene der Rissflanken *antisymmetrische* Verschiebungen aus

$$u(x, y) = -u(x, -y) \quad , \quad v(x, y) = v(x, -y) \quad , \quad w = 0 \quad (2.86)$$

¹¹ Ein aktuelles, in der zeitgenössischen Literatur häufig betrachtetes Beispiel mit belasteten Rissufern ist das sogenannte *Fracking*, bei dem Gesteinsschichten durch Einpumpen eines flüssigen Mediums unter hohem Druck aufgebrochen und so dort gespeicherte fossile Brennstoffe zugänglich gemacht werden.

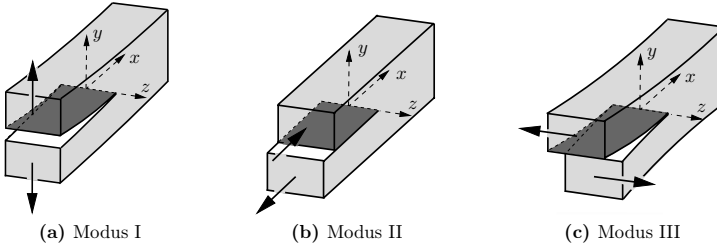


Abbildung 2.5: Rissöffnungsmoden (Gross u. Seelig, 2016).

Schließlich ist Modus III durch rein nichtebene Verschiebungen in Richtung der Rissfront gekennzeichnet

$$u = 0 \quad , \quad v = 0 \quad , \quad w(x, y) = -w(x, -y) \quad , \quad (2.87)$$

die ebenfalls zu einer Separation der Rissflanken führen. Eine Überlagerung dieser Rissöffnungsmoden wird auch als Mixed-Mode-Beanspruchung bezeichnet.

Eine wichtige Rolle für die kontinuumsmechanische Beschreibung eines Risses spielt die so genannte Prozesszone. Sie beschreibt die Region in der Umgebung einer Rissfront (bzw. Risssspitze), in der die inelastischen Prozesse der Bindungslösung stattfinden, die mit der klassischen Kontinuumsmechanik nicht mehr beschrieben werden können. Ist die Prozesszone klein gegenüber den übrigen Strukturabmessungen und somit auch die von ihr implizierte Störung der klassisch-kontinuumsmechanischen, linear-elastischen Lösung des Rissproblems klein, ist letztere zur Beschreibung des makroskopischen Verhaltens hinreichend.¹² Diese Annahme ist vor allem für spröde Materialien erfüllt und die LEBM somit im Besonderen zur Beschreibung des Sprödbruchs geeignet. In diesen Fällen ist die asymptotische, linear-elastische Nahfeld-Lösung an der Rissfront von fundamentaler Bedeutung zur Rissbewertung.

Das asymptotische Nahfeld eines Risses im homogen-isotropen Kontinuum

Das asymptotische Nahfeld an einer Rissfront im homogen-isotropen Kontinuum lässt sich im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie wirkungsvoll mit der Methode komplexer Potentiale bestimmen. Eine ausführliche Herleitung ist z. B. von Lekhnitskiĭ (1963) gegeben (eine kompakte auch von Gross u. Seelig (2016)). Die Spannungslösung mit der klassischen Risssspitzeningularität $\sigma_{ij} \propto 1/\sqrt{r}$ für die drei Rissmoden Modus I, II und III wird in Polarkoordinaten wie folgt angegeben und gilt für die Annahmen des GEVZ¹³:

$$\sigma_{\mathbf{I}} = \frac{K_{\mathbf{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\varphi/2) \begin{bmatrix} 1 - \sin(\varphi/2) \sin(3\varphi/2) \\ 1 + \sin(\varphi/2) \sin(3\varphi/2) \\ 2\nu \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\varphi/2) \cos(3\varphi/2) \end{bmatrix} \quad \text{Modus I} \quad , \quad (2.88)$$

¹² Dies gilt genauso für auch für andere Struktursituation mit Spannungssingularitäten.

¹³ Dabei beinhaltet der GEVZ sowohl den Spezialfall des EVZ zur Bestimmung der asymptotischen Nahfelder von Modus I und II, als auch des longitudinalen Schubspannungszustands (vgl. z. B. Gross u. Seelig (2016)) zur Bestimmung des asymptotischen Nahfelds von Modus III.

$$\sigma_{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi/2) [2 + \cos(\varphi/2) \cos(3\varphi/2)] \\ \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2) \cos(3\varphi/2) \\ -2\nu \sin(\varphi/2) \\ 0 \\ 0 \\ \cos(\varphi/2) [1 - \sin(\varphi/2) \sin(3\varphi/2)] \end{bmatrix} \quad \text{Modus II ,} \quad (2.89)$$

$$\sigma_{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos(\varphi/2) \\ -\sin(\varphi/2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Modus III .} \quad (2.90)$$

Die zugehörigen Verschiebungsfelder lauten:

$$\mathbf{u}_I(r, \varphi) = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos(\varphi)) \begin{bmatrix} \cos(\varphi/2) \\ \sin(\varphi/2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Modus I} \quad (2.91)$$

$$\mathbf{u}_{II}(r, \varphi) = \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} \sin(\varphi/2) [2 + \kappa + \cos(\varphi)] \\ \cos(\varphi/2) [2 - \kappa - \cos(\varphi)] \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Modus II} \quad (2.92)$$

$$\mathbf{u}_{III}(r, \varphi) = \frac{2K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\varphi/2) \end{bmatrix} \quad \text{Modus III} \quad (2.93)$$

mit $\kappa = 3 - 4\nu$. Unter den Annahmen eines ESZ stellen sich die Spannungs- und Verschiebungsfelder von Modus I und II sehr ähnlich dar: Nur beträgt hier die Spannung $\sigma_z = 0$ und κ bestimmt sich zu $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$. Weiterhin ist das Abklingverhalten der Spannungen im Risspitzennahfeld, das durch den Spannungssingularitätsexponenten $1 - \lambda = 0,5$ charakterisiert ist, klassisch für viele Risskonfigurationen – auch in homogen-anisotropen Werkstoffen und in Materialgrenzflächen. Ein verändertes Abklingverhalten mit anderen Spannungssingularitätsexponenten tritt nur für Risskonfigurationen auf, bei denen zwar die Rissfront in einer Materialgrenzfläche liegt, nicht aber die Rissflanken.

Wie bei allen asymptotischen Nahfeldern sind auch die Deformationen und Spannungen der Rissmoden des Risses im homogen-isotropen Kontinuum bis auf die aus der äußeren Belastung und der Lage des Risses resultierenden Spannungsintensitätsfaktoren K_I , K_{II} und K_{III} (SIF) festgelegt. Damit stellen sie ein Maß für die Stärke der Beanspruchung der Struktur in der Umgebung des Risses dar und können dementsprechend zur Bewertung des Risses unter einer bestimmten Belastung herangezogen werden. So basiert das K-Konzept nach Irwin auf einem Vergleich der berechneten SIF mit einem kritischen Wert.

Für einige wenige Geometrie- und Lastsituationen existieren analytische Lösungen zur Bestimmung der SIF (Gross u. Seelig, 2016). Für viele Fälle sind aber auch auf numerischem Wege bestimmte SIF in einschlägigen Sammlungen angegeben (z. B. Tada et al. (2000)).

K-Konzept

Das K-Konzept nach Irwin geht davon aus, dass das Risspitzennahfeld (2.88-2.93) die Beanspruchung in einem Bereich dominiert, der gegenüber dem Bereich inelastischer Defor-

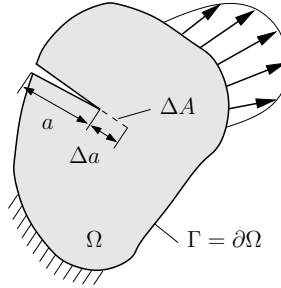


Abbildung 2.6: Rissfortschritt im elastischen Körper.

mationen um die Risspitze groß ist. Dies führt weiter zu der Annahme, dass die inelastischen Separationsprozesse dort auch weitgehend von den die Intensität des Rissspitzennahfeldes bestimmenden SIF gesteuert werden.¹⁴ Dann kann im Falle reiner Modus I-Beanspruchung das Rissfortschrittskriterium

$$K_I = K_{Ic} \quad (2.94)$$

mit der materialspezifischen kritischen Größe K_{Ic} , die experimentell zu bestimmen ist, formuliert werden.

Bei gemischter Beanspruchung ist entsprechend ein allgemeineres Kriterium zu verwenden:

$$f(K_I, K_{II}, K_{III}) = 1. \quad (2.95)$$

Energiebilanz beim Rissfortschritt und Griffithsches Kriterium

Es wird ein rissbehafteter, elastischer Körper betrachtet. Entlang seines Randes ∂V_t wirken äußere Lasten, während entlang seines Randes ∂V_u Verschiebungen vorgeschrieben sind (vgl. Abb. 2.1, 2.6). Weiterhin werden die Annahmen getroffen, dass alle angreifenden äußeren Lasten ein Potential II^a besitzen, also beispielsweise Totlasten oder Federkräfte sind. Der Rissfortschritt beinhaltet die Zustandsänderung von einem Gleichgewichtszustand 1 hin zu einem neuen Gleichgewichtszustand 2.

Damit die Energieprinzipien, wie in Kapitel 2.1.2 dargestellt, anwendbar werden, wird folgendes Gedankenmodell eingeführt:

- Der Körper sei entlang der durch einen neuen Rissfortschritt hinzugewinnbaren Rissoberfläche ΔA geschnitten.
- Im Zustand 1 sei der Riss entlang der Rissoberflächen ΔA durch dort wirkende äußere Lasten geschlossen. Dabei repräsentieren diese äußeren Lasten die Spannungen, die auf ΔA wirken würden, wäre der Körper nicht entlang ΔA geschnitten. Trotzdem wird ΔA als *nicht* zu ∂V_t gehörig betrachtet.
- Im Zustand 2 sei der Riss vollständig geöffnet und die kompletten Rissoberflächen (jetzt auch auf ΔA) seien spannungsfrei.

¹⁴ Dies setzt voraus, dass der Zustand der Prozesszone unabhängig von der Belastungsgeschichte der Risspitze ist, was z. B. bei Schwingbeanspruchung häufig nicht mehr gegeben ist.

- Die Zustandsänderung $1 \rightarrow 2$ entspricht der quasistatischen Reduktion der äußeren Lasten auf ΔA auf Null. Die übrigen Randbedingungen bleiben gleichzeitig unveränderlich.

Bei der quasistatischen Reduktion der Lasten auf ΔA verrichten sie eine Arbeit¹⁵

$$\Delta W_\sigma \leq 0.$$

Gleichzeitig leisten die äußeren Lasten auf ∂V_1 eine Arbeit W_{12}^a , mit

$$W_{12}^a = -\Delta \Pi^a = -(\Pi_2^a - \Pi_1^a).$$

Aus der Forderung nach Gleichheit der Änderung des elastischen Potentials und der verrichteten Arbeit äußerer Lasten ergibt sich damit:

$$\Delta \Pi^i = \Pi_2^i - \Pi_1^i = W_{12}^a + \Delta W_\sigma = -\Pi_2^a + \Pi_1^a + \Delta W_\sigma \quad (2.96)$$

und weiterhin mit dem Gesamtpotential $\Pi = \Pi^a + \Pi^i$

$$\Delta \Pi = \Delta W_\sigma \leq 0. \quad (2.97)$$

Diese unter einfachen Annahmen geschlussfolgerte Aussage steht mit dem aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik abgeleiteten Zusammenhang (2.50) im Einklang, wonach die (beim Bruchprozess) dissipierte Energie \mathcal{D} gerade der negativen Änderung des Gesamtpotentials entspricht.

Unter Annahme der Existenz einer spezifischen Bruchflächenenergie¹⁶ δ kann die beim Rissfortschritt dissipierte Energie \mathcal{D} auch durch

$$\mathcal{D} = 2 \int_A^{A+\Delta A} \delta \, d\tilde{A}$$

ausgedrückt werden, wobei $2\Delta A$ die beim Rissfortschritt neu entstandene Rissoberfläche beschreibt. Hiermit kann wiederum das energetisch basierte Bruchkriterium nach Griffith definiert werden:

$$-\Delta \Pi = 2 \int_A^{A+\Delta A} \delta \, d\tilde{A}. \quad (2.98)$$

Die spezifische Bruchflächenenergie wird häufig als Konstante angesehen, kann jedoch z. B. auch eine Funktion der Rissverlängerung Δa sein: $\delta = \delta(\Delta a)$. In jedem Fall erlaubt dieses Kriterium eine Aussage über die energetische Zulässigkeit eines finiten Risswachstums.

Für den Rissfortschritt sind zwei Sonderfälle zu betrachten:

- Werden die Verschiebungen auch auf dem Teil des Randes, für den die Verschiebungen als ungleich Null $u_i \neq 0$ und die äußeren Lasten als ungleich Null $t_i \neq 0$ definiert wurden, während des Rissfortschrittes festgehalten, ist die Änderung des äußeren Potentials $\Delta \Pi^a = 0$. Damit folgt, dass ΔW_σ mit der Änderung des inneren Potentials $\Delta \Pi^i$ gleichgesetzt werden kann:

$$\Delta W_\sigma = \Delta \Pi^i. \quad (2.99)$$

¹⁵ Grundsätzlich ist zwischen ΔW_σ und der beim Trennprozess des Materials geleisteten Arbeit der Bindungskräfte ΔW^B zu unterscheiden. Letztere ist eine materialspezifische Größe (Gross u. Seelig, 2016), während die erstgenannte beispielsweise auch von Fehlstellen im Material und damit von Fertigungsbedingungen abhängig ist.

¹⁶ Energie, die pro neu erzeugter Bruchoberfläche $2dA$ (dA am positiven wie auch negativen Rissufer) notwendig ist, um das Material entlang der Fläche dA zu trennen (Gross u. Seelig, 2016).

- b) Sind die äußeren Lasten Totlasten und die Voraussetzungen der linearen Elastizitätstheorie erfüllt, gilt der Satz von Clapeyron (2.57): $2 \Delta II^i + \Delta II^a = 0$. Damit wird ΔW_σ gleich der negativen Änderung des inneren Potentials ΔII^i bzw. gerade gleich der Hälfte der Änderung des äußeren Potentials $\Delta II^a/2$:

$$\Delta W_\sigma = -\Delta II^i = \frac{\Delta II^a}{2} . \quad (2.100)$$

Die Energiefreisetzungsrate ist die auf einen infinitesimalen Rissfortschritt dA bezogene freigesetzte Energie $-dII$

$$\mathcal{G} = -\frac{dII}{dA} . \quad (2.101)$$

Mit ihr folgt das heute meist als Griffith-Kriterium bezeichnete Kriterium für infinitesimalen Rissfortschritt:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_c , \quad (2.102)$$

wobei $\mathcal{G}_c = 2\delta$ dann nur noch als kritische Energiefreisetzungsrate oder Bruchzähigkeit (engl.: fracture toughness) bezeichnet wird. Es hat gegenüber dem ursprünglichen Kriterium (2.98) den Vorteil, dass keine weiteren Randwertprobleme für mögliche Folgerisskonfiguration mit finitem ΔA gelöst werden müssen, sondern schon anhand der Lösung des Randwertproblems vor Rissfortschritt eine Aussage bezüglich Rissfortschritt gemacht werden kann.

Unter Verwendung der differentiellen Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} ist eine Aussage darüber möglich, ob ein Riss stationär oder zumindest sein Wachstum stabil sind:

$$\text{stationär: } \mathcal{G} < \mathcal{G}_c \quad , \quad \text{instationär - stabil: } \left(\mathcal{G} = \mathcal{G}_c \wedge \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a} < 0 \right) , \quad (2.103)$$

Hierin ist a ein die Rissausdehnung beschreibender Parameter. Umgekehrt gilt, der Riss ist

$$\text{instationär - instabil: } \mathcal{G} > \mathcal{G}_c \vee \left(\mathcal{G} = \mathcal{G}_c \wedge \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a} \geq 0 \right) . \quad (2.104)$$

Es ist also essentiell, ob eine Struktur- und Lastsituation zu Energiefreisetzungsraten führt, die mit zunehmender Risslänge steigen oder fallen. Struktur- und Lastsituationen mit steigenden differentiellen Energiefreisetzungsraten werden auch als *positiv*, solche mit fallenden als *negativ* bezeichnet (z. B. Bažant u. Planas (1997), Hell et al. (2014), Weißgraeber et al. (2016)).

Zur Berechnung der Potentialdifferenz ΔII bzw. der verrichteten Arbeit ΔW_σ der den Riss schließenden, auf ΔA wirkenden Lasten $\mathbf{t}^{(1)} = [\sigma_n^{(1)}, \tau_{nt}^{(1)}, \tau_{ns}^{(1)}]^T$ bieten sich im Falle linearer Elastizität Rissschließintegrale an. Dabei bezeichnen $\sigma_n^{(1)}$ Normalspannungen und $\tau_{nt}^{(1)}, \tau_{ns}^{(1)}$ tangentielle Schubspannungen auf ΔA . Mit entsprechenden Rissuferverschiebungen $\mathbf{u}^{(2)+} = [u_n^{(2)+}, u_{nt}^{(2)+}, u_{ns}^{(2)+}]^T$, $\mathbf{u}^{(2)-} = [u_n^{(2)-}, u_{nt}^{(2)-}, u_{ns}^{(2)-}]^T$ ergibt sich das Risschliessintegral nach Rissmoden getrennt zu:

$$\begin{aligned} \Delta II_I &= -\frac{1}{2} \int_0^{\Delta A} \sigma_n^{(1)} \left(u_n^{(2)+} - u_n^{(2)-} \right) dA \\ \Delta II_{II} &= -\frac{1}{2} \int_0^{\Delta A} \tau_{nt}^{(1)} \left(u_{nt}^{(2)+} - u_{nt}^{(2)-} \right) dA \\ \Delta II_{III} &= -\frac{1}{2} \int_0^{\Delta A} \tau_{ns}^{(1)} \left(u_{ns}^{(2)+} - u_{ns}^{(2)-} \right) dA . \end{aligned} \quad (2.105)$$

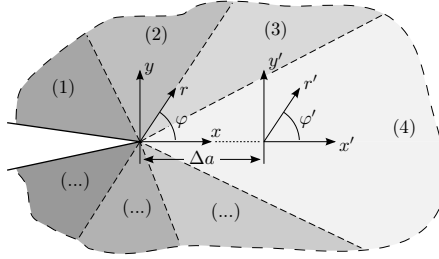


Abbildung 2.7: Multimaterialkerbe.

Hierin stehen „+“ sowie „-“ für die beiden gegenüberliegenden Rissoberflächen (Abb. 2.4) und (1), (2) kennzeichnen die Zustandsgrößen im Zustand 1 vor bzw. Zustand 2 nach Rissfortschritt um Δa . Weiterhin gilt

$$\Delta \Pi = \Delta \Pi_I + \Delta \Pi_{II} + \Delta \Pi_{III} . \quad (2.106)$$

Mit Hilfe des Risschliessintegrals sei nun auf die Klassifizierung von Spannungssingularitäten aus energetischer Sicht eingegangen. Dazu sei das zweidimensionale Randwertproblem einer Multimaterialkerbe in der x,y -Ebene mit asymptotischem Nahfeld der Form (2.75) betrachtet (Abb. 2.7). Von hier aus bilde sich ein Riss der Länge Δa in Richtung $\varphi = 0$. An der Risspitze des neu entstandenen Risses wird ein x', y' - bzw. r', φ' -Koordinatensystem eingeführt, in dem nun das asymptotische Nahfeld dieses Risses angegeben sei. Die Differenz des Gesamtpotentials zwischen den beiden Konfigurationen lautet dann:

$$\Delta \Pi = -\frac{1}{2} \int_0^{\Delta a} \mathbf{t}^{(1)}(r, \varphi=0) \cdot (\mathbf{u}^{(2)}(r', \varphi'=\pi) - \mathbf{u}^{(2)}(r', \varphi'=-\pi)) b \, dr , \quad (2.107)$$

wobei b die Ausdehnung des betrachteten Körpers in z -Richtung angibt und $\mathbf{t}^{(1)}$ den freigeschnittenen Spannungsvektor im Schnitt $\varphi = 0$ der ungerissenen Konfiguration (1) darstellt. Werden für den freigeschnittenen Spannungsvektor $\mathbf{t}^{(1)}$ im Schnitt $\varphi = 0$ der ungerissenen Konfiguration (1) sowie für die Verschiebungen $\mathbf{u}^{(2)}$ entlang der Rissflanken $\varphi' = \pm\pi$ die jeweiligen asymptotischen Nahfelder eingesetzt, ergibt sich für die Differenz des Gesamtpotentials eine Proportionalität der Form:¹⁷

$$\Delta \Pi \propto - \int_0^{\Delta a} r^{\lambda^{2D}-1} \sqrt{r'} b \, dr \quad (2.108)$$

Mit der Transformation¹⁸ $r' = \Delta a - r$ und Lösung des Integrals mit dem kommerziellen Computeralgebrasystem MATHEMATICA[®] für $\lambda > 0$ folgt:

$$\Delta \Pi \propto - \int_0^{\Delta a} r^{\lambda^{2D}-1} \sqrt{\Delta a - r} b \, dr = - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\lambda^{2D})}{\Gamma(\lambda^{2D} + 3/2)} b (\Delta a)^{\lambda^{2D}+1/2} . \quad (2.109)$$

¹⁷ Anmerkung: Starrkörpermoden sind von der Betrachtung ausgeschlossen. Denn ihr Spannungsvektor in der ungerissenen Konfiguration ist identisch null. Genauso ist die aus ihnen resultierende Differenz der Rissflankenverschiebungen in der gerissenen Konfiguration identisch null.

¹⁸ Es ist zu beachten, dass r' für $\varphi' = \pm\pi$ gegenüber r in entgegengesetzter Richtung zeigt.

Hierin stellt Γ die Eulersche Gammafunktion¹⁹ dar. Durch Bildung des Grenzwertes lässt sich damit die resultierende differentielle Energiefreisetzungsrate angeben:

$$\mathcal{G} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} -\frac{\Delta \Pi}{b \Delta a} \propto \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\lambda^{2D})}{\Gamma(3/2 + \lambda^{2D})} (\Delta a)^{\lambda^{2D} - 1/2}. \quad (2.110)$$

Damit folgt nur für die klassische Risspitzeningularität mit $\text{Re}(\lambda^{2D}) = 1/2$ eine finite differentielle Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} , die aber für eine sinnvolle Anwendbarkeit des Griffith-Kriteriums (2.102) notwendig ist.²⁰ Hingegen verschwindet für schwache Spannungssingularitäten $\text{Re}(\lambda^{2D}) > 1/2$, wie sie beispielsweise an Spitzkerben auftreten, die differentielle Energiefreisetzungsrate $\mathcal{G} = 0$, während sie für starke Spannungssingularitäten $\text{Re}(\lambda^{2D}) < 1/2$ unbeschränkt wird $\mathcal{G} \rightarrow \infty$.

Leguillon u. Sanchez-Palencia (1999) konnten mittels einer anderen Herangehensweise noch allgemeiner zeigen, dass dies generell, und damit genauso auch für 3D-Spannungssingularitäten, gilt:

$$\text{klassisch :} \quad \text{Re}(\lambda) = 1/2 \quad \text{bzw.} \quad \text{Re}(1 - \lambda) = 1/2 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{G} > 0, \quad (2.111)$$

$$\text{schwach :} \quad 1/2 < \text{Re}(\lambda) < 1 \quad \text{bzw.} \quad 0 < \text{Re}(1 - \lambda) < 1/2 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{G} = 0, \quad (2.112)$$

$$\text{stark :} \quad 0 < \text{Re}(\lambda) < 1/2 \quad \text{bzw.} \quad 1/2 < \text{Re}(1 - \lambda) < 1 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{G} \rightarrow \infty. \quad (2.113)$$

Für schwache sowie starke Spannungssingularitäten ist das Griffith-Kriterium (2.102) folglich nicht mehr sinnvoll anwendbar.

Abschließend für dieses Teilkapitel soll die Bedeutung von schwachen und starken Spannungssingularitäten für die Strukturen, in denen sie auftreten, noch kurz etwas näher betrachtet werden. Auch bei diesen speziellen Spannungssingularitäten wird Versagen durch Rissbildung eintreten. Sobald aber eine Risspitze vorliegt, sei der Riss auch noch so klein, können endliche differentielle Energiefreisetzungsraten für ihn angegeben werden. Leguillon u. Martin (2012, 2013) untersuchten die Struktursituation eines auf eine Materialgrenzfläche zulaufenden Risses der Länge a (vgl. Abb. 2.8). Endet der Riss gerade in der Materialgrenzfläche zwischen zwei isotropen Kontinua, liegt je nach Steifigkeitskontrast entweder eine starke oder eine schwache Spannungssingularität vor: Befindet sich der Riss in weicherem Material und trifft auf ein steiferes ($E_2 > E_1$), existiert nach der linearen Elastizitätstheorie eine schwache Spannungssingularität mit $\mathcal{G} = 0$. Kommt der Riss aus dem steiferen und trifft auf ein weiches Material ($E_2 < E_1$), existiert eine starke Spannungssingularität $\mathcal{G} \rightarrow \infty$. Unmittelbar bevor der Riss auf die Materialgrenzfläche trifft, liegt aber in jedem Fall noch eine klassische

¹⁹ Für diese gilt: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, $z \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(z) > 0$.

²⁰ Liegt sowohl als ungerissene Konfiguration (1) als auch als gerissene Konfiguration (2) ein Riss in homogen-isotroper Umgebung vor, vereinfacht sich die Darstellung (2.110) mit $\lambda^{2D} = 1/2$ zu $\mathcal{G} = f_{\text{prop}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\pi}$. Bei Annahme eines selbstähnlichen Risswachstums unter reiner Modus I-Beanspruchung ergibt sich der Proportionalitätsfaktor f_{prop} zu:

$$f_{\text{prop}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \frac{\kappa + 1}{2G} = \frac{K_I^2}{2\pi} \frac{8}{2E^*} = \frac{K_I^2}{E^*} \frac{2}{\pi}, \quad E^* = \begin{cases} E & \text{im Falle eines ESZ} \\ E/(1 - \nu^2) & \text{im Falle eines EVZ} \end{cases}.$$

Die differentielle Energiefreisetzungsrate lässt sich in Abhängigkeit der SIF aller drei Rissmoden dann einfach folgendermaßen angeben:

$$\mathcal{G} = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} + \frac{K_{III}^2}{2G}.$$

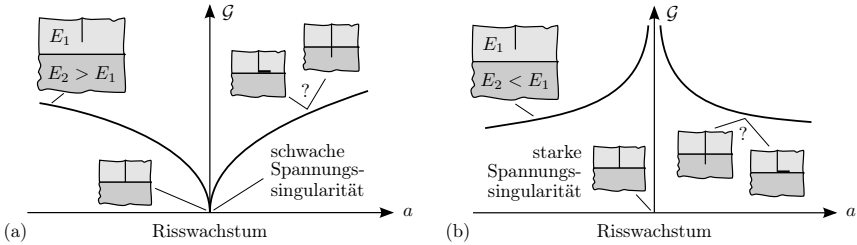


Abbildung 2.8: Schematische Darstellung des Verlaufs der differentiellen Energiefreisetzungsraten \mathcal{G} für Risskonfigurationen, die solchen mit (a) schwachen bzw. (b) starken Spannungssingularitäten benachbart sind, am Beispiel eines auf eine Materialgrenzfläche zwischen zwei isotropen Kontinua zulaufenden Risses.

Rissspitzensingularität mit endlicher Energiefreisetzungsrates \mathcal{G} vor, genauso wie unmittelbar danach (z. B. nach Ablenkung des Risses in die Materialgrenzfläche oder Penetration des Nachbarmaterials). Dadurch ergeben sich die für die benachbarten Risskonfigurationen einer Struktursituation mit schwacher bzw. starker Spannungssingularität typischen Verläufe der differentiellen Energiefreisetzungsrates. Die Anwendung der Stabilitätskriterien (2.103) und (2.104) legt hier nahe, dass Risskonfigurationen, die sich zu einer Struktursituation mit schwacher Spannungssingularität hin entwickeln, eher zu Rissarrest neigen, während solche Risskonfigurationen, die sich zu einer Struktursituation mit starker Spannungssingularität hin entwickeln, dazu tendieren, diese schnellstmöglich zu durchlaufen. Damit sind starke Spannungssingularitäten zwar einerseits als besonders kritisch, aber andererseits auch als schwer zu fassen einzustufen.

2.2.4 Bruchmechanik finiter Risse und gekoppeltes Spannungs- & Energiekriterium

Das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium nach Leguillon (2002) baut auf der *Bruchmechanik finiter Risse*²¹ von Hashin (1996) auf, die anstatt eines stets kontinuierlichen Risswachstums auch diskrete Bruchvorgänge mit einschließt. Ein daraus resultierender, kinematisch zulässiger Riss endlicher Größe ΔA entsteht demnach instantan, sobald einerseits die lokale Beanspruchung ein gewisses Maß erreicht oder überschreitet (Spannungskriterium) und andererseits seine Entstehung auch energetisch möglich ist (Energiekriterium). Das heißt:

- In der ungerissenen Konfiguration (1) muss eine geeignet gewählte Vergleichsspannung $\mathcal{F}(\sigma_{ij}^{(1)})$ auf der gesamten potentiellen Bruchfläche Γ_c die Festigkeit σ_c erreicht oder überschritten haben.

$$\mathcal{F}(\sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{x})) \geq \sigma_c \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c \quad (2.114)$$

Anders formuliert, wird von einem Spannungskriterium ein überbeanspruchter Bereich definiert, in dem dann kinematisch zulässige Risse endlicher Größe entstehen können. Diese Risse seien hier auch als *Sekundärrisse* bezeichnet, ausgehend von der Möglichkeit der Existenz eines (Primär-)Risses schon in der sogenannten „ungerissenen“ Konfiguration.

²¹ auch unter dem Begriff *Finite Bruchmechanik* (engl.: finite fracture mechanics (FFM)) bekannt

- Die (Sekundär-)Risse können aber nur entstehen, wenn dies auch energetisch zulässig ist. Es muss also die durch die Entstehung des (Sekundär-)Risses freigesetzte Energie mindestens genauso groß wie die Energie sein, die für den Bruchprozess benötigt wird. Diese Forderung entspricht dem Kriterium nach Griffith in seiner ursprünglichen Form. Im Falle einer quasi-statischen, isothermen Belastung, die ein Potential besitzt, ergibt sich das Energiekriterium dann zu:

$$-\Delta\Pi(\Delta A) = \int_A^{A+\Delta A} \mathcal{G}_c(\tilde{A}) d\tilde{A} . \quad (2.115)$$

Hiervon ausgehend erscheint es sinnvoll eine mittlere differentielle Energiefreisetzungsrate, die inkrementelle Energiefreisetzungsrate $\bar{\mathcal{G}}$, zu definieren:

$$\bar{\mathcal{G}} = -\frac{\Delta\Pi(\Delta A)}{\Delta A} = \frac{1}{\Delta A} \int_{\Delta A} \mathcal{G}(\tilde{A}) d\tilde{A} . \quad (2.116)$$

Ist die Funktion der inkrementellen Energiefreisetzungsrate von der Belastungsgeschichte unabhängig, besitzt also ein totales Differential, dann gilt umgekehrt auch:

$$\frac{d(\bar{\mathcal{G}}(\Delta A) \cdot \Delta A)}{d(\Delta A)} = \frac{d\bar{\mathcal{G}}(\Delta A)}{d(\Delta A)} \Delta A + \bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(\Delta A) . \quad (2.117)$$

Mit der inkrementellen Energiefreisetzungsrate $\bar{\mathcal{G}}$ und der häufig getroffenen Annahme einer konstanten Bruchzähigkeit \mathcal{G}_c lässt sich das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium von Leguillon (2002), das auch als „hybrides Kriterium“ bekannt ist (Hebel, 2010, Gross u. Seelig, 2016), wie folgt angeben:

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{x})\right) \geq \sigma_c \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c(\Delta A) \quad \wedge \quad \bar{\mathcal{G}}(\Delta A) \geq \mathcal{G}_c} . \quad (2.118)$$

Dieses gekoppelte Kriterium ermöglicht eine recht universelle Beschreibung der Bildung von (Sekundär-)Rissen in spröden Strukturen unter Verwendung allein der Werkstoffkenngrößen Festigkeit σ_c sowie Bruchzähigkeit \mathcal{G}_c und ohne Notwendigkeit eines sonst häufig eingesetzten empirischen Längenparameters (z. B. Taylor (2007)).

Für das Spannungsteilkriterium in Gleichung (2.118) kann prinzipiell zunächst jedes in Kapitel 2.2.1 aufgeführte Festigkeitskriterium verwendet werden. Dabei ist jedoch stets die Eignung des jeweiligen Festigkeitskriteriums zu validieren. Als vergleichsweise erfolgreich für isotrope Werkstoffe hat sich die Hauptspannungshypothese erwiesen

$$\mathcal{F}(\sigma_{ij}^{(1)}) = \sigma_1 \geq \sigma_c . \quad (2.119)$$

Auch die Verwendung eines Normalspannungskriteriums ist hier bei spröder Rissbildung häufig gerechtfertigt

$$\mathcal{F}(\sigma_{ij}^{(1)}) = \sigma_\varphi \geq \sigma_c . \quad (2.120)$$

Im Falle transversal-isotroper Werkstoffe bieten sich die Versagenshypothesen nach Puck (2.69) oder Cuntze (2.72) an, die anstatt mit einer Vergleichsspannung mit einer Materialanstrengung \mathcal{E} arbeiten, sodass das Spannungskriterium dann folgendermaßen lautet:

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) \geq 1 . \quad (2.121)$$

Cornetti et al. (2006) schlagen alternativ zur punktuellen Auswertung der Vergleichsspannung eine gemittelte Auswertung folgender Form vor:

$$\frac{1}{\Delta A} \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \left(\sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}) \right) d\tilde{S} \geq \sigma_c . \quad (2.122)$$

Prinzipiell sind auch Modifikationen des energetischen Teilkriteriums möglich. Eine Reihe von Möglichkeiten, insbesondere zur besseren Erfassung von Mixed-Mode-Einflüssen, sind beispielsweise in der Arbeit von Talmon l'Armée et al. (2017) angewendet und verglichen worden.

Grundsätzlich existieren, wie bei jedem Versagenskriterium, zwei Möglichkeiten das gekoppelte Kriterium anzuwenden:

- Problemstellung *explizit*: Es ist zu überprüfen, ob ein Bauteil einer vorgegebenen Belastung standhält. Dann ist zunächst die ungerissene Konfiguration (1) unter gegebener Belastung einer Spannungsanalyse zu unterziehen und mittels des gewählten Spanningskriteriums sind die überbeanspruchten Gebiete zu bestimmen. Schließlich sind in diesen Gebieten alle möglichen, kinematisch zulässigen Risse sowie ihre Kombinationen auf ihre energetische Zulässigkeit zu überprüfen. Wenn mindestens eine Risskonfiguration als energetisch zulässig befunden wird, wird Versagen postuliert.²²
- Problemstellung *implizit*: Es ist die kritische Belastung eines Bauteils gefragt, bei der Versagen eintritt. Dann ist im Allgemeinen ein nichtlineares Optimierungsproblem mit ebenfalls nichtlinearen Restriktionen zu lösen, das wie folgt formuliert werden kann:
Finde die kleinste Belastung, bei der eine kinematisch zulässige Risskonfiguration, deren Risse auf nach dem Spannungskriterium überbeanspruchte Gebiete beschränkt sind, auch energetisch zulässig ist.

Bei Definition nur eines die Belastung steuernden Lastparameters P , sowie ebenfalls nur eines die Rissgeometrie, insbesondere seine Ausmaße, steuernden Rissparameters Δa , schreibt sich das Optimierungsproblem:

$$P_f = \min_{P, \Delta a \geq 0} \left\{ P \mid \mathcal{F} \left(\sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}) \right) \geq \sigma_c \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c(\Delta a) \wedge \bar{\mathcal{G}}(\Delta a) \geq \mathcal{G}_c \right\} . \quad (2.123)$$

Aus dem Optimierungsproblem resultieren außer den kritischen Lastparametern (hier nur P_f) automatisch auch die kritischen Rissgeometrieparameter (hier nur a_f).

Es ist zu beachten, dass hier Versagen nicht zwingend auch vollständiges Versagen der Gesamtstruktur bedeutet, sondern zunächst einmal lediglich, dass mit der Entstehung eines, oder gegebenenfalls auch mehrerer, (Sekundär-)Risse/s zu rechnen ist. Zur Beantwortung der Frage, ob letztendlich auch vollständiges Versagen der Struktur eintritt, ist weiter zu überprüfen, ob ein (Sekundär-)Riss unter der gegebenen Belastung instabil instationär ist.

Weiterhin ist anzumerken, dass, während die Auswertung des Spannungskriteriums mit nur einer Strukturanalyse, nämlich der ungerissenen Struktur- und Lastsituation, auskommt, die Auswertung des Energiekriteriums für jede zu betrachtende Risskonfiguration aber jeweils eine weitere Strukturanalyse erfordert, sodass der Berechnungsaufwand (insbesondere in

²² Dabei ist noch nicht sichergestellt, dass auch gerade dieser Riss entstehen würde, da es andere Risskonfigurationen geben kann, die mehr Energie freisetzen würden und daher aus energetischer Sicht kritischer wären. Zur Bestimmung der Risskonfiguration mit der höchsten Energiefreisetzung wäre dann ein Optimierungsproblem mit den Risskonfigurationsparametern als Designvariablen zu lösen.

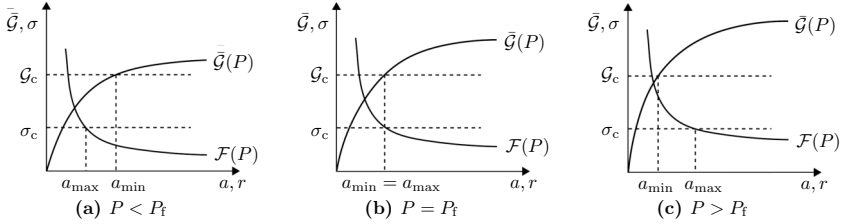


Abbildung 2.9: Einfaches Beispiel zur Bestimmung des kritischen Lastparameters P_I mittels des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums für finite Rissbildung ausgehend von einer Spannungskonzentration (gegebenenfalls auch einer schwachen Spannungssingularität) im Falle einer positiven Struktur- und Lastsituation (monoton steigende inkrementelle Energiefreisetzungsrate): (a) Für die gegebene Last ist das gekoppelte Kriterium nicht erfüllt, weil es keine zulässige Rissgröße gibt, da $a_{\min} > a_{\max}$; folglich muss die Last gesteigert werden, um beide Teilkriterien zu erfüllen. (b) Beide Teilkriterien sind nun bei höherer Last (hochskalierte Kurvenzüge $\bar{\mathcal{G}}(P)$, $\mathcal{F}(P)$) für die Rissgröße $\Delta a = a_{\min} = a_{\max}$ exakt erfüllt. (c) Weitere Steigerung der Last führt zu $a_{\min} < a_{\max}$, sodass es nun eine Vielzahl möglicher Rissgrößen gibt, für die mindestens eines der beiden Teilkriterien übererfüllt ist.

3D-Problemstellungen) schnell ein kaum zu überschauendes Ausmaß erreichen kann. Deshalb sind zum einen besonders effiziente Berechnungsmethoden zur Auswertung des gekoppelten Kriteriums gefragt. Zum anderen sind zusätzliche Annahmen für die Ausgestaltung der möglichen Risskonfigurationen meist unerlässlich. Typische Annahmen, die sich zumindest in 2D-Problemstellungen bereits bewährt haben (z. B. Hell et al. (2014), Rosendahl et al. (2017)), sind, dass sich (Sekundär-)Risse ausgehend von der größten Spannungskonzentration (bzw. stärksten Spannungssingularität) ausbilden und dabei eben bleiben.

Die implizite Problemstellung stellt die größere Herausforderung dar, bietet aber die größere Aussagekraft. Daher soll sie und das aus ihr resultierende Optimierungsproblem im Folgenden genauer betrachtet werden: Dazu sei wieder von dem Spezialfall nur eines die Belastung steuernden Lastparameters P und nur eines die Rissgeometrie steuernden Rissparameters Δa ausgegangen. Im linear-elastischen Fall verhält sich dann die Vergleichsspannung $F(\sigma_{ij}^{(1)})$ direkt proportional zum Lastparameter P , während die inkrementellen Energiefreisetzungsraten $\bar{\mathcal{G}}$ proportional zum Quadrat dieses sind:

$$\mathcal{F}(\sigma_{ij}^{(1)}) \propto P \quad , \quad \bar{\mathcal{G}} \propto P^2 . \quad (2.124)$$

Nun lässt sich das Optimierungsproblem (2.123) auf zwei wesentliche Fälle reduzieren, wie sie von Weifgraeber et al. (2016) herausgearbeitet wurden:

Fall A: Ist die Vergleichsspannung mit zunehmendem Abstand von der Spannungskonzentration monoton fallend, während die inkrementelle Energiefreisetzungsrate monoton steigend in der Rissgröße Δa ist, also insgesamt eine sogenannte „positive“ Struktur- und Lastsituation vorliegt, liefert das Spanningskriterium immer eine Obergrenze a_{\max} für die mögliche Rissgröße Δa und das Energiekriterium eine Untergrenze a_{\min} , sodass sowohl Energie- als auch Spanningskriterium bei Versagen exakt erfüllt sein müssen (vgl. Abb. 2.9). Hier werden also aus den Ungleichungen (2.118) Gleichungen, die jeweils

nach dem Lastparameter P aufgelöst und ineinander eingesetzt werden können, sodass sich als Versagensbedingung

$$\left(\frac{\mathcal{F} \left(\sigma_{ij}^{(1)}(x, P=1) \right)}{\sigma_c^2} \right)^2 = \frac{\bar{\mathcal{G}}(\Delta a, P=1)}{\mathcal{G}_c} \quad (2.125)$$

ergibt. Hiermit ist zunächst die kritische Rissgröße a_f bestimmbar. Die kritische Last P_f ergibt sich dann durch Einsetzen von a_f in eine der beiden Teilbedingungen des gekoppelten Kriteriums (2.118).

Fall B: Ist die Vergleichsspannung mit zunehmendem Abstand von der Spannungskonzentration (wieder) monoton fallend, die inkrementelle Energiefreisetzungsrate aber auch monoton fallend in der Rissgröße Δa , dann liegt eine sogenannte „negative“ Struktur- und Lastsituation vor. Nun liefern Spannungs- und Energiekriterium jeweils eine Obergrenze, sodass es immer eine kleinere Rissabmessung Δa gibt, die schon bei einer niedrigeren Belastung beide Teilkriterien erfüllt. Diese Situation liegt beispielsweise bei Auftreten einer starken Singularität vor, für die nicht nur die Spannungen sondern auch die differentielle (und somit für sehr kleine Sekundärrisse auch die inkrementelle) Energiefreisetzungsrate singulär sind. In letzter Konsequenz ergeben sich in einer solchen Situation dann die kritischen Parameter zu $P_f, a_f \rightarrow 0$ und es kann nur noch bestimmt werden, bis wohin ein Sekundärriss unter einer bestimmten Last wachsen würde (wobei dann auch die Versagensgeschichte bis zum Eintreten der starken Singularität schon von entscheidender Bedeutung ist).

Es existieren auch Möglichkeiten der Kombination dieser beiden Fälle, wie sie z. B. bei einer unendlichen Lochscheibe unter zwei einander gegenüber liegend angreifenden Punktlasten (lokal positiv, global negativ (Weißgraber et al., 2016)), oder einer einschnittigen Überlappungsfügung (lokal erst positiv, dann negativ, schließlich global positiv) auftreten (vgl. auch Abb. 2.10). So ist im letzteren Fall nur für kleine Rissgrößen²³ $0 \leq a \leq a^*$ (Region I) sowie für große Rissgrößen²⁴ $a > a^{**}$ (Region III) Fall A zu betrachten. Liefert diese Betrachtung keine erlaubte Rissgröße a_f , ist die kritische Rissgröße automatisch auf $a_f = a^*$ festgelegt (Region II) und die Energiebedingung allein wird hinreichend.

Es lässt sich zusammenfassend festhalten, dass das gekoppelte Kriterium gegenüber der reinen Festigkeitsmechanik den Vorteil bietet, dass sein Spanningskriterium nicht-lokal ausgewertet wird, wodurch auch singuläre Spannungen eine sinnvolle Anwendbarkeit des Kriteriums zunächst nicht weiter einschränken. Gegenüber der LEBM gestattet es auch die Bewertung vieler Struktursituationen, die keine klassische Rissspitzensingularität (2.111) beinhalten. Gerade in Struktursituationen, in denen nur einfache Spannungskonzentrationen, wie beispielsweise an Löchern und Rundkerben, oder schwache Spannungssingularitäten (2.112), z. B. an Spitzkerben und Laminaträndern, auftreten, hat sich die Anwendung des gekoppelten Kriteriums bewährt.

Abschließend zu diesem Teilkapitel sei kurz auf die Betrachtung starker Singularitäten mittels des gekoppelten Kriteriums eingegangen. Die Eigenschaft starker Singularitäten, dass schon ihre differentiellen Energiefreisetzungsraten unbeschränkt sind $\mathcal{G} \rightarrow \infty$ (Gl. 2.113), wirft die Frage auf, inwiefern eine Bewertung bezüglich der Initiierung von Sekundärrissen überhaupt möglich ist. Denn aus der Perspektive des gekoppelten Kriteriums (wie

²³ bis zum lokalen Maximum der $\bar{\mathcal{G}}(a^*) = \bar{\mathcal{G}}_{\max}$

²⁴ ab denen der Wert des lokalen Maximums wieder erreicht wird $\bar{\mathcal{G}}(a^{**}) = \bar{\mathcal{G}}_{\max}$

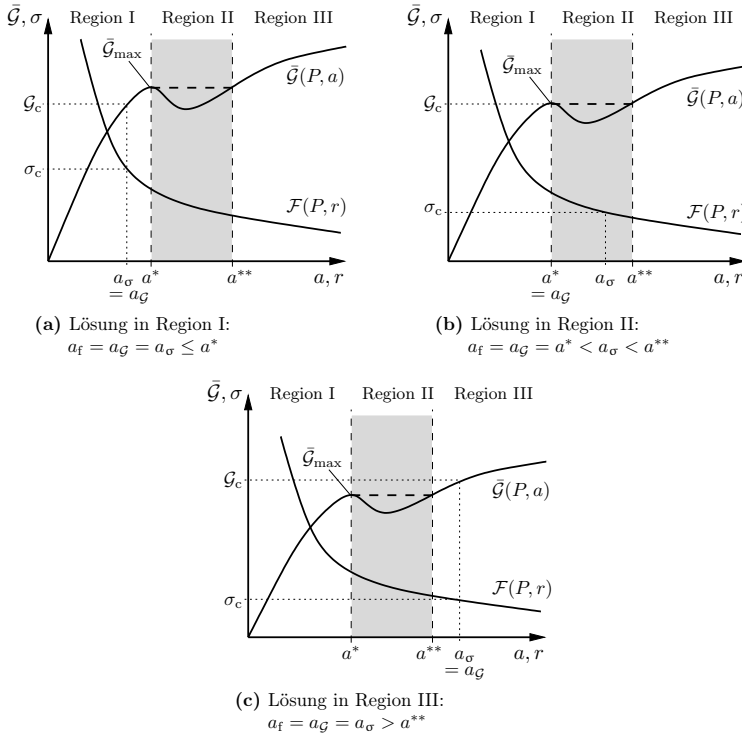


Abbildung 2.10: Lösungsbeispiele des aus dem gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium folgenden Optimierungsproblems zur Bestimmung des kritischen Lastparameters P_f für finite Rissbildung ausgehend von einer schwachen Spannungssingularität im Falle einer lokal zunächst positiven, dann negativen und schließlich global wieder positiven Struktur- und Belastungssituation (Hell et al., 2014).

auch aus Sicht der LEBM) scheinen solche Struktursituationen keinerlei Widerstand gegen Rissinitiierung/-fortschritt zu bieten. Nichtsdestotrotz könnte unter Kenntnis der vollständigen Belastungsgeschichte zumindest prinzipiell eine Aussage darüber gemacht werden, welche Rissgröße sich bei einer gegebenen Belastung einstellen würde.

2.3 Finite-Elemente-Methoden (FEM)

Bei Berücksichtigung komplexer Geometrien und Randbedingungen stoßen analytische Vorgehensweisen zur Lösung von Randwertproblemen schnell an Grenzen. Hierzu wurden effiziente numerische Berechnungsverfahren entwickelt, die auch die Behandlung inelastischer Probleme und großer Deformationen ermöglichen. Zu den gängigsten Verfahren gehört die Methode der finiten Elemente. Die Klasse der Finite-Elemente-Methoden (FEM), der auch die in dieser Arbeit vorwiegend angewandte SBFEM angehört, basiert auf einer Diskretisierung

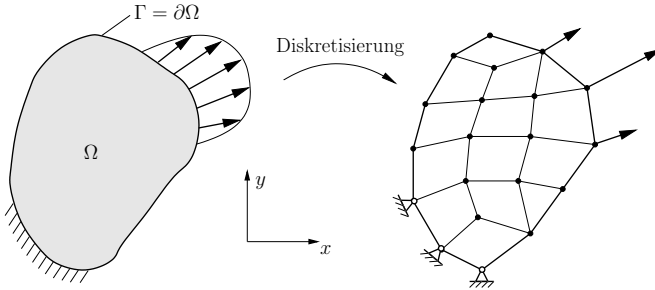


Abbildung 2.11: Beispielhafte Diskretisierung eines zweidimensionalen Gebiets Ω mit Berandung $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$.

(Zerlegung) eines betrachteten Gebiets Ω in eine Reihe von Teilgebieten endlicher Größe: die finiten Elemente Ω_e .

$$\Omega \approx \tilde{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e. \quad (2.126)$$

Auf diesen Teilgebieten wird mittels Variations- und Energieprinzipien (vgl. Kapitel 2.1.2) die strenge Forderung nach lokaler Erfüllung aller herrschenden Differentialgleichungen abgeschwächt, sodass zumindest einige²⁵ letzterer (bei geeignet Gewichtung) nur noch im integralen Mittel über dem finiten Element erfüllt sein müssen. Dies bedeutet dann auch, dass Spannungen und Dehnungen über Elementgrenzen hinweg unstetig sein dürfen. Mit feiner werdender Diskretisierung wird die Lokalität im Grenzfall $\Omega_e \rightarrow 0$ wiederhergestellt, d. h. die Näherungslösung einer FEM konvergiert dann gegen die analytische Lösung, in der alle Differentialgleichungen sowie Randbedingungen wieder lokal, also an jedem Punkt des Gebiets, erfüllt sind. Detaillierte Darstellungen sind beispielsweise den Standardwerken von Bathe (2004) und Zienkiewicz et al. (2013) sowie weiterer Spezialliteratur (Kuna, 2008, Wriggers, 2001) zu entnehmen.

Im Folgenden soll die FEM in einer verschiebungsbasierten Variante auf Grundlage des Prinzips der virtuellen Verrückungen (2.52) im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie für den Spezialfall eines dreidimensionalen Volumenelements dargestellt werden. Anschließend sei auf die Spannungsrückrechnung und -glättung, die Anforderungen an die Verschiebungsansätze sowie Konvergenzeigenschaften der klassischen FEM eingegangen. Schließlich wird das Verfahren der Anreicherung der Verschiebungsansätze und dessen Auswirkungen auf die Konvergenz dargestellt.

2.3.1 Klassische, verschiebungsbasierte FE-Formulierung für 3D-Randwertprobleme der linearen Elastizitätstheorie

Es sei vom dreidimensionalen Randwertproblem der linearen Elastizitätstheorie mit den Feldgleichungen (2.12, 2.18, 2.24) und den Randbedingungen (2.33) ausgegangen (Abb. 2.1), dessen Gebiet Ω diskretisiert wird (Abb. 2.11).

²⁵ Bei dem Prinzip der virtuellen Verrückungen (PdvV) ist dies die Gleichgewichtsbedingung.

Auf jedem einzelnen Teilgebiet Ω_e wird mit Hilfe des PdvV eine Näherungslösung $\tilde{\mathbf{u}}_e$ für das Verschiebungsfeld \mathbf{u} gesucht²⁶. Diese Näherungslösung muss das Kräftegleichgewicht (2.12) auf Ω_e nur im Mittel, die kinematischen Beziehungen (2.18) der Deformation aber exakt erfüllen. Dazu werden sowohl die Geometrie \mathbf{x} als auch die Verschiebungsfelder \mathbf{u} mit Hilfe von Formfunktionen $N_{ek}^G(\mathbf{x})$ und $N_{ek}^U(\mathbf{x})$ approximiert:

$$\mathbf{x}|_{\Omega_e} \approx \tilde{\mathbf{x}}_e(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n_{k,e}^G} N_{ek}^G(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{x}}_{ek} \quad , \quad \mathbf{u}|_{\Omega_e} \approx \tilde{\mathbf{u}}_e(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n_{k,e}^U} N_{ek}^U(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}_{ek} \quad , \quad (2.127)$$

wobei $\hat{\mathbf{x}}_{ek}$ und $\hat{\mathbf{u}}_{ek}$ jeweils für Koeffizienten der Näherungsfunktionen $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ und $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ stehen. Dabei hat es sich vielfältig als vorteilhaft erwiesen, die Formfunktionen so zu wählen, dass die genannten Koeffizienten selbst lokale Werte der Näherungsfunktionen, nämlich die Werte an den Elementknoten, annehmen. Insbesondere Verschiebungsrandbedingungen sind so sehr viel einfacher zu implementieren. Im Rahmen des gängigen und nachfolgend verwendeten isoparametrischen Konzepts werden Geometrie und Verschiebungsfeld durch gleiche Ansätze $N_{ek}(\mathbf{x})$ approximiert und $n_{k,e} = n_{k,e}^G = n_{k,e}^U$ ist die Anzahl der Elementknoten. Werden für die virtuellen Verrückungen $\delta\mathbf{u}_e$ auf dem Elementgebiet Ω_e die gleichen Ansätze verwendet

$$\delta\mathbf{u}_e \approx \delta\tilde{\mathbf{u}}_e(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n_{k,e}} N_{ek}(\mathbf{x}) \delta\hat{\mathbf{u}}_{ek} \quad , \quad (2.128)$$

spricht man von einem Galerkin-Ansatz. Die Koeffizienten der Ansatzfunktionen, d. h. die Knotenkoordinaten $\hat{\mathbf{x}}_e$, Knotenverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_e$ und virtuellen Knotenverrückungen $\delta\hat{\mathbf{u}}_e$, lassen sich zu Vektoren

$$\hat{\mathbf{x}}_e = \left[\hat{\mathbf{x}}_{e1}^T, \hat{\mathbf{x}}_{e2}^T, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{en_{k,e}}^T \right]^T \quad , \quad (2.129)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_e = \left[\hat{\mathbf{u}}_{e1}^T, \hat{\mathbf{u}}_{e2}^T, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{en_{k,e}}^T \right]^T \quad , \quad (2.130)$$

$$\delta\hat{\mathbf{u}}_e = \left[\delta\hat{\mathbf{u}}_{e1}^T, \delta\hat{\mathbf{u}}_{e2}^T, \dots, \delta\hat{\mathbf{u}}_{en_{k,e}}^T \right]^T \quad (2.131)$$

und auf ähnliche Weise die Formfunktionen zu entsprechenden Matrixfunktionen

$$\mathbf{N}_e(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} N_{e1}(\mathbf{x}) & 0 & 0 & \dots & N_{en_{k,e}}(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & N_{e2}(\mathbf{x}) & 0 & \dots & 0 & N_{en_{k,e}}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & N_{e3}(\mathbf{x}) & \dots & 0 & 0 & N_{en_{k,e}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.132)$$

zusammenfassen, sodass

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_e(\mathbf{x}) &= \mathbf{N}_e(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{x}}_e \quad , \\ \tilde{\mathbf{u}}_e(\mathbf{x}) &= \mathbf{N}_e(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}_e \quad , \\ \delta\tilde{\mathbf{u}}_e(\mathbf{x}) &= \mathbf{N}_e(\mathbf{x}) \delta\hat{\mathbf{u}}_e \quad . \end{aligned} \quad (2.133)$$

Unter Verwendung der Voigt-Notation für Spannungen (2.5) und Verzerrungen (2.14) sowie Einsetzen des Differentialoperators

$$\mathcal{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.134)$$

²⁶ Eine Finite-Elemente-Methode kann auch mit Hilfe des PdvK (2.54) als spannungsbasierte Methode formuliert, oder von erweiterten Funktionalen, wie dem Hellinger-Reissner- oder Hu-Washizu-Funktional (vgl. z. B. Zienkiewicz et al. (2013)), abgeleitet werden.

lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen und kinematischen Beziehungen im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie folgendermaßen angeben²⁷:

$$\sigma_{ij,j} + f_j = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{L}}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (2.135)$$

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{L}} \mathbf{u}(\mathbf{x}). \quad (2.136)$$

Mit dem Hookeschen Gesetz (2.26) und dem auf dem Elementgebiet Ω_e gültigen Elastizitätstensor in Voigt-Notation \mathbf{C}_e ergibt sich das Prinzip der virtuellen Arbeiten zu:

$$\delta W_{ie} = \int_{\Omega_e} \delta \mathbf{u}_e^T \boldsymbol{\mathcal{L}}^T \mathbf{C}_e \boldsymbol{\mathcal{L}} \mathbf{u}_e \, d\Omega = \int_{\Omega_e} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{te}} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma = \delta W_{ae}. \quad (2.137)$$

Einsetzen der Näherungsansätze (2.133) führt für jedes Element Ω_e auf

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \underbrace{\int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \boldsymbol{\mathcal{L}}^T \mathbf{C}_e \boldsymbol{\mathcal{L}} \mathbf{N}_e \, d\Omega}_{\mathbf{K}_e} \hat{\mathbf{u}}_e = \delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \underbrace{\int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f} \, d\Omega}_{\mathbf{p}_{\Omega_e}} + \delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \underbrace{\int_{\Gamma_{te}} \mathbf{N}_e^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma}_{\mathbf{p}_{\Gamma_e}} \quad (2.138)$$

und damit, nach Integration über das Elementgebiet Ω_e , auf eine Gleichung, die für beliebige virtuelle Verrückungen $\delta \hat{\mathbf{u}}_e$ erfüllt sein muss:²⁸

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_e^T (\mathbf{K}_e \hat{\mathbf{u}}_e - \mathbf{p}_{\Omega_e} - \mathbf{p}_{\Gamma_e}) = 0. \quad (2.139)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_e ergeben sich also durch Integration des Elastizitätstensors \mathbf{C} (in Voigt-Notation (2.26)) und approximierten Verzerrungsfunktionen $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\mathcal{L}} \mathbf{N}_e \hat{\mathbf{u}}_e$ sowie virtuellen Verzerrungsfunktionen $\delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\mathcal{L}} \mathbf{N}_e \delta \hat{\mathbf{u}}_e$ bei Einheitsverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{I}$ bzw. Einheitsverrückungen $\delta \hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{I}$ über das Elementgebiet Ω_e . Die Elementknotenlastvektoren \mathbf{p}_{Ω_e} und \mathbf{p}_{Γ_e} ergeben sich entsprechend aus den vorhandenen Volumenlasten \mathbf{f} bzw. Oberflächenlasten \mathbf{t}^* . Der Zusammenbau²⁹ aller dieser linearen Gleichungssysteme (2.139) für $e = 1, \dots, n_e$ führt schließlich auf ein ebenfalls lineares Gleichungssystem für das Gesamtgebiet Ω :

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{p}_{\Omega} + \mathbf{p}_{\Gamma} = \mathbf{p} \quad (2.140)$$

mit der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} , den Knotenverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ und dem Knotenlastvektor \mathbf{p} .

Anforderungen an Verschiebungsansätze

Die erste und wichtigste Anforderung an die Verschiebungsansätze ist die nach ihrer *linearen Unabhängigkeit*. Linear abhängige Verschiebungsansätze führen zu singulären Gleichungssystemen (2.140) und somit erst gar nicht zu einer Verschiebungslösung. Genauso müssen

²⁷ Anmerkung: Sowohl für Tensor- als auch Voigt-Notation wird hier wieder die gleiche Fettdruck-Schreibweise verwendet.

²⁸ Aus dieser Gleichung ist das für die FEM typische lineare Gleichungssystem abzuleiten. Dabei wird aus dieser Schreibweise direkt ersichtlich, dass bei der Anwendung von Verschiebungsrandbedingungen nicht nur die zugehörigen Spalten sondern auch Zeilen des Gleichungssystems zu streichen sind.

²⁹ Der Zusammenbau der linearen Gleichungssysteme (2.139), die das konstitutive Verhalten der einzelnen Elemente beschreiben, wird auch Assemblierung genannt. Dabei werden gemeinsame Verschiebungsfreiheitsgrade dieser Gleichungssysteme, an gemeinsamen Knoten der Elemente, zusammengefasst. Dazu werden die jeweils zugehörigen Einträge der Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_e bzw. der Elementlastvektoren \mathbf{p}_{Ω_e} und \mathbf{p}_{Γ_e} zu einem Eintrag in der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e bzw. den Knotenlastvektoren \mathbf{p}_{Ω} und \mathbf{p}_{Γ} aufsummiert.

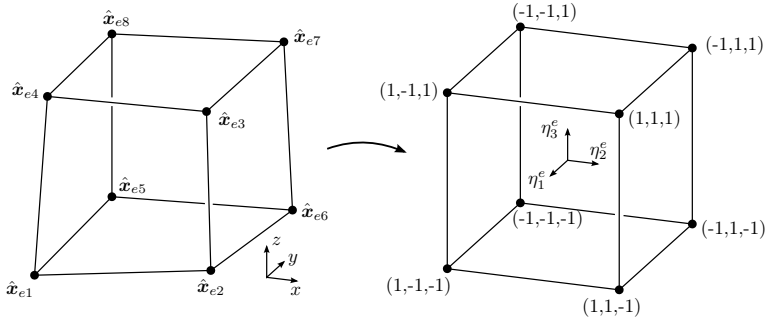


Abbildung 2.12: Abbildung des 3D-Elementgebiets auf das Gebiet eines würfelförmigen Einheitselements in kartesischem Elementkoordinatensystem.

die Ansätze verträglich, d. h. es müssen sowohl *Kontinuität* als auch *Kompatibilität* der Verschiebungen über Elementgrenzen hinweg gewährleistet sein, sodass die Ausdrücke im PdvV integrierbar bleiben. Die Ansätze müssen also (Nebenbedingung des PdvV) die kinematischen Grundgleichungen sowie die geometrischen Randbedingungen erfüllen.

Für eine monotone Konvergenz³⁰ der Methode müssen die Ansätze außerdem *vollständig* sein. Das bedeutet in erster Linie, dass sie zum einen Starrkörpermoden spannungsfrei und zum anderen homogene Verzerrungen über das gesamte Element hinweg darstellen können müssen. Denn im Grenzfall $\Omega_e \rightarrow 0$ nähern sich die Verzerrungen in jedem Element einem konstanten Wert, sodass beliebige Verzerrungsfelder der Gesamtstruktur approximiert werden können. Eine Erweiterung des Vollständigkeitsbegriffs auf Polynomansätze höherer Ordnung p ist mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks gegeben, wonach ein Polynomansatz vollständig ist, wenn gilt:

$$a + b + c = p, \quad \text{mit Polynomtermen } x^a y^b z^c. \quad (2.141)$$

Eine weitere Forderung an die Verschiebungsansätze ist die nach *Drehinvarianz* bzw. *Objektivität* der FE-Lösung. Diese ist gegeben, wenn der Verschiebungsansatz unter einer Koordinatentransformation erhalten bleibt, was für vollständige, in elementbezogenen Koordinaten definierte Ansätze zutrifft.

Klassischerweise werden Lagrangepolynome³¹ als Verschiebungsansätze und zur Darstellung der Elementkoordinaten $\hat{\mathbf{x}}_e^\eta$ gewählt. Diese verwenden ebenfalls Lagrangepolynome zur Abbildung des Einheitsgebiets mit kartesischen Koordinaten $\eta_1^e, \eta_2^e, \eta_3^e \in [-1, 1]$ auf das Elementgebiet Ω_e verwendet, dargestellt (Abb. 2.12):

$$\hat{\mathbf{x}}_e^\eta = \mathbf{N}(\eta_1^e, \eta_2^e, \eta_3^e) \hat{\mathbf{x}}_e. \quad (2.142)$$

Dabei nehmen Lagrangepolynome automatisch die vorgegebenen Werte an gegebenen Stützstellen an und besitzen schon die sogenannte Zerlegung-der-Eins-Eigenschaft (engl.: partition of unity). Das heißt, an einer der gegebenen Stützstellen nehmen sie (unter Vernachlässigung der Skalierung mit dem dort gegebenen Funktionswert) gerade den Wert eins und an allen

³⁰ Monotone Konvergenz bedeutet ein stetiges Abnehmen des relativen Fehlers einer FE-Lösung bei zunehmender Anzahl finiter Elemente.

³¹ beispielhaftes 1D-Lagrangepolynom: $\tilde{u}(\eta) = \sum_{k=1}^{n_{k,e}} N_{ek}(\eta) \tilde{u}_{ek}$ mit $N_{ek}(\eta) = \prod_{j=0, j \neq k}^{n_{k,e}} \frac{\eta - \eta_j}{\eta_k - \eta_j}$

anderen den Wert null an, während ihre Summe über das komplette betrachtete Intervall wiederum den Wert eins liefert. Somit sind die wesentlichen, oben genannten Anforderungen an den Ansatz erfüllt.

Sind die Formfunktionen in einem lokalen Elementkoordinatensystem $\tilde{\mathbf{x}}_e^n$ gegeben, werden zur Berechnung der Verzerrungen trotzdem die Ableitungen des Verschiebungsfeldes im globalen x, y, z -Koordinatensystem benötigt. Der simpleren Darstellung halber seien die Komponenten von $\tilde{\mathbf{x}}_e^n$ hier mit $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ dargestellt:³²

$$\begin{bmatrix} N_{k,\eta_1} \\ N_{k,\eta_2} \\ N_{k,\eta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{,\eta_1} & \tilde{y}_{,\eta_1} & \tilde{z}_{,\eta_1} \\ \tilde{x}_{,\eta_2} & \tilde{y}_{,\eta_2} & \tilde{z}_{,\eta_2} \\ \tilde{x}_{,\eta_3} & \tilde{y}_{,\eta_3} & \tilde{z}_{,\eta_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{k,x} \\ N_{k,y} \\ N_{k,z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^e \begin{bmatrix} N_{k,x} \\ N_{k,y} \\ N_{k,z} \end{bmatrix} \quad (2.143)$$

mit der Jacobimatrix \mathbf{J}^e . Genauso gilt umgekehrt

$$\begin{bmatrix} N_{k,x} \\ N_{k,y} \\ N_{k,z} \end{bmatrix} = (\mathbf{J}^e)^{-1} \begin{bmatrix} N_{k,\eta_1} \\ N_{k,\eta_2} \\ N_{k,\eta_3} \end{bmatrix} \quad (2.144)$$

mit

$$(\mathbf{J}^e)^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{J}^e)} \begin{bmatrix} \tilde{y}_{,\eta_2}\tilde{z}_{,\eta_3} - \tilde{z}_{,\eta_2}\tilde{y}_{,\eta_3} & \tilde{y}_{,\eta_3}\tilde{z}_{,\eta_1} - \tilde{z}_{,\eta_3}\tilde{y}_{,\eta_1} & \tilde{y}_{,\eta_1}\tilde{z}_{,\eta_2} - \tilde{z}_{,\eta_1}\tilde{y}_{,\eta_2} \\ \tilde{x}_{,\eta_3}\tilde{z}_{,\eta_2} - \tilde{z}_{,\eta_3}\tilde{x}_{,\eta_2} & \tilde{x}_{,\eta_1}\tilde{z}_{,\eta_3} - \tilde{z}_{,\eta_1}\tilde{x}_{,\eta_3} & \tilde{x}_{,\eta_2}\tilde{z}_{,\eta_1} - \tilde{z}_{,\eta_2}\tilde{x}_{,\eta_1} \\ \tilde{x}_{,\eta_2}\tilde{y}_{,\eta_3} - \tilde{y}_{,\eta_2}\tilde{x}_{,\eta_3} & \tilde{x}_{,\eta_3}\tilde{y}_{,\eta_1} - \tilde{y}_{,\eta_3}\tilde{x}_{,\eta_1} & \tilde{x}_{,\eta_1}\tilde{y}_{,\eta_2} - \tilde{y}_{,\eta_1}\tilde{x}_{,\eta_2} \end{bmatrix} \quad (2.145)$$

und

$$\det(\mathbf{J}^e) = \tilde{x}_{,\eta_1}\tilde{y}_{,\eta_2}\tilde{z}_{,\eta_3} + \tilde{x}_{,\eta_3}\tilde{y}_{,\eta_1}\tilde{z}_{,\eta_2} + \tilde{x}_{,\eta_2}\tilde{y}_{,\eta_3}\tilde{z}_{,\eta_1} - \tilde{x}_{,\eta_3}\tilde{y}_{,\eta_2}\tilde{z}_{,\eta_1} - \tilde{x}_{,\eta_1}\tilde{y}_{,\eta_3}\tilde{z}_{,\eta_2} - \tilde{x}_{,\eta_2}\tilde{y}_{,\eta_1}\tilde{z}_{,\eta_3} \quad (2.146)$$

Die Integration über dem Elementgebiet erfolgt ebenfalls in den lokalen Koordinaten mit dem Volumen- und den Oberflächendifferentialen

$$dV_e = d\Omega_e = \det(\mathbf{J}^e) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \quad dA_e^{\eta_1} = d\Gamma_e^{\eta_1} = \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_e^n}{\partial \eta_2} \times \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_e^n}{\partial \eta_3} \right\| d\eta_2 d\eta_3, \quad (2.147)$$

$$dA_e^{\eta_2} = d\Gamma_e^{\eta_2} = \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_e^n}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_e^n}{\partial \eta_3} \right\| d\eta_1 d\eta_3, \quad dA_e^{\eta_3} = d\Gamma_e^{\eta_3} = \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_e^n}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_e^n}{\partial \eta_2} \right\| d\eta_1 d\eta_2. \quad (2.148)$$

Dabei stellt der Operator $\|\cdot\|$ die euklidische Vektornorm dar.

Numerische Integration

Die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_e und der Elementlastvektoren \mathbf{p}_e ist häufig nicht analytisch durchführbar – beispielsweise wenn sich im Falle stark verzerrter oder gekrümmter Elementgeometrien³³ gebrochene rationale Integranden ergeben. Die Integration über dem Elementgebiet erfolgt daher in der Regel numerisch mittels Quadraturformeln im lokalen η_1, η_2, η_3 -Koordinatensystem auf dem Einheitselement $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in [-1, 1]$ (der einfacheren Darstellung halber ist der Index e für das jeweilige aktuelle Element hier weggelassen). Dazu wird

³² Weiterhin beschreiben $f_{,\eta}$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ einer Funktion f nach der Variablen η .

³³ Dann ist die Determinante der Jacobi-Matrix nicht über das Elementgebiet konstant und geht über die Inverse der Jacobi-Matrix in die Ableitungen der Formfunktionen ein.

eine gewichtete Summation der Funktionswerte $f(\boldsymbol{\eta})$ auf dem Einheitsgebiet an bestimmten Stützstellen $\boldsymbol{\eta}_j$ ($j = 1, \dots, n_1$), den sogenannten Integrationspunkten, durchgeführt:

$$\int_{\Omega} f(\boldsymbol{\eta}) \det(\mathbf{J}) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \approx \sum_{j=1}^{n_1} w_j f(\boldsymbol{\eta}_j) \det(\mathbf{J}_j) . \quad (2.149)$$

Dabei wichten die Faktoren w_j die Funktionswerte $f(\boldsymbol{\eta}_j)$ an den Integrationspunkten $\boldsymbol{\eta}_j$ und sind von der verwendeten Quadraturformel abhängig. Meist wird die sehr effiziente Gauß-Quadratur genutzt, die bezüglich der notwendigen Anzahl an Integrationspunkten zur exakten Integration eines Polynoms einer bestimmten Ordnung optimal ist. So integriert sie unter Verwendung von n_1 Integrationspunkten Polynome vom Grad $2n_1 - 1$ exakt. Mit Hilfe z. B. der Newton-Cotes-Quadratur werden bei gleicher Anzahl an Integrationspunkten nur Polynome vom Grad $n_1 - 1$ exakt integriert. Es sei allerdings erwähnt, dass die Gaußquadraturformeln im Gegensatz zur Newton-Cotes-Quadratur für jeden exakt zu integrierenden Polynomgrad andere Stützstellen verwenden, sodass eine adaptive Integration mit ihnen trotzdem aufwendiger sein kann. In dieser Arbeit findet jedoch aufgrund ihrer Effizienz vor allem die Gauß-Quadratur Anwendung.

2.3.2 Spannungsrückrechnung und -glättung

Das approximierte Spannungsfeld $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ des jeweiligen Randwertproblems lässt sich einfach aus den mittels des linearen Gleichungssystems (2.140) errechneten Knotenverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ rückrechnen. Dazu werden elementweise zunächst die approximierten Verzerrungen $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e(\boldsymbol{\eta}^e)$ durch Anwendung des Differentialoperators \mathcal{L} auf die approximierten Elementverschiebungen $\tilde{\mathbf{u}}_e(\boldsymbol{\eta}^e)$ (Gl. (2.133)) berechnet und schließlich mittels des Hookeschen Gesetzes (2.26) die Spannungen in Voigt-Notation bestimmt

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_e(\boldsymbol{\eta}^e) = \mathbf{C}_e \mathcal{L} \tilde{\mathbf{u}}_e(\boldsymbol{\eta}^e) . \quad (2.150)$$

Diese rückgerechneten Spannungen sind wie auch die rückgerechneten Verzerrungen von niedrigerer Näherungsgüte als die berechneten Verschiebungen, was im Wesentlichen in der Differentiation der zugrundeliegenden Formfunktionen des Verschiebungsansatzes begründet liegt. Mit der Differentiation geht zum einen eine Herabsetzung der Ordnung der Formfunktionen einher, zum anderen führt sie ohne gesonderte Zusatzmaßnahmen zu Unstetigkeiten an den Elementgrenzen, was zumindest innerhalb eines Werkstoffs gänzlich unphysikalisch ist. Daher wurden seit Aufkommen der FEM Methoden zur Glättung der Spannungen gesucht (Zienkiewicz et al., 2013).

Eine der ersten war die simple Mittelung der Spannungen aus an einem Knoten angrenzenden linearen 2D-Dreieckselementen, die nur eine konstante Spannung abbilden. Diese Methode ergab vor allem im Strukturinneren deutlich verbesserte Spannungswerte, während die Randspannungen nur wenig verbessert waren. Dies ist eine generelle Problematik von Spannungsglättungsverfahren der FEM und neben der Anzahl der Freiheitsgrade sicher mit ein Grund, warum die Rand-Elemente-Methode auch in der Industriepraxis noch lange als vollwertige Alternative zur FEM verwendet wurde.

Oden u. Brauchli (1971) stellten ein allgemeineres Verfahren vor, das für die Spannungen in den Elementen die gleichen Formfunktionen wie für die Verschiebungen ansetzt

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_e^* = \mathbf{N}_{\sigma e} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_e^* \quad \text{mit} \quad \mathbf{N}_{\sigma e} = [\mathbf{N}_e^T, \mathbf{N}_e^T]^T \quad (2.151)$$

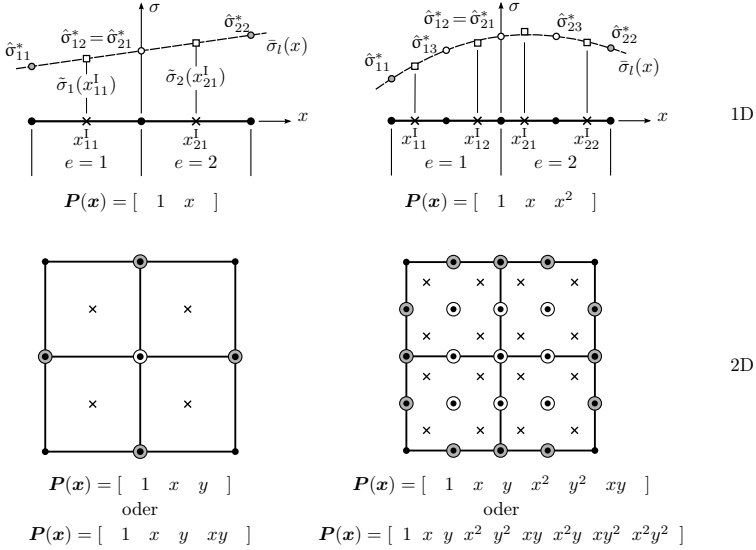


Abbildung 2.13: Die Superconvergent Patch Recovery für 1D-FE und 2D-FE, lineare und quadratische Elemente am Beispiel eines Patches. Die für innen liegende Knoten berechneten Spannungen sind von hoher Qualität und daher Klasse 1 zuzuordnen, die Knotenspannungen am Rand Klasse 2 bzw. im 2D-Fall auch Klasse 3 (Eckknoten).

und deren Abweichungen gegenüber den rückgerechneten Spannungen mittels einer Fehlerquadratmethode minimiert.

$$\Pi_\sigma(\tilde{\sigma}_e^*) = \int_\Omega (\tilde{\sigma}_e^* - \tilde{\sigma}_e)^2 d\Omega \longrightarrow \text{Min.} \quad (2.152)$$

$$\implies \delta \Pi_\sigma(\tilde{\sigma}_e^*, \delta \tilde{\sigma}_e^*) = 2 \int_\Omega \delta \tilde{\sigma}_e^{*T} (\tilde{\sigma}_e^* - \tilde{\sigma}_e) d\Omega = 0 \quad (2.153)$$

Unter Wahl des gleichen Ansatzes der geglätteten Spannungen $\tilde{\sigma}_e^*$ auch für die geglätteten virtuellen Spannungen $\delta \tilde{\sigma}_e^*$ lässt sich nachfolgende Gleichung ableiten, die für beliebige virtuelle Knotenspannungen $\delta \hat{\sigma}^*$ erfüllt sein muss und daher letztendlich auf ein lineares Gleichungssystem führt.

$$\delta \hat{\sigma}_e^{*T} \left(\underbrace{\left[\int_\Omega N_{\sigma e}^T N_{\sigma e} d\Omega \right]}_{\mathbf{A}_e} \hat{\sigma}_e^* - \underbrace{\left[\int_\Omega N_{\sigma e}^T \mathbf{C}_e \mathcal{L} N_e d\Omega \right]}_{\mathbf{b}_e} \hat{u}_e \right) = 0 \longrightarrow \mathbf{A}_e \hat{\sigma}_e^* = \mathbf{b}_e \quad (2.154)$$

Dieses Gleichungssystem ist für die Gesamtstruktur aufzustellen und daher vergleichsweise aufwendig zu lösen. Hinzu kommt, dass es zwar zu glatteren aber nicht immer auch zu genaueren Spannungen führte (vgl. Zienkiewicz et al. (2013)).

Ein sehr leistungsfähiges und weniger aufwendiges Verfahren ist die „superkonvergente Flicker-Rückrechnung“ (engl.: *Superconvergent Patch Recovery*, SPR) nach Zienkiewicz u. Zhu (1992). Sie basiert ebenfalls auf der Fehlerquadratmethode, führt diese aber „flickerweises“ aus und

stützt sich dabei nur auf die Spannungen in den Integrationspunkten einer Gauß-Quadratur passender Ordnung anstatt der Spannungen im gesamten Element. Letzteres stellt einen besonderen Vorteil dar, da die Spannungen in diesen Punkten genauer zu sein und schneller zu konvergieren scheinen als überall sonst im Element. Tatsächlich lässt sich für bestimmte Spezialfälle sogar mathematisch zeigen, dass die Ableitungen der primären Variablen dort superkonvergent sind und mit der gleichen Ordnung wie die primären Variablen selbst (und damit einer ganzen Ordnung mehr) konvergieren („Herrmann-Theorem“ (Zienkiewicz et al., 2013, Kap. 15)). Beobachtet lässt sich dieser Effekt aber über weite Bereiche Finiterelement-Klassen und geht damit weit über die im Herrmann-Theorem betrachteten Fälle hinaus. Für die Umsetzung wird zunächst wieder von einem stetigen Spannungsansatz (2.151) ausgegangen, dessen Knotenwerte $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_e^*$ zu ermitteln sind. Dazu werden stets Gruppen von Elementen betrachtet, sogenannte Elementpatches, welche sich aus den an eine Elementecke angrenzenden Elementen zusammensetzen (z. B. $n_{pe} = 2^{n_{dim}}$ Elemente bei uniformer n_{dim} -dimensionaler Diskretisierung). Ausgehend vom zentralen Knoten des aktuell betrachteten Elementpatches wird ein diesen Patch l ($l = 1, \dots, n_p$) übergreifendes Polynom

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_l = \mathbf{P}_l(\mathbf{x}) \mathbf{a}_l \quad \text{mit} \quad \mathbf{P}_l(\mathbf{x}) = [1 \quad (x - x_l) \quad (y - y_l) \quad (z - z_l) \quad \dots] \quad (2.155)$$

in globalen Koordinaten \mathbf{x} mit Koeffizienten im Vektor \mathbf{a}_l definiert. Generell sind Polynome von der gleichen Ordnung wie der des Verschiebungsansatzes zu verwenden. Je nach Problemdimension können Terme abhängig von y und z weggelassen werden. Die Koeffizienten in \mathbf{a}_l bestimmen sich aus der Minimierung der mittleren quadratischen Abweichung des Polynoms $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_l$ von den rückgerechneten Spannungen $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_e$ an den Integrationspunkten der Gaußquadratur \mathbf{x}_{ej}^I . Eine Faustregel zur Wahl der Ordnung dieser Gaußquadratur ist jene auszusuchen, die gerade notwendig wäre, um den gegebenen (1D-)Polynomansatz exakt integrieren zu können: für lineare Elemente wäre also $n_l = 1$ Integrationspunkt im Elementzentrum, bei quadratischen Elementen $n_l = 2^{n_{dim}}$ zu verwenden.

$$II_{\sigma l} = \sum_{e=1}^{n_{pe}} \sum_{j=1}^{n_{Ie}} (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_l(\mathbf{x}_{ej}^I) - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_e(\mathbf{x}_{ej}^I))^2 \quad \rightarrow \quad \text{Min.} \quad (2.156)$$

$$\Rightarrow \quad \delta II_{\sigma l}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_l, \delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}_l) = 2 \sum_{e=1}^{n_{pe}} \sum_{j=1}^{n_{Ie}} \delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}_l^T(\mathbf{x}_{ej}^I) (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_l(\mathbf{x}_{ej}^I) - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_e(\mathbf{x}_{ej}^I)) = 0 \quad (2.157)$$

Unter Verwendung des gleichen Polynomansatzes für die virtuellen Spannungen wie für die tatsächlichen auf Patch l ergibt sich wiederum ein lineares Gleichungssystem: nun aber nur auf Patch-Ebene und nur für die Koeffizienten der Patchspannungen im Vektor \mathbf{a}_l

$$\sum_{e=1}^{n_{pe}} \sum_{j=1}^{n_{Ie}} \delta \mathbf{a}_l^T \left(\underbrace{\mathbf{P}_l^T(\mathbf{x}_{ej}^I) \mathbf{P}_l(\mathbf{x}_{ej}^I)}_{\mathbf{A}_l} \mathbf{a}_l - \underbrace{\mathbf{P}_l^T(\mathbf{x}_{ej}^I) \mathbf{C}_e \mathcal{L} \mathbf{N}_e(\mathbf{x}_{ej}^I) \hat{\mathbf{u}}_e}_{\mathbf{b}_l} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}_l \mathbf{a}_l = \mathbf{b}_l. \quad (2.158)$$

Mittels der Patchspannungen $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_l(\mathbf{x})$ lassen sich für alle auf dem Patch befindlichen Knoten Spannungen $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_e^*$ inter- bzw. extrapolieren. Diese Spannungen sind mitunter von sehr unterschiedlicher Qualität, die von innen nach außen merklich abnehmen kann. Daher ist es sinnvoll Patches überlappend auszuwerten, d. h. so, dass jeder Elementeckenknoten, der nicht direkt an einer Gebietsberandung oder Materialgrenzfläche liegt, einmal in einem Patchzentrum lag. Die ausgewerteten Knotenspannungen können dabei sortiert nach der Anzahl an Elementen, an die sie innerhalb des Patches angebunden sind, und somit auch sortiert nach ihrer Qualität, abgelegt werden (1D: 2 Klassen, 2D: 3 Klassen, 3D: 4 Klassen). Letztendlich sind nur die Werte der jeweils höchsten besetzten Klasse (gegebenenfalls gemittelt) zu verwenden.

2.3.3 Fehlernormen und ihre Konvergenz in der FEM

Die Konvergenz einer Finite-Elemente-Methode wurde bereits als ein stetiges Abnehmen des relativen Fehlers einer FE-Lösung bei zunehmender Anzahl finiter Elemente definiert. Dabei ist generell zwischen unterschiedlichen Fehlerquellen zu unterscheiden (Bathe, 2004, Kap. 4):

- Der *Diskretisierungsfehler* ergibt sich einerseits aus der Diskretisierung der Geometrie des betrachteten Gebiets Ω durch finite Elemente Ω_e (geometrischer Diskretisierungsfehler) und andererseits aus der Diskretisierung des Verschiebungsfeldes durch die Formfunktionen, der hier Felddiskretisierungsfehler genannt sei. In einer isoparametrischen Formulierung, in der sowohl Geometrie als auch Verschiebungsfeld mit den gleichen Formfunktionen approximiert werden, konvergieren auch beide Arten des Diskretisierungsfehlers ähnlich. Der Diskretisierungsfehler, insbesondere der Felddiskretisierungsfehler, stellt häufig (und so auch im Rahmen dieser Arbeit) den maßgeblichen Anteil des Gesamtfehlers dar, weshalb dieses Teilkapitel vor allem dieser Fehlerart gewidmet ist. Nichtsdestotrotz können auch andere Fehlerquellen auftreten und dürfen daher nicht gänzlich außer Acht gelassen werden.
- *Integrationsfehler* treten aufgrund einer nicht exakten numerischen Integration der konstitutiven Gleichungen und Volumenkräfte auf dem Gebiet Ω sowie der Randlasten am Gebietsrand Γ_T auf. Sie sind mitunter abhängig von der Verzerrung der Elementgeometrie, was mit ein Grund dafür ist, dass bei der Diskretisierung des Gebiets verzerrte Elementgeometrien zu vermeiden sind. Generell führt eine Unterintegration zu einer Reduktion der Steifigkeit des diskretisierten Systems und wirkt somit dem Diskretisierungsfehler entgegen. Diese Eigenschaft wird sich beispielsweise bei reduziert integrierten linearen Elementen zunutze gemacht. Allerdings führt bei diesen die reduzierte Integration auch zur möglichen Ausbildung von unphysikalischen Null-Energiemoden: bei linearen Elementen die Sanduhrmoden (engl.: hourglass-modes), deren Auftreten eine FE-Lösung gänzlich unbrauchbar machen kann. Die Strategie der gezielten Ausnutzung der Auslöschung von Integrations- und Diskretisierungsfehler ist außerdem insofern fragwürdig, dass sie keinen klaren Anhaltspunkt bietet, wie nahe die numerische Lösung an der exakten Lösung liegt.
- *Rundungsfehler* resultieren aus der endlichen Präzision, mit der Computer Zahlen abspeichern und weiterverarbeiten können. Das Standardformat für das Abspeichern von Gleitkommazahlen ist in aktuellen Computerprogrammen meist das Gleitkommazahlenformat „doppelter Genauigkeit“ (engl.: double-precision). Dabei werden 64 bit für die Darstellung der Gleitkommazahlen bereitgehalten: 1 bit für das Vorzeichen, 11 bit für den Exponenten und 52 bit für die eigentliche Zahlendarstellung. Mit 52 bit kann eine Zahl mit bis zu 16 Stellen im Dezimalsystem ($2^{51} \approx 2,25 \cdot 10^{15}$) dargestellt werden. Somit werden Rundungsfehler eigentlich nur noch bei außerordentlich schlecht konditionierten Gleichungssystemen zum Problem und sind in einer Standard-FE-Analyse gegenüber dem Diskretisierungsfehler in den allermeisten Fällen vernachlässigbar klein.
- Fehler können auch aufgrund einer nur *näherungsweise, iterativen Lösung des letztendlichen numerischen Problems* durch den Lösungsalgorithmus entstehen. Dieser Fehler hängt im Wesentlichen von der Anzahl der durchgeführten Iterationen ab und kann dadurch gesteuert werden. Beispielhaft sind hier iterative Gleichungslöser wie das

Gauß-Seidel-Verfahren und die Methode konjugierter Gradienten zu nennen, die insbesondere für große, dünn besetzte, symmetrische Matrizen den klassischen direkten Lösungsverfahren in ihrer Effizienz deutlich überlegen sind. Lösungsalgorithmen für Eigenwertprobleme, wie der in dieser Arbeit vornehmlich eingesetzte QR-Algorithmus, sind ebenfalls klassischerweise iterative Verfahren. Iterative Gleichungslöser, die bei in dieser Arbeit außen vor bleibenden nichtlinearen Problemstellungen Anwendung finden, sind zum Beispiel das Newton-Raphson-Verfahren und angelehnte Quasi-Newton-Verfahren.

- Weitere Fehlerquellen, die für linear-elastische, statische Analysen aber keine Rolle spielen, sind:
 - Fehler in der Auswertung nichtlinearer Materialmodelle durch Linearisierung der konstitutiven Gleichungen und
 - Fehler in dynamischen Analysen aufgrund von Zeitintegration oder Superposition einer reduzierten Basis von Schwingungsmoden.

Zur Bezifferung der Konvergenz des Diskretisierungsfehlers geht Bathe (2004) von einem Modellproblem aus, in dem alle Fehler außer dem Diskretisierungsfehler null sind. Dies soll auch hier der Ausgangspunkt sein. Doch sei an dieser Stelle die anschaulichere „Herleitung“ der Konvergenzordnung einer klassischen FEM nach Zienkiewicz et al. (2013) vorgezogen.

Ist die Verschiebungslösung \mathbf{u} glatt, das heißt unendlich oft differenzierbar, kann sie in jedem beliebigen Punkt \mathbf{x}_j in eine Taylor-Reihe entwickelt werden:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_j \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j} (x - x_j) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j} (y - y_j) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j} (z - z_j) + \dots \quad (2.159)$$

Ist ein Verschiebungsansatz $\tilde{\mathbf{u}}$ bis zu einer Polynomordnung p vollständig, kann er also den Anteil der in einer Taylor-Reihe entwickelten exakten Verschiebungslösung \mathbf{u} bis ebenfalls zur Ordnung p exakt abbilden und das Restglied der Taylor-Reihe bleibt als Fehler $\mathbf{e}_u = \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}$. Unter Einführung einer charakteristischen Elementabmessung³⁴ h und der Annahme, dass die Abstände $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$, innerhalb derer die Taylorreihe und der Verschiebungsansatz beide gültig sein sollen, ebenfalls von der Größenordnung des finiten Elements und damit auch h sind, ist also der Verschiebungsfehler von der Ordnung $\mathcal{O}(h^{p+1})$. Das heißt, der Verschiebungsfehler wächst mit zunehmender charakteristischer Elementabmessung h nicht wesentlich schneller als h^{p+1} . Wird der Gradient des Polynomansatzes für die Verschiebungen zur Berechnung der Verzerrungen ausgewertet, ist dessen Polynomgrad nur noch $p-1$, sodass auch die Taylor-Reihe für das exakte Verzerrungsfeld nur noch bis zur Polynomordnung $p-1$ exakt abgebildet werden kann und ein Restglied als Verschiebungsfehler der Ordnung $\mathcal{O}(h^p)$ bleibt. Demnach konvergiert die Verschiebungslösung unter Verwendung vollständiger linearer Ansatzpolynome als Formfunktionen $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ quadratisch und die Verzerrungslösung linear. d. h. bei Halbierung der Länge aller Elementkanten viertelt sich der Verschiebungsfehler $(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})$ und halbieren sich der Verzerrungs- $(\boldsymbol{\varepsilon} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})$ und Spannungsfehler $(\boldsymbol{\sigma} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}})$.

Bathe (2004) führt in seinem Standardwerk auch den mathematischen Konvergenzbeweis auf Basis von Sobolev-Funktionenräumen und zugehörigen Normen. Dabei beschränkt er sich ebenfalls auf den Fall glatter Verschiebungslösungen bei Verwendung vollständiger Polynomansätze für die Formfunktionen. Die mathematischen Konvergenzbeweise basieren

³⁴ Dies kann z. B. eine Elementkantenlänge sein. Von Zienkiewicz et al. (2013) ist sie allgemeiner als der Durchmesser der kleinsten Kugel, die das finite Element vollständig einschließt, definiert.

klassischerweise auf einer Abschätzung des Interpolationsfehlers, der wiederum gegen den tatsächlichen Fehler der FE-Lösung abgeschätzt wird. Der *Interpolationsfehler* beschreibt denjenigen Fehler, der gemacht würde, wenn zwischen den exakten Knotenwerten der analytischen Verschiebungslösung mit dem gegebenen Verschiebungsansatz interpoliert würde. Durch die Bestapproximationseigenschaft³⁵ der FE-Lösung ist dann sichergestellt, dass der Fehler der FE-Lösung kleiner ist als der Interpolationsfehler und somit die resultierenden Fehlerschranken für den Interpolationsfehler auch für den Fehler der FE-Lösung gültig sind. Für die detaillierte mathematische Formulierung sei auf die Spezialliteratur verwiesen und hier nur die verwendeten Normen sowie schließlich das Ergebnis dargestellt.

Die Sobolev-Norm $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$ der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ über dem Gebiet Ω lautet für das Verschiebungsfeld \mathbf{u} unter Verwendung des Skalarproduktes:³⁶

$$\begin{aligned} m = 0 : \quad & \|\mathbf{u}\|_{H^0(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \|\mathbf{u}\|^2 \, d\Omega \right)^{1/2}, \\ m = 1 : \quad & \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|\mathbf{u}\|_{H^0(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right\|^2 \, d\Omega \right)^{1/2}, \\ m = 2 : \quad & \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)} = \left(\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} \right\|^2 \, d\Omega \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.160)$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Vektornorm und folglich $\|\cdot\|^2$ die Bildung des Skalarproduktes impliziert. Die zugehörigen Halbnormen $|\mathbf{u}|_{H^m(\Omega)}$ ergeben sich jeweils aus der ausschließlichen Auswertung der Integralausdrücke mit Ableitungen der Ordnung m . Damit lässt sich der Diskretisierungsfehler einer verschiebungsbasierten FE-Formulierung für linear-elastische Kontinua dann folgendermaßen darstellen:

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Omega)} \leq C h^p \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Omega)}, \quad (2.161)$$

wobei C eine materialabhängige, aber auch elementabhängige Konstante ist. Beispielsweise ist er typischerweise für Dreiecks- und Viereckselemente unterschiedlich, nämlich für letztere kleiner, sodass dann (bei gleicher Wahl der Ansatzpolynomordnung) die Nutzung von Viereckselementen zu kleineren relativen Verschiebungsfehlern führt.

Es ist zu beachten, dass die Sobolev-Norm i. A. vom Wert ihrer Halbnorm dominiert wird, die im Falle der $H^1(\Omega)$ -Halbnorm nur Ableitungen der Verschiebungen erster Ordnung enthält. So kann gezeigt werden, dass diese Norm stets von ähnlicher Größenordnung ist, wie die Energiennorm $\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{a(\Omega)}$ des Verschiebungsfehlers, wobei folgendes gelte:

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{a(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})^T (\boldsymbol{\sigma} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \, d\Omega \right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \, d\Omega \right)^{1/2}. \quad (2.162)$$

³⁵ d. h., dass mit gegebenen Ansatzfunktionen keine bessere Approximation der exakten Lösung möglich ist (Stichwort „Galerkin-Orthogonalität“)

³⁶ Die Bezeichnung der Norm mit H ergibt sich dadurch, dass die Sobolev-Norm unter Verwendung des Skalarproduktes gerade einer Hilbertnorm entspricht und durch die Verwendung von H die Notation etwas abgekürzt wird. Dennoch ist die Bezeichnung der Sobolev-Norm spezieller, da sie auf die für die mathematische Herleitung von FEM bedeutenden Sobolev-Funktionenräume verweist. Diese beinhalten in dem hier betrachteten Fall mit Verwendung des Skalarproduktes den Raum aller bis zur gemischten partiellen Ableitung m -ter Ordnung quadratisch integrierbaren Funktionen.

Man beachte, dass gegenüber der Berechnung des elastischen Potentials Π^i des Verschiebungsfehlers $\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}$ der Vorfaktor $1/2$ fehlt und zusätzlich die Wurzel gezogen wird, sodass

$$\Pi^i(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) = 1/2 \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\alpha(\Omega)}^2 .$$

Damit gilt die in der Fehlerschranke (2.161) angegebene Konvergenzbeziehung für die aus den Verschiebungen abgeleiteten Verzerrungen und Spannungen und ergibt für diese die gleiche zu erwartende Konvergenzordnung wie die vorherigen eher phänomenologischen Ausführungen basierend auf der Taylor-Reihenentwicklung (2.159):

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\alpha(\Omega)} \leq C_a h^p \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Omega)} . \quad (2.163)$$

Entsprechend lässt sich die Konvergenz des Verschiebungsfehlers in der Sobolev-Norm nullter Ordnung angeben, die gerade der einfachen L_2 -Norm entspricht:

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{H^0(\Omega)} = \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{L_2(\Omega)} \leq C_{L_2} h^{p+1} \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Omega)} . \quad (2.164)$$

Diese Konvergenzbetrachtungen gelten aber nur für eine gleichmäßige Verfeinerung der Diskretisierung bei Existenz einer hinreichend glatten analytischen Verschiebungslösung. Ist die analytische Verschiebungslösung aber nicht mindestens so glatt, dass $\|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Omega)}$ beschränkt ist (d. h., $\|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Omega)}$ liefere einen finiten Wert), werden die Fehlerschranken (2.161, 2.162, 2.164) bedeutungslos.

Beispielhaft sei hierzu das analytische asymptotische Verschiebungsfeld an einer Rissfront als zweidimensionales Problem in Polarkoordinaten r, φ und dabei nur in der Komponente v betrachtet. Es sei von folgender Struktur:

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} v_j = \sum_{j=0}^{\infty} r^{j/2} \phi_j(\varphi) . \quad (2.165)$$

Hierin ist v_0 eine Starrkörperverschiebung und $\phi_j(\varphi)$ sind reine Winkelfunktionen der Deformationsmoden j . Auswertung der H^0 -, H^1 - und H^2 -Norm für den Term v_1 auf einem Gebiet Ω , das die Rissfront bei $r = 0$ mit einschließt ($r \in [0, r_a]$ mit $r_a > 0$), ergibt dann

$$\|v_1\|_{H^0(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (r^{1/2} \phi_1(\varphi))^2 d\Omega = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{r_a} r (\phi_1(\varphi))^2 r dr d\varphi < \infty , \quad (2.166)$$

$$\begin{aligned} \|v_1\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|v_1\|_{H^0(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial(r^{1/2} \phi_1(\varphi))}{\partial r} + \frac{\partial(r^{1/2} \phi_1(\varphi))}{r \partial \varphi} \right)^2 d\Omega \\ &= \|v_1\|_{H^0(\Omega)}^2 + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{r_a} \frac{1}{2r} \left(\phi_1(\varphi) + 2 \frac{\partial \phi_1(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 r dr d\varphi < \infty , \end{aligned} \quad (2.167)$$

$$\begin{aligned} \|v_1\|_{H^2(\Omega)}^2 &= \|v_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{r \partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2}{r \partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} \right) r^{1/2} \phi_1 \right)^2 d\Omega \\ &= \|v_1\|_{H^0(\Omega)}^2 + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{r_a} \frac{1}{r^3} \left(-\frac{\phi_1}{4} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \varphi^2} \right)^2 r dr d\varphi \rightarrow \infty . \end{aligned} \quad (2.168)$$

Während die H^1 -Norm noch beschränkt ist, trifft das auf die H^2 -Norm nicht mehr zu, sodass die angegebenen Fehlerschranken schon für $p = 1$ (lineare Polynomansätze) unbrauchbar sind. Dies kann für jede Struktursituation mit Spannungssingularitäten, also solche mit $\mathbf{u} \propto r^\lambda$ bei $\lambda < 1$, gezeigt werden.

Für den Fall einer existierenden Spannungssingularität in der Struktursituation konnte gezeigt werden, dass unter weiterer Annahme einer homogenen Verfeinerung der Diskretisierung nur noch eine Konvergenz des Verschiebungsfehlers in der Energienorm der Ordnung λ und in der L_2 -Norm der Ordnung 2λ erwartet werden kann (Johnson u. McLay, 1968, Tong u. Pian, 1973, Strang u. Fix, 1973)³⁷. Dies gilt unabhängig von der verwendeten Polynomordnung für die Formfunktionen und stellt somit eine wesentliche Einschränkung dar. Eine vertretbare Konvergenz des Verschiebungsfehlers unter abnehmender Elementgröße lässt sich dann z. B. mit speziellen Diskretisierungsstrategien, die (gegebenenfalls adaptiv) nahe der Spannungssingularität die Diskretisierung stärker als fern der Singularität verfeinern, erreichen. Alternativ kann eine Anreicherung des Verschiebungsansatzes mit analytischen asymptotischen Nahfeldlösungen angewendet werden. Diese Herangehensweise ist besonders effizient bezüglich der zusätzlich benötigten Freiheitsgrade und wird im Folgekapitel vorgestellt.

2.3.4 Anreicherung der Finite-Elemente-Ansätze

Es sei beispielhaft ein zweidimensionales, diskretisiertes Gebiet Ω mit Riss betrachtet (Abb. 2.14). An der Rissfront existiert eine Spannungssingularität, die mit den Standard-Verschiebungsansätzen der FEM nicht abgebildet werden kann. Der Lösungsansatz der Anreicherung beinhaltet eine Erweiterung des Verschiebungsansatzes (2.127, 2.132) mit der analytischen Nahfeldlösung der Verschiebungen an der Spannungssingularität. Dann bildet die Anreicherung die Spannungssingularität ab, während durch die Standard-Verschiebungsansätze der übrige Anteil der Verschiebungslösung abgedeckt wird. Ist letzterer hinreichend glatt, kann so die optimale Konvergenz des Verschiebungsfehlers wiederhergestellt werden.

Ein entsprechender angereicherter Verschiebungsansatz, wie er ähnlich von Benzley (1974) für den Fall eines ebenen Randwertproblems mit Riss vorgeschlagen wurde, ist

$$\tilde{u}_i(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{k \in \mathcal{N}} N_k(\mathbf{x}) \hat{u}_{ik}}_{\tilde{u}_i^{\text{st}}(\mathbf{x})} + \underbrace{\sum_{s=1}^{n_s} \sum_{l \in \mathcal{P}_s} N_l(\mathbf{x}) \left[\sum_{m=1}^{n_{F_s}} \left(F_{ims}(\mathbf{x}) - \sum_{k \in \mathcal{N}} N_k(\mathbf{x}) F_{ims}(\mathbf{x}_k) \right) c_{ms} \right]}_{\tilde{u}_i^{\text{enr}}(\mathbf{x})} \quad (2.169)$$

mit $i = 1, 2$. Hierin stellt der erste Summand den Standard-Verschiebungsansatz der FEM dar. Dabei ist eine gegenüber den vorherigen Teilkapiteln veränderte Darstellung zur besseren Übersichtlichkeit gewählt worden: Anders als in der bisherigen elementbasierten Formulierung, sind in dieser knotenbasierten Formulierung alle einem Knoten k aus den umliegenden Elementen zugeordneten Formfunktionen N_{ek} zu einer diesem Knoten zugeordneten Ansatzfunktion N_k zusammengefasst. Diese hat am Knoten k den Wert 1 und an allen anderen den Wert 0.³⁸ Dieser Verschiebungsansatz wird für die Menge \mathcal{N} aller Knoten des vollständigen,

³⁷ Johnson u. McLay (1968) und Tong u. Pian (1973) geben die Konvergenzordnung für das elastische Potential und nicht die Energienorm, wie in dieser Arbeit verwendet, an. Folglich erhalten sie für das elastische Potential auf einem Gebiet mit Spannungssingularität eine Konvergenzordnung 2λ .

³⁸ Damit entspricht diese knotenbasierte Formulierung quasi einer assemblierten elementbasierten Formulierung und wird häufig in einer mathematischeren Darstellung der FEM verwendet. Diese Darstellung ist weniger anwenderfreundlich, dafür aber übersichtlicher darstellbar.

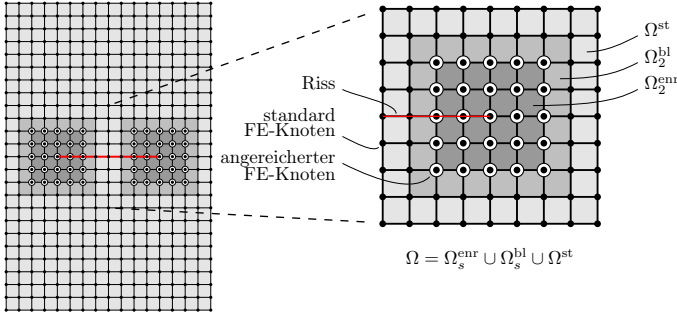


Abbildung 2.14: Zweidimensionales Gebiet Ω mit Riss, das sich aus den Teilgebieten Ω_s^{enr} (umschließt Spannungssingularität an Rissfront/-spitze, Elementverschiebungsansätze sind vollständig angereichert), Ω^{st} (Gebiet fern der Spannungssingularität, keine Anreicherung der Elementverschiebungsansätze) und Ω_s^{bl} (Übergangsbereich, Elementverschiebungsansätze sind teilweise angereichert) zusammensetzt.

diskretisierten Gebiets Ω verwendet. Die Funktionen F_{ims} beinhalten die asymptotischen Nahfelder der Verschiebungen an der Spannungssingularität $s = 1, \dots, n_s$, mit denen angereichert werden soll, und c_{ms} sind die Wichtungsfaktoren dieser Nahfelder, die als neue Freiheitsgrade mit in den Ansatz eingehen. Bei Anreicherung mit den klassischen Rissmoden stellen die Wichtungsfaktoren c_{ms} somit gerade die zwei SIF als die zwei zusätzlich aus der Anreicherung resultierenden Freiheitsgrade dar. Damit die Verschiebungen an allen Knoten vollständig durch den Standardansatz gegeben sind, also \hat{u}_{ik} auch wirklich die Knotenverschiebungen sind, werden die Knotenwerte $F_{ims}(\mathbf{x}_k)$ der Anreicherungsfunktionen, multipliziert mit den Formfunktionen des Standardansatzes, wieder abgezogen. Schließlich wird diese Anreicherung nur für die Knotenmengen \mathcal{P}_s , die alle Knoten in Ω_s^{enr} enthält, durchgeführt. Mittels der Blendingfunktionen, die simplerweise auch die Standardformfunktionen sein können, wird über das Gebiet Ω_s^{bl} die Kontinuität der Verschiebungen zwischen angereichertem Gebiet Ω_s^{enr} und nicht angereichertem Gebiet Ω^{st} sichergestellt. Es sei nochmals herausgestellt, dass auf Ω_s^{enr} nur ein Satz Wichtungsfaktoren c_{ms} definiert ist und dieser Ansatz somit im Beispiel des zweidimensionalen Rissfalls und Anreicherung mit den zwei Rissmoden zu nur zwei zusätzlichen Freiheitsgraden führt.³⁹

In der dreidimensionalen Betrachtung von Rissen wird typischerweise auch die Rissfront und gleichzeitig der Verlauf der SIF durch Ansatzfunktionen approximiert. Zusammen mit einem zusätzlich zu berücksichtigenden Rissmodus sowie zugehörigem SIF führt dies zu einer

³⁹ In klassischen XFEM-Formulierungen (vgl. z. B. Mohammadi (2012)) wird, anstatt direkt mit den asymptotischen Nahfeldern unter Verwendung der Spannungsintensitätsfaktoren als einzige zusätzliche Freiheitsgrade anzureichern, mit einer Zerlegung des herrschenden asymptotischen Nahfelds angereichert und diese für jede Verschiebungskomponente zur Verfügung gestellt. Im Falle des Risses ist dies standardmäßig die Zerlegung von Fleming et al. (1997)

$$\mathbf{F}(r, \varphi) = \sqrt{r} \cdot [\sin(\varphi/2), \cos(\varphi/2), \sin(\varphi/2) \sin(\varphi), \cos(\varphi/2) \sin(\varphi)] \quad (2.170)$$

mit vier Gliedern für jede der zwei Verschiebungskomponenten und demnach 8 zusätzlichen Freiheitsgraden für jede Risspitze s . Werden jedem angereicherten Knoten seine eigenen Freiheitsgrade zugestanden, kann dies schnell zu einer ganz erheblichen Steigerung des Rechenaufwands führen, weshalb in diesen Fällen das Anreicherungsgebiet Ω_s^{enr} meist auf die direkt an die Singularität angrenzenden Elemente beschränkt war.

entsprechend höheren Anzahl an zusätzlichen aus der Anreicherung resultierenden Freiheitsgraden. Der relative Anteil dieser Freiheitsgrade an der Gesamtanzahl aller Freiheitsgrade im Modell, die durch eine weitere zu diskretisierende Raumrichtung sowie einer weiteren an jedem Knoten zu berücksichtigenden Verschiebungskomponente in ähnlichem Maße zunimmt, bleibt jedoch etwa konstant und ist damit immernoch vergleichsweise klein.

Allerdings muss natürlich ein erhöhter Integrationsaufwand für die komplexen Anreicherungs-funktionen betrieben werden. Deshalb wurden vielfach zur Standard-Gaußquadratur hoher Ordnung über dem Einheitsselement (z. B. verwendeten Ayhan et al. (2007) eine $48 \times 48 \times 48$ Gaußquadratur für ihre 3D-Elemente mit Grenzflächenrissanreicherung) alternative Ansätze verfolgt, wie die geschickte Zerlegung und Verzerrung des Gebiets des Einheitsselements (Laborde et al., 2005).

Für die virtuellen Verrückungen $\delta u_i(\mathbf{x})$ wird ein ähnlicher Ansatz wie (2.169) verwendet. Dann resultieren Steifigkeitsmatrizen \mathbf{K}^{st} aus dem Standardanteil $\tilde{\mathbf{u}}^{\text{st}}$ des Verschiebungsansatzes, \mathbf{K}^{enr} aus dem Anreicherungsanteil $\tilde{\mathbf{u}}^{\text{enr}}$ sowie koppelnde Steifigkeitsmatrizen $\mathbf{K}_s^{\text{st/enr}}$. Entsprechend ergeben sich Knotenlastvektoren \mathbf{p}^{st} aus dem Standardanteil $\delta \tilde{\mathbf{u}}^{\text{st}}$ des Ansatzes für die virtuellen Verrückungen und $\mathbf{p}_s^{\text{enr}}$ aus dem Anreicherungsanteil $\delta \tilde{\mathbf{u}}_s^{\text{enr}}$. Mit den zum Vektor $\hat{\mathbf{u}}^{\text{st}}$ zusammengefassten Knotenverschiebungen und den zu $\hat{\mathbf{u}}_s^{\text{enr}}$ zusammengefassten Wichtungsfaktoren c_m ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \mathbf{K}^{\text{st}} & \mathbf{K}_1^{\text{st/enr}} & \cdots & \mathbf{K}_s^{\text{st/enr}} & \cdots & \mathbf{K}_{n_S}^{\text{st/enr}} \\ \hline \mathbf{K}_1^{\text{st/enr T}} & \mathbf{K}_1^{\text{enr}} & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \mathbf{K}_s^{\text{st/enr T}} & & & \mathbf{K}_s^{\text{enr}} & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ \mathbf{K}_{n_S}^{\text{st/enr T}} & & & & & \mathbf{K}_{n_S}^{\text{enr}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}^{\text{st}} \\ \hat{\mathbf{u}}_1^{\text{enr}} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_s^{\text{enr}} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_{n_S}^{\text{enr}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^{\text{st}} \\ \mathbf{p}_1^{\text{enr}} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_s^{\text{enr}} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{n_S}^{\text{enr}} \end{bmatrix}. \quad (2.171)$$

Dabei stellt in der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^{st} aus dem Standard-Verschiebungsansatz für gewöhnlich den mit Abstand größten Teil.

Blum (1988) lieferte mathematische Konvergenzbeweise für die Wirksamkeit der Methode der Anreicherung in der verschiebungsbasierten FEM am Beispiel eines zweidimensionalen Potentialproblems. Unter Verwendung vollständiger polynomialer Verschiebungsansätze von der Ordnung p und einer zusätzlichen, vollständigen Anreicherung mit denjenigen Deformationsmoden der asymptotischen Nahfelder, die nicht glatt, d. h. deren Abklingexponent λ ($u \propto r^\lambda$) keine natürlichen Zahlen (mit 0) sind

$$\begin{aligned} \Lambda^{\text{s}} &= \{ \lambda \mid \lambda \notin \mathbb{N}_0 \}, \\ \Lambda^{\text{enr}} &= \{ \lambda \mid \lambda \leq \lambda_{\text{max}}^{\text{enr}} \wedge \lambda \in \Lambda^{\text{s}} \}, \end{aligned}$$

ergeben sich die Fehlerschranken in vereinfachter Form zu

$$\| \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} \|_{H^0(\Omega)} = \| \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} \|_{L_2(\Omega)} \leq C_{L_2} h^{\min\{p+1, \lambda_{+1}^{\text{enr}}+1, 2\lambda_{+1}^{\text{enr}}\}}, \quad (2.172)$$

$$\| \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} \|_{\alpha(\Omega)} \leq C_a h^{\min\{p, \lambda_{+1}^{\text{enr}}\}}. \quad (2.173)$$

Hierin sei $\lambda_{+1}^{\text{enr}}$ der kleinste Abklingexponent, der keine natürliche Zahl ist⁴⁰, und mit dem nicht angereichert wurde

$$\lambda_{+1}^{\text{enr}} = \min(\Lambda^{\text{s}} \setminus \Lambda^{\text{enr}}) = \min\{ \lambda \mid \lambda > \lambda_{\text{max}}^{\text{enr}} \wedge \lambda \in \Lambda^{\text{s}} \}. \quad (2.174)$$

⁴⁰ sodass das Abklingverhalten in r nicht durch ein Polynom beschrieben werden kann

Tabelle 2.1: Erwartete Konvergenzordnungen in der L_2 - und Energienorm für eine FEM-Lösung auf einem homogenen, isotropen Gebiet mit geradem Riss.

Ansatz- polynom- grad p	ohne Anr.		mit Anr. bis $\lambda_{\max}^{\text{enr}} = 0,5$		mit Anr. bis $\lambda_{\max}^{\text{enr}} = 1,5$		mit Anr. bis $\lambda_{\max}^{\text{enr}} = 2,5$	
	$\lambda_{+1}^{\text{enr}} = 0,5$		$\lambda_{+1}^{\text{enr}} = 1,5$		$\lambda_{+1}^{\text{enr}} = 2,5$		$\lambda_{+1}^{\text{enr}} = 3,5$	
	$\ \cdot\ _{L_2}$	$\ \cdot\ _a$	$\ \cdot\ _{L_2}$	$\ \cdot\ _a$	$\ \cdot\ _{L_2}$	$\ \cdot\ _a$	$\ \cdot\ _{L_2}$	$\ \cdot\ _a$
1	1,0	0,5	2,0	1,0	2,0	1,0	2,0	1,0
2	1,0	0,5	2,5	1,5	3,0	2,0	3,0	2,0
3	1,0	0,5	2,5	1,5	3,5	2,5	4,0	3,0

Um also optimale Konvergenzordnungen im Sinne einer glatten Verschiebungslösung wiederzuerlangen muss gelten:

$$\lambda_{+1}^{\text{enr}} > p .$$

Beispielhaft sind in Tabelle 2.1 die zu erwartenden Konvergenzordnungen des FE-Verschiebungsfehlers in der L_2 - und Energienorm für den Fall eines homogenen, isotropen Gebiets mit geradem Riss unter einer die Deformationsmoden mit singulären Spannungen ansprechenden Belastung angegeben.

Kapitel 3

Stand der Forschung

In diesem Kapitel wird ein Überblick zum weiten Forschungsfeld der Analyse und Bewertung von 3D-Spannungssingularitäten gegeben. Es dient einerseits der Einordnung der vorliegenden Arbeit und andererseits ihrer Abgrenzung gegenüber anderen Arbeiten. Dabei geht es zunächst um Methoden zur Analyse von asymptotischen Nahfeldern. Diese beinhalten die Bestimmung von Singularitätsexponenten und Deformationsmoden einerseits sowie die Bestimmung generalisierter Spannungsintensitätsfaktoren andererseits. Im Anschluss werden bisherige Bewertungskonzepte für 3D-Spannungssingularitäten und ihre Anwendung diskutiert.

3.1 Methoden zur Analyse von 3D-Randwertproblemen mit Spannungssingularitäten und ihre Anwendung

Das Auffinden von Lösungen für Randwertprobleme, die Spannungssingularitäten enthalten, ist schon für 2D-Problemstellungen mitunter ausgesprochen anspruchsvoll. Einige analytische Zugänge sind die Eigenfunktionexpansionsmethode, wie sie von Williams (1952) für isotrope Kerbprobleme eingeführt wurde, und die Methode komplexer Potentiale (Muskhelishvili, 1977, Lekhnitskiĭ, 1963, Eshelby et al., 1953, Stroh, 1958). Vor allem letztere liefert einen allgemeinen Formalismus im Rahmen der komplexen Funktionentheorie und beschränkt die Lösung des Randwertproblems im Wesentlichen auf die Suche nach komplexen, holomorphen Potentialen, die im Rahmen des Formalismus nur noch die Randbedingungen erfüllen müssen. Allerdings ist schon diese Forderung nach Erfüllung aller Randbedingungen selten trivial. Trotzdem hat sich die Methode in der Scheiben- und auch Plattentheorie gerade für den Zugang zu asymptotischen Nahfeldlösungen an sogar beliebig anisotropen Multi-Materialecken als geeignetes und zuverlässiges Werkzeug erwiesen (Sih et al., 1965, Bogy, 1972, Ting u. Chou, 1981, Sator, 2010, Felger u. Becker, 2017).

Yosibash u. Szabó (1995) und Yosibash (2012) entwickelten die sogenannte „modifizierte Steklov-Methode“ zur zuverlässigen Bestimmung ebenfalls zweidimensionaler asymptotischer Nahfelder auf Basis einer Finite-Elemente-Analyse. Einfachere semi-analytische, aber ebenso vielseitige Ansätze wurden beispielsweise von Yamada u. Okumura (1981), Leguillon u. Sanchez-Palencia (1987), Gu u. Belytschko (1994) und Pageau u. Biggers (1996) vorgestellt. Sie basieren alle auf dem gleichen Prinzip, in Umfangsrichtung einen Finite-Elemente-Ansatz zu wählen, während das Problem in radialer Richtung analytisch betrachtet wird. Eine Erweiterung dieses Ansatzes zur Lösung vollständiger Randwertprobleme ist den Arbeiten von Song u. Wolf (1997), Deeks u. Wolf (2002a) und Wolf (2003) zur sogenannten skalierten Rand-Finite-Elemente-Methode zu entnehmen. Eine gute Übersicht über die vielen Arbeiten zu singulären Nahfeldern in 2D-Problemstellungen sind in Sinclair (2004a,b) (jeweils ca. 200 Quellen) zu finden.

Bei 3D-Randwertproblemen mit Spannungssingularitäten sind analytische Lösungen nochmals schwerer zugänglich und schon für asymptotische Nahfelder nur unter sehr speziellen Annahmen verfügbar. Mit Hilfe der Methode der Papkovitch-Neuber-Potentiale sind einige klassische Lösungen zu Einzelkräften im unendlichen Kontinuum oder auf dem elastischen Halbraum zu erhalten. Ebenso können sie auf kugelsymmetrische Randwertprobleme, wie die eines kugelförmigen Einschlusses im unendlichen Kontinuum, angewendet werden (siehe z. B. Becker u. Gross (2002)).

3.1.1 Problemstellungen mit einfachen Liniensingularitäten

Eine Klasse von vergleichsweise einfach zugänglichen 3D-Randwertproblemen mit Spannungssingularitäten sind, mit gewissen Einschränkungen, solche mit sogenannten Liniensingularitäten. Sie enthalten Kanten, entlang derer in jedem Punkt unter einer 2D-Analyse ebenfalls singuläre Spannungen gefunden werden würden. Tatsächlich kann gezeigt werden (Aksentian, 1967), dass auch im allgemeinen 3D-Fall, in dem die Annahmen eines ebenen Verzerrungs- oder longitudinalen Schubspannungszustands nicht erfüllt sind, in der Ebene senkrecht zur betrachteten Kante mit singulären Spannungen trotzdem die 2D-Nahfelder des GEVZ existieren. Diese können in den meisten Fällen analytisch mittels der oben genannten Methoden (z. B. Methode komplexer Potentiale) bestimmt werden. Entlang der Kante (Koordinate s) variieren dann – solange die Kante einen stetigen, glatten Verlauf aufweist – nur die zugehörigen modalen Wichtungsfaktoren $c_j^{2D}(s)$, die äquivalent zu den häufig berechneten GSIF sind

$$u_i = \sum_j c_j^{2D}(s) r^{\lambda_j^{2D}} \phi_{ji}^{2D}(\varphi), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

Das vereinfacht die Analyse erheblich, da nicht erst aufwendig dreidimensionale asymptotische Nahfelder bestimmt werden müssen, bevor das vollständige Randwertproblem für $c_j^{2D}(s)$ gelöst werden kann. Populäre und vielfach berücksichtigte Struktursituationen dieser Art sind kreisförmige und elliptische Risse. Frühe Sammlungen von sowohl Methodik als auch Anwendungen auf spezielle Struktursituationen stellt die Buchserie „Mechanics of Fracture“ dar, in der sich nach Band 1 zur Methodik (Sih, 1973) Band 2 (Kassir u. Sih, 1975) besonders mit 3D-Rissproblemen und schließlich Band 6 (Chen u. Sih, 1981) auch mit 3D-Rissproblemen in anisotropen Komposit-Strukturen beschäftigt. Viele der dort betrachteten Randwertprobleme sind noch analytisch gelöst. Dennoch zeichnete sich schon damals der Trend hin zu den vielseitiger einsetzbaren numerischen Verfahren ab.

Das vollständige Randwertproblem zur Bestimmung der modalen Wichtungsfaktoren respektive GSIF wurde vermehrt mit Hilfe rein numerischer Methoden, wie der Rand-Elemente-Methode (Wrobel u. Aliabadi, 2002, Gaul u. Fiedler, 2013) und mit gesteigerter Nachfrage nach Rechenmethoden für nichtlineare Problemstellungen besonders der Finite-Elemente-Methode (Stein, 1989, Wriggers, 2001, Bathe, 2004, Zienkiewicz et al., 2013) gelöst. Die Bestimmung der klassischen SIF entlang der Rissfront konnte dann im Rahmen einer Nachverarbeitung der Ergebnisse (engl.: *postprocessing*) und unter Kenntnis der 2D-Nahfelder vor allem mittels Erhaltungsintegralen (z. B. 3D-J-Integral, siehe z. B. Kuna (2008)) sowie daraus abgeleiteten Interaktionsintegralen (vgl. Shih u. Asaro (1988), Nakamura (1991), Walters et al. (2005)) erfolgen. Allgemeinere Ansätze zur Bestimmung generalisierter SIF¹ an beliebig anisotropen

¹ in diesem Zusammenhang auch Kantenspannungsintensitätsfaktoren genannt, engl.: edge stress intensity factors, ESIF

Multi-Materialkanten (die Risse natürlich mit einschließen) stammen z. B. von Costabel et al. (2004), Yosibash et al. (2008), Apel et al. (2008), Yosibash (2012), Yosibash u. Shannon (2014), die eine quasi-duale Funktionsmethode auf eine Finite-Elemente-Lösung anwendeten. Weitere Interaktionsintegrale mit ähnlich breiter Einsetzbarkeit im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie sind das (Zwei-Zustands-)M-Integral (Kim et al., 2001, Nagai et al., 2012) sowie das H- bzw. Ψ -Integral (Leguillon u. Sanchez-Palencia, 1987, Meda et al., 1998, Nomura et al., 2010). Eine auf einer speziellen Finite-Elemente-Methode basierende Möglichkeit der punktwisen Bestimmung der GSIF entlang Liniensingularitäten ist von Saputra et al. (2015) im Rahmen einer Skalierten Rand-Finite-Elemente-Methode-Implementierung für sogenannte Octree-Vernetzungen gegeben.

3.1.2 Einschub: Numerische Methoden in Gegenwart singulärer Felder

Bei der Verwendung von rein numerischen Lösungen, insbesondere der Finite-Elemente-Methode basierend auf Netzverfeinerungsstrategien, ist stets zu beachten, dass diese Lösungen in Gegenwart von Singularitäten ein vermindertes Konvergenzverhalten sowie eine verschlechterte Genauigkeit aufweisen (vgl. Johnson u. McLay (1968), Tong u. Pian (1973), Strang u. Fix (1973)). Ohne Anspruch auf Vollständigkeit folgt eine Klassifizierung möglicher Methoden und Verfahren mit dieser Herausforderung umzugehen:

- Die *Gebietsskalierung* ist eine Möglichkeit das Konvergenzverhalten und die Genauigkeit der Lösung in Anwesenheit von Spannungssingularitäten wieder zu verbessern: Ist die Spannungssingularität von der Ordnung $\text{Re}(\lambda) - 1$, d. h. die Verschiebungen sind $u \propto r^{\text{Re}(\lambda)}$, wobei r den Abstand zum Punkt singulärer Spannungen darstellt, dann führt eine Skalierung der Umgebung dieses Punktes mit $\rho = r^{\text{Re}(\lambda)}$ zu einem Verschwinden der Singularität in den skalierten Koordinaten. Eine Möglichkeit, dieses Konzept umzusetzen, ist der Ansatz der gradierten Diskretisierung, wie sie z. B. von Apel et al. (1996), Apel (1999) oder früher auch von Grisvard (1985) und Oganessian u. Rukhovets (1979) vertreten wurde. Eine weitere Möglichkeit der Umsetzung ist die Skalierung nur des Gebietes der am Punkt singulärer Spannungen anliegenden finiten Elemente (Akin, 1976, Kuna, 2008). Die bekanntesten Vertreter dieser Strategie sind die Viertelpunktelemente nach Henshell u. Shaw (1975) sowie Barsoum (1976, 1977), die auch Eingang in kommerzielle FEM-Programme (z. B. ABAQUS) gefunden haben. Sie sind Elemente mit quadratischen Ansätzen und demzufolge drei Knoten entlang jeder Elementkante. Die Verschiebung der Mittelknoten derjenigen Elementkanten, die am Punkt singulärer Spannungen liegen, zum Punkt singulärer Spannungen hin auf die Viertel-Position, führt gerade zu der gewünschten Skalierung des Elementgebiets. Dann kann der lineare Anteil des Verschiebungsansatzes die Rissspitzensingularität $\sigma \propto 1/\sqrt{r}$ und der quadratische Anteil die homogene Dehnung im Element darstellen.
- Die *Anreicherung* der Verschiebungsansätze mit (möglichst) analytischen Lösungen ist eine weitere Möglichkeit zur Wiederherstellung der optimalen Konvergenzeigenschaften sowie zur Verbesserung der Genauigkeit der auf dem Ritz-Verfahren basierenden numerischen Methoden. Schon sehr ausgereifte Arbeiten zur Anreicherung des Verschiebungsansatzes für 2D-Rissprobleme stammen von Benzley (1974) sowie Gifford u. Hilton (1978). Blum (1988) lieferte mathematische Konvergenzbeweise für die Wirksamkeit der Methode der Anreicherung. Weite Verbreitung fand die Methode spätestens mit Aufkommen der sogenannten „erweiterten FEM“ (engl.: *eXtended Finite Element*

Method, XFEM) Ende der 1990er Jahre (Melenk u. Babuška, 1996, Fleming et al., 1997, Duarte et al., 2000). Im Gegensatz zu früheren Arbeiten verwendeten sie als Anreicherung für die Verschiebungsansätze eine Zerlegung des Rissspitzenfeldes. Zusätzlich reicherten sie ihren Verschiebungsansatz mit Sprungfunktionen zur Abbildung des Verschiebungssprunges an den Rissflanken an, um bei Rissfortschrittsanalysen auch Risse innerhalb eines Elements abbilden zu können. Dadurch sollte eine Neuvernetzung nach Rissfortschritt vermeidbar sein. Fries u. Belytschko (2010) gaben eine weitreichende Übersicht zur Entwicklung der XFEM bis zum Jahr 2010 mit über 200 Quellen, vernachlässigten dabei aber Parallelentwicklungen in der Anreicherung der FEM-Ansätze mit vollständigen analytischen Nahfeldern (z. B. Chen (1985), Kaya u. Nied (1993), Pageau u. Biggers (1997), Ayhan et al. (2007), Attaporn u. Koguchi (2009)). Einen bemerkenswerten Vorteil der Anreicherung mit analytischen Nahfeldern stellt die Tatsache dar, dass die (G)SIF direkt² Freiheitsgrade der eigentlichen FE-Lösung sind und nicht erst im Postprocessing bestimmt werden müssen.

- Eine Möglichkeit, das Konvergenzproblem an singulären Punkten zu umgehen, ist die Anwendung sogenannter *Singulärer-Hybrider-Finites-Elemente* (Pian, 1995, Kuna, 2008). Sie stützen sich auf hybride Formulierungen des Variationsfunktionals. Besonders die vereinfachte gemischt hybride Formulierung von Tong et al. (1973), die ein Rissspitzenelement, das die Rissspitze (im zweidimensionalen) vollkommen umschließt, erlaubt, ist besonders zur Verwendung in der FEM mit quadratischen Elementansätzen geeignet (Kuna, 2008). Dabei sind ähnlich der Lösungsansatzwahl nach Trefftz (Trefftz, 1926, Piltner, 1982, Qin, 2005) Ansätze gefordert, die bereits die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie innerhalb des Elementgebiets, also auch an den Rissflanken, erfüllen. Demnach sind die gesuchten Ansätze in diesem Fall die asymptotischen Nahfelder am singulären Punkt und müssen a priori bekannt sein. Gleichzeitig ist ein Vorteil der Methode, dass so SIF, zusammen mit den Wichtungsfaktoren auch höherer Terme im asymptotischen Nahfeld, direkt als Unbekannte enthalten sind. So setzt sich das Variationsfunktional günstigsterweise nur aus Oberflächenintegralen zusammen:

$$\Pi_{\text{mh}}(u_i, \tilde{u}_i) = \int_{\partial V_u} t_i \tilde{u}_i \, dA - \frac{1}{2} \int_{\partial V_u} t_i u_i \, dA - \int_{\partial V_i} t_i^* \tilde{u}_i \, dA .$$

Hierin sind komponentenweise t_i^* die auf dem Elementrand ∂V_i aufgebrachten Spannungsvektoren, t_i und u_i jeweils der Spannungsvektor bzw. der Verschiebungsvektor des asymptotischen Nahfeldes und \tilde{u}_i der FE-Verschiebungsansatz auf der Elementoberfläche. Die Variation über die SIF des analytischen Feldes liefert einen Zusammenhang zwischen diesen und den Knotenverschiebungen des Verschiebungsansatzes am Elementrand. Dieser kann wiederum in das Variationsfunktional eingesetzt und dieses somit in ein rein verschiebungsbasiertes umgewandelt werden, das schließlich zur Kopplung an ein FE-Netz geeignet ist. Ist das vollständige Randwertproblem mit der FEM gelöst, sind die Randverschiebungen des singulären hybriden Elements bekannt, sodass über den ermittelten Zusammenhang zwischen Randverschiebungen und GSIF letztere bestimmt werden können.

² Dies gilt zumindest für die klassischen Anreicherungsansätze. Im Falle typischer XFEM-Anreicherungen mit zerlegten asymptotischen Nahfeldern sind sie auch immer noch indirekt enthalten, werden jedoch meist mittels Erhaltungs- bzw. Interaktionsintegralen bestimmt.

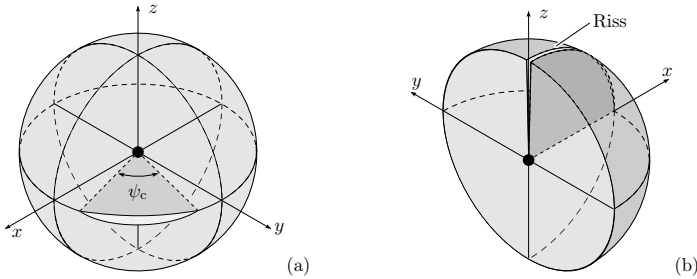


Abbildung 3.1: 3D-Problemstellungen mit Riss, die 2D-Liniensingularitäten (entlang Rissfront) und gleichzeitig 3D-Punktsingularität enthalten: (a) keilförmiger Riss mit Öffnungswinkel ψ_c und Punktsingularität an Keilspitze; (b) senkrecht auf einen freien Rand treffender Riss (Randriss-Situation) mit Punktsingularität, wo Riss auf Rand trifft.

- Schließlich ist eine besondere Gradierungsmethode für die Diskretisierung im Rahmen einer h-p-Methode³ nach Rank u. Babuška (1987) zu nennen. Sie geben an, eine für die h-p-Methode optimale Verfeinerungsstrategie entwickelt zu haben, die unabhängig von der vorhandenen Singularitätsordnung die einem Potenzgesetz folgenden Konvergenzraten⁴ liefert, die mit dieser Methode für ein glattes Randwertproblem erwartet werden können. Diese Verfeinerungsstrategie ist kaum verbreitet, wird aber heute z. B. noch von Yosibash (2012) vertreten.

Weitere Methoden und Verfahren mit dieser Herausforderung umzugehen werden z. B. von Kuna (2008) gegeben. Hier soll wieder zur Einordnung verschiedener dreidimensionaler Randwertprobleme mit Spannungssingularitäten zurückgekehrt werden.

3.1.3 Bestimmung dreidimensionaler asymptotischer Nahfelder – Deformationsmoden und Spannungssingularitätsexponenten

Häufig ist der Verlauf der Kanten mit singulären Spannungen (im Folgenden auch *Singularitätslinien* genannt) nicht glatt, wie beispielsweise an Bimaterialecken in Laminatestrukturen (Laminateckeneffekt, siehe z. B. Mittelstedt u. Becker (2007)), oder nicht stetig, weil die Singularitätslinie (z. B. entlang einer Rissfront) in einer Oberfläche mündet. Dann sind die dreidimensionalen, asymptotischen Nahfelder bezüglich dieser Diskontinuitätspunkte unbekannt und müssen erst mit geeigneten Verfahren bestimmt werden.

³d. h., dass nicht nur die Diskretisierung verfeinert (h-Methode), sondern gleichzeitig auch die Ordnung der Verschiebungsansätze erhöht wird (p-Methode)

⁴ Der Fehler in der Energienorm ist in hinreichend glatten Randwertproblemen $\propto h^p$ mit der charakteristischen Elementgröße h und Ordnung der gewählten Ansatzfunktionen p (vgl. Gl. 2.163). In der p-Methode wird die Anzahl der Freiheitsgrade durch die stetige Erhöhung von p gesteigert. Die Ordnung der gewählten Ansatzfunktionen p steht im Exponenten und das Konvergenzverhalten wird als exponentiell bezeichnet. Im Gegensatz dazu wird in der h-Methode h gleichmäßig verkleinert. In doppellogarithmischer Auftragung des Fehlers über h (bzw. der direkt damit in Zusammenhang stehenden Anzahl der Freiheitsgrade) ergibt sich für hinreichend feine Diskretisierungen eine Gerade der Steigung p , die als algebraische Konvergenzrate bezeichnet wird.

Analytische Lösungen und Finite-Differenzen-Verfahren

Für diese Situationen werden typischerweise Separationsansätze der Form

$$u_i = r^\lambda \phi_i(\varphi, \vartheta), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.2)$$

verwendet. Morrison u. Lewis (1976) betrachteten das Randwertproblem eines keilförmigen, ebenen Risses im elastischen, homogen-isotropen Kontinuum mit Symmetrierandbedingungen in der Rissebene (x,y -Ebene in Abb. 3.1 a) und homogenen vertikalen Zugspannungen im Unendlichen. Im resultierenden Halbraum-Modell nutzten sie für $\phi_i(\varphi, \vartheta)$ wiederum einen Separationsansatz

$$\phi_i(\varphi, \vartheta) = \phi_i^{(1)}(\varphi) \phi_i^{(2)}(\vartheta) \quad \longrightarrow \quad u_i = r^\lambda \phi_i^{(1)}(\varphi) \phi_i^{(2)}(\vartheta). \quad (3.3)$$

Das Randwertproblem lösten sie für verschiedene Öffnungswinkel ψ_c des keilförmigen Risses. Mit Hilfe von Störungsmethoden konnten sie sogar auf analytischem Wege die gesuchten Singularitätsexponenten für drei Grenzfälle bestimmen: fast gerade Kante $|\psi_c - 180^\circ| \ll 1^\circ$, sehr spitzwinkliger Sektor $|\psi_c - 360^\circ| \ll 1^\circ$ oder $|\psi_c| \ll 1^\circ$. Ansonsten waren sie jedoch auf die numerische Lösung ihres reduzierten Randwertproblems für $\phi_i^{(1)}(\varphi)$ und $\phi_i^{(2)}(\vartheta)$ z. B. mit einem Finite-Differenzen-Verfahren angewiesen. Sie verglichen die resultierenden Spannungssingularitätsexponenten der dreidimensionalen asymptotischen Rissfelder an der Unstetigkeit in der Rissfront mit denen aus anderen Arbeiten und fanden eine gute Übereinstimmung.

Eine dieser zum Vergleich herangezogenen Arbeiten stammt von Bažant (1974), der schon feststellte, dass der Separationsansatz (3.2) zwar die Verschiebungsdifferentialgleichungen im Wesentlichen auf ein 2D-Problem, nämlich die Suche nach $\phi_i(\varphi, \vartheta)$, reduziert, diese Funktionen an gewissen Stellen aber auch die Liniensingularität abbilden müssen. Damit hätten sie singuläre Gradienten und wären schlecht zur Lösung mittels numerischer Verfahren geeignet. Zur Elimination dieser Singularität verwendete er folgenden modifizierten Separationsansatz

$$u_i = r^{\lambda^{3D}} \rho^{\lambda^{2D}} \phi_i^*(\varphi, \vartheta), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.4)$$

Hier stellt r weiterhin den Abstand zur Unstetigkeit in der Singularitätslinie dar, während $R = r\rho$ den Abstand zur Singularitätslinie selbst angibt. Die Winkelfunktionen $\phi_i^*(\varphi, \vartheta)$ wären dann stetig und glatt und müssten in der Nähe der Singularitätslinie (z. B. bei $\vartheta = 0$) nur noch die ebenfalls stetigen und glatten Funktionen $\phi_i^{2D}(\varphi)$ wiedergeben. Mit diesem Ansatz wäre die Problemstellung nun sehr gut für die Lösung mittels numerischer Methoden geeignet und eine Reihe von Lösungen für Singularitätsexponenten, die mit Hilfe eines Finite-Differenzen-Verfahrens bestimmt wurden, wurden angegeben. Für die Geometrie eines keilförmigen Risses im Kontinuum unter Symmetrierandbedingungen in der Rissebene stimmten diese auch mit denen aus den Arbeiten von Morrison u. Lewis (1976) sowie Parihar u. Keer (1978) überein. Letztere entwickelten zur Lösung zwei singuläre Integralgleichungen mittels Fundamentallösungen (Einzelkraftlösungen des 3D-Kontinuums) und fanden für die gleichen Grenzfälle wie Morrison u. Lewis (1976) analytische Lösungen, während für andere Konfigurationen ebenfalls numerische Verfahren genutzt werden mussten.

Bažant (1974) hatte in seiner Arbeit ebenfalls analytische Lösungen für Singularitätsexponenten angegeben, unter anderem für den praktisch relevanten Fall einer Rissfront, die auf eine unbelastete Oberfläche trifft. So fand er die sehr einfach darstellbare Lösung $\lambda^{3D} = \lambda^{2D} + 1$ (in Abklingexponenten). Damit wäre dort, wo ein Riss senkrecht auf eine Oberfläche trifft, gar keine Spannungssingularität mehr vorhanden. Es stellte sich jedoch, wie von Bažant u.

Estenssoro (1979) später ausführlich darstellt, heraus, dass er mit der Wahl seines für die numerische Lösung günstigen Ansatzes (3.4) die Kinematik des Risses bedeutend eingeschränkt hatte. Dies ist unmittelbar erkennbar, wenn im Verschiebungsansatz (3.4) $\rho = 0$ gesetzt wird. Die Verschiebung entlang der Rissfront ist in diesem Ansatz dann immer $u_i(\rho = 0) = 0$ und die Rissfront somit unbeweglich. Während das im Falle des keilförmigen Risses im homogen-isotropen Kontinuum offenbar noch eine valide Annahme war, traf dies auf den senkrecht auf einen unbelasteten Rand treffenden Riss⁵ aber nicht mehr zu, wie Benthem (1977) zeigen konnte.

Benthem (1977) lieferte eine korrekte, ebenfalls (weitgehend) analytische Lösung für das symmetrische asymptotische Nahfeld des Randriss-Problems. Seine Lösung beschränkte sich dabei auf homogen-isotrope Kontinua. Benthems Untersuchungen basieren auf den sieben Boussinesq-Papkovich-Neuber-Potentialen⁶ $\psi_j(r, \varphi, \vartheta)$ mit $j = 1, \dots, 7$, die er ähnlich wie Thompson u. Little (1970) unter Verwendung von Legendrepolynomreihen wählte:

$$\psi = r^{\lambda+1} e^{i\mu\varphi} P_{\lambda+1}^{\mu}(\cos(\vartheta)) .$$

In diesem Ansatz sind λ und μ beliebige, komplexe Zahlen und es sind keine kinematischen Einschränkungen enthalten. Daraus leitete er drei Reihen-Lösungen in μ ab, in denen jeder Term für sich bereits die Spannungsrandbedingungen entlang der Rissflanken ($\varphi = \pm \pi$, Rissfront bei $\vartheta = 0$) erfüllte. Mit einer Kombination dieser unendlichen Reihen erfüllte er (im integralen Mittel über φ und geeignet gewichtet) schließlich auch die Randbedingungen der Spannungsfreiheit auf der belastungsfreien Oberfläche $\vartheta = \pm \pi/2$.⁷ Aus der Forderung nicht-trivialer Lösungen für sein homogenes Gleichungssystem erhielt er sowohl Spannungssingularitätsexponenten als auch die zugehörigen 3D-Deformations- und -Spannungsmoden. Unter Zuhilfenahme der nur ersten acht Glieder seiner Reihen und damit nur 28 Freiheitsgraden⁸, war er bereits in der Lage Ergebnisse hoher Genauigkeit zu erzielen, die aber nicht mit jenen von Bažant (1974) übereinstimmten. Zwar fand er für den symmetrischen Modus I ebenfalls eine verschwindende Spannungssingularität an der Oberfläche, allerdings mit anderem von der Querkontraktionszahl ν abhängigen λ ($\nu = 0,3$: $\lambda_I = 0,548$).

Ausgehend von Verschiebungsansatz (3.2) entwickelte Benthem (1980) ein sehr genaues und effizientes Finite-Differenzen-Schema für das Randrissproblem, in dem er die Symmetriebedingungen fallen lassen konnte, um auch weitere Deformationsmoden zu untersuchen. Die numerische Problematik der Singularität in der Verschiebungsfunktion $\phi_i(\varphi, \vartheta)$ löste er durch eine Reskalierung der ϑ -Koordinate (Gebietsskalierungsstrategie, s.o.)

$$R = r \sin \vartheta \longrightarrow R = r \sin \zeta^2 ,$$

wobei R wieder den Abstand zur Rissfront bei $\vartheta = 0$ angibt. So fand Benthem (1980) zwei weitere nun asymmetrische Deformationsmoden mit einmal einer schwächeren Spannungssingularität als im symmetrischen Fall und einmal einer stärkeren mit Abklingexponent sogar

⁵ Diese Problemstellung sei im Folgenden zur kompakteren Darstellung als „Randriss“-Problem bezeichnet.

⁶ Von den sieben Boussinesq-Papkovich-Neuber-Potentialen seien die letzten vier gemeinhin als die klassischen Papkovich-Neuber-Potentiale bekannt, mit denen bereits alle Lösungen der Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen darstellbar seien. Folglich müssten Abhängigkeiten existieren, die Benthem (1977) seines Wissens nach erstmalig angibt.

⁷ Das qualifiziert seine Lösung zwar zunächst als vollständig analytisch, tatsächlich ist sie aber natürlich nur mit endlichen Reihen und somit nur approximativ realisierbar.

⁸ 8 Glieder in jeder seiner 3 Reihen plus 4 zusätzliche Freiheitsgrade in seiner Implementierung

$\lambda < 0,5$ ($\nu = 0,3$: $\lambda_{II} = 0,393$, $\lambda_{III} = 0,943$), d. h. mit einer noch stärkeren Spannungssingularität als der des 2D-Rissspitzenfeldes. Für diese Deformationsmoden, die weder Modus II noch Modus III aus der entsprechenden 2D-Rissituation allein zuzuordnen waren, gab er wieder neben dem Spannungssingularitätsexponenten auch die zugehörigen Spannungsfunktionen und sogar SIF-Funktionen entlang der Rissfront an (bezogen auf den GSIF des 3D-Deformationsmodus).

FEM-Eigenanalyse-Methoden

Der stärker singuläre, asymmetrische Deformationsmodus des auf einen freien Rand treffenden Risses wurde erstmals in der schon erwähnten Arbeit von Bažant u. Estenssoro (1979) gefunden, welche aufgrund ihrer Universalität einen Meilenstein für die Untersuchung von 3D-Spannungssingularitäten im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie darstellte – sowohl bezüglich der Methodenentwicklung als auch deren Anwendung. Deshalb sei an dieser Stelle genauer auf diese Arbeit eingegangen. Ausgehend von der Formänderungsenergie und dem Separationsansatz (3.2) entwickelten Bažant u. Estenssoro (1979) ein für die Anwendung der Finite-Elemente-Methode⁹ geeignetes Variationsprinzip und legten damit den Grundstein für eine Klasse sehr allgemein einsetzbarer Berechnungsverfahren zur Bestimmung der 3D-Spannungssingularitätsexponenten und zugehörigen Deformationsmoden, die hier unter dem Begriff FEM-Eigenanalyse-Methoden (engl.: FEM eigenanalysis, (Pageau u. Biggers, 1997)) zusammengefasst werden. Sie gaben also ihren früheren, kinematisch problematischen Ansatz (3.4) auf und diskretisierten die von den Winkelkoordinaten φ, ϑ aufgespannte Fläche vollständig mit isoparametrischen finiten Elementen. Integration über die Winkelkoordinaten führte auf ein quadratisches Eigenwertproblem für die Abklingexponenten λ

$$\lambda^2 \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{0}$$

mit Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$. Innerhalb der finiten Elemente verwendeten die Autoren zur Approximation der Verschiebungsfunktionen $\phi_i(\varphi, \vartheta)$ einfache bilineare Lagrange-Polynome und integrierten numerisch mittels einer Gauß-Quadratur mit 9 Integrationspunkten auf dem Rechteckelement. Sie verifizierten ihre Implementierung anhand eines Vergleiches mit bis dahin bekannten 3D-Lösungen für Spannungssingularitätsexponenten, darunter einige der oben genannten. Dabei bewahrheitete sich das erwartete Problem ungenauer Lösungen aufgrund der Singularität in $\phi_i(\varphi, \vartheta)$, welches sie jedoch mittels einer Richardson-Extrapolation wesentlich abbildern konnten, sodass ihre extrapolierten Abklingexponenten λ erst in der vierten Nachkommastelle von den Referenzlösungen abwichen (d. h. Abweichungen für $\lambda < 1$ in jedem Fall $< 1\%$). Es sei dabei angemerkt, dass sie trotz der Singularität in $\phi_i(\varphi, \vartheta)$ Konvergenzraten $m_\lambda = 1,3, \dots, 1,9$ anstatt der deutlich niedriger erwarteten erhielten, was vermutlich auf ihre spezielle Art der Diskretisierung mit Kugelkoordinatenpol ($\vartheta = 0$) an der Singularität zurückzuführen ist. Ebenfalls entgegen der Erwartung führten nicht-uniforme Diskretisierungen mit einer Verfeinerung hin zu $\vartheta = 0$ nicht zu genaueren Ergebnissen als uniforme Diskretisierungen mit gleicher Anzahl an Freiheitsgraden. Wohl wegen der schlechten Genauigkeit bzw. einer nicht hinreichend feinen Diskretisierung übersahen sie jedoch den dritten relativ schwach singulären Deformationsmodus.

⁹ Sie bevorzugten in dieser Problemstellung, nach eigenen Angaben, die aufwendiger zu implementierende FEM gegenüber einem einfacheren Finite-Differenzen-Verfahren, um einerseits die Randbedingungen freier Ränder und Materialgrenzen sowie andererseits eine nicht-uniforme Gebietsdiskretisierung leichter in das numerische Verfahren integrieren zu können.

Bezüglich der Interpretation ihrer Ergebnisse argumentierten Bažant u. Estenssoro (1979) mittels energetischer Betrachtungen, dass Risswachstum nur an Spannungssingularitäten vom Typ $\lambda = 0,5$ möglich sei und schlossen daraus, dass die Rissfront eines wachsenden Risses in einem anderen Winkel auf die freie Oberfläche als einem rechten treffen müsste. Dazu setzten sie in ihrer charakteristischen Gleichung $\lambda = 0,5$ und lösten diese numerisch für einerseits die Neigung der Rissfläche bezüglich der Oberfläche und andererseits die Neigung der Rissfront innerhalb der Rissfläche. Die Ergebnisse für mehrere Diskretisierungen wurden wiederum für eine Richardson-Extrapolation verwendet, um genauestmögliche Winkel zu berechnen. Tatsächlich fanden sie entsprechende Winkelkombinationen: Beispielsweise für eine weiterhin senkrecht auf der Oberfläche stehende Rissfläche und den symmetrischen Deformationsmodus ermittelten sie eine am Rand um $11,16^\circ$ zurückhängende Rissfront und für den asymmetrischen Deformationsmodus eine um $23,04^\circ$ vorauseilende Rissfront. Diese Ergebnisse konnten sie experimentell validieren (vgl. Bažant u. Estenssoro (1979, 1980)). Neuere numerische wie experimentelle Untersuchungen (Heyder et al., 2005, Heyder u. Kuhn, 2006, Buchholz et al., 2004, Schnack u. Kolk, 2008) bestätigten diesen Zusammenhang ebenfalls.

Des Weiteren wurden allgemeinere Konfigurationen mit Kerben, die in verschiedenen Winkeln auf einen freien Rand treffen, von Bažant u. Estenssoro (1979) untersucht. Bimaterialkonfigurationen wurden ebenfalls schon betrachtet und die Implementierung für zu erwartende komplexe Singularitätsexponenten erweitert. Dabei fanden sie für die Realteile der resultierenden komplexen Singularitätsexponenten ähnliche Konvergenzeigenschaften wie im homogen-isotropen Fall. Somit war auch hier für die Realteile eine Richardson-Extrapolation verwendbar. Da die Imaginärteile jedoch keine monotone Konvergenz zeigten, musste man sich hier mit den errechneten, vergleichsweise ungenauen Werten zufrieden geben.

Die sehr allgemeine numerische FEM-Eigenanalyse-Methode zur Bestimmung von 3D-Spannungssingularitätsexponenten wurde von hier an stetig weiterentwickelt und auch immer wieder unabhängig von früheren Arbeiten aufgestellt (z. B. Yamada u. Okumura (1981) und Dasgupta (1982)). Somaratna u. Ting (1986) betrachteten erstmals anisotrope Multimaterialkonfigurationen, z. B. einen senkrecht auf einen unbelasteten, freien Rand treffenden Zwischenfaserriss in einem Faserverbundlaminat. Dabei untersuchten sie diverse Lagenaufbauten, ohne jedoch die Rissgeometrie so anzupassen, dass der Riss weiterhin zwischen den Fasern lag. Um die Genauigkeit ihrer Analysen zu steigern, verwendeten sie zum einen Formfunktionen von höherer Ordnung als Bažant u. Estenssoro (1979), nämlich quadratische Lagrangepolynome in 8-knotigen isoparametrischen Elementen. Zum anderen nutzten sie die heuristische Herangehensweise, die Ordnung der numerischen Gaußintegration so zu wählen, dass sich beim Vergleich mit bekannten Lösungen Integrationsfehler und Diskretisierungsfehler soweit wie möglich kompensierten.

Ghahremani (1991) vermied die dem Kugelkoordinatensystem eigene Singularität an den Polen $\vartheta = 0$, die in den anliegenden Elementen zu singulären Integralen $\propto 1/\sin(\vartheta)$ führte, indem er anstatt der φ, ϑ -Ebene die entsprechende Kugeloberfläche geeignet vernetzte. Diese Modifikation führte einerseits dazu, dass lokale Netzverfeinerungen auch wieder zu genaueren Ergebnissen führten, und andererseits Liniensingularitäten nun nicht mehr nur noch an den Polen sondern überall auf der gedachten Kugeloberfläche sinnvoll münden konnten. Wie Somaratna u. Ting (1986) verwendete er quadratische Formfunktionen aber in Dreiecks- statt Viereckselementen, um die Vernetzung (inkl. Netzverfeinerung) zu erleichtern. Ghahremani u. Shih (1992) betrachteten mittels dieser Formulierung und Implementierung unter anderen die Struktursituation eines auf einen freien Rand treffenden Grenzflächenrisses zwischen zwei homogen-isotropen Kontinua und führten Parameterstudien zu verschiedenen

Materialkombinationen und deren Auswirkung auf Singularitätsexponenten und assoziierte Verschiebungs- und Spannungsfelder durch. Ähnlich wie Bazant u. Estenssoro (1979) für den homogen-isotropen Fall, fanden sie für einen asymmetrischen Deformationsmodus eine Spannungssingularität mit $\lambda < 0,5$ (d. h. stärker als die 2D-Rissspitzensingularität), für die also nach energetischen Betrachtungen eine vorausseilende Rissfront nahe des freien Randes zu erwarten war, was mit experimentellen Ergebnissen von Liechti et al. (1992) übereinstimmte. Nakamura (1991), der eine detaillierte FE-Analyse eines Grenzflächenrisses, der durch eine Bimaterialplatte verläuft, durchführte, konnte die von Ghahremani u. Shih (1992) gefundenen Ergebnisse verifizieren. Dazu verglich er die mittels der FE-Analyse und eines für die 3D-Situation erweiterten Interaktions-Integrals (Shih u. Asaro, 1988) bestimmten SIF des Grenzflächenrisses mit denen des nach Ghahremani u. Shih (1992) vorhergesagten singulären 3D-Spannungsfeldes. Sowohl in diesem als auch dem homogen-isotropen Fall fanden sie für die Verhältnisse der SIF (Mixed-Mode) eine gute Übereinstimmung.

Pageau u. Biggers (1995) lehnten sich nach eigenen Angaben an die Arbeit von Yamada u. Okumura (1981) an, nutzten in ihrer Implementierung tatsächlich aber die gleichen Strategien wie Somaratna u. Ting (1986): 8-Knoten-Elemente mit heuristisch optimierter Ordnung der Gaußquadratur zur numerischen Integration. Neben dem Standardfall eines auf einen freien Rand treffenden Risses in homogen-isotropen wie orthotropen Kontinua betrachteten sie diverse Multi-Materialverbindungen anisotroper Werkstoffe, die auf einen freien Rand treffen, mit Fokus auf deren Vorkommen in Faserverbundlaminate. Schließlich eröffneten sie die Perspektive, dass die gefundenen dreidimensionalen asymptotischen Nahfelder als Anreicherung in einer angereicherten FEM-Formulierung Anwendung finden könnten.

Unabhängig davon untersuchten Picu u. Gupta (1997) ebenfalls Multi-Materialverbindungen anisotroper Werkstoffe an belastungsfreien Rändern, hier aber mit dem Fokus auf deren Vorkommen an Korngrenzen polykristalliner Materialien (u.a. Säulen-Eis), welche als Startpunkt für Versagensinitiierung ausgemacht worden seien. Dabei verwendeten die Autoren eine an die Arbeit von Somaratna u. Ting (1986) angelehnte Implementierung der FEM-Eigenanalyse-Methode und beschränkten sich auf symmetrische und antimetrische Konfigurationen. In den meisten betrachteten, vor allem geometrisch variierten Konfigurationen fanden sie stärkere Spannungssingularitäten als entlang der zugehörigen Singularitätslinie (2D-Fall), ohne aber eine Regelmäßigkeit erkennen zu können.

Koguchi u. Muramoto (2000), Prukvilailert u. Koguchi (2005) verwendeten ebenfalls eine ähnliche Formulierung wie Somaratna u. Ting (1986) und untersuchten so diverse Bimaterialecksituationen unter Variation der isotropen Materialeigenschaften und Geometrie. Später erweiterten Islam u. Koguchi (2010) ihre Formulierung auf piezoelektrisches Materialverhalten und untersuchten ansonsten aber sehr ähnliche Struktursituationen bezüglich Spannungssingularitätsexponenten und assoziierten Deformationsmoden.

Labossiere u. Dunn (2001) verwendeten quadratische Dreieckselementansätze zur Diskretisierung der φ, ϑ -Ebene und untersuchten die Bimaterialecke zwischen Aluminium und einem Epoxid-Kunststoff. Da sie entlang der Bimaterialkanten jeweils eine Liniensingularität erwarteten, verschoben sie die Mittelknoten der angrenzenden Elementkanten entsprechend der Gebietsskalierungsstrategie (s.o.). Diese Herangehensweise erscheint jedoch fragwürdig, da in diesem Fall (anders als beispielsweise bei Viertelpunktelementansätzen) innerhalb dieser Elemente in der φ, ϑ -Ebene keine homogenen Dehnungen mehr darstellbar sind, was unabsehbare Konsequenzen für die Konvergenz der Methode hat. Nichtsdestotrotz überprüften sie

ihre Implementierung anhand der quasi 2D-Testfälle einer Bimaterialkante mit Materialkombinationen Aluminium/Epoxid und Stahl/Epoxid, für die sie auch eine analytische Lösung berechnen konnten, und erhielten nach eigenen Angaben bei < 400 Freiheitsgraden Fehler zwischen 2% und 4% für sowohl $\operatorname{Re}(\lambda-1)$ als auch $\phi_i(0, \vartheta)$.

Lee u. Im (2003) verwendeten wie Somaratna u. Ting (1986) eine uniforme Diskretisierung der φ, ϑ -Ebene mit biquadratischen Viereckselementen und variierten die Anzahl der Gaußintegrationspunkte zur heuristischen Verbesserung der Konvergenz der Singularitätsexponenten. Nur wenn in der φ, ϑ -Ebene eine klassische Rissspitzensingularität zu erwarten war, verwendeten Sie für die umliegenden Elemente sehr günstige Viertelpunktelementansätze nach dem zweidimensionalen Vorbild von Henshell u. Shaw (1975).¹⁰ So betrachteten sie das Randriss-Problem im homogen-isotropen Halbraum und erzielten durch Anwendung der Viertelpunktelementansätze eine verbesserte Konvergenz.

Korepanova et al. (2013) formulierten ihre FEM-Eigenanalyse-Methode in Kugelkoordinaten r, φ, ϑ und verwendeten neben einem Standard-Polynomansatz in der Polarwinkelkoordinate ϑ einen Fourier-Reihen-Ansatz in der Azimutwinkelkoordinate φ , wenn ihre betrachteten Gebiete in φ glatt waren. Dabei untersuchten sie auch anisotrope Multimaterialkonfigurationen. Für ihre in der Azimutwinkelkoordinate nicht glatten Testfälle nutzen sie standardmäßig Dreieckselemente in einem uniformen Netz mit unterschiedlichen Polynomgraden.

Leguillon u. Sanchez-Palencia (1987) gingen die Entwicklung ihrer FEM-Eigenanalyse-Methode von einem eher mathematischen Standpunkt aus an und stützten sich dabei nach eigener Aussage auf die theoretischen Arbeiten von Kondrat'ev (1967) und Grisvard (1985) zur Singularitätstheorie elliptischer Differentialgleichungen. In ihrem Buch wandten sie die FEM-Eigenanalyse-Methode noch auf im Wesentlichen 2D-Probleme des EVZ oder GEVZ (Kap. 2.1.1) an, um die Spannungssingularitätsexponenten in anisotropen Faserverbundlaminate zu untersuchen. Später betrachten Leguillon u. Sanchez-Palencia (1999) dann auch 3D-Randwertprobleme, darunter einen auf einen unbelasteten Rand treffenden Zwischenfaserriß in einem $[\pm\theta]$ -Faserverbundlaminate (ausgeglichener Winkelverbund mit Faserorientierung $\pm\theta$). Leider gaben sie keine Materialwerte an, sodass sich ihre Ergebnisse der Reproduktion entziehen.

Apel et al. (2002b,a) traten ebenfalls von der mathematischen Perspektive an die FEM-Eigenanalyse-Methode heran und beschäftigten sich maßgeblich mit der Verbesserung der Effizienz des Verfahrens. Dazu entwickelten sie zum einen eine Diskretisierungsstrategie, mit deren Hilfe sie auch in Gegenwart von Liniensingularitäten die optimale Konvergenz dieser speziellen Finite-Elemente-Methode erhielten (quadratische Konvergenz unter Verwendung linearer Formfunktionen). Ihre gradierte Diskretisierung basierte auf der Gebietsreskalierung (s.o.) um den singulären Punkt in der φ, ϑ -Ebene, sodass die Singularität in reskalierten Koordinaten verschwand (vgl. Ansatz von Benthem (1980)). Dabei wurde allerdings keine der Gebietskoordinaten tatsächlich skaliert, sondern nur die Position der Knoten der linearen Dreieckselemente so verschoben, wie wenn diese Koordinatenskalierung ausgeführt worden wäre. Dadurch blieb die Forderung nach Vollständigkeit des FEM-Ansatzes unmittelbar erfüllt. Für dieses Verfahren wurden sogar Konvergenzbeweise durchgeführt, wonach so die Konvergenzeigenschaften der Methode für ein glattes Gebiet mit glatten Lösungen wiederhergestellt wurden. Zum anderen stellten sie eine sehr effiziente Methode zur Lösung

¹⁰Diese sind jedoch noch insofern suboptimal, als dass diese Elementansätze im Gegensatz zu jenen mit einer kollabierten Elementseite von Barsoum (1976) nur nahe der Elementseiten mit den verschobenen Mittelknoten die Rissspitzensingularität abbilden (Kuna, 2008).

des speziellen quadratischen Eigenwertproblems vor, welches dessen besondere Eigenschaften optimal ausnutzte, und nannten sie „Skew-Hamiltonian-implicitly-restarted-Arnoldi“-Methode (SHIRA). Ein Nachteil früherer Lösungsverfahren für das Eigenwertproblem war, dass sie nicht garantieren konnten, dass auch alle relevanten Eigenwerte gefunden wurden, was eine lebhaft diskutierte Diskussion über viele weitere analytische Ansätze zur Lösung des Randriss-Problems, die weitere Spannungssingularitäten postulierten, ermöglichte (vgl. Sinclair (2004a)). Dieser Nachteil konnte durch Anwendung des SHIRA-Verfahrens ausgeräumt werden (Dimitrov et al., 2001). Testweise berechneten Apel et al. Singularitätsexponenten für die Fichera-Ecke (von drei nicht-parallelen Flächen eingeschlossene Ecke) und das Randriss-Problem – letzteres für diverse Winkel zwischen Rissflächenebene und Oberfläche.

Dimitrov et al. (2001, 2002) verwiesen auf einen Vordruck der Arbeit von Apel et al. (2002b) und verwendeten einen sehr ähnlichen Algorithmus zur Lösung des quadratischen Eigenwertproblems. Sie untersuchten zunächst keilförmige Risse in homogen-isotropen Kontinua sowie keilförmige Grenzflächenrisse auf ihre Spannungssingularitätsexponenten hin. Dabei variierten sie den Keilwinkel und die Querkontraktionszahl sowie gegebenenfalls den Steifigkeitskontrast. Zur Abbildung der Singularität in der φ, ϑ -Ebene nutzten sie eine starke Netzverfeinerung in der Umgebung des singulären Punktes mit einem Verhältnis von maximaler zu minimaler Elementgröße von 40 und erreichten damit beinahe die gewünschte quadratische Konvergenz. Weiterhin wurde das Randriss-Problem betrachtet und dabei die Querkontraktionszahl sowie der Winkel zwischen Rissfront und Oberfläche variiert. Auch die Fichera-Ecke wurde für diverse Öffnungswinkel untersucht: in einem homogen-isotropen Kontinuum sowie an der Grenzfläche zwischen zwei isotropen Kontinua. Schließlich untersuchten sie den Laminateneffekt in einem Kohlenstoffaserepoxidverbundlaminat verschiedener Faserorientierungen und Eckenwinkel und gaben dabei neben den Singularitätsexponenten zum Teil auch die assoziierten Deformationsmoden an. Sie konnten zeigen, dass die Singularitätsexponenten wie beim Laminatrandeffekt vergleichsweise klein $0,9 < \lambda < 1$, aber gleichzeitig auch stets größer und damit kritischer als die des Laminatrandeffektes waren. Dies bestätigte frühere experimentelle Untersuchungen von Griffin u. Roberts (1983), Griffin (1988). Weiterhin fanden sie, dass konkave Ecken kritischer als konvexe und größere Unterschiede in der Faserorientierung zweier benachbarter Laminatlagen kritischer als kleine seien.

Weiterhin entwickelten Dimitrov u. Schnack (2002) einen „A posteriori“-Fehlerindikator auf Basis global geglätteter Spannungen, um eine adaptive h-Methode für die Diskretisierung der φ, ϑ -Ebene zu ermöglichen. Mit Hilfe dieser erreichten sie die bei Anwesenheit von Liniensingularitäten gewünschten Verbesserungen in den Konvergenzeigenschaften der Methode. Der angegebene Fehlerindikator war jedoch noch nicht zur Behandlung von Multimaterialkonfigurationen geeignet. Eine entsprechende Weiterentwicklung wurde zwar angekündigt, jedoch in keiner der gefundenen späteren Veröffentlichungen (Dimitrov, 2004, Schnack et al., 2005, Schnack u. Kolk, 2008) mehr erwähnt.

Wiederum unabhängig entwickelte die Arbeitsgruppe um Wolf (2003) in den 1990er Jahren die sogenannte Skalierte Rand-Finite-Elemente-Methode (engl.: Scaled Boundary Finite Element Method, kurz: SBFEM), die ebenfalls als Variante der FEM-Eigenanalyse-Methode klassifiziert werden kann. Die Herleitung wird dabei allgemeiner formuliert, indem anstatt eines Kugelkoordinatensystems ein skaliertes Rand-Koordinaten-System mit Skalierungskordinate ξ und Rand-Koordinaten η_1, η_2 eingeführt wird. Demzufolge stellt sich der verwendete Separationsansatz für die Verschiebungen gegenüber Ansatz (3.2) leicht verändert dar

$$u_i(\xi, \eta_1, \eta_2) = u_i(\xi) \phi_i(\eta_1, \eta_2) , \quad (3.5)$$

führt aber unter Anwendung eines Variationsprinzips (z. B. Prinzip der virtuellen Verrückungen) auf ein Euler-Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung, dessen Lösung ebenfalls eine asymptotische Expansion für die Verschiebungen ergibt – allerdings in der Skalierungs-koordinate ξ anstatt des Radius r :

$$u_i(\xi, \eta_1, \eta_2) = \sum_j c_j^{3D} \xi^{\lambda_j} \phi_{ij}(\eta_1, \eta_2). \quad (3.6)$$

Mittelstedt u. Becker (2005a,b, 2006) untersuchten 3D-Spannungssingularitäten auf Basis der SBFEM. Sie verifizierten den Ansatz zunächst anhand einer Reihe oben genannter Struktursituationen, sowohl an analytisch als auch numerisch erzeugten Ergebnissen. Zur Sicherstellung einer hinreichenden Auflösung der auftretenden Liniensingularitäten verfeinerten sie die Diskretisierung dort deutlich. In der Folge legten sie den Schwerpunkt auf die Untersuchung des Laminatdeckeneffektes an einer rechtwinkligen Ecke eines typischen Kohlenstoffaserepoxidverbundlaminats und verglichen wie schon Dimitrov et al. (2002) die resultierenden Spannungssingularitätsexponenten mit jenen des dabei ebenfalls entlang der Grenzflächenkante auftretenden Laminatrandeffektes. Dabei variierten sie die Faserorientierungen zweier aneinander angrenzender Schichten in einem größeren Bereich und fanden über weite Bereiche von Faserorientierungskombinationen ebenfalls eine stärkere 3D-Punkt- als 2D-Liniensingularität. In manchen Bereichen war die 3D-Singularität jedoch auch von sehr ähnlicher Stärke oder sogar etwas schwächer. Schließlich betrachteten sie eine Reihe weiterer Eckenwinkel und Bimaterialecken zwischen isotropen Materialien.

Zahlreiche weitere 3D-Risskonfigurationen wurden von Goswami u. Becker (2012) und Mayland (2012) mittels eines SBFEM-Codes von Artel u. Becker (2005), Artel (2007) mit Fokus auf besonders kritischen Spannungssingularitätsexponenten untersucht: darunter sich unter diversen Winkeln kreuzende Risse und Kerben, Mehrmaterialkonfigurationen mit großen Steifigkeitskontrasten, isotrope sowie anisotrope und teils auch piezoelektrische Konfigurationen, etc. Dabei wurde nie eine kritischere als die Einzelkraftsingularität gefunden.

Khodakarami u. Khaji (2011), Khaji u. Khodakarami (2012) erreichten eine Entkopplung des Euler-Differentialgleichungssystems, indem sie Chebyshev-Polynome als Formfunktionen und das numerische Clenshaw-Curtis-Integrationschema verwendeten, und nannten diese Methodik DSBFEM.¹¹

Hell u. Becker (2014, 2015b,a) untersuchten, ebenfalls mittels einer SBFEM-Implementierung, diverse Defektinteraktionen in erstgeschädigten Faserverbundlaminaten unter Variation von geometrischen aber auch Materialparametern, darunter einen Zwischenfaserriss, der auf einen anderen Zwischenfaserriss in einer angrenzenden Laminatlage oder eine Delamination in der angrenzenden Grenzfläche trifft. Weiterhin wurden auf einen unbelasteten Laminatrand treffende Zwischenfaserrisse und Delaminationen betrachtet. Die Ergebnisse dieser Studien werden in Kapitel 4 dargestellt.

Während für die dort benötigten Berechnungen eine hinreichende Genauigkeit der Ergebnisse über eine stark zur Liniensingularität hin verfeinerte Diskretisierung sichergestellt wurde, entwickelten Hell u. Becker (2016b,a) in der Folge eine angereicherte Formulierung der Methode, die eine maßgebliche Effizienzsteigerung bezüglich der benötigten Freiheitsgrade ermöglichte. Dabei wurden nur einfache, homogen-isotrope 3D-Risskonfigurationen betrachtet und zur Anreicherung eine Zerlegung des Rissspitzenfeldes nach Fleming et al. (1997) verwendet. Eine breiter einsetzbare Variante dieser Formulierung wird Gegenstand in Kapitel 5 sein.

¹¹ Hierin steht das der SBFEM vorangestellte „D“ für „decoupled“ – entkoppelt.

Weitere Ansätze und numerische Verfahren

Zum Abschluss dieses Teilkapitels sollen, nachdem einige frühe Arbeiten mit analytischen Ansätzen und Finite-Differenzen-Schemata rekapituliert sowie ausführlich Arbeiten zur sehr vielseitigen FEM-Eigenanalyse-Methode betrachtet wurden, noch weitere alternative Ansätze beleuchtet werden.

Barsoum (1988b,a), Barsoum u. Chen (1991) entwickelten die *Finite-Elemente-Iterative-Methode (FEIM)* zur Bestimmung der führenden 3D-Spannungssingularität in Eckenproblemen. Sie basiert auf der Betrachtung eines vollständig dreidimensional diskretisierten Gebiets unter nahezu beliebigen Randbedingungen, die den für das eigentliche Randwertproblem relevanten nur ähnlich sein müssen. In einem iterativen Prozess, werden die Verschiebungen des singulären Punktes von den auferlegten Verschiebungsrandbedingungen abgezogen und anschließend diese korrigierten Verschiebungsrandbedingungen in einem weiteren Iterationsschritt erneut aufgebracht. Diese Abfolge wird so lange wiederholt, bis Konvergenz der Verschiebungslösung erreicht ist. Die resultierende Verschiebungslösung sei die des Deformationsmodus mit der stärksten (unter den gegebenen Randbedingungen angesprochenen) Spannungssingularität. Auf diese Weise wurden unter anderen Struktursituationen auch jene des auf einen freien Rand treffenden Grenzflächenrisses betrachtet. Es wurden zwar Ergebnisse von ähnlicher Qualität wie in den Arbeiten von Ghahremani u. Shih (1992) gefunden, allerdings jeweils nur für einen singulären Deformationsmodus und mit erheblich größerem numerischen Aufwand. Denn im Iterationsprozess spielt die Art und Weise der Diskretisierung um den singulären Punkt durchaus eine Rolle, sodass entsprechende Maßnahmen wie eine gradierte aber insgesamt auch sehr feine Diskretisierung zu jeder vorhandenen Singularität hin empfohlen wird. Die *wiederholte* Lösung dieses vollständig diskretisierten Randwertproblems stellt sich insbesondere im 3D-Fall als sehr aufwendig dar.

Auch Rand-Integral-Methoden wurden wieder zur Bestimmung dreidimensionaler asymptotischer Nahfelder beispielsweise von Schmitz et al. (1993), Glushkov et al. (1999), Movchan u. Willis (2000) und Savruk u. Shkarayev (2001) angewendet. Neben anderen homogen-isotropen Struktursituationen betrachteten sie das Randriss-Problem. Sie erfordern nach Dimitrov u. Schnack (2002) allerdings eine analytische Vorarbeit in wesentlichem Maße und sind angewiesen auf Fundamentallösungen, sodass Erweiterungen auf Multimaterialkonfigurationen schwierig erscheinen würden.

Schließlich wurde auch die von einer Finite-Elemente-Analyse ausgehend wohl simpelste Möglichkeit genutzt, um zumindest den dominierenden Spannungssingularitätsexponenten zu bestimmen: Entlang radialer Strahlen (φ^* , ϑ^*), die von der Punktssingularität ausgehen, können durch Auswertung der Verschiebungen und unter Annahme des Potenzansatzes (vgl. Gln. 3.2 und 3.6)

$$u_i = \sum_{j=1}^n c_j^{3D} r^{\lambda_j} \phi_{ji}(\varphi, \vartheta)$$

die Unbekannten $c_j^{3D} \phi_{ji}(\varphi^*, \vartheta^*)$ und λ_j mit Hilfe einer Fehlerquadratminimierungsmethode (Least-Squares-Verfahren) ermittelt werden (z. B. Koguchi (1997)). Dabei ist zu beachten, dass hierzu eine geeignete Auswahl an Knotenverschiebungen entlang der Radialkoordinate r zu treffen ist. Denn nahe des Punktes singulärer Spannungen muss mit ungenauen Verschiebungswerten gerechnet werden, während in zu großer Entfernung schon andere Deformationsmoden einen wesentlichen Beitrag leisten können und so das Ergebnis verfälschen. Hinzu kommt, dass das Optimierungsproblem dadurch, dass sich die zu bestimmenden Größen

auf unterschiedlichen Skalen bewegen (eine ist Exponent, die andere nur Faktor), sehr schlecht konditioniert ist. So ist das Verfahren zur Bestimmung von λ eigentlich nur dann zuverlässig einsetzbar, wenn sicher ist, dass nur ein Deformationsmodus mit singulären Spannungen angesprochen wird (vgl. Koguchi (1997), Koguchi u. Muramoto (2000)).

3.1.4 Bestimmung dreidimensionaler asymptotischer Nahfelder – generalisierte Spannungsintensitätsfaktoren (GSIF)

Arbeiten zur Bestimmung auch der GSIF der asymptotischen Nahfelder sind i. A. wesentlich jünger. Offenbar gab man sich vorher stets schon mit der Kenntnis der klassischen SIF entlang von möglichen Rissfronten zufrieden, um auch 3D-Struktursituationen zu bewerten. Dabei kamen alle schon oben genannten Techniken zum Einsatz: Erhaltungs- und Interaktionsintegrale (z. B. Sih (1973), Blackburn u. Hellen (1977), Nakamura (1991), Singuläre-Hybride-Finite-Elemente (z. B. Atluri u. Kathiresan (1979), Kuna u. Zwicke (1990)), angereicherte FEM-Formulierungen (z. B. Pageau u. Biggers (1997), Nied (2003), Ayhan et al. (2007)), Methode der Superposition analytischer und FE-Lösungen (Yamamoto u. Sumi, 1978), um nur einige zu nennen. Diese galt es mit den aus der FEM-Eigenanalyse erhaltenen Deformationsmoden zu versorgen, um ihre Anwendbarkeit auf dreidimensionale asymptotische Nahfelder zu erweitern.

Für den Fall, dass die asymptotischen Felder $r^{\lambda_j} \phi_{ij}(\varphi, \vartheta)$ a priori bekannt sind, konnten Barroso et al. (2012) zeigen, dass das Least-Squares-Verfahren auf besser aber immer noch auf schlecht konditionierte Gleichungssysteme führt, solange mehrere Deformationsmoden mit singulären Spannungen gleichzeitig angesprochen werden. Nur mittels einer Eigenwertzerlegung konnten die resultierenden Gleichungssysteme doch zuverlässig gelöst werden, sodass das Verfahren sowohl für 2D- als auch 3D-Probleme geeignet gewesen sei, um immerhin GSIF (GSIF) zu bestimmen. Es ist allerdings zu erwähnen, dass Barroso et al. (2012) tatsächlich nur 2D-Multi-Materialkerben betrachteten.

Noch ohne die Strategie der Eigenwertzerlegung wurde das Verfahren schon früher von Labosiere u. Dunn (2001) zur Bestimmung der GSIF an der unter Zug stehenden Bimaterialecke eines gekantet gelagerten, stoßgefügt Balkens im 4-Punkt-Biegeversuch angewendet. Dazu führten sie nach ihrer FEM-Eigenanalyse zur Bestimmung der dreidimensionalen asymptotischen Nahfelder auch eine klassische FE-Analyse zur Lösung des Randwertproblems durch. Allerdings waren sie dadurch, dass in ihrer Struktursituation nur eine 3D-Spannungssingularität auftrat, nicht mit der Problematik schlecht konditionierter Gleichungssysteme konfrontiert. Für das gleiche 3D-Randwertproblem wendete auch Leguillon (2014) ein Least-Squares-Verfahren zur Bestimmung der 3D-GSIF an. Koguchi u. Taniguchi (2009) betrachteten ebenfalls eine gerade, aber bis auf thermische Eigenspannungen unbelastete Bimaterialecke. Sie nutzten eine BEM zur Lösung des Randwertproblems, ermittelten die dreidimensionalen asymptotischen Nahfelder mittels einer FEM-Eigenanalyse und bestimmten die GSIF an der Bimaterialecke mittels eines Least-Squares-Verfahrens anhand der Spannungen in der Grenzfläche. Koguchi u. da Costa (2010) untersuchten auf sehr ähnliche Weise GSIF für abgeschrägte Bimaterialecken unter vertikalem Zug mit verschiedenen Steifigkeitskontrasten und abgeschrägten Winkeln. Dabei fanden sie, dass die abgeschrägte Bimaterialecke auf weniger kritische Singularitätsexponenten als die nicht abgeschrägte führte.

Luangarpa u. Koguchi (2014) analysierten wieder eine gerade Bimaterialecke unter vertikalem Zug und nutzten eine FEM-Eigenanalyse zur Bestimmung der Singularitätsexponenten und

zugehörigen Deformationsmoden. Das eigentliche Randwertproblem lösten sie mittels einer FE-Analyse mit stark zur 3D-Punktsingularität hin verfeinertem FE-Netz. Zur Berechnung der GSIF der Bimaterialecke nutzten sie sowohl ein Least-Squares-Verfahren als auch das *H-Integral* und fanden eine gute Übereinstimmung ($< 1\%$). Dabei stellten sie fest, dass die 3D-GSIF in dünnen Stoßfügungen (z. B. dünnen stoßgefügtten Scheiben) geringer als in dicken bzw. eher balkenförmigen waren. Koguchi et al. (2015) bestimmten die Variation der SIF entlang der Rissfront eines als klein angenommenen Grenzflächenrisses ausgehend von einer Bimaterialecke unter vertikalem Zug. Dabei betrachteten sie drei verschiedene Rissformen: Dreiecksriss, Viertelkreisriss (konvex), konkaver Riss. Sie nutzten eine BEM zur Lösung des Randwertproblems und eine sogenannte „Zonen-Methode“ zur Abbildung des kleinen Interface-Risses in der BEM. Mittels einer FEM-Eigenanalyse bestimmten sie 2D- und 3D-Nahfelder: entlang der Bimaterialecke und entlang der Rissfront des Grenzflächenrisses, an der Bimaterialecke und am Schnittpunkt von Bimaterialecke und Grenzflächenriss. Alle SIF wurden mittels eines Least-Squares-Verfahrens bestimmt, wenn erwartet wurde, dass nur ein Deformationsmodus angesprochen wird, und ansonsten mit Hilfe des H-Integrals. Sie fanden, dass sich der Einfluss des kleinen Risses auf die Spannungsverteilung auf einen Bereich erstreckte, der mehr als doppelt so groß wie die Rissabmessung am Rand war. Für ihre spezielle Silizium-Kunstharz-Materialkombination ging der SIF des kleinen Grenzflächenrisses zum freien Rand hin für den konkaven Riss und den Dreiecks-Riss gegen null und für den Viertelkreisriss gegen unendlich (entsprechend den 3D-Singularitätsexponenten dort: $\lambda^{3D} > 0,5$ bzw. $\lambda^{3D} < 0,5$). Weiterhin konnten sie zeigen, dass sich ihre berechneten SIF, vereinfacht dargestellt, nach folgender Formel verhalten:

$$c^{2D}(s) = c^{3D} \phi^{(\text{sing})} s^{\lambda^{3D} - \lambda^{2D}}.$$

Dies gilt im Falle reeller wie auch komplexer Singularitäten. Luangarpa u. Koguchi (2016b) bestätigten diesen Zusammenhang im Rahmen der Untersuchung einer Bimaterialverbindung mit verschiedenen Eckenwinkeln. Das Randwertproblem wurde hier wieder mittels einer FE-Analyse gelöst und die GSIF mittels des H-Integrals ermittelt. Luangarpa u. Koguchi (2016a) wendeten die gleiche, aber für piezoelektrische Materialien erweiterte Methodik auf eine abgestufte Stoßverbindung zweier piezoelektrischer Materialien an.

Lee u. Im (2003) stellten eine Methode zur Berechnung der GSIF mittels eines Erhaltungsintegrals vor: Das M-Integral (siehe z. B. Gross u. Seelig (2016)) wurde für zwei superponierte, elastische Deformationszustände aufgestellt. Den Interaktionsterm des Integrals nannten sie das Zwei-Zustands-M-Integral (engl.: *two-state M-integral*) und nutzten es zusammen mit den berechneten 3D-Deformationsmoden und Singularitätsexponenten, um aus der Lösung eines detaillierten FEM-Vollmodells die GSIF zu extrahieren. Dabei kamen im Speziellen die sonst oft als dual bezeichneten Deformationsmoden zum Einsatz, d. h. jene mit $\lambda_{\text{dual}} = -\lambda - 1$. Mittels dieses Interaktionsintegrals betrachteten sie das Randriss-Problem unter einer Zugbelastung senkrecht zu den Rissflächen und unter einer Schubbelastung in der Ebene der Oberfläche. Weiterhin rechneten sie die Ergebnisse von Labossiere u. Dunn (2001) nach. Dabei ergab sich zwar eine Abweichung im Singularitätsexponenten von $\approx 2,1\%$ aber nur $\approx 0,33\%$ beim GSIF. Lee et al. (2006) verwendeten das Zwei-Zustands-M-Integral zur Bestimmung der GSIF am auf eine unbelastete Oberfläche treffenden Zwischenfaserriss in einem Kohlenstoffaserepoxidverbundlaminat mit $[0^\circ/90^\circ]$ -Schichtorientierung.

Auch mittels einer angereicherten FEM wurde die Eckensingularität in einer Grenzfläche untersucht. Attaporn u. Koguchi (2009) reicherten in ihrer Formulierung sowohl mit den Deformationsmoden der 3D-Eckensingularität als auch jenen der 2D-Liniensingularität an, die sie

beide mittels einer FEM-Eigenanalyse bestimmt hatten, sodass sich der Verschiebungsansatz eines voll angereicherten 8-Knoten-Elements folgendermaßen ergab:

$$\begin{aligned}
 u_i(\mathbf{x}) = & \underbrace{\sum_{k=1}^8 N_k(\mathbf{x}) u_{ik}}_{\text{FEM-Ansatz}} + \underbrace{\sum_{m=1}^{n_\lambda^{3D}} \left(F_{im}^{3D}(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^8 N_k(\mathbf{x}) F_{im}^{3D}(\mathbf{x}_k) \right)}_{\text{Anreicherung mit Punktsingularität}} c_m^{3D} \\
 & + \sum_{s=1}^{n_s} N_s^{2D}(\mathbf{x}) \underbrace{\sum_{m=1}^{n_\lambda^{2D}} \left(F_{ism}^{2D}(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^8 N_k(\mathbf{x}) F_{ism}^{2D}(\mathbf{x}_k) \right)}_{\text{Anreicherung mit Linieningularität } s} c_{sm}^{2D} .
 \end{aligned}$$

Die Anreicherung mit der 2D-Singularität erfolgte dabei knotenweise entlang der Singularitätslinie bei linearer Interpolation ($N_s^{2D}(\mathbf{x})$) der 2D-SIF c_{sm}^{2D} . Wie typisch für eine angereicherte FEM waren somit die 2D- und 3D-GSIF Teil des FE-Randwertproblems und folgten somit unmittelbar aus dessen Lösung. Leider stimmten die so erzielten Ergebnisse kaum mit früheren mittels einer BEM und Least-Squares-Methode berechneten SIF überein (Abweichung der 3D-GSIF mindestens 27,3%). Zudem zeigten sie eine außerordentlich große Sensitivität gegenüber der Größe des Anreicherungsgebiets. Begründungen hierfür wurden nicht angegeben. Bis dato sind dem Autor keine Folgearbeiten oder andere Arbeiten mit vergleichbarem Lösungsansatz bekannt.

Kürzlich wurden GSIF dreidimensionaler asymptotischer Nahfelder auch mittels einer Skalierten Rand-Finite-Elemente-Methode von Hell u. Becker (2015c) bestimmt. Sie liefert nämlich neben dem bereits erwähnten Euler-Differentialgleichungssystem auch ein lineares Gleichungssystem zur Einarbeitung der Randbedingungen am diskretisierten Rand (η_1, η_2 -Ebene), dessen Lösung auf die Wichtungsfaktoren der einzelnen Deformationsmoden und somit auf die GSIF führt. Auf diesem Wege wurde die Struktursituation zweier, sich in der Grenzfläche treffender Zwischenfaserrisse in einem $[0^\circ/90^\circ]$ -Kohlenstofffaserepoxydverbundlaminate bei homogener Abkühlung untersucht.

3.2 Bewertung spröder Struktursituationen mit 3D-Spannungssingularitäten

Im Grunde ist jede reale Struktursituation eine dreidimensionale. Wie im vorangehenden Teilkapitel gezeigt, dominieren aber oft Effekte, die schon mit einer zweidimensionalen bzw. quasi-dreidimensionalen Modellierung abgebildet werden können, sodass auch hier neben der Bewertung von 3D-Spannungssingularitäten teils auch 2D-Spannungssingularitäten Beachtung finden.

Konzepte der Festigkeitsmechanik

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, werden die klassischen Spannungskriterien der Festigkeitsmechanik in Gegenwart singulärer Spannungen bedeutungslos. Ein Beispiel hierfür stellen wieder die Arbeiten von Griffin u. Roberts (1983), Griffin (1988) dar, die den Laminateneckeneffekt in Kohlenstofffaserepoxydverbundlaminaten mit einer 3D-Finite-Elemente-Analyse untersuchten und damit die in Experimenten beobachteten Ecken-Delaminationen infolge

thermischer Eigenspannungen vorherzusagen suchten. Obwohl die Spannungsanalyse nicht in der Lage war, die aufgrund des Laminateneffektes auftretenden Spannungssingularitäten abzubilden, zeigte sie an, dass die Laminatenecken am stärksten beansprucht sind. Die Anwendung eines Hauptspannungskriteriums stellte sich jedoch (erwartungsgemäß) als unzureichend für die Versagensvorhersage heraus: Zum einen müssen die mit der FEM berechneten Spannungen (nahe einer Spannungssingularität) diskretisierungsabhängig sein. Zum anderen tritt hier ein Größeneffekt auf, der von Festigkeitskriterien nicht abgebildet werden kann. Weitere Beispiele für solche Größeneffekte sind der sogenannte „Lochgrößeneffekt“ (z. B. Li u. Zhang (2006)), der eine Zunahme der Versagenslast mit abnehmender Lochgröße beschreibt, trotz immer gleichem Spannungskonzentrationsfaktor am Lochrand von drei (unter uniaxialer Zugbeanspruchung), sowie weitere Größeneffekte in Faserverbundlaminierten bei der Bildung von Matrixrissen (z. B. Wang et al. (1985)).

Abhilfe kann durch sogenannte Theorien kritischer Distanzen (TCD) geschaffen werden (Taylor, 2007), bei denen ein Spannungskriterium in einer gewissen Entfernung der Spannungssingularität, also dort, wo die Spannungen wieder endlich groß sind, ausgewertet wird (Point Method). Alternativ führt eine Mittelung der Spannungen über eine bestimmte Fläche oder ein bestimmtes Volumen ebenfalls wieder auf finite Spannungen, auf die dann ein Spannungskriterium angewendet werden kann (Line Method). Ebenfalls in diese Kategorie der kritischen Distanzen einzuordnen wäre die unbedarfte Auswertung der Spannung einer FE-Analyse an einem Punkt theoretisch singularer Spannungen (vgl. Weißgraber (2014)). Eine FE-Analyse wird ohne besondere Maßnahmen immer und unabhängig von der Diskretisierung finite Spannungen ausgeben, deren Höhe allerdings sehr wohl diskretisierungsabhängig sind. Die Festlegung einer bestimmten Elementgröße in der Umgebung der Spannungssingularität käme dann der Festlegung einer kritischen Distanz gleich. Tatsächlich beruhen auch viele genormte Festigkeitsnachweise für Kerben auf einer Theorie kritischer Distanzen (z. B. Welenauslegung und Festigkeitsnachweis nach DIN 743), da sie auf der Kerbspannungslehre nach Neuber (1937, 2001) und damit dessen Konzept der „Mikrostützwirkung“ fußen, welche wiederum als „Line Method“ eingeordnet werden kann. Eine Vielzahl weiterer Ansätze nach dem Prinzip der Theorie kritischer Distanzen wurden erfolgreich auf Struktursituationen mit Spannungskonzentrationen, wie aufgrund von Spitz- und Rundkerben (dazu zählen auch Löcher) oder des Laminatrandeffekts, angewendet. Eine ausführliche Übersicht hierzu ist der Spezialliteratur zu entnehmen (Taylor, 2007). Die Problematik dieser Ansätze liegt darin, dass zusätzlich zur Festigkeit σ_c ein geometrischer Parameter als weiterer Versagensparameter eingeführt wird, der häufig mit der strukturellen Situation variiert und dann jeweils neu zu bestimmen ist. Auch die Richtung, in der die gewählte Vergleichsspannung ausgewertet wird, ist gerade in 3D-Problemstellungen nicht immer eindeutig.¹² Taylor gibt zwar an, dass in homogen-isotropen Strukturen häufig die Ebenen maximaler Hauptspannungen oder maximaler Schubspannungen eine gute Wahl der Auswertungsrichtung darstellten. Weiterhin könnten aus Experimenten mit „hinreichend“ großen und spitzen V-Kerben ermittelte kritische Distanzen häufig auch für andere Struktursituation übertragen werden. Die Grenzen dieser einfachen Ingenieurs-Lösungen sind jedoch schnell erreicht. So berichtet Taylor, dass sein TCD-Kriterium bei vielen inhärent dreidimensionalen Problemstellungen die tatsächlichen Versagenslasten deutlich unterschätzt (oft um den Faktor 2, teilweise auch den Faktor 4) (Taylor, 2007, Kap. 12.8).

¹² Eine Variante der TCD-Kriterien, die letztere Problematik umgeht, ist das Formänderungsenergiegedichtekriterium nach Yosibash (2012): Hier wird die Formänderungsenergiegedichte in einem kugelförmigen Gebiet mit Radius R_0 um den Punkt höchster Spannungskonzentration gemittelt.

Konzepte der LEBM

Die linear-elastische Bruchmechanik hat sehr leistungsfähige Konzepte zur Bewertung von klassischen Riss- und Grenzflächenrissituationen hervorgebracht (Gross u. Seelig, 2016, Anderson u. Anderson, 2005, Lemaitre u. Chaboche, 1994, Maugin, 1992): Die beiden wohl meistgenutzten sind das Griffith-Kriterium, das die Energiebilanz für einen möglichen Rissfortschritt auswertet, sowie das noch etwas simplere K-Konzept nach Irwin, das die Stärke des singulären Spannungsfeldes in Form des SIF mit einem kritischen Wert vergleicht. Oft sind diese beiden Kriterien äquivalent.

Das Griffith-Kriterium wird meist, und im Falle der klassischen Rissspitzensingularität mit $\sigma \propto r^{-1/2}$ hinreichend, in seiner differentiellen Form angewendet. Der große Vorteil des Kriteriums liegt in seiner physikalischen Berechtigung, da die kritische Größe Bruchzähigkeit \mathcal{G}_c für spröde Materialien einen tatsächlichen Materialparameter darstellt und für viele Werkstoffe weitgehend frei von strukturellen Einflüssen ist. Liegt jedoch eine andere Spannungssingularität vor, ist die entscheidende Größe differentielle Energiefreisetzungsrate entweder $\mathcal{G} \rightarrow \infty$ für starke Spannungssingularitäten ($u \propto r^\lambda, \lambda < 0,5$) oder $\mathcal{G} = 0$ für schwache Singularitäten ($\lambda > 0,5$) und somit unbrauchbar. Einen Ausweg bietet der Rückzug auf die Auswertung des Griffith-Kriteriums für diverse mögliche Folgerisskonfigurationen, also die Bewertung imaginärer Risse (Imaginary Crack Method – ICM). Die Risslänge und gegebenenfalls auch die Orientierung des imaginären Risses können wiederum als zusätzlich eingeführte geometrische Parameter betrachtet werden, die für jede Struktursituation separat zu bestimmen sind.¹³

Das Irwinsche-Kriterium (K-Konzept) ist per se vielseitiger und direkter einsetzbar. Es beruht auf der Annahme, dass im Gebiet, auf dem die Versagensinitiierung stattfindet, das asymptotische Nahfeld dominiert, also einerseits nichtlineare Deformationen auf einen kleineren Bereich um den Punkt theoretisch singulärer Spannungen begrenzt und andererseits Störungen durch die finite Geometrie und äußere Lasten ebenfalls klein sind. Hier ist es hinreichend die Intensität des asymptotischen Nahfeldes in Form des (G)SIF zu bestimmen und mit einem kritischen Wert zu vergleichen. Somit ist das Kriterium auch für starke und schwache Singularitäten anwendbar (aber nicht in der Lage nicht-singuläre Spannungskonzentrationen zu bewerten). Allerdings ist ein kritischer SIF nur für den Spezialfall der klassischen Rissspitzensingularität mit einem Materialparameter, nämlich der Bruchzähigkeit \mathcal{G}_c , in direkte Verbindung zu bringen. In allen anderen Fällen ist er nur ein Strukturparameter, muss also für jede Struktursituation separat bestimmt werden.

Für dreidimensionale Struktursituationen mit Spannungssingularitäten wurde zur Bewertung meist ein schon vorhandener Riss mit glatter, stetiger Rissfront betrachtet, wie zum Teil schon im vorangehenden Teilkapitel dargestellt. Mitunter wurden Algorithmen entwickelt, die vollautomatisch Risswachstum in 3D-Körpern simulieren. Aus einer Vielzahl, ohne Anspruch auf Vollständigkeit, seien hier klassische XFEM-Ansätze (Sukumar et al., 2003, Agathos et al., 2017), die ohne Aktualisierung der Diskretisierung bei Rissfortschritt auskommen, angereicherte FEM-Ansätze für Grenzflächenrisse mit Neuvernetzung bei Rissfortschritt (Herr u. Nied, 2005), Phasenfeldmodelle (Hofacker u. Miehe, 2013, Mesgarnejad et al., 2015) und eine auf einer 3D-BEM (Dual Discontinuity Method) basierende Rissfortschrittsanalyse von Kolk u. Kuhn (2006) genannt. Sie gehen typischerweise von einer konstanten und finiten Energiefreisetzungsrate entlang der vollständigen 3D-Rissfront aus, was die Form der Rissfront weitgehend festlegt. Teilweise ist ein Rissfortschrittskriterium nach dem Vorbild

¹³ Es stellt also das Pendant der LEBM zur TCD der Festigkeitsmechanik dar.

von Forman (Forman et al., 1967, Gross u. Seelig, 2016) unter Verwendung der berechneten SIF und teilweise ein einfaches Griffithkriterium implementiert. Vor allem Kolk u. Kuhn (2006) geben ausführliche Vergleiche mit experimentellen Ergebnissen an und zeigen, dass ein Ermüdungsrisswachstumskriterium nach Forman zumindest für zyklische Beanspruchungen besser geeignet ist. Allerdings ist auch mit diesen anspruchsvollen und hochentwickelten Methoden und Modellen keine *Rissinitiiierung* vorherzusagen.

Zur Modellierung der Versagensinitiiierung und -evolution in Kohlenstofffaserepoxydverbundlaminate stützten sich Wang et al. (1985) in ihrer sehr umfangreichen Arbeit auf die Berechnung differentieller Energiefreisetzungsraten zur Anwendung eines Griffith-Kriteriums. Sie betrachteten sehr detaillierte Experimente von Crossman et al. (1983) zum sequentiellen Versagensverhalten von Faserverbundlaminate unter uniaxialem Zug, in denen nach dem klassischen Erstversagen durch Zwischenfaserrisse und Rand-Delaminationen auch großflächige Delaminationen ausgehend von einem 3D-Interaktionspunkt auftraten, z. B. Zwischenfaserriss am Laminatrand oder sich in der Grenzfläche treffende Zwischenfaserrisse aus benachbarten Lagen. Wang et al. (1985) führten FE-Analysen zu Laminaten vor allem mit Lagenaufbauten $[0_2^{\circ}/90_n^{\circ}]_s$, $n = 1, 2, 4$ durch und berechneten zunächst im Rahmen von 2D-Betrachtungen differentielle Energiefreisetzungsraten für Zwischenfaserrisse und Rand-Delaminationen. Für den Zwischenfaserriss fanden sie den auch später von García et al. (2014) dokumentierten, stark nichtmonotonen Verlauf der differentiellen Energiefreisetzungsraten über der Risslänge, der erst stetig ansteigt und kurz vor Durchtrennen der gesamten Laminatlage stark abfällt. Für die Rand-Delamination gaben sie einen mit der Risslänge zunächst ansteigenden Verlauf an, der sich ungefähr ab einer Länge identisch mit der Dicke der Laminatmittellage einem festen Wert asymptotisch annäherte. Die differentiellen Energiefreisetzungsraten werteten sie jeweils für eine gewählte Risslänge, die dem größten effektiven Defekt entsprechen sollte, aus. Diese Risslänge wählten sie für die beiden Versagensmoden und auch schon für verschiedene Dicken der Laminatmittellage unterschiedlich. Folglich stellte die Risslänge einen zusätzlich eingeführten Strukturparameter dar, womit diese Vorgehensweise als eine ICM einzuordnen ist. Es wurde festgestellt, dass Rand-Delaminationen für diese Laminatfamilie erst nach Faserversagen eintreten würde. Für Lagenaufbauten $[\pm\theta/90^{\circ}]_s$ stellten sie hingegen eine signifikante Abhängigkeit der differentiellen Energiefreisetzungsraten vom Lagenwinkel θ fest, sodass die Rand-Delamination für den Lagenaufbau $[\pm 25^{\circ}/90^{\circ}]_s$, wie in den Experimenten beobachtet, sogar zum Erstversagensmodus wurde. Anschließend untersuchten sie auch die 3D-Struktursituationen des auf den freien Rand treffenden Zwischenfaserrisses sowie zwei in der Grenzfläche aufeinander treffender Zwischenfaserrisse mittels einer FE-Analyse und fanden am 3D-Interaktionspunkt jeweils ein stark überhöhtes Spannungsfeld vor. Durch Lösen einzelner Knoten bestimmten sie für diese Struktursituationen wieder quasi-differentielle Energiefreisetzungsraten für vom Defektinteraktionspunkt ausgehende Delaminationen. Dies führte jedoch auf sehr stark schwankende Ergebnisse, sodass nur eine grobe Orientierung an Maximalwerten möglich war. Den strukturellen Risslängenparameter wählten sie unter der Voraussetzung, dass die Delamination beobachtbar sein musste, was sie für ein Verhältnis von Delaminationsfläche zu Schichtdicke zum Quadrat $A/t^2 = 1$ für gegeben hielten. Insgesamt waren sie so in der Lage die experimentellen Ergebnisse sowohl in ihrer Qualität als auch in guter Näherung in ihrer Quantität abzubilden – trotz oder gerade wegen der geschickt gewählten Rissgrößenparameter.

In ihrer schon mehrfach erwähnten Arbeit berechneten Labossiere u. Dunn (2001) als erste GSIF c^{3D} an einer 3D-Spannungssingularität und verglichen diese mit einem kritischen Wert c_f^{3D} . In diesem Fall ergab sich so ein besonders einfaches Versagenskriterium, da nur eine

Spannungssingularität angesprochen wurde: $c^{3D} = c_f^{3D}$. Sie untersuchten die schon erwähnten Bimaterialbalken im 4-Punkt-Biegeversuch und variierten dabei die Größe des quadratischen Balkenquerschnitts. Eine Auswertung eines Normalspannungskriteriums nach Balkentheorie ergab sehr unterschiedliche Maximalspannungen bei Versagen. Hingegen lieferte die Auswertung des Irwinkriteriums sehr ähnliche kritische GSIF für alle berücksichtigten Querschnitte. Zur Absicherung ihrer Annahme der Dominanz des asymptotischen Nahfelds verglichen sie die Normalspannungen der FE-Analyse mit denjenigen des asymptotischen Nahfelds entlang der Grenzflächendiagonale. Stets fanden sie für einen Bereich r_λ von etwa 7% der Balkenbreite b eine Abweichung $< 10\%$ der Spannungen, was sie als größer als jeden nachweisbaren Defekt bzw. jede nachweisbare anderweitige Störung der Elastizitätstheoretischen Felder bewerteten. Zur Absicherung ihrer Annahme, dass das Gebiet nichtlinearer Deformationen klein gegenüber dem vom asymptotischen Nahfeld dominierten Gebiets wäre, schätzten sie zudem die Größe des letzteren durch Berechnung eines plastischen Radius r_p an der Grenzfläche im duktileren Epoxid ab. In Anbetracht eines Größenverhältnisses von $r_p/r_\lambda < 2\%$ bewerteten sie ihre Annahme als erfüllt. Diese umfassende Analyse stellt gerade auch wegen ihrer strikt methodischen Vorgehensweise einen Meilenstein in der Bewertung der Versagensinitiierung an 3D-Spannungssingularitäten dar. Nichtsdestotrotz bleibt der kritische GSIF c_f^{3D} eine strukturelle Größe, die zwar für verschiedene Balkenabmessungen im Experiment gleich war, jedoch, wie auch von Labossiere u. Dunn (2001) gezeigt, natürlich schon eine andere sein muss, wenn der stoßgefügte Balken gerade (und nicht gekantet) im 4-Punkt-Biegeversuch getestet und die 2D-Spannungssingularität die versagenskritische wird. Ebenso würde eine Änderung der lokalen Geometrie der Bimaterialecke (Interfacewinkel, Eckenwinkel, etc.) zu einer Änderung des Spannungssingularitätsexponenten einerseits und natürlich auch zu einer Änderung des kritischen GSIF andererseits führen.

Weitere Arbeiten, in denen das Irwinkriterium auf Bimaterialecken mit 3D-Spannungssingularitäten angewendet wurde, waren diejenigen von Koguchi u. Hoshi (2012) sowie Kimura u. Koguchi (2015). Sie untersuchten Bimaterialecken an Klebfugen in dünnschichtigen Elektronikchips, lösten das Randwertproblem mittels einer BEM und berechneten die asymptotischen Nahfelder durch eine FEM-Eigenanalyse. Mittels eines Least-Squares-Verfahrens passten sie die 3D-GSIF an die Spannungen der Randwertproblemlösung an. Allerdings führten hier schon variierende Überlappungsfügungsflächen (bei ansonsten insbesondere an der Bimaterialecke gleicher Geometrie) auch zu variierenden kritischen GSIF (Koguchi u. Hoshi, 2012). Eine Variation der Klebschichtdicke hatte hingegen keinen Einfluss (Kimura u. Koguchi, 2015). Diese Diskrepanz entspricht nicht der allgemeinen Erwartung.

Das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium im Rahmen der Bruchmechanik finiter Risse

Anders als das Irwin-Kriterium zeichnet sich das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium im Rahmen der Finiten Bruchmechanik durch seine Eigenschaft aus, nur gängige Materialkennwerte als Eingangsgrößen zu benötigen. Dabei geht es von einer instantanen Entstehung eines endlich großen Risses bei Rissinitiierung aus, wenn sowohl ein Spannungs-kriterium auf der potentiellen Rissfläche erfüllt und gleichzeitig dieser Riss auch energetisch möglich ist. Eine sehr ausführliche Übersicht über die relevante Literatur zum gekoppelten Kriterium ist von Weißgraeber et al. (2015) gegeben. Schon 1985 ging Hashin (1985) von finiten Rissen bei der Betrachtung von Zwischenfaserrissbildung in Faserverbundlaminate aus. Mittels eines einfachen eindimensionalen Variationsansatzes untersuchte er die Steifigkeitsdegradation

aufgrund von Zwischenfaserrissen und konnte experimentelle Daten damit sehr gut abbilden. Allerdings brauchte er kein Spannungskriterium, da die finite Länge der Zwischenfaserrisse bereits durch die Dicke der Laminatlage festgelegt war.¹⁴ Erst Leguillon (2002) führte ein gekoppeltes Spannungs- und Energiekriterium zur Bewertung von Spitzkerben in PMMA ein. Seitdem wurde es, ähnlich wie die TCD-Kriterien, für eine Vielzahl von Struktursituationen mit Spannungskonzentrationen zur Vorhersage der Rissinitiierung angewendet und validiert – allerdings meist für zweidimensionale Problemstellungen (Lochgrößeneffekt, Biegeproben mit Löchern, Rundkerben, Spitzkerben, Laminatrandeffekt, Strukturklebungen, auch mit hyperelastischem Materialgesetz, Bimaterialkerben, etc.). Anders als die bisher genannten Kriterien (TCD, ICM, etc.), ist es nicht auf kritische strukturspezifische Parameter angewiesen, sondern es genügen die beiden Materialparameter Festigkeit und Bruchzähigkeit.

Bislang existieren nur wenige Arbeiten, die die Finite Bruchmechanik und ein gekoppeltes Kriterium auf inhärent dreidimensionale Spannungskonzentrationen anwenden. Dies liegt maßgeblich darin begründet, dass zur Überprüfung der energetischen Zulässigkeit im Allgemeinen das Randwertproblem auch für jede potentielle gerissene Strukturkonfiguration zu lösen ist. Was im zweidimensionalen Fall schon aufwendig war, ist im dreidimensionalen Fall mit Rissvariablen Ort, Geometrie (Krümmung, Form, etc.), Abmessungen, etc. kaum noch in einem angemessenen Rahmen zu bewerkstelligen.

Leguillon (2014) unternahm einen ersten Versuch, indem er das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium auf die noch vergleichsweise überschaubare Struktursituation von Labossiere u. Dunn (2001) anwendete. Wie bereits erwähnt, zeichnet sich diese dadurch aus, dass nur ein Deformationsmodus mit 3D-Spannungssingularität auftritt, welcher außerdem in einem vergleichsweise großen Gebiet um die Bimaterialecke dominiert. Gerade letzteres lässt schließen, dass hier eine lokal wie global positive Struktur- und Lastsituation vorliegt¹⁵. Um die Problematik der Vielzahl möglicher Risskonfigurationen zu reduzieren, traf er zunächst die Annahme, dass der Riss eben sein und in der Aluminium-Epoxid-Grenzfläche liegen würde. Hiervon ausgehend lieferte die Auswertung des Spannungskriteriums Isolinien, bis zu denen der Riss sich unter gegebener Belastung maximal erstrecken würde (Obergrenze). Die daraus resultierende konkave Rissform mit sich an die Ränder anschmiegenden Rissfronten näherte er durch eine symmetrische Dreiecks- sowie eine weitere, der konkaven nähere Form¹⁶ an. Da der Ansatz, inkrementelle Energiefreisetzungsraten mit einer effizienten „Matched Asymptotics“-Prozedur zu berechnen, wegen erwartbarer Konvergenzprobleme scheiterte, wurden diese aufwendig mit Finite-Elemente-Analysen für diverse Balkenabmessungen und Rissgrößen berechnet. Die resultierenden Werte näherte er schließlich mit einem Potenzansatz an, sodass er sowohl für das Spannungs- als auch das Energieteilkriterium einen einfachen Ausdruck in der Art eines Potenzgesetzes verwenden konnte. Da in der Arbeit von Labossiere u. Dunn (2001) leider weder Grenzflächen-Festigkeit noch -Bruchzähigkeit gegeben waren, konnte er jedoch das gekoppelte Kriterium hier nicht vollständig validieren, sondern nur mögliche Werte für Grenzflächen-Festigkeit und -Bruchzähigkeit (sowie zugehörige Rissgrößen) bestimmen und auf Plausibilität prüfen.

García et al. (2016) betrachteten die Initiierung von Zwischenfaserrissen in den mittleren Lagen eines Faserverbundlaminates mit $[0^\circ/90^\circ]_s$ -Lagenaufbau unter uniaxialem Zug mit-

¹⁴ Somit ist sein Konzept der Bruchmechanik finiter Risse einer ICM ähnlich.

¹⁵ vgl. Kap. 2.2.4, Abb. 2.9 und 2.10

¹⁶ eine weiterhin symmetrische und ebene Rissform, die nun aus zwei Dreiecken zusammengesetzt war (abschnittsweise gerade Rissfront) und bei gleicher Abmessung in der Symmetrieebene auf die doppelte Fläche der Dreiecksrissform führte



Abbildung 3.2: Von Leguillon (2014) berücksichtigte Rissformen. Bei gleicher Diagonalausdehnung d unterscheiden sich ihre Flächen um den Faktor zwei.

tels des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums. Nachdem García et al. (2014) eine zweidimensionale Idealisierung der Struktursituation, d. h. mit Annahmen des ebenen Verzerzungsstands und Initiierung von Zwischenfaserrissen, die über die komplette Laminatbreite verlaufen, vorgenommen hatten, wurden nun auch Zwischenfaserrisse mit variabler Ausdehnung und Position in der Laminatbreite angenommen. Wie schon im einfachen bis auf einen Vorfaktor analytischen 2D-Modell wurde ein starker Größeneffekt der mittleren Laminatlagendicken auf die Entstehung von Zwischenfaserrissen vorhergesagt. Das komplexere 3D-FEM-Modell mit speziellem, aufwendigen Vernetzungsalgorithmus für die Zwischenfaserrisse lieferte lediglich die weitere Aussage, dass für besonders dicke Laminatmittellagen eine Entstehung von Zwischenfaserrissen bevorzugt in Randnähe abläuft. So liegt der Schluss nahe, dass das 2D-Modell für diese Anwendung ausreichend war – zumindest für die berücksichtigten Rissgeometrien.

Weitere Modelle, die in der Lage sind, Rissinitiierung auch in tatsächlich dreidimensionalen Struktursituationen darzustellen, sind nicht-lokale Modelle, wie schädigungsmechanische Modelle und regularisierte Variationsformulierungen des Griffith-Kriteriums.

Nicht-lokale Modelle

Die Theorie der Schädigungsmechanik ist ausführlich im Standardwerk von Lemaitre u. Chaboche (1994) dargestellt. Sie beschreibt Materialversagen als einen räumlich wie zeitlich kontinuierlichen Versagensprozess, der einem Schädigungsgesetz folgt. Dadurch ist auch die einem eigentlichen Riss im Material vorausgehende Akkumulation von Mikro-Materialschädigung (z. B. durch Entstehung von Mikrorissen /-poren) und damit die gesamte Schadensevolution prinzipiell nachbildbar. Sie stellt sich weiterhin sehr vielseitig dar: Schädigungsmodelle können über mikromechanische Modellierung und anschließende Homogenisierung physikalisch sehr fundiert für verschiedene Versagensarten (spröde und duktile Schädigung, Kriechschädigung, Ermüdungsschädigung) und deren Mechanismen formuliert werden. Genauso sind aber auch rein empirisch motivierte Schädigungsgesetze möglich.

Die Schädigungsgesetze setzen typischerweise am Materialmodell an, das abhängig von einer Reihe von Schädigungsvariablen und -parametern formuliert ist. Erreicht die Schädigung einen kritischen Wert¹⁷, tritt lokale Materialinstabilität auf. Hier führt eine weiter zunehmende Verzerrung zu einer Entfestigung des Materials, sodass dann nur noch eine geringere Last übertragen werden kann. Im einfachen Beispiel eines Zugstabes unter kraftgesteuerter quasi-statischer Belastung, tritt dann instabiles Totalversagen auf. Dabei versagt das Material jedoch nicht überall im Volumen gleichermaßen; dies würde sehr viel Bruchenergie erfordern (wäre

¹⁷ Dieser Wert fällt typischerweise mit der Erreichen der Festigkeit σ_c zusammen.

also energetisch ungünstig), sodass Versagen letztendlich sehr lokalisiert durch Rissbildung in einer Fläche erfolgt. Während also am Punkt der Materialinstabilität manche materiellen Punkte eine Entfestigung erfahren, folgt für die Mehrheit der materiellen Punkte dadurch eine Entlastung (ohne weitere Schädigung). Ähnlich dazu erfolgt an einer Spannungskonzentration (z. B. am Lochrand in Scheibe unter uniaxialer Zuglast) bei einsetzender Materialinstabilität eine Umverteilung der inneren Beanspruchung in den unmittelbar angrenzenden Bereichen: Angrenzende Bereiche in Richtung des Lastflusses erfahren eine Entlastung, während ansonsten eine stärkere Beanspruchung und daraus resultierend auch Schädigung stattfindet.

Diese Lokalisierung der Schädigung auf ein flächenartiges Gebiet im Volumen bleibt nicht folgenlos: Schädigungsmechanische Modelle sind bis auf sehr wenige Spezialfälle auf numerische Berechnungsmethoden angewiesen. Diese können aufgrund der begrenzten Diskretisierung des betrachteten Körpers die starke Schädigungslokalisierung auf eine Fläche (zur Abbildung eines Risses) nicht darstellen, sodass die resultierenden Ergebnisse zwangsläufig diskretisierungsabhängig sind.¹⁸

Abhilfe schafft der Bezug des Schädigungsmodells auf eine Fläche anstatt eines Volumens. Dies führt auf die sehr erfolgreichen, gerade im Zusammenhang mit der Finite-Elemente-Methode omnipräsenten Kohäsivzonenmodelle. Hier kann der für makroskopische Rissbildung und -fortschritt elementare Materialparameter Bruchfähigkeit \mathcal{G}_c direkt in das Schädigungs- bzw. Kohäsivzonenengesetz einbezogen werden. Der große Nachteil gegenüber klassischen schädigungsmechanischen Modellen liegt hier darin, dass in Kohäsivzonenmodellen das Versagen immer auf die Flächen, für die die Kohäsivzonenengesetze formuliert sind, beschränkt ist. Dies bedeutet in der Folge entweder die Aufgabe des Vorteils, Versagen an beliebiger Stelle im betrachteten Körper berücksichtigen zu können, oder zumindest einen wesentlichen Zusatzaufwand betreiben zu müssen, um nachträglich immer wieder Kohäsivzonen dort einzufügen, wo weiteres Versagen erwartet wird. Letztere Möglichkeit ist als Phantom-Knoten-Methode bekannt, bei der in einer FE-Simulation bei Bedarf zusätzliche Knoten und Elementgrenzen eingeführt werden, um dort ein Kohäsivzonenengesetz zu implementieren. Die Festsetzung, wo und vor allem mit welcher Orientierung die Kohäsivzonen einzusetzen sind, stellt jedoch häufig eine besondere Herausforderung dar (vgl. Stein et al. (2017)).

Eine erfolgreiche 3D-Implementierung von Delaminationsinitiierung und Delaminationsfortschritt ausgehend von Zwischenfaserrissen am Rand von Faserverbundlaminaten mittels eines Kohäsivzonenmodells im kommerziellen FE-Programm ABAQUS[®] stammt von Hallett et al. (2008), die ihre numerischen Ergebnisse auch an Experimenten validierten und weiterhin den beobachteten Größeneffekt (Abhängigkeit der Versagenslasten von den Laminatlagendicken) abbilden konnten. Später betrachteten van der Meer et al. (2011) Versagensinitiierung und -evolution an Lochrändern in Faserverbundlaminaten. Mögliche Delaminationen wurden mit Kohäsivzonenmodellen und Zwischenfaserrissbildung mit der Phantom-Knoten-Methode modelliert. Für Faserversagen wurde ein kontinuumsschädigungsmechanisches Modell implementiert. Ihre Berechnungen, die ebenfalls einen Größeneffekt der Laminatlagendicken vorhersagten, konnten sie wieder an Experimenten validieren. Auch die Rissmuster der Simulation entsprachen qualitativ den aus CT-Scans abgeleiteten der Experimente.

Alternativ zum Bezug des Schädigungsmodells auf eine Fläche (Kohäsivzonenmodell) kann die Diskretisierungsabhängigkeit der Lösung durch eine Regularisierung des Kontinuumsschädigungsmodells behoben werden. Dies geschieht durch künstliche Einführung eines Längen-

¹⁸ Energiedissipation, die an eine Fläche gebunden sein sollte, geht an ein Volumen gebunden mit ein. Dadurch enthält die Lösung die Diskretisierung als Längenparameter.

parameters, der die Schädigungslokalisierung begrenzt, sodass stets eine Mindestbreite der Schädigungszone existiert. Damit ist die Lösung des Randwertproblems zwar diskretisierungsunabhängig, doch weiterhin von einem künstlichen Längenparameter abhängig, nämlich dem Regularisierungsparameter. Die physikalisch sinnvolle Bestimmung dieses Längenparameters bleibt als eine zentrale Fragestellung in der Verwendung kontinuumsschädigungsmechanischer Modelle erhalten. In seiner Rolle als Regularisierungsparameter sorgt er jedoch auch für eine größere Stabilität in der numerischen Lösungsprozedur.

Hochentwickelte 3D-Kontinuumsschädigungsmodelle wurden wiederum besonders für die komplexe Versagensevolution von Faserverbundlaminate vorangetrieben (z. B. Crouch et al. (2013), Bogdanor et al. (2015), Simon et al. (2017)). Diese besitzen mitunter eine Vielzahl von Modellparametern, die durch Kalibrierung mit experimentellen Daten anzupassen sind. Scheffler et al. (2016) stellten ein elasto-plastisches schädigungsmechanisches Modell zur Modellierung des Versagens von Bolzenfügungen in Faserverbundlaminate vor.¹⁹ Im Rahmen der Vergleichsstudie „Schadenstolerante Konstruktionsprinzipien“ (engl.: Damage Tolerant Design Principles, DTDP) wurden diverse Modelle auf ihre Fähigkeiten zur Vorhersage der Schadensevolution in Faserverbundlaminate in statischen wie Ermüdungsversuchen untersucht (Clay u. Engelstad, 2016, Bogdanor u. Oskay, 2017b,a). Ohne die experimentellen Ergebnisse zu kennen, wichen die Vorhersagen von effektiver Restfestigkeit und Steifigkeitsdegradation um durchschnittlich 40 % ab. Nachdem die experimentellen Daten bekannt waren und Anpassungen an den Modellen vorgenommen werden konnten, lagen die Abweichungen im Schnitt immer noch bei 18 %, was die Autoren der Vergleichsstudie als noch nicht hinreichend zur zuverlässigen Anwendbarkeit im Entwicklungsprozess von Faserverbundstrukturen bewerteten.

Die Vorteile schädigungsmechanischer Modelle liegen vor allem in ihrer Flexibilität und ihrem breiten möglichen Anwendungsspektrum. Es kann eine Vielzahl der für Bruchprozesse relevanten Effekte berücksichtigt werden. Weiterhin sind sowohl die Initiierung von Schädigung also auch deren Fortschritt abbildbar. Im Falle kontinuumsschädigungsmechanischer Modelle muss auch der Ort des Einsetzens der Schädigung sowie die Geometrie des Gebiets, auf dem sie sich entwickelt, nicht notwendigerweise a priori bekannt sein, sondern ergibt sich automatisch aus der Lösung des Randwertproblems.

Nachteile sind zum einen die aufwendige Identifizierung der Schädigungsgesetze mit ihrer häufig großen Anzahl an freien Parametern. Zum anderen treten zum Teil Konvergenzprobleme in der numerischen Umsetzung, wo die Materialinstabilität auch zu einer gewissen Instabilität der numerischen Lösung führt, auf. Schließlich bleibt die Rolle des Regularisierungsparameters kontinuumsschädigungsmechanischer Modelle leider bisher ungeklärt.

Ein stärker von der LEBM motivierter Ansatz eines nicht-lokalen Modells ist ein Variationsansatz für Rissbildung und -fortschritt (Francfort u. Marigo, 1998). Es fußt auf der Annahme, dass jedes mechanische System eine Minimierung seiner globalen Energie anstrebt. Die globale Energie umfasst hierbei im quasi-statisch und isotherm ausgelenkten System eines spröden Materials, von Griffith motiviert, neben der Arbeit der inneren und äußeren Kräfte auch ein Energiefunktional, das die zur Schaffung neuer Oberflächen benötigte Energie beinhaltet. Dabei umfasst die Menge der möglichen Risskonfigurationen alle möglichen geschlossenen Teilgebiete im betrachteten Körper, wobei Teilgebiete niedriger Dimension, wie schon bei den

¹⁹ Dabei diente die eingeführte Plastizität zur Modellierung der Lochleibung.

schädigungsmechanischen Modellen, energetisch bevorzugt sind.²⁰ In der Umsetzung ist es schädigungsmechanischen Modellen insofern ähnlich, dass auch hier eine Hilfsvariable (ähnlich einer Schädigungsvariablen) zur Darstellung der Risse eingeführt wird, und dass diese in der numerischen Umsetzung ebenfalls einer Regularisierung über eine definierte Länge bedarf, welche einen glatten Übergang von totalgeschädigtem zu intaktem Material abbildet. Für die Schädigungsvariable existiert hier aber im Unterschied zu schädigungsmechanischen Modellen eine eigene Differentialgleichung, die ihr Verhalten steuert. Damit liegt ein Mehrfeldproblem vor und die zugehörigen Modelle werden als Phasenfeldmodelle bezeichnet.

Die automatische Berücksichtigung aller möglichen relevanten Risskonfigurationen (wie in der Kontinuumsmechanik) ist der große Vorteil der Methode und verspricht eine sehr universelle Einsetzbarkeit. Der entscheidende Nachteil liegt jedoch darin, dass diese Methode nur ein Energiekriterium aber kein Spannungskriterium beinhaltet. Dies macht sich schon beim Versuch, das Versagen eines Zugstabes zu modellieren, unweigerlich bemerkbar. Ein weiterer Nachteil ist, dass nur Verschiebungsrandbedingungen behandelt werden können.

Dreidimensionale Phasenfeldmodelle stammen zum Beispiel von der Arbeitsgruppe um Bourdin (Bourdin et al., 2008, Mesgarnejad et al., 2015). Aus dieser stammt auch eine kürzlich erschienene Veröffentlichung, die sich der wesentlichen Problematik um das Fehlen eines Spannungskriteriums und damit dem Versuch widmet, Phasenfeldmodelle und die Bruchmechanik finiter Risse (mit gekoppeltem Kriterium) in Einklang zu bringen (Tanné et al., 2017). Dabei versuchen sie den Regularisierungsparameter, der auch hier einen internen Längenparameter darstellt, als Brücke zu verwenden. Im Falle eines Risses in einem spröden Material konvergiert die Lösung des Randwertproblems gegen die Lösung der LEBM, wenn der interne Längenparameter gegen null tendiert. Hier bringen sie den Regularisierungsparameter in Zusammenhang mit der Materialfestigkeit, um so erstmalig Rissinitiierung in Spitzkerben (unter einer symmetrischen Zugbelastung für beliebige Kerböffnungswinkel) sowohl simulieren als auch validieren zu können. Damit stellt die Methode einen vielsprechenden und vielfältigen Ansatz für die Simulation von sowohl 3D-Rissfortschritt also auch 3D-Rissinitiierung dar, steht aber relativ gesehen noch am Anfang ihrer Entwicklung. Weiterhin bleibt der Nachteil, dass der Rechenaufwand, genauso wie bei den kontinuumsmechanischen Modellen, im Vergleich zu anderen Methoden noch sehr groß ist.

²⁰ Francfort u. Marigo (1998) dazu: „Our main partner in this analysis is the crack itself, or rather the family of possible cracked states. In classical fracture mechanics, the family members are very few and pretty much homothetic clones of one another; by contrast, our family is rather extended, since it is made up of all closed subdomains of Ω , independently of their shape. Our family has thin members like lines in 2D or surfaces in 3D; it admits weird members like clouds of points, and marginal members like edge cracks; it is however somewhat prejudiced against fat members, i.e., sets of dimension greater than 1 in 2D or 2 in 3D, because those [...] consume too much energy.“

Kapitel 4

Die Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode zur Analyse von dreidimensionalen Defektinteraktionen

In diesem Kapitel wird zunächst die Rand-Finite-Elemente-Methode mit den ihr zugrundeliegenden Annahmen und Gleichungen im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie dargestellt. Dabei werden auch mögliche Eigendehnungen aufgrund beispielsweise thermischer oder Feuchtedehnung mit berücksichtigt. Des Weiteren wird auf die Implementierung der Methode und auf Lösungsverfahren sowie deren Implikationen für die Modellierung eingegangen. Im zweiten Teil des Kapitels wird die Methode auf die Untersuchung diverser Defektinteraktionen in erstgeschädigten Faserverbundlaminaten angewandt. Es werden die dreidimensionalen asymptotischen Nahfelder bestimmt und anhand der zugehörigen Spannungssingularitätsexponenten hinsichtlich ihrer Kritikalität eingeordnet. Schließlich werden beispielhaft einige konkrete Randwertprobleme mit Defektinteraktionen in solchen Laminaten für diverse Lastfälle gelöst und resultierende generalisierte Spannungsintensitätsfaktoren (bzw. äquivalente modale Wichtungsfaktoren) angegeben.

4.1 Die Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode

Die Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode (engl: Scaled Boundary Finite Element Method, SBFEM) ist der neueste und bislang wohl erfolgreichste Versuch eine FEM-Eigenanalyse-Methode in die breite Anwendung zu führen und als differenziert einsetzbares Werkzeug zu etablieren. Dies liegt hauptsächlich darin begründet, dass sie nicht die alleinige Bereitstellung asymptotischer Nahfeldlösungen zum Ziel hat, sondern vielmehr versucht, das vollständige Randwertproblem zu lösen, also auch die Randbedingungen am diskretisierten Rand zu erfüllen. Damit wird auch bestimmt, welche asymptotischen Nahfeldlösungen im gegebenen Lastfall tatsächlich Bestandteil der Lösung sind, und wie groß ihr jeweiliger Anteil daran ist. In vielerlei Hinsicht stellt die SBFEM eine Verallgemeinerung der FEM-Eigenanalyse dar, die schon in etlichen Bereichen erfolgreich angewendet wurde.

Unter dem Namen „Consistent Infinitesimal Finite-Element-Cell Method“ wurde die SBFEM ursprünglich zur Behandlung elastodynamischer Probleme der Bodenmechanik mit unendlich ausgedehnten Gebieten und damit als Alternative zur in dieser Anwendung sonst häufig verwendeten BEM entwickelt (Song u. Wolf, 1995, 1997, Wolf u. Song, 1996). Damit wurde die SBFEM unabhängig von früheren FEM-Eigenanalyse-Methoden formuliert (vgl. Kap. 3.1.3). Wie die FEM basiert sie auf einem Variationsprinzip, sodass die Schwierigkeiten, die in der BEM aufgrund einer notwendigen Fundamentallösung sowie der Auswertung singularer Integrale auftreten, vermieden werden. Trotzdem bietet sie genau wie die BEM gegenüber einer FEM-Analyse den Vorteil einer Dimensionsreduktion der Diskretisierung um eins,

was insbesondere für in einer Richtung (zum Beispiel einer radialen Raumrichtung) weit ausgedehnte Gebiete von Vorteil ist.

Später wurde die Methode auf ein breiteres theoretisches Fundament gestellt und es wurden weitere Herleitungsansätze entwickelt (Wolf u. Song, 2000, Deeks u. Wolf, 2002a, Wolf, 2003), darunter auch einer für den simpleren Fall elastostatischer Probleme auf Basis des Prinzips der virtuellen Arbeiten (2.53). In der Folge wurde die SBFEM für zahlreiche weitere physikalische Problemstellungen verallgemeinert: Potentialströmungen (Deeks u. Cheng, 2003), Akustik (Lehmann et al., 2006), Diffusion (Birk u. Song, 2009), elektromagnetische Feldtheorie (Liu et al., 2010). Auch gekoppelte physikalische Problemstellungen der Thermoelastizität (Rubtsov u. Borisov, 2007), Piezoelektrizität (Artel u. Becker, 2005, Artel, 2007, Rubtsov, 2006) sowie schließlich aller drei gleichzeitig (Li et al., 2015) wurden betrachtet.

Während in den genannten Arbeiten zur SBFEM fast ausschließlich von konvexen Gebieten (unendlich oder endlich) und damit der skalierten Formulierung ausgegangen wurde, betrachteten Artel u. Becker (2006) prismatische Gebiete. Sie verzichteten in diesem Zusammenhang auf den Namensteil „Skalierte“ und sprachen nur noch von einer Rand-Finite-Elemente-Methode (engl.: boundary finite element method, BFEM). Prismatische Gebiete betrachteten später auch Man et al. (2012), Jung u. Becker (2014), Weißgraeber (2014). Den Arbeiten von Jung (2017) und Weißgraeber (2014) ist weiterhin eine Auflistung früherer und ähnlicher aber unabhängig von der SBFEM und BFEM entwickelter Verfahren für prismatische Gebiete zu entnehmen, die im Rahmen dieser Arbeit aber keine weitere Rolle spielen.

Aufgrund ihrer konzeptionellen Nähe zur FEM, wurden für die SBFEM auch ähnliche Variationen und Erweiterungen erfolgreich implementiert und untersucht: so diverse Ansatzfunktionen (Vu u. Deeks, 2006, He et al., 2014) sowie adaptive Vernetzungstechniken (Deeks u. Wolf, 2002b, Vu u. Deeks, 2008). Bei Verwendung konsistenter Ansatzfunktionen, konnte eine SBFEM auch unmittelbar mit einer FEM (Yang u. Deeks, 2007) oder BEM (Chidgzev et al., 2008) gekoppelt werden.¹ Konzeptbedingt blieb das Anwendungsspektrum jedoch, zumindest im SBFEM-Teil der Modellierung, auf lineare Problemstellungen beschränkt. Behnke et al. (2014) unternahmen den Versuch, die Vorteile der SBFEM in einen geometrisch sowie physikalisch nicht-linearen Rahmen zu übertragen. In ihrer zweidimensionalen Untersuchung einer hyperelastischen Struktur mit Anriss verwendeten sie jedoch letztendlich nur die aus einer linearen SBFE-Analyse resultierenden Deformationsmoden als Ansatzfunktionen in einer dann nicht-linearen FE-Analyse. Ooi et al. (2014) unternahmen den Versuch einer elastoplastischen SBFE-Analyse. Belgeli (2016) verwendete ein Superelement im kommerziellen FE-Programm ABAQUS zur geometrisch nichtlinearen Betrachtung (große Rotationen, kleine Verzerrungen) eines zweidimensionalen Modells von einschnittigen Überlappungsfügen.²

Die SBFEM wurde auch für bruchmechanische Untersuchungen zur Bestimmung generalisierter Spannungsintensitätsfaktoren (GSIF) verwendet (Chidgzev u. Deeks, 2005, Song, 2006, Chen et al., 2013) – zunächst allerdings vor allem für 2D-Strukturen. Auch effiziente Algorithmen zur vollautomatischen Simulation von Risswachstum wurden in 2D-Strukturen mit Hilfe der SBFEM in verschiedenen Varianten realisiert (Yang, 2006, Yang u. Deeks, 2007,

¹ Natarajan u. Song (2013), Natarajan et al. (2014) formulierten eine sogenannte *eXtended Scaled Boundary Finite Element Method* (xSBFEM), die aber de facto auch nur eine einfache Kopplung von Teilgebieten, auf denen eine BFEM verwendet wurde, mit Teilgebieten, auf denen eine XFEM angewendet wurde, vorsieht.

² Die Schnittstelle von ABAQUS erlaubt eine Steifigkeitsmatrix $\bar{\mathbf{K}}$ (hier aus der SBFEM) für eine Punktmenge vorzugeben, die dann unter Rotation der umgebenden FE-Struktur \mathbf{R} ebenfalls rotiert wird $\mathbf{K} = \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{R}$.

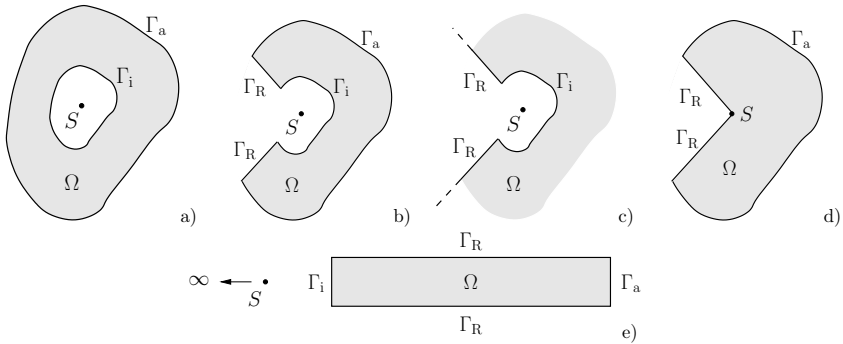


Abbildung 4.1: Beispiele für zweidimensionale Gebiete Ω mit Skalierungszentrum S , die die Skalierungsbedingung erfüllen und daher für eine Lösung mittels der SBFEM geeignet sind: a) geschlossenes, zweifach zusammenhängendes Gebiet mit Innen- und Außenrand Γ_i, Γ_a ; b) geschlossenes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit Innen- und Außenrand, sowie einigen mit Skalierungsstrahlen kongruenten Randabschnitten Γ_R ; c) unbegrenztes Gebiet; d) begrenztes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit Außenrand und Skalierungszentrum im Gebiet; e) prismatisches Gebiet. (Der einfacheren Darstellung halber sind hier nur 2D-Gebiete aufgeführt, die zugrundeliegenden Prinzipien sind aber genauso auf 3D-Gebiete übertragbar.)

Dai et al., 2015, Ooi et al., 2015a). Mittlerweile existieren auch einige wenige dreidimensionale Umsetzungen der BFEM zur Untersuchung der GSIF dreidimensional abklingender Deformationsmoden (Hell u. Becker, 2015c, Saputra et al., 2015). Eine kürzlich erschienene, umfangreiche Übersicht über Anwendungen der SBFEM in der linearen Bruchmechanik, vor allem für zweidimensionale Strukturen, liefern Song et al. (2017).

Jüngere Anwendungsgebiete der SBFEM sind zum einen ihre Nutzung für sehr einfache und daher effiziente sogenannte Quadtree- (2D, Ooi et al. (2015b)) und Octree-Vernetzungsstrategien (3D, Talebi et al. (2016), Saputra et al. (2017)), die für Standard-FE-Codes eher ungeeignet sind. Zum anderen wird die SBFEM in der *Isogeometrischen Analyse*³ (engl.: Isogeometric Analysis (Cottrell et al., 2009)) verwendet. Diese Anwendungen sind allerdings nicht Gegenstand dieser Arbeit und werden daher nicht weiter verfolgt.

Im Folgenden wird die SBFEM-Formulierung für statische Randwertprobleme der linearen Elastizitätstheorie dargestellt.

4.1.1 Formulierung im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie

Ein Gebiet Ω (mit $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, $n_{\text{dim}} \hat{=}$ Raumdimension) besitze zwei ähnliche, skalierbare Ränder: einen Außenrand Γ_a und einen Innenrand Γ_i (vgl. Abb. 4.1). Der Innenrand Γ_i entspreche

³ Mit in der Isogeometrischen Analyse üblichen, den klassischen CAD-Programmen entlehnten NURBS (Non-uniform rational B-Splines) als Ansatzfunktionen wurde die SBFEM von Lin et al. (2014), Natarajan et al. (2015) verwendet. In dreidimensionalen CAD-Modellen sind Körper typischerweise durch zusammengesetzte Flächen (Oberfläche) modelliert. Um diese Daten unmittelbar einer dreidimensionalen elastischen Analyse zugänglich zu machen, bietet sich eine SBFEM-Formulierung an, bei der eine Definition der Oberfläche mit Ansatzfunktionen (und eines Skalierungszentrums, vgl. nachfolgendes Teilkapitel) reicht, um den Körper elastizitätstheoretisch zu beschreiben (Klinkel et al., 2015).

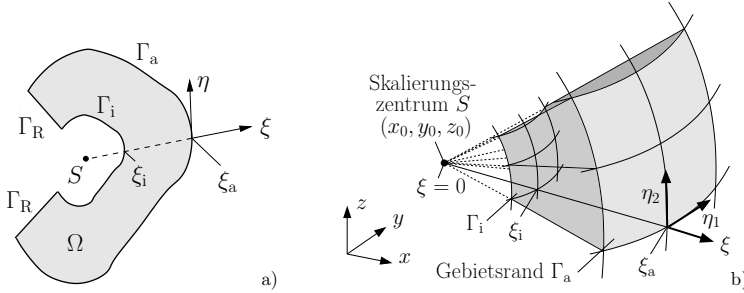


Abbildung 4.2: Einführung des skalierten Rand-Koordinatensystems (SR-KOS) anhand eines a) zwei- und b) dreidimensionalen Beispiels.

also dem gegenüber einem Punkt S mit einem Faktor $\xi_i/\xi_a < 1$ skalierten Rand Γ_a . Das sogenannte *Skalierungszentrum* S liege dabei so, dass jeder Skalierungsstrahl R (Halbgerade mit Ursprung im Skalierungszentrum S zum Außenrand Γ_a hin) sowohl den Außenrand Γ_a als auch den Innenrand Γ_i höchstens einmal kreuzt. Zusammen mit der Forderung nach dem konstantem Teilungsverhältnis ξ_i/ξ_a ist dies die sogenannte *Skalierungsbedingung*. Der Fall, dass Skalierungsstrahlen selbst einen Randabschnitt Γ_R abbilden sei explizit mit eingeschlossen, solange die Skalierungsbedingung für keinen Randpunkt verletzt ist (Abb. 4.1 b, c-e). Es gilt

$$\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_i \cup \Gamma_R . \quad (4.1)$$

Die Betrachtung von *unendlichen Gebieten* durch Verschieben des Außenrandes $\xi_a \rightarrow \infty$ (Abb. 4.1 c) oder die Betrachtung von *endlichen, nur einfach zusammenhängenden Gebieten*⁴ durch Degenerieren des Innenrandes auf nur einen Punkt $\xi_i \rightarrow 0$ (Abb. 4.1 d) stellen Spezialfälle des oben skizzierten dar. Die Betrachtung *prismatischer Gebiete* durch Verschieben des Skalierungszentrums $\xi_i, \xi_a \rightarrow \infty$ (Abb. 4.1 e) kann ebenfalls als Spezialfall eingeführt werden. Alle diese Spezialfälle sind auch in der Literatur zu finden, letzterer ist jedoch nicht Bestandteil dieser Arbeit.

Sind Außen- und Innenrand ähnlich und die Skalierungsbedingung ist erfüllt, dann sind auch alle anderen virtuellen Ränder⁵ zwischen Außen- und Innenrand durch eine einfache Skalierung ohne Überschneidung darstellbar und ähnlich. Für die Beschreibung der virtuellen Ränder wird ein skaliertes Randkoordinatensystem mit Koordinaten ξ, η_1, η_2 eingeführt (Abb. 4.2). Die Skalierungsordinate ξ verläuft radial vom Skalierungszentrum zum virtuellen Rand und nimmt auf dem Innenrand den Wert ξ_i und auf dem Außenrand den Wert ξ_a an. Die Randkoordinaten η_1, η_2 beschreiben den zweidimensionalen skalierbaren Rand (für 2D-Gebiete ist eine Umlaufkoordinate η ausreichend). Die Koordinatentransformation vom

⁴ Für diesen Spezialfall wird zur Klärung der Skalierungsbedingung häufig das „Sichtbarkeits“-Kriterium verwendet. Auf ein 3D-Gebiet bezogen würde die Skalierungsbedingung dann beispielsweise lauten: Sei der betrachtete Körper ein Raum und der Gebietsrand durch die Körperoberfläche symbolisiert, dann muss jede Stelle im Raum vom Skalierungszentrum aus direkt einsehbar sein.

⁵ Virtuelle Ränder seien alle denkbaren Linien (2D-Modellierung) oder Flächen (3D-Modellierung), die sich durch eine beliebige feste Skalierung des Innen- bzw. Außenrandes ergeben. Die virtuellen Ränder sind i. A. keine echten Gebietsränder (Ausnahmen sind natürlich der Innen- und/oder Außenrand des betrachteten Gebiets).

kartesischen x, y, z -Koordinatensystem in ein skaliertes Randkoordinatensystem erfolgt mittels der kartesischen Koordinaten \mathbf{x}_0 des Skalierungszentrums über

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \xi \mathbf{x}_\eta(\eta_1, \eta_2). \quad (4.2)$$

Die zugehörige Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_\eta(\eta_1, \eta_2)$ zur Transformation der Ableitungsoperatoren ergibt sich aus

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta_1} & \frac{\partial y}{\partial \eta_1} & \frac{\partial z}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta_2} & \frac{\partial y}{\partial \eta_2} & \frac{\partial z}{\partial \eta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_\eta(\eta_1, \eta_2) \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

und ist durch Herausziehen der Skalierungskoordinate ξ (in den Ableitungsnenner) allein eine Funktion der Randkoordinaten η_1, η_2 . Damit lässt sich der in Kapitel 2.1.1 definierte Differentialoperator \mathcal{L} (2.134) wie folgt zerlegen:

$$\mathcal{L} = \mathbf{L}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{L}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{L}_z \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{L}_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathbf{L}_{\eta_1} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \mathbf{L}_{\eta_2} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta_2}, \quad (4.4)$$

wobei

$$\mathbf{L}_\xi = \mathbf{L}_x j_{11} + \mathbf{L}_y j_{21} + \mathbf{L}_z j_{31},$$

$$\mathbf{L}_{\eta_1} = \mathbf{L}_x j_{12} + \mathbf{L}_y j_{22} + \mathbf{L}_z j_{32},$$

$$\mathbf{L}_{\eta_2} = \mathbf{L}_x j_{13} + \mathbf{L}_y j_{23} + \mathbf{L}_z j_{33},$$

und j_{kl} mit $k, l = 1, 2, 3$ die Komponenten der Inversen \mathbf{J}_η^{-1} der Jacobi-Matrix darstellen. Ebenfalls lassen sich die Volumen- und Randdifferenziale für das skalierte Rand-KOS angeben

$$dV = d\Omega = \det(\mathbf{J}_\eta) \xi^2 d\xi d\eta_1 d\eta_2, \quad (4.5)$$

$$dS_\xi = d\Gamma_\xi = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}_\eta}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}_\eta}{\partial \eta_2} \right\| \xi^2 d\eta_1 d\eta_2, \quad (4.6)$$

$$dS_{\eta_1} = d\Gamma_{\eta_1} = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}_\eta}{\partial \eta_2} \times \frac{\partial \mathbf{x}_\eta}{\partial \xi} \right\| \xi^2 d\xi d\eta_2, \quad (4.7)$$

$$dS_{\eta_2} = d\Gamma_{\eta_2} = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}_\eta}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}_\eta}{\partial \eta_1} \right\| \xi^2 d\xi d\eta_1. \quad (4.8)$$

Das betrachtete Gebiet Ω sei nun linear elastisch und durch Oberflächenkräfte \mathbf{t}^* auf einem Teilrand Γ_t sowie Volumenlasten \mathbf{f} belastet (vgl. Abb. 2.1). Entlang eines Teilrandes Γ_u seien die Verschiebungen \mathbf{u}^* vorgeschrieben und das Gebiet befinde sich im Gleichgewicht. Dabei gilt $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$. Es liegt also ein statisches Randwertproblem der linearen Elastizitätstheorie vor. Dementsprechend gilt das Prinzip der virtuellen Verrückungen (2.52) – auch in seiner verschiebungsbasierten Form (2.137) in Voigt-Notation mit dem Differentialoperator \mathcal{L} und der Elastizitätsmatrix \mathbf{C} .

Nun wird ein Separationsansatz für die Verschiebungen \mathbf{u} eingeführt

$$\mathbf{u}(\xi, \eta_1, \eta_2) = \mathbf{N}(\eta_1, \eta_2) \mathbf{u}_n(\xi). \quad (4.9)$$

In diesem sind die Abhängigkeiten der Verschiebungen von der Skalierungskoordinate ξ in der Funktion $\mathbf{u}_n(\xi)$ und die Abhängigkeiten der Verschiebungen von den Randkoordinaten η_1, η_2 in der Funktion $\mathbf{N}(\eta_1, \eta_2)$ zusammengefasst. Typischerweise wird für \mathbf{N} ein Näherungsansatz in

den Randkoordinaten gewählt und $\hat{\mathbf{u}}(\xi) (\approx \mathbf{u}_n(\xi))$ enthält dann die zugehörigen Koeffizienten als freie Funktionen von der Skalierungsordinate ξ . Im Folgenden sei generell von einem Näherungsansatz $\tilde{\mathbf{u}}$ für die Verschiebungen \mathbf{u} ausgegangen, der in sehr ähnlicher Form auch für die virtuellen Verrückungen $\delta \mathbf{u}$ verwendet wird:

$$\mathbf{u} \approx \tilde{\mathbf{u}}(\xi, \eta_1, \eta_2) = \mathbf{N}(\eta_1, \eta_2) \hat{\mathbf{u}}(\xi), \quad \delta \mathbf{u} \approx \delta \tilde{\mathbf{u}}(\xi, \eta_1, \eta_2) = \mathbf{N}(\eta_1, \eta_2) \delta \hat{\mathbf{u}}(\xi). \quad (4.10)$$

Einsetzen in die kinematischen Beziehungen (2.18) bzw. (2.136) liefert:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\xi, \eta_1, \eta_2) &= \mathbf{L}_\xi \mathbf{N}(\eta_1, \eta_2) \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}(\xi)}{\partial \xi} + \left[\mathbf{L}_{\eta_1} \frac{\partial \mathbf{N}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} + \mathbf{L}_{\eta_2} \frac{\partial \mathbf{N}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \right] \frac{\hat{\mathbf{u}}(\xi)}{\xi} \\ &= \mathbf{B}_\xi(\eta_1, \eta_2) \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}(\xi)}{\partial \xi} + \mathbf{B}_\eta(\eta_1, \eta_2) \frac{\hat{\mathbf{u}}(\xi)}{\xi}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Damit sowie mit der Darstellung $(\cdot)'$ für die Ableitung nach der Skalierungsordinate ξ ergibt sich das Prinzip der virtuellen Verrückungen mit Ausmultiplizieren zu:

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \int_\Omega \left([\delta \hat{\mathbf{u}}'(\xi)]^T \mathbf{B}_\xi^T + [\delta \hat{\mathbf{u}}(\xi)]^T \mathbf{B}_\eta^T \frac{1}{\xi} \right) \mathbf{C} \left(\mathbf{B}_\xi \hat{\mathbf{u}}'(\xi) + \mathbf{B}_\eta \hat{\mathbf{u}}(\xi) \frac{1}{\xi} \right) d\Omega \\ &= \int_\Omega [\delta \hat{\mathbf{u}}'(\xi)]^T \left(\xi^2 \mathbf{B}_\xi^T \mathbf{C} \mathbf{B}_\xi \hat{\mathbf{u}}'(\xi) + \xi \mathbf{B}_\xi^T \mathbf{C} \mathbf{B}_\eta \hat{\mathbf{u}}(\xi) \right) \det(\mathbf{J}_\eta) d\xi d\eta_1 d\eta_2 \\ &\quad + \int_\Omega [\delta \hat{\mathbf{u}}(\xi)]^T \left(\xi \mathbf{B}_\eta^T \mathbf{C} \mathbf{B}_\xi \hat{\mathbf{u}}'(\xi) + \mathbf{B}_\eta^T \mathbf{C} \mathbf{B}_\eta \hat{\mathbf{u}}(\xi) \right) \det(\mathbf{J}_\eta) d\xi d\eta_1 d\eta_2 \\ &\stackrel{!}{=} \int_\Omega [\delta \hat{\mathbf{u}}(\xi)]^T \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_t} [\delta \hat{\mathbf{u}}(\xi)]^T \mathbf{N}^T \mathbf{t}^* d\Gamma = \delta W_a. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Wie bereits beschrieben, erfüllt die Geometrie die Skalierungsbedingung, ist also ebenfalls mit einem Quasi-Separationsansatz (4.2) darstellbar. Können auch die weiteren Eingangsgrößen des Prinzips der virtuellen Verrückungen mit einem Separationsansatz dargestellt werden, dann sind für das gesamte Prinzip der virtuellen Verrückungen die Abhängigkeiten von der Skalierungsordinate und den Randkoordinaten voneinander separierbar und können auch getrennt voneinander integriert werden. Dies ist grundlegend für alle Formulierungen der Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode.

Für den vereinfachten (aber dennoch typischen) Fall belastungsfreier Ränder Γ_R , vernachlässigbarer Volumenlasten $\mathbf{f} \rightarrow 0$ und in Skalierungsrichtung konstanter Elastizitätseigenschaften seien die aus der Integration über die Randkoordinaten resultierenden Systemmatrizen $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ sowie die Randlastvektoren \mathbf{p}_a und \mathbf{p}_i eingeführt:

$$\mathbf{E}_0 = \int_{\eta_1} \int_{\eta_2} \mathbf{B}_\xi^T \mathbf{C} \mathbf{B}_\xi \det(\mathbf{J}_\eta) d\eta_1 d\eta_2, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{E}_1 = \int_{\eta_1} \int_{\eta_2} \mathbf{B}_\eta^T \mathbf{C} \mathbf{B}_\xi \det(\mathbf{J}_\eta) d\eta_1 d\eta_2, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{E}_2 = \int_{\eta_1} \int_{\eta_2} \mathbf{B}_\eta^T \mathbf{C} \mathbf{B}_\eta \det(\mathbf{J}_\eta) d\eta_1 d\eta_2, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{p}_a = \xi_s^2 \int_{\eta_1} \int_{\eta_2} \mathbf{N}^T \mathbf{t}_a^* \left\| \frac{\partial \mathbf{x}_\eta}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}_\eta}{\partial \eta_2} \right\| d\eta_1 d\eta_2, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{p}_i = \xi_i^2 \int_{\eta_1} \int_{\eta_2} \mathbf{N}^T \mathbf{t}_i^* \left\| \frac{\partial \mathbf{x}_\eta}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}_\eta}{\partial \eta_2} \right\| d\eta_1 d\eta_2. \quad (4.17)$$

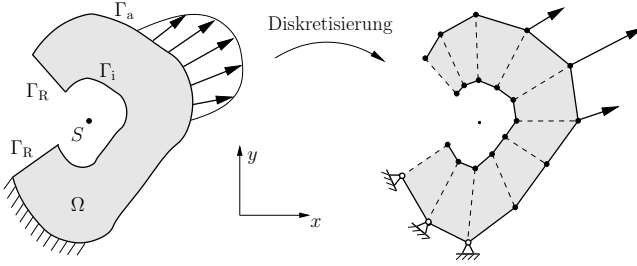


Abbildung 4.3: Schematische Darstellung einer die Skalierungsbedingung erfüllenden Diskretisierung von Innenrand Γ_i und Außenrand Γ_a eines zweidimensionalen Gebiets Ω für die SBFEM.

Hier beschreiben \mathbf{t}_a^* , \mathbf{t}_i^* jeweils die Oberflächenkräfte am Außen- und am Innenrand. Mit diesen Größen lässt sich das PdvV dann folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \delta W_1 &= \int_{\xi_i}^{\xi_a} [\delta \hat{\mathbf{u}}'(\xi)]^T (\xi^2 \mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{u}}'(\xi) + \xi \mathbf{E}_1^T \hat{\mathbf{u}}(\xi)) + [\delta \hat{\mathbf{u}}(\xi)]^T (\xi \mathbf{E}_1 \hat{\mathbf{u}}'(\xi) + \mathbf{E}_2 \hat{\mathbf{u}}(\xi)) d\xi \\ &\stackrel{!}{=} [\delta \hat{\mathbf{u}}(\xi_a)]^T \mathbf{p}_a + [\delta \hat{\mathbf{u}}(\xi_i)]^T \mathbf{p}_i = \delta W_a. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Partielle Integration zur Elimination der Ableitung $\delta \hat{\mathbf{u}}'(\xi)$ der virtuellen Verrückungen führt schließlich auf die zentrale Forderung:

$$\begin{aligned} & - \int_{\xi_i}^{\xi_a} [\delta \hat{\mathbf{u}}(\xi)]^T (\mathbf{E}_0 \xi^2 \hat{\mathbf{u}}''(\xi) + [2\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_1] \xi \hat{\mathbf{u}}'(\xi) + [\mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_2] \hat{\mathbf{u}}(\xi)) d\xi \\ & + \left[[\delta \hat{\mathbf{u}}'(\xi)]^T (\xi^2 \mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{u}}'(\xi) + \xi \mathbf{E}_1^T \hat{\mathbf{u}}(\xi)) \right]_{\xi_i}^{\xi_a} - [\delta \hat{\mathbf{u}}(\xi_a)]^T \mathbf{p}_a - [\delta \hat{\mathbf{u}}(\xi_i)]^T \mathbf{p}_i = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Aus der virtuellen inneren Arbeit δW_1 enthält sie einen Integralterm und je einen Randterm für Außen- und Innenrand. Aus der virtuellen äußeren Arbeit stammen in diesem Fall nur zwei Randterme, wieder je einer für Außen- und Innenrand. Soll diese Gleichung für beliebige virtuelle Verrückungen, also beliebige $\delta \hat{\mathbf{u}}(\xi)$ bzw. an Außen- und Innenrand $\delta \hat{\mathbf{u}}(\xi_a)$ und $\delta \hat{\mathbf{u}}(\xi_i)$, erfüllt sein, führt dies auf die folgenden zwei Gleichungssysteme, die als die SBFEM-Gleichungen bezeichnet seien:

$$\mathbf{E}_0 \xi^2 \hat{\mathbf{u}}''(\xi) + [2\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_1] \xi \hat{\mathbf{u}}'(\xi) + [\mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_2] \hat{\mathbf{u}}(\xi) = \mathbf{0}, \quad (4.20)$$

$$\begin{bmatrix} \xi_a^2 \mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{u}}'(\xi_a) + \xi_a \mathbf{E}_1^T \hat{\mathbf{u}}(\xi_a) \\ -\xi_i^2 \mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{u}}'(\xi_i) - \xi_i \mathbf{E}_1^T \hat{\mathbf{u}}(\xi_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_a \\ \mathbf{p}_i \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Gleichung (4.20) ist ein homogenes Euler-Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung und entspricht der Forderung nach Erfüllung der Feldgleichungen sowie der Randbedingungen am Teilrand Γ_R (Abb. 4.1, 4.2). Es ist nicht zwingend homogen, sondern wird beispielsweise bei Berücksichtigung von Volumenlasten oder auch Eigendehnungen (vgl. Kap. 4.1.4) inhomogen. Die Gleichungen (4.21) fordern die Erfüllung der Randbedingungen am Außenrand Γ_a bzw. am Innenrand Γ_i .

Die bis hierhin dargestellte Herangehensweise entspricht weitgehend derjenigen für eine Ritzsche Methode (Mittelstedt u. Becker, 2016). Der Übergang zu einer Finite-Element-Formulierung mit n_e Rand-Finiten-Elementen erfolgt zunächst durch eine identische Diskreti-

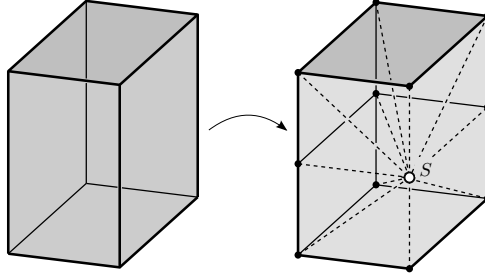


Abbildung 4.4: Beispielhafte Diskretisierung des Randes eines Vollquaders für die SBFEM mit zulässiger Wahl des Skalierungszentrums S .

sierung von Außenrand Γ_a und Innenrand Γ_i (auch die Diskretisierung muss die Skalierungsbedingung erfüllen, siehe Abb. 4.3, 4.4)

$$\Gamma_a \approx \tilde{\Gamma}_a = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Gamma_{ae} \quad , \quad \Gamma_i \approx \tilde{\Gamma}_i = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Gamma_{ie} . \quad (4.22)$$

Dabei ist ein Teilgebiet Ω_e , das von Γ_{ae} und Γ_{ie} sowie allen Skalierungsstrahlen dazwischen gebildet wird, gerade ein Rand-FE. Elementweise wird ein einheitliches skaliertes Randkoordinatensystem mit der Transformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \xi \mathbf{x}_\eta^{(e)}(\eta_1^e, \eta_2^e) \quad , \quad \eta_1^e, \eta_2^e \in [-1, 1] \quad \forall e \in [1, \dots, n_e] \quad (4.23)$$

eingeführt. Für die Geometrie von Außen- bzw. Innenrand sowie für die Verschiebungsfelder in den Randkoordinaten werden die gleichen elementweisen Ansätze formuliert

$$\xi \tilde{\mathbf{x}}_\eta^{(e)} = \mathbf{N}_e(\eta_1^e, \eta_2^e) \xi \hat{\mathbf{x}}_e \quad , \quad (4.24)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(e)} = \mathbf{N}_e(\eta_1^e, \eta_2^e) \hat{\mathbf{u}}_e(\xi) \quad , \quad (4.25)$$

$$\delta \tilde{\mathbf{u}}^{(e)} = \mathbf{N}_e(\eta_1^e, \eta_2^e) \delta \hat{\mathbf{u}}_e(\xi) \quad , \quad (4.26)$$

mit den elementweisen Koeffizientenfunktionen $\xi \hat{\mathbf{x}}_e$, $\hat{\mathbf{u}}_e(\xi)$, $\delta \hat{\mathbf{u}}_e(\xi)$. Im Falle der Geometrie ist die Koeffizientenfunktion nur linear in der Skalierungsordinate ξ und daher schon spezieller dargestellt. Diese Ansatzfunktionen müssen wieder die Anforderungen an die Ansätze aus Kapitel 2.3.1 erfüllen (lineare Unabhängigkeit, Kompatibilität, Vollständigkeit, Drehinvarianz). Einfache Ansätze mit Lagrange-Polynomen, wie sie in dieser Arbeit ausschließlich verwendet werden, erfüllen diese Anforderungen. Dann sind die Koeffizientenfunktionen $\hat{\mathbf{u}}_e(\xi)$, $\delta \hat{\mathbf{u}}_e(\xi)$ tatsächliche Verschiebungswerte entlang der Skalierungsstrahlen, die durch die Knotenpunkte der Ansatzpolynome verlaufen, und $\hat{\mathbf{x}}_e$ sind die kartesischen Koordinaten dieser Knotenpunkte für $\xi = 1$.

Unter Verwendung dieser Ansätze können elementweise die Systemmatrizen $\mathbf{E}_0^{(e)}$, $\mathbf{E}_1^{(e)}$, $\mathbf{E}_2^{(e)}$ sowie die Randlastvektoren $\mathbf{p}_a^{(e)}$ und $\mathbf{p}_i^{(e)}$ bestimmt werden. Diese sind wie in der klassischen FEM für das Gesamtsystem zu assemblieren (zusammenzuführen) und die resultierenden Matrizen $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ und Randlastvektoren \mathbf{p}_a und \mathbf{p}_i des Gesamtsystems in die SBFEM-Gleichungen (4.20, 4.21) einzufügen.

4.1.2 Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

Im verallgemeinerten Fall, in dem $n_{\text{dim}} = 2, 3$ wieder die Dimension des betrachteten Gebiets darstelle, lässt sich das homogene Euler-DGL-System folgendermaßen schreiben⁶

$$\mathbf{E}_0 \xi^{n_{\text{dim}}-1} \hat{\mathbf{u}}''(\xi) + [(n_{\text{dim}}-1)\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_1] \xi^{n_{\text{dim}}-2} \hat{\mathbf{u}}'(\xi) \quad (4.27)$$

$$+ [(n_{\text{dim}}-2)\mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_2] \xi^{n_{\text{dim}}-3} \hat{\mathbf{u}}(\xi) = \mathbf{0}. \quad (4.28)$$

Euler-Differentialgleichungen können mittels einer Transformation $t = \ln(\xi)$ in gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten überführt werden:⁷

$$\mathbf{E}_0 \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}(t)}{\partial t^2} + [(n_{\text{dim}}-2)\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_1] \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}(t)}{\partial t} + [(n_{\text{dim}}-2)\mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_2] \hat{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{0} \quad (4.29)$$

Dieses Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung kann standardmäßig durch Einführen einer Vektorfunktion $\hat{\mathbf{v}}(t) = \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}(t)}{\partial t}$ und damit Verdoppelung der Anzahl der Freiheitsgrade in ein DGLS erster Ordnung überführt werden:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \partial \hat{\mathbf{v}} / \partial t \\ \partial \hat{\mathbf{u}} / \partial t \end{bmatrix}}_{\partial \hat{\mathbf{w}} / \partial t} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{E}_0^{-1} [(n_{\text{dim}}-2)\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1^T] & -\mathbf{E}_0^{-1} [(n_{\text{dim}}-2)\mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_2] \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathcal{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{w}}} \quad (4.30)$$

Die allgemeine Lösung eines solchen Differentialgleichungssystems lautet

$$\hat{\mathbf{w}}(t) = e^{\mathcal{K}t} \hat{\mathbf{w}}(0) \quad (4.31)$$

mit der Matrixexponentialfunktion $e^{\mathcal{K}t}$ und den Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ sowie deren Ableitungen $\hat{\mathbf{v}}$ bei $\xi(t=0) = 1$. Natürlich kann die Lösung stattdessen in Abhängigkeit der Randbedingungen an den Rändern Γ_a und Γ_i angegeben werden. Die Hauptproblematik liegt in der möglichst robusten und effizienten Bestimmung der Matrixexponentialfunktion. Bevor die hierzu geeigneten Eigenwert-Zerlegungs-Methode sowie Schur-Zerlegungs-Methode betrachtet werden, sei noch kurz ein weiterer Lösungsansatz für das SBFEM-DGLS diskutiert.

Anstatt die Ableitungen $\hat{\mathbf{v}}$ der Knotenverschiebungsfunktionen $\hat{\mathbf{u}}$ zu verwenden, kann auch das im Randterm der virtuellen inneren Arbeit vorhandene DGLS herangezogen werden, mit Hilfe dessen die Funktionen $\hat{\mathbf{q}}$ und ihre ersten Ableitungen definiert werden:

$$\hat{\mathbf{q}}(\xi) = \xi^{n_{\text{dim}}-1} \mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{u}}'(\xi) + \xi^{n_{\text{dim}}-2} \mathbf{E}_1^T \hat{\mathbf{u}}(\xi), \quad (4.32)$$

$$\hat{\mathbf{q}}'(\xi) = \xi^{n_{\text{dim}}-1} \mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{u}}''(\xi) + [(n_{\text{dim}}-1)\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T] \xi^{n_{\text{dim}}-2} \hat{\mathbf{u}}'(\xi) + (n_{\text{dim}}-2)\mathbf{E}_1^T \hat{\mathbf{u}}(\xi). \quad (4.33)$$

Physikalisch sind die Funktionen $\hat{\mathbf{q}}(\xi)$ als Lastvektoren an einem virtuellen Rand der Skalierung ξ innerhalb des betrachteten Gebiets zu interpretieren. An den Rändern ξ_a und ξ_i müssen sie demzufolge gerade den Randlastvektoren \mathbf{p}_a und \mathbf{p}_i entsprechen (vgl. Gl. (4.21)).

Einsetzen der Ableitungen in das SBFEM-DGLS (4.28) ergibt ein DGLS erster Ordnung und Gleichung (4.32) ein weiteres. Für $n_{\text{dim}} = 3$ lässt sich mit der Eulertransformation,

⁶ Für die Analyse der vorliegenden Arbeit sind neben der Formulierung für den dreidimensionalen Fall an diversen Stellen (z. B. Kap. 4.2.1, Kap. 5.1.6) auch zweidimensionale Analysen notwendig.

⁷ Der Einfachheit halber ist der Faktor $\xi^{n_{\text{dim}}-3} = e^{t(n_{\text{dim}}-3)}$ hier weggelassen.

Multiplikation mit $e^{t/2} = \sqrt{\xi}$ und Bildung der Ableitung von $[\hat{\mathbf{q}}^T e^{-t/2}, \hat{\mathbf{u}}^T e^{t/2}]^T$ folgendes gekoppeltes Gesamt-DGLS erster Ordnung angeben

$$\begin{bmatrix} \partial(\hat{\mathbf{q}} e^{-t/2})/\partial t \\ \partial(\hat{\mathbf{u}} e^{t/2})/\partial t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_0^{-1} - \mathbf{I}/2 & \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_0^{-1} & -\mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{E}_1^T + \mathbf{I}/2 \end{bmatrix}}_{\mathcal{K}_H} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} e^{-t/2} \\ \hat{\mathbf{u}} e^{t/2} \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Die Matrix \mathcal{K}_H ist eine Hamilton-Matrix. Das heißt, sie selbst ist zwar nicht symmetrisch, aber ihr Produkt mit der schiefsymmetrischen Matrix

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

gleicher Dimension ist es: $(\mathcal{J}\mathcal{K}_H)^T = \mathcal{J}\mathcal{K}_H$. Daraus folgt unmittelbar, dass ihr charakteristisches Polynom gerade und somit ihr Eigenwertspektrum einerseits symmetrisch zur Zahl Null ist und andererseits für jeden komplexen Eigenwert auch der komplex konjugierte Wert ein Eigenwert ist. Die Betrachtung des zweidimensionalen Falls führt ebenso auf ein Differentialgleichungssystem, dessen Koeffizientenmatrix eine Hamiltonform annimmt. Die allgemeine Lösung dieses Differentialgleichungssystems ergibt sich in ähnlicher Form wie in Gl. (4.31) aber nun mittels einer Matrixexponentialfunktion $e^{\mathcal{K}_H t}$.

Ein Vorteil dieser Betrachtungsweise liegt darin, dass sie für bestimmte Lösungsverfahren zur Bestimmung der Matrixexponentialfunktion besser geeignet ist (s. Folgeteilkapitel). Weiterhin führt sie bei der Betrachtung von Randwertproblemen mit Innen- sowie Außenrand und daraus ableitbaren Berechnungsmethoden (s. Kap. 6) zu günstigeren Darstellungen.

Eigenwert-Zerlegungs-Methode

Eine Möglichkeit, die Matrixexponentialfunktion $e^{\mathcal{K}t}$ zu bestimmen, führt über die Diagonalisierung der Koeffizientenmatrix \mathcal{K} des Differentialgleichungssystems (4.30):

$$\mathcal{K} = \Phi \Lambda \Phi^{-1}, \quad (4.36)$$

wobei Λ die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten λ_j und Φ die Matrix mit den zugehörigen rechten Eigenvektoren ϕ_j (als Spaltenvektoren) darstellen ($j = 1, \dots, n_\lambda$). Dann bestimmt sich die Matrixexponentialfunktion einfach zu

$$e^{\mathcal{K}t} = \Phi e^{\Lambda t} \Phi^{-1} \quad (4.37)$$

mit der Diagonalmatrix $e^{\Lambda t}$, die auf ihrer Diagonalen die Komponenten $e^{\lambda_j t}$ enthält. Tatsächlich entspricht dies gerade dem Ergebnis, das auch durch Verwendung der Fundamentallösung $\hat{\mathbf{w}}_j(t) = \phi_j e^{\lambda_j t}$ im gegebenen Differentialgleichungssystem resultieren würde, da sich daraus ebenfalls ein Eigenwertproblem ableiten lässt:

$$e^{\lambda_j t} (\mathcal{K} \phi_j - \lambda_j \phi_j) = \mathbf{0}. \quad (4.38)$$

Mittels bewährter numerischer Verfahren kann das i. A. große und unsymmetrische Eigenwertproblem entweder vollständig (QR-Algorithmus) oder auch nur partiell für einige wenige Eigenwerte und -vektoren (iterative Arnoldi-Methoden) gelöst werden. Die Lösung des Eigenwertproblems erfordert die mit aufwendigsten Verfahren der numerischen Mathematik. So

steigt der Rechenaufwand des QR-Algorithmus (Golub u. Van Loan, 1996, Kap. 7), welcher das Eigenwertproblem vollständig löst, d. h. alle Eigenwerte und -vektoren des Eigenwertproblems bestimmt, kubisch mit der Anzahl der Freiheitsgrade (engl.: degrees of freedom, DOF). Die iterativen Arnoldi-Methoden (Arnoldi, 1951, Apel et al., 2002b) sind wesentlich schneller, bestimmen aber auch nur einen Teil der Eigenwerte und -vektoren – typischerweise die nächsten zur Null oder die größten. Entsprechend ist hier die Hamiltonform des DGLS, die auf ein Eigenwertspektrum symmetrisch zur Null führt, zu verwenden.

Eine wesentliche Problematik von Eigenwertlösern ist ihr Umgang mit Eigenwerten, deren algebraische Vielfachheit größer als ihre geometrische Vielfachheit ist (Moler, 2004). Existieren für einen k -fachen Eigenwert also nicht auch k unabhängige Eigenvektoren, bilden diese sogenannte Jordan-Blöcke und die Eigenwerte sind sehr sensitiv gegenüber Störungen der betrachteten Matrix. Diese Störungen können z. B. schon einfache Rundungsfehler sein. Bei einer defizitären geometrischen Multiplizität m und einer Störung δ in der Matrix entstehen dann Fehler von der Ordnung $\mathcal{O}(\delta^{1/m})$ (Bsp.: $\delta^{1/m} = (10^{-16})^{1/4} = 10^{-4}$). Im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie tritt dies in der SBFEM zum einen immer an Verzweigungspunkten von Eigenwerten auf, d. h. dort, wo ein komplex konjugiertes Eigenwertpaar durch eine Änderung von Geometrie oder Materialeigenschaften zu nur noch einem Eigenwert mit algebraischer Multiplizität von zwei wird (vgl. auch Sator (2010)). Während dieser Fall sehr selten und im Raum möglicher Strukturkonfigurationen äußerst lokal auftritt, ist in der SBFEM für zweidimensionale Gebiete der Nulleigenwert immer von algebraischer Multiplizität vier aber nur von geometrischer Multiplizität zwei, sodass ausgerechnet bei den Starrkörperverschiebungen vergleichsweise große Abweichungen auftreten.⁸ Die Situation stellt sich noch problematischer dar, wenn prismatische Gebiete betrachtet werden, die aber nicht Gegenstand dieser Arbeit sind (Artel, 2007).

Die Rücktransformation der Fundamentallösung

$$t \rightarrow \xi : \quad \hat{\mathbf{w}}_j(\xi) = \phi_j \xi^{\lambda_j} \quad \longrightarrow \quad \hat{\mathbf{u}}_j(\xi) = \phi_j^u \xi^{\lambda_j} \quad (4.39)$$

gibt schon einen Hinweis darauf, dass die Lösung des Eigenwertproblems gerade Lösungen der Feldgleichungen – die Deformationsmoden $\hat{\mathbf{u}}_j(\xi)$ – enthalten. Die Eigenvektoren ϕ_j charakterisieren die dabei herrschende Deformation eines virtuellen Randes (bei $\xi = 1$) und die Eigenwerte λ_j das Abklingverhalten der Deformationsmoden in der Skalierungskoordinate ξ :

- für $\text{Re}(\lambda_j) < 0$ nach außen abklingend (mit steigenden ξ) und
- für $\text{Re}(\lambda_j) > 0$ nach innen abklingend (mit fallendem ξ).

Die allgemeine Lösung (4.31) des homogenen SBFEM-Differentialgleichungssystems (4.30) lässt sich nun ebenfalls nach Rücktransformation folgendermaßen darstellen:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(\xi) \\ \hat{\mathbf{u}}(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^v \\ \Phi^u \end{bmatrix} \xi^\Lambda \begin{bmatrix} \Phi^v \\ \Phi^u \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Phi^v(\xi=1) \\ \Phi^u(\xi=1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^v \\ \Phi^u \end{bmatrix} \xi^\Lambda \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \Phi^u \Lambda \\ \Phi^u \end{bmatrix} \xi^\Lambda \mathbf{c}. \quad (4.40)$$

Hierin ist ξ^Λ nun eine Diagonalmatrix mit den Einträgen ξ^{λ_j} und der Vektor \mathbf{c} enthält die Wichtungsfaktoren c_j der Deformationsmoden $\hat{\mathbf{u}}_j(\xi)$. Es sei angemerkt, dass die Anzahl n_λ der Deformationsmoden doppelt so groß ist, wie diejenige der Freiheitsgrade an einem

⁸ Anmerkung: Diese Problematik tritt in dreidimensionalen Problemstellungen nicht auf.

diskretisierten virtuellen Rand⁹ und somit zwar die Matrix der Eigenvektoren Φ jedoch nicht die Matrix Φ^u quadratisch ist. Folglich sind natürlich die Randbedingungen an beiden Rändern Γ, Γ_a notwendig, um die Wichtungsfaktoren c_j der Deformationsmoden $\hat{\mathbf{u}}_j(\xi)$ eindeutig bestimmen zu können (Gln. (4.21)).¹⁰

Werden zur Lösung des homogenen SBFEM-Differentialgleichungssystems die Lastvektoren $\hat{\mathbf{q}}(\xi)$ anstatt der Ableitungen $\hat{\mathbf{v}}(\xi)$ der Verschiebungen an einem virtuellen Rand bei ξ zur Reduktion der DGL-Ordnung verwendet, ergibt sich im dreidimensionalen Fall die Lösung für das resultierende DGLS (4.34) sehr ähnlich zu:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}(\xi)/\sqrt{\xi} \\ \hat{\mathbf{u}}(\xi)/\sqrt{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^q \\ \Phi^u \end{bmatrix} \xi^{\bar{\Lambda}} \begin{bmatrix} \Phi^q \\ \Phi^u \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Phi^q(\xi=1) \\ \Phi^u(\xi=1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^q \\ \Phi^u \end{bmatrix} \xi^{\bar{\Lambda}} \mathbf{c} \quad \text{bzw.} \quad (4.41)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}(\xi) \\ \hat{\mathbf{u}}(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^q \xi^{\bar{\Lambda}+1/2} \\ \Phi^u \xi^{\bar{\Lambda}-1/2} \end{bmatrix} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \Phi^q \xi^{\Lambda+1} \\ \Phi^u \xi^{\Lambda} \end{bmatrix} \mathbf{c}. \quad (4.42)$$

Das Eigenwertspektrum mit Eigenwerten $\bar{\lambda}_j$ der Hamiltonmatrix \mathcal{K}_H ist symmetrisch zur Null. Da die Deformationsmoden $\hat{\mathbf{u}}_j(\xi)$ für beide Herangehensweisen aber identisch sein müssen, folgt, dass das Eigenwertspektrum der Koeffizientenmatrix \mathcal{K} ebenfalls symmetrisch sein muss – im dreidimensionalen Fall aber zum Wert $-0,5$. Im zweidimensionalen Fall sind die beiden Eigenwertspektren identisch $\bar{\Lambda}^{2D} = \Lambda^{2D}$ und damit entsprechend der Eigenschaften der Hamiltonmatrix symmetrisch zur Null. Während im dreidimensionalen Fall die Einzelkraftlösungen in den Abklingexponenten der Verschiebungen den Wert $\lambda = -1$ und nur die Starrkörpermoden den Wert $\lambda = 0$ annehmen, fallen im zweidimensionalen Fall die Abklingexponenten beider Deformationsmodengruppen zusammen. Dies ist der Grund für den dann auftretenden Mangel an linear unabhängigen Eigenvektoren. Um genügend linear unabhängige Deformationsmoden zur eindeutigen Lösbarkeit des Randwertproblems zu erhalten, sind dort entsprechende Hauptvektoren zu bestimmen. Diese und die weiter resultierenden logarithmischen Terme $\ln(\xi)$ in der Verschiebungslösung führen dann gerade auf die Abbildung der ebenen Einzelkraftlösung (vgl. z. B. Becker u. Gross (2002)).

Für die Anwendung des QR-Algorithmus macht es keinen Unterschied, ob das Eigenwertproblem für \mathcal{K} oder \mathcal{K}_H gelöst wird. Allerdings ist zu beachten, dass die Ausgabe der Eigenvektoren ϕ_j typischerweise auf eins normiert erfolgt, sodass bei entsprechenden Größenunterschieden der Einträge Rundungsfehler stärker eine Rolle spielen können. Naturgemäß ist der Größenunterschied zwischen den Verschiebungen ϕ_j^u des Deformationsmodus $\hat{\mathbf{u}}_j$ und den Lastvektoren

$$\phi_j^q = (\mathbf{E}_0 \lambda_j + \mathbf{E}_1^T) \phi_j^u \quad (4.43)$$

größer als zu den Verschiebungsableitungen

$$\phi_j^v = \lambda_j \phi_j^u, \quad (4.44)$$

da die Systemmatrizen $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1$ die i. A. großen Elastizitätskonstanten enthalten. Somit ist die Verwendung der Lastvektoren zur Reduktion der Ordnung des SBFEM-DGLS insgesamt anfälliger für Rundungsfehler. Zudem sind die modalen Lastvektoren $\hat{\mathbf{q}}_j(\xi)$ mit vergleichsweise geringem Aufwand nachträglich aus den Deformationsmoden berechenbar (z. B. Gl. (4.43)),

⁹ oder auch $n_\lambda = \text{DOF}(\Gamma_a) + \text{DOF}(\Gamma_i)$

¹⁰ Der in Gleichung (4.40) implizierte Fall, dass an einem (virtuellen) Rand bei $\xi = 1$ sowohl Verschiebungen als auch Ableitungen gegeben sind, ist aus praktischer Sicht von ungeordneter Relevanz und ohnehin ausschließlich in Gebieten mit Außen- und Innenrand sinnvoll möglich.

sodass zur Lösung des homogenen DGLS eher das Standardlösungsverfahren mittels der Verschiebungsableitungen zu empfehlen ist.

In Summendarstellung lässt sich schließlich die allgemeine Verschiebungslösung entlang der Skalierungsstrahlen an den Polynomknotenpunkten mit n^c komplex konjugierten Eigenwertpaaren $\lambda = \lambda^r \pm i\lambda^i$ und jeweiliger Differenz zwischen algebraischer und geometrischer Multiplizität n_k^g folgendermaßen angeben¹¹:

$$\hat{\mathbf{u}}(\xi) = \sum_{k=1}^{n^c} \sum_{l=1}^{n_k^g} \left[\cos(\lambda_k^i \ln \xi) (\operatorname{Re}(\phi_{kl}) \operatorname{Re}(c_{kl}) - \operatorname{Im}(\phi_{kl}) \operatorname{Im}(c_{kl})) - \sin(\lambda_k^i \ln \xi) (\operatorname{Re}(\phi_{kl}) \operatorname{Im}(c_{kl}) + \operatorname{Im}(\phi_{kl}) \operatorname{Re}(c_{kl})) \right] 2^{\xi \lambda_k^r} (\ln \xi)^l. \quad (4.45)$$

Mit den Gln. (4.10) bestimmen sich dann die Verschiebungen $\tilde{\mathbf{u}}(\xi, \eta_1, \eta_2)$ durch Multiplikation mit den Formfunktionen $\mathbf{N}(\eta_1, \eta_2)$.¹² In der einfacheren Matrixnotation und unter Vernachlässigung logarithmischer Deformationsmoden schreiben sie sich dann wie folgt:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\xi, \eta_1, \eta_2) = \mathbf{N}(\eta_1, \eta_2) \Phi_u \xi^{\Lambda} \mathbf{c}. \quad (4.46)$$

Schur-Zerlegungs-Methode

Ein weiterer Weg die Matrixexponentialfunktion zu bestimmen, die sich insbesondere bezüglich der Berücksichtigung von Eigenwerten mit kleinerer geometrischer als algebraischer Vielfachheit numerisch robuster verhält, kann über eine Schur-Zerlegung der DGL-Koeffizientenmatrix \mathcal{K} erfolgen (vgl. Song (2004)):

$$\mathcal{K} = \mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{V}^T \quad (4.47)$$

Sie beinhaltet eine orthonormale Transformation von \mathcal{K} in eine Dreiecksmatrix \mathbf{S} , die auf ihrer Diagonalen die Realteile der Eigenwerte und gegebenenfalls auf der Nebendiagonalen die Imaginärteile enthält. Eine Sortierung der Eigenwerte nach ihrer Größe und anschließende Blockdiagonalisierung mittels der Transformationsmatrix \mathbf{Y} ergibt

$$\mathcal{K} = \mathbf{V} \mathbf{Y} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^v & \mathbf{V}_2^v \\ \mathbf{V}_1^u & \mathbf{V}_2^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{S}}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^v & \mathbf{V}_2^v \\ \mathbf{V}_1^u & \mathbf{V}_2^u \end{bmatrix}^T \quad (4.48)$$

\mathbf{Y}_{12} bestimmt sich dabei aus der Sylvester-Gleichung:

$$\mathbf{S}_{11} \mathbf{Y}_{12} - \mathbf{Y}_{12} \mathbf{S}_{22} + \mathbf{S}_{12} = \mathbf{0}. \quad (4.49)$$

Entsprechend ergibt sich die Matrixexponentialfunktion nun zu

$$e^{\mathcal{K}t} = \mathbf{V} \mathbf{Y} e^{\bar{\mathbf{S}}t} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{V}^T \quad (4.50)$$

Einsetzen in die allgemeine Lösung (4.31) des homogenen DGLS (4.30) und Rücktransformation in die Skalierungsordinate ξ führt auf

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(\xi) \\ \hat{\mathbf{u}}(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^v e^{\bar{\mathbf{S}}_{11} \ln \xi} & (\mathbf{V}_1^v \mathbf{Y}_{12} + \mathbf{V}_2^v) e^{\bar{\mathbf{S}}_{22} \ln \xi} \\ \mathbf{V}_1^u e^{\bar{\mathbf{S}}_{11} \ln \xi} & (\mathbf{V}_1^u \mathbf{Y}_{12} + \mathbf{V}_2^u) e^{\bar{\mathbf{S}}_{22} \ln \xi} \end{bmatrix} \mathbf{c}_S \quad (4.51)$$

¹¹ Dabei ist aufgrund der andersartigen Klassifizierung eine andere, leicht angepasste Indizierung als in der bisherigen Darstellung verwendet.

¹² Sind diese elementweise als $\mathbf{N}_e(\eta_1, \eta_2)$ gegeben, lassen sie sich prinzipiell dennoch, wie in Kapitel 2.3.4 dargelegt, zu einer Gesamtmatrix der Formfunktionen $\mathbf{N}(\eta_1, \eta_2)$ assemblieren.

Die tatsächliche Berechnung der Matrixexponentialfunktionen $e^{\bar{\mathbf{S}}_{11} \ln \xi}$, $e^{\bar{\mathbf{S}}_{22} \ln \xi}$ stellt sich allerdings nicht so einfach wie im Falle der Eigenwert-Zerlegung dar. Es gibt dennoch einige, wenn auch mitunter vergleichsweise aufwendige Algorithmen (Moler u. Van Loan, 1978, 2003), die in numerischen Mathematik-Programmen, wie dem in dieser Arbeit verwendeten MATLAB, bereits implementiert und unmittelbar einsetzbar sind. Solange aber kein zwingendes Interesse an Auswertungen innerhalb des Gebiets besteht, stellt diese Methodik insbesondere für die Lösung von zweidimensionalen Randwertproblemen eine numerisch robuste Alternative zur Methodik der Eigenwertzerlegung dar.

4.1.3 Berücksichtigung von Randbedingungen am diskretisierten Gebietsrand

Bei der Einarbeitung der Randbedingungen, die am diskretisierten Gebietsrand gefordert sind, kann es von Vorteil sein, das Eigenwertspektrum und seine zugehörigen Eigenvektoren bezüglich seiner Symmetrieachse in einen positiven Anteil Λ_p , Φ_p^u mit $\bar{\lambda}_j \geq 0$, der von außen nach innen abklingt, und einen negativen Anteil Λ_n , Φ_n^u mit $\lambda_j \leq 0$, der von innen nach außen abklingt, aufzuteilen.¹³¹⁴¹⁵

$$\hat{\mathbf{u}}(\xi) = \Phi_p^u \xi^{\Lambda_p} \mathbf{c}_p + \Phi_n^u \xi^{\Lambda_n} \mathbf{c}_n, \quad (4.52)$$

$$\hat{\mathbf{q}}(\xi) = \Phi_p^q \xi^{\Lambda_p + \mathbf{I}} \mathbf{c}_p + \Phi_n^q \xi^{\Lambda_n + \mathbf{I}} \mathbf{c}_n. \quad (4.53)$$

Der einfacheren Darstellung halber, aber auch wegen ihrer physikalischen Bedeutung für die Erfüllung der Randbedingungen am diskretisierten Rand, sei hier weiterhin mit den Lastvektoren $\hat{\mathbf{q}}(\xi)$ gearbeitet. Dabei ist die für die vorliegende Arbeit relevantere Darstellung eines dreidimensionalen Randwertproblems gewählt.¹⁶

Einsetzen der Verschiebungslösung (4.52) und ihrer Ableitungen in das LGS (4.21) zur Erfüllung der Randbedingungen am Außenrand Γ_a bzw. am Innenrand Γ_i ergibt dann mit Trennung der Anteile des Eigenwertspektrums:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{E}_0 \Phi_p^u \Lambda_p + \mathbf{E}_1^T \Phi_p^u) \xi_a^{\Lambda_p + \mathbf{I}} & (\mathbf{E}_0 \Phi_n^u \Lambda_n + \mathbf{E}_1^T \Phi_n^u) \xi_a^{\Lambda_n + \mathbf{I}} \\ -(\mathbf{E}_0 \Phi_p^u \Lambda_p + \mathbf{E}_1^T \Phi_p^u) \xi_i^{\Lambda_p + \mathbf{I}} & -(\mathbf{E}_0 \Phi_n^u \Lambda_n + \mathbf{E}_1^T \Phi_n^u) \xi_i^{\Lambda_n + \mathbf{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_p \\ \mathbf{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_a \\ \mathbf{p}_i \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Man beachte, dass \mathbf{p}_i nach Definition (4.17) positiv für nach außen zeigende Lasten ist. Hingegen vereinfacht sich die Darstellung unter Verwendung der Lösung (4.53) für die Lastvektoren wesentlich zu

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}(\xi_a) \\ -\hat{\mathbf{q}}(\xi_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_p^q \xi_a^{\Lambda_p + \mathbf{I}} & \Phi_n^q \xi_a^{\Lambda_n + \mathbf{I}} \\ -\Phi_p^q \xi_i^{\Lambda_p + \mathbf{I}} & -\Phi_n^q \xi_i^{\Lambda_n + \mathbf{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_p \\ \mathbf{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_a \\ \mathbf{p}_i \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

¹³ Die Überschneidung in zweidimensionalen Randwertproblemen ist am sinnvollsten aufzulösen, indem die Nulleigenwerte selbst nochmals von den übrigen Eigenwerten separiert werden.

¹⁴ Die Aufteilung des Eigenwertspektrums wurde bei der Schur-Zerlegungsmethode durch Sortierung der Eigenwerte und Blockdiagonalisierung der Schurmatrix bereits eingeführt.

¹⁵ Die Eigenwerte des positiven Anteils des Eigenwertspektrums werden häufig auch als die primalen und diejenigen des negativen Anteils als die dualen Eigenwerte bezeichnet. Beispielsweise werden zur Bestimmung von GSIF mit Hilfe des H-/ Ψ -Integrals die dualen Eigenwerte und zugehörigen Winkelfunktionen benötigt (z. B. Leguillon u. Sanchez-Palencia (1987), Leguillon (1989)).

¹⁶ Grundsätzlich sind die Formulierungen für zweidimensionale und dreidimensionale Problemstellungen aber sehr ähnlich: für $\hat{\mathbf{u}}(\xi)$ identisch und für $\hat{\mathbf{q}}(\xi)$ fehlt im zweidimensionalen lediglich ein Faktor ξ .

Um eine gänzlich verschiebungs-basierte Darstellung zu erhalten, sind die modalen Wichtungsfaktoren $\mathbf{c}_p, \mathbf{c}_n$ geeignet zu ersetzen. Geschickterweise sind dazu die Verschiebungen an Außen- und Innenrand zu wählen:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_a \\ \hat{\mathbf{u}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}(\xi_a) \\ \hat{\mathbf{u}}(\xi_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_p^u \zeta_a^{\Lambda_p} & \Phi_n^u \zeta_a^{\Lambda_n} \\ \Phi_p^u \zeta_i^{\Lambda_p} & \Phi_n^u \zeta_i^{\Lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_p \\ \mathbf{c}_n \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Damit lässt sich das vollständige verschiebungs-basierte lineare Gleichungssystem zur Erfüllung der Randbedingungen an Außen- und Innenrand in Form der klassischen FEM angeben:

$$\begin{bmatrix} \Phi_p^q \zeta_a^{\Lambda_p+I} & \Phi_n^q \zeta_a^{\Lambda_n+I} \\ -\Phi_p^q \zeta_i^{\Lambda_p+I} & -\Phi_n^q \zeta_i^{\Lambda_n+I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_p^u \zeta_a^{\Lambda_p} & \Phi_n^u \zeta_a^{\Lambda_n} \\ \Phi_p^u \zeta_i^{\Lambda_p} & \Phi_n^u \zeta_i^{\Lambda_n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_a \\ \hat{\mathbf{u}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_a \\ \mathbf{p}_i \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$\mathbf{K}_B^u \cdot \hat{\mathbf{u}}_B = \mathbf{p}_B^u$$

mit der Verschiebungs-Randsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_B^u , den Randverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_B$ und dem Randlastvektor \mathbf{p}_B . Bei der Lösung dieses LGS ist zu beachten, dass die Matrizen zur Berechnung der Randsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_B^u aufgrund der enthaltenen Potenzterme sehr hohe Konditionszahlen besitzen können. Dadurch, dass diese Potenzterme aber jeweils einmal als Faktor und einmal als Divisor auftreten, ist die Konditionszahl von \mathbf{K}_B^u selbst vergleichsweise moderat.¹⁷

Ausgehend von Darstellung (4.55) lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

- Ist ein abgeschlossenes konvexes Gebiet vorhanden, sodass es nur einen Außenrand bei ξ_a aber keinen tatsächlichen Innenrand gibt ($\xi_i = 0$), dann ist in der zweiten Zeile der angegebenen Matrix der erste Eintrag identisch mit der Nullmatrix

$$\lim_{\xi_i \rightarrow 0} -\Phi_p^q \zeta_i^{\Lambda_p+I} = \mathbf{0}.$$

Der zweite Eintrag strebt hingegen für alle Deformationsmoden mit $\lambda_{nj} < -1$ gegen unendlich, sodass als Regularitätsbedingung gelten muss, dass alle zugehörigen Wichtungsfaktoren null sind. Nur die Terme mit $\lambda_{nj} = -1$ zur Abbildung der Einzelkraftlösung liefern hier prinzipiell noch finite Werte. Kann ihnen aber keine Kraft in Form von \mathbf{p}_i auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens zugeordnet werden, sind auch ihre Wichtungsfaktoren null und es muss gelten

$$\mathbf{c}_n = \mathbf{0}.$$

Somit bleibt nur noch die erste Zeile des Gleichungssystems, in der der zweite Eintrag $\Phi_n^q \zeta_a^{\Lambda_n+I}$ der Matrix, der den Einfluss der nach außen abklingenden Deformationsmoden auf das Kräftegleichgewicht am Außenrand enthält, durch $\mathbf{c}_n = \mathbf{0}$ aber keine Rolle mehr spielt. Die übrigen Wichtungsfaktoren \mathbf{c}_p sind dann unabhängig von den Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_i$ darstellbar. Folglich reduziert sich das verschiebungs-basierte LGS (4.57) wesentlich auf die klassische, in der Literatur häufig anzutreffende Form

$$\begin{aligned} (\Phi_p^q)(\Phi_p^u)^{-1} \hat{\mathbf{u}}_a &= \mathbf{p}_a \quad \text{bzw.} \\ (\mathbf{E}_0 \Phi_p^u \Lambda_p + \mathbf{E}_1^T \Phi_p^u)(\Phi_p^u)^{-1} \hat{\mathbf{u}}_a &= \mathbf{p}_a, \end{aligned} \quad (4.58)$$

¹⁷ Die Auswirkungen dessen wurden bei der Implementierung in MATLAB überprüft und als vernachlässigbar befunden, sofern die Berechnung in einem Schritt erfolgte. Vermutlich ist für diesen Fall in den von MATLAB zur Verfügung gestellten Lösungsalgorithmen für LGS ein Weg zur Umgehung der schlechten Konditionierung mit bereitgestellt.

wobei die Skalierungskoordinate am Außenrand frei zu $\xi_a = 1$ gewählt ist. Äquivalent kann das LGS auch in Abhängigkeit der resultierenden Matrizen der Schurzerlegung dargestellt werden, wenn der linke obere Block \mathbf{S}_{11} der Schurmatrix die Eigenwerte des positiven Teils des Eigenwertspektrums enthält. Dann ist eine Blockdiagonalisierung der Schurmatrix \mathbf{S} mittels Lösung einer Sylvester-Gleichung auch nicht notwendig:

$$(\mathbf{E}_0 \mathbf{V}_1^{v,p} + \mathbf{E}_1^T \mathbf{V}_1^{u,p})(\mathbf{V}_1^{u,p})^T \hat{\mathbf{u}}_a = \mathbf{p}_a . \quad (4.59)$$

- Umgekehrt gilt für unbeschränkte Gebiete mit $\xi_a \rightarrow \infty$ und einem Innenrand bei ξ_i , dass der erste Eintrag der ersten Zeile der gegebenen Matrix in LGS (4.55) gegen unendlich strebt

$$\lim_{\xi_a \rightarrow \infty} \Phi_p^q \zeta_a^{\Lambda_p + I} = \infty$$

und daher die Forderung nach Regularität der Lösung automatisch ein Verschwinden der zugehörigen Wichtungsfaktoren bedingt

$$\mathbf{c}_p = \mathbf{0} .$$

Dann bleibt für die Gleichgewichtsbedingung am Innenrand und mit entsprechender Substitution der Wichtungsfaktoren \mathbf{c}_n der nach außen abklingenden Deformationsmoden:

$$\begin{aligned} -(\Phi_n^q)(\Phi_n^u)^{-1} \hat{\mathbf{u}}_i &= \mathbf{p}_i \quad \text{bzw.} \\ -(\mathbf{E}_0 \Phi_n^u \Lambda_n + \mathbf{E}_1^T \Phi_n^u)(\Phi_n^u)^{-1} \hat{\mathbf{u}}_i &= \mathbf{p}_i , \end{aligned} \quad (4.60)$$

wobei nun die Skalierungskoordinate am Innenrand frei zu $\xi_i = 1$ gewählt ist. Das LGS kann wieder äquivalent auch in Abhängigkeit der resultierenden Matrizen der Schurzerlegung dargestellt werden, wenn der linke obere Block \mathbf{S}_{11} der Schurmatrix nun die Eigenwerte des negativen Teiles des Eigenwertspektrums enthält. Dann ist wieder keine Blockdiagonalisierung der Schurmatrix \mathbf{S} mittels Lösung einer Sylvester-Gleichung notwendig:

$$-(\mathbf{E}_0 \mathbf{V}_1^{v,n} + \mathbf{E}_1^T \mathbf{V}_1^{u,n})(\mathbf{V}_1^{u,n})^T \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{p}_i . \quad (4.61)$$

Sind die Randverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_i, \hat{\mathbf{u}}_a$ letztendlich bekannt, können unter Verwendung der Verschiebungslösung (4.42, 4.40 oder 4.51) des SBFEM-DGLS, oder direkt aus dem resultierenden Zusammenhang (4.56) die modalen Wichtungsfaktoren \mathbf{c} bzw. $\mathbf{c}_p, \mathbf{c}_n$ bestimmt werden.

Eine deformationsmodusbasierte Form des LGS für die Erfüllung der Randbedingungen ergibt sich ausgehend vom LGS (4.54) bzw. (4.55) unter Beachtung, dass diese für beliebige virtuelle Verrückungen am Innen- und Außenrand gelten müssen (vgl. Gl. (4.19)) und die Lösung der virtuellen Verrückungen eine praktisch identische Form wie die der Verschiebungen hat:

$$\begin{bmatrix} \delta \hat{\mathbf{u}}_a \\ \delta \hat{\mathbf{u}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \hat{\mathbf{u}}(\xi_a) \\ \delta \hat{\mathbf{u}}(\xi_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_p^u \zeta_a^{\Lambda_p} & \Phi_n^u \zeta_a^{\Lambda_n} \\ \Phi_p^u \zeta_i^{\Lambda_p} & \Phi_n^u \zeta_i^{\Lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{c}_p \\ \delta \mathbf{c}_n \end{bmatrix} . \quad (4.62)$$

Dann folgt nach Substitution

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{c}_p \\ \delta \mathbf{c}_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi_p^u \zeta_a^{\Lambda_p} & \Phi_n^u \zeta_a^{\Lambda_n} \\ \Phi_p^u \zeta_i^{\Lambda_p} & \Phi_n^u \zeta_i^{\Lambda_n} \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \Phi_p^q \zeta_a^{\Lambda_p + I} & \Phi_n^q \zeta_a^{\Lambda_n + I} \\ -\Phi_p^q \zeta_i^{\Lambda_p + I} & -\Phi_n^q \zeta_i^{\Lambda_n + I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_p \\ \mathbf{c}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{p}_a \\ \mathbf{p}_i \end{bmatrix} \right) = 0 . \quad (4.63)$$

Nach Ausmultiplizieren sowie unter Verwendung der modalen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_B^c , des modalen Lastvektors \mathbf{p}_B^c und der realen sowie virtuellen Wichtungsfaktoren \mathbf{c} , $\delta\mathbf{c}$ ergibt sich weiterhin:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{c}_p \\ \delta\mathbf{c}_n \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} \xi_a^{\Lambda_p} \Phi_p^{uT} \Phi_p^q \xi_a^{\Lambda_p+I} - \xi_i^{\Lambda_p} \Phi_p^{uT} \Phi_p^q \xi_i^{\Lambda_p+I} & \xi_a^{\Lambda_p} \Phi_p^{uT} \Phi_n^q \xi_a^{\Lambda_n+I} - \xi_i^{\Lambda_p} \Phi_p^{uT} \Phi_n^q \xi_i^{\Lambda_n+I} \\ \xi_a^{\Lambda_n} \Phi_n^{uT} \Phi_p^q \xi_a^{\Lambda_p+I} - \xi_i^{\Lambda_n} \Phi_n^{uT} \Phi_p^q \xi_i^{\Lambda_p+I} & \xi_a^{\Lambda_n} \Phi_n^{uT} \Phi_n^q \xi_a^{\Lambda_n+I} - \xi_i^{\Lambda_n} \Phi_n^{uT} \Phi_n^q \xi_i^{\Lambda_n+I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_p \\ \mathbf{c}_n \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{c}_p \\ \delta\mathbf{c}_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \xi_a^{\Lambda_p} \Phi_p^{uT} \mathbf{p}_a - \xi_i^{\Lambda_p} \Phi_p^{uT} \mathbf{p}_i \\ \xi_a^{\Lambda_n} \Phi_n^{uT} \mathbf{p}_a - \xi_i^{\Lambda_n} \Phi_n^{uT} \mathbf{p}_i \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \delta\mathbf{c}^T \mathbf{K}_B^c \mathbf{c} = \delta\mathbf{c}^T \mathbf{p}_B^c. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Wie die Steifigkeitsmatrix in der klassischen Finite-Elemente-Methode muss auch die modale Randsteifigkeitsmatrix der SBFEM symmetrisch sein.¹⁸ Daraus folgt für die Diagonalblöcke

$$\Phi_p^{uT} \Phi_p^q = \Phi_p^{qT} \Phi_p^u, \quad (4.65)$$

$$\Phi_n^{uT} \Phi_n^q = \Phi_n^{qT} \Phi_n^u. \quad (4.66)$$

Für die querdiaagonalen Blöcke bedeutet die Symmetrieforderung

$$\xi_a^{\Lambda_p} \Phi_p^{uT} \Phi_n^q \xi_a^{\Lambda_n+I} - \xi_i^{\Lambda_p} \Phi_p^{uT} \Phi_n^q \xi_i^{\Lambda_n+I} = (\xi_a^{\Lambda_n} \Phi_n^{uT} \Phi_p^q \xi_a^{\Lambda_p+I} - \xi_i^{\Lambda_n} \Phi_n^{uT} \Phi_p^q \xi_i^{\Lambda_p+I})^T \quad (4.67)$$

und nachdem alle Terme je eines Randes auf eine Seite gebracht sind, ergibt sich durch Ausklammern:

$$\begin{aligned} \xi_a (\xi_a^{\Lambda_p} \Phi_p^{uT} \Phi_n^q \xi_a^{\Lambda_n} - \xi_a^{\Lambda_p} \Phi_p^{qT} \Phi_n^u \xi_a^{\Lambda_n}) & = \xi_i (\xi_i^{\Lambda_p} \Phi_p^{uT} \Phi_n^q \xi_i^{\Lambda_n} - \xi_i^{\Lambda_p} \Phi_p^{qT} \Phi_n^u \xi_i^{\Lambda_n}) \\ \xi_a \xi_a^{\Lambda_p} (\Phi_p^{uT} \Phi_n^q - \Phi_p^{qT} \Phi_n^u) \xi_a^{\Lambda_n} & = \xi_i \xi_i^{\Lambda_p} (\Phi_p^{uT} \Phi_n^q - \Phi_p^{qT} \Phi_n^u) \xi_i^{\Lambda_n}, \end{aligned} \quad (4.68)$$

was schließlich erfüllt ist, wenn $\Phi_p^{uT} \Phi_n^q = \Phi_p^{qT} \Phi_n^u$ gilt. Allerdings ist zu beachten, dass dieser Zusammenhang nicht für die jeweiligen Diagonaleinträge der Matrixprodukte gelten muss, da die Diagonalen der zu vergleichenden Matrixblöcke ohnehin schon identisch null sind: Wird jeweils nur die Diagonale von $\Phi_p^{uT} \Phi_n^q$ bzw. $\Phi_n^{uT} \Phi_p^q$ betrachtet, enthält die Matrixmultiplikation jeweils nur noch Diagonalmatrizen und ist somit kommutativ. Mit $\Lambda_p + \Lambda_n + \mathbf{I} = \mathbf{0}$ ist dann auch $\xi_a^{\Lambda_p} \xi_a^{\Lambda_n} \xi_a = \mathbf{I}$, sodass dann sowohl rechts als auch links vom Gleichheitszeichen in Gleichung (4.67) Nullmatrizen stehen. Bei genauerer Betrachtung ist diese Schlussfolgerung auf die *Blockdiagonalen*, die sich jeweils aus Blöcken gleicher Eigenwerte zusammensetzen, erweiterbar. An dieser Stelle sei ein $\text{bdiag}()$ -Operator eingeführt, der diese Blockdiagonalen bestehend aus $k \times k$ -Blöcken k gleicher Eigenwerte λ extrahiert. Der oben angegebene Zusammenhang gilt also nur für die nicht der Blockdiagonalen angehörigen Elemente und muss eigentlich lauten:

$$\boxed{- \text{bdiag}(\Phi_p^{uT} \Phi_n^q) + \Phi_p^{uT} \Phi_n^q = \Phi_p^{qT} \Phi_n^u - \text{bdiag}(\Phi_p^{qT} \Phi_n^u)}. \quad (4.69)$$

¹⁸ Dies ist in der modalen Formulierung gut sichtbar ähnlich der Forderung des Satzes von Betti (2.58), wonach eine statisch zulässige Kraftgruppe bzw. ein Lastmodus $\hat{\mathbf{q}}_j(\xi) = \phi_j^q \xi^{\lambda_j+1} c_j$ an einem kinematisch zulässigen Verschiebungsfeld bzw. einem Deformationsmodus $\hat{\mathbf{u}}_i(\xi) = \phi_i^u \xi^{\lambda_i} c_i$ die gleiche Arbeit verrichtet, wie ein Lastmodus $\hat{\mathbf{q}}_i(\xi) = \phi_i^q \xi^{\lambda_i+1} c_i$ an einem Deformationsmodus $\hat{\mathbf{u}}_j(\xi) = \phi_j^u \xi^{\lambda_j} c_j$

$$\left[\hat{\mathbf{u}}_i^T(\xi) \hat{\mathbf{q}}_j(\xi) \right]_{\xi_i}^{\xi_a} = \left[c_i \xi^{\lambda_i} \phi_i^{uT} \phi_j^q \xi^{\lambda_j+1} c_j \right]_{\xi_i}^{\xi_a} = \left[c_j \xi^{\lambda_j} \phi_j^{uT} \phi_i^q \xi^{\lambda_i+1} c_i \right]_{\xi_i}^{\xi_a} = \left[\hat{\mathbf{u}}_j^T(\xi) \hat{\mathbf{q}}_i(\xi) \right]_{\xi_i}^{\xi_a}.$$

Eine interessante Schlussfolgerung daraus ist, dass der Satz von Betti schon über jedem beliebig skalierten virtuellen Rand für beliebige Kombinationen der Deformations- und Lastmoden erfüllt ist – mit Ausnahme der Kombination von durch die Symmetrie des Spektrums einander unmittelbar zugeordneten Moden: Für diese Kombinationen ist der Satz von Betti stets erst bei Betrachtung des *vollständigen* Gebiets, also von Innen- und Außenrand, erfüllt. Damit erscheint es naheliegend, dass diese Modeninteraktionen eine wesentliche Rolle beim Energieaustausch zwischen den Rändern spielen. Dieser Zusammenhang wird in Kapitel 6 wieder Gegenstand sein, wo die asymptotischen Lösungen von Randwertproblemen mit zwei diskretisierten Rändern bestimmt und daraus semi-analytische Funktionen für Energiefreisetzungsraten abgeleitet werden.

4.1.4 Berücksichtigung von Eigendehnungen

Sind Oberflächenlasten auf den nicht diskretisierten Rändern Γ_R , Volumenlasten oder Eigendehnungen zu berücksichtigen, gehen diese natürlich nicht nur in das SBFEM-LGS zur Erfüllung der Randbedingungen an den diskretisierten Rändern ein, sondern in erster Linie in das SBFEM-DGLS, das dann ein inhomogenes wird. Dies sei im Folgenden am Beispiel simpler homogener Temperaturdehnungen gezeigt.

Temperaturdehnungen aufgrund einer Temperaturänderung ΔT gehen bereits in die konstitutiven Beziehungen ein (vgl. Gl.(2.32)):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_T = \boldsymbol{S} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha}_T \Delta T . \quad (4.70)$$

Dies führt auf folgende Form der inneren virtuellen Arbeit δW^i in Tensornotation:

$$\delta W^i = \int_V \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_m) : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{C} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV - \underbrace{\int_V \boldsymbol{\varepsilon}_T : \boldsymbol{C} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV}_{\delta W_T^i} . \quad (4.71)$$

Die innere virtuelle Arbeit der Temperaturdehnungen δW_T^i schreibt sich in Voigt-Notation und transformiert in das skalierte Rand-KOS zu

$$\begin{aligned} \delta W_T^i &= \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{\varepsilon}_T dV \\ &= \int_V \left((\delta \hat{\boldsymbol{u}}'(\xi))^T \mathbf{B}_\xi^T + (\delta \hat{\boldsymbol{u}}(\xi))^T \frac{1}{\xi} \mathbf{B}_\xi^T \right) \boldsymbol{C} \boldsymbol{\alpha}_T \Delta T \det(\mathbf{J}_\eta) \xi^2 d\xi d\eta_1 d\eta_2 . \end{aligned} \quad (4.72)$$

Ist die Temperaturänderung ΔT unabhängig von der Skalierungskordinate ξ ,¹⁹ führt die partielle Integration in ξ und die Integration über die Randkoordinaten η_1, η_2 mit

$$\mathbf{p}_{T\xi} = \int_{\eta_1} \int_{\eta_2} \mathbf{B}_\xi^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{\alpha}_T \Delta T \det(\mathbf{J}_\eta) d\eta_1 d\eta_2 \quad \text{und} \quad (4.73)$$

$$\mathbf{p}_{T\eta} = \int_{\eta_1} \int_{\eta_2} \mathbf{B}_\eta^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{\alpha}_T \Delta T \det(\mathbf{J}_\eta) d\eta_1 d\eta_2 \quad (4.74)$$

¹⁹ wie beispielsweise im simplen Fall eines homogenen Temperaturabfalls, wie er typischerweise im Produktionsprozess von faserverstärkten Kunststoff- oder Keramik-Laminaten auftritt, wenn sie bei höheren Temperaturen gefertigt als eingesetzt werden

auf die erweiterten SBFEM-Gleichungen:

$$\mathbf{E}_0 \xi^2 \hat{\mathbf{u}}''(\xi) + \left[2\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1^T \right] \xi \hat{\mathbf{u}}'(\xi) + \left[\mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_2 \right] \hat{\mathbf{u}}(\xi) + \boxed{\xi(\mathbf{p}_{T\eta} - 2\mathbf{p}_{T\xi})} = \mathbf{0}, \quad (4.75)$$

$$\begin{bmatrix} \xi_a^2 \mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{u}}'(\xi_a) + \xi_a \mathbf{E}_1^T \hat{\mathbf{u}}(\xi_a) - \frac{\xi_a^2 \mathbf{p}_{T\xi}}{\xi_a} - \mathbf{p}_a \\ -\xi_i^2 \mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{u}}'(\xi_i) - \xi_i \mathbf{E}_1^T \hat{\mathbf{u}}(\xi_i) + \frac{\xi_i^2 \mathbf{p}_{T\xi}}{\xi_i} - \mathbf{p}_i \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.76)$$

Die gegenüber den Gleichungen (4.21, 4.20) neuen Terme sind durch Rahmung gekennzeichnet.

Eine Partikulärlösung für das inhomogene DGLS (4.75) kann durch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite mit

$$\hat{\mathbf{u}}_T(\xi) = \phi_T \xi \quad (4.77)$$

gefunden werden. Einsetzen des Ansatzes in das DGLS führt auf ein LGS zur Bestimmung von ϕ_T :

$$(2\mathbf{E}_0 + 2\mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \phi_T = 2\mathbf{p}_{T\xi} - \mathbf{p}_{T\eta}. \quad (4.78)$$

Dann sind die Verschiebungslösung entlang der Skalierungsstrahlen sowie ihre Ableitungen gegeben durch

$$\hat{\mathbf{u}}(\xi) = \Phi^u \xi^\Lambda \mathbf{c} + \phi_T \xi, \quad (4.79)$$

$$\hat{\mathbf{u}}'(\xi) = \Phi^u \Lambda \xi^{\Lambda-1} \mathbf{c} + \phi_T. \quad (4.80)$$

Ihr Einsetzen in das LGS (4.76) zur Erfüllung der Randbedingungen an den diskretisierten Rändern führt auf

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_0 (\Phi^u \Lambda \xi_a^{\Lambda+1} \mathbf{c} + \phi_T \xi_a^2) + \mathbf{E}_1^T (\Phi^u \xi_a^{\Lambda+1} \mathbf{c} + \phi_T \xi_a^2) \\ -\mathbf{E}_0 (\Phi^u \Lambda \xi_i^{\Lambda+1} \mathbf{c} + \phi_T \xi_i^2) - \mathbf{E}_1^T (\Phi^u \xi_i^{\Lambda+1} \mathbf{c} + \phi_T \xi_i^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_a + \xi_a^2 \mathbf{p}_{T\xi} \\ \mathbf{p}_i - \xi_i^2 \mathbf{p}_{T\xi} \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

und unter Verschiebung aller temperaturänderungsbedingter und damit von der Partikulärlösung abhängiger Terme auf die rechte Seite zu:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{E}_0 \Phi^u \Lambda + \mathbf{E}_1^T \Phi^u) \xi_a^{\Lambda+1} \\ -(\mathbf{E}_0 \Phi^u \Lambda + \mathbf{E}_1^T \Phi^u) \xi_i^{\Lambda+1} \end{bmatrix} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_a + \xi_a^2 \mathbf{p}_{T\xi} - (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T) \phi_T \xi_a^2 \\ \mathbf{p}_i - \xi_i^2 \mathbf{p}_{T\xi} + (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T) \phi_T \xi_i^2 \end{bmatrix}. \quad (4.82)$$

Für eine rein verschiebungsbasierte Formulierung sind hier wieder die Wichtungsfaktoren zu ersetzen

$$\mathbf{K}_B^u \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_a - \phi_T \xi_a \\ \hat{\mathbf{u}}_i - \phi_T \xi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_a + \xi_a^2 \mathbf{p}_{T\xi} - (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T) \phi_T \xi_a^2 \\ \mathbf{p}_i - \xi_i^2 \mathbf{p}_{T\xi} + (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T) \phi_T \xi_i^2 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

und wiederum alle temperaturabhängigen Terme auf die rechte Seite zu bringen, sodass linksseitig wieder nur die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_B^u und der Randverschiebungsvektor $\hat{\mathbf{u}}_B$ bleiben:

$$\mathbf{K}_B^u \hat{\mathbf{u}}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_a + \xi_a^2 \mathbf{p}_{T\xi} \\ \mathbf{p}_i - \xi_i^2 \mathbf{p}_{T\xi} \end{bmatrix} + \left(\mathbf{K}_B^u + \begin{bmatrix} -\xi_a^2 \mathbf{E}_0 - \xi_a^2 \mathbf{E}_1^T \\ \xi_i^2 \mathbf{E}_0 + \xi_i^2 \mathbf{E}_1^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \phi_T \xi_a \\ \phi_T \xi_i \end{bmatrix}. \quad (4.84)$$

Für den Fall eines abgeschlossenen Gebietes mit Außenrand bei $\xi_a = 1$ und Innenrand $\xi_i = 0$ gelten die gleichen Schlussfolgerungen wie für das eigendehnungsfreie Problem und das LGS vereinfacht sich wieder wesentlich zu

$$\left(\mathbf{E}_0 \Phi_p^u \Lambda_p (\Phi_p^u)^{-1} + \mathbf{E}_1^T \right) \hat{\mathbf{u}}_a = \mathbf{p}_a + \mathbf{p}_{T\xi} + \mathbf{E}_0 \left(\Phi_p^u \Lambda_p (\Phi_p^u)^{-1} - \mathbf{I} \right) \phi_T \quad \text{bzw.} \quad (4.85)$$

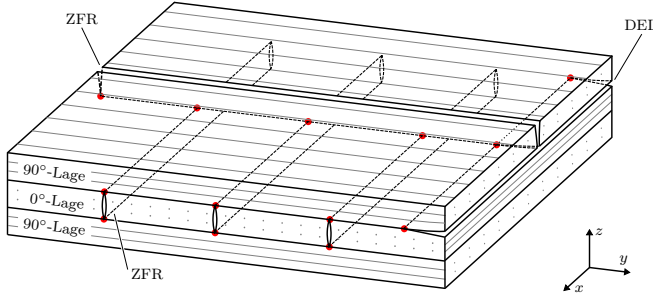


Abbildung 4.5: Laminatstruktur aus endlosfaserverstärktem Verbundwerkstoff mit rissähnlichen Defekten (Zwischenfaserrisse und Delamination) nach Erstschädigung. Defektinteraktionspunkte mit zu erwartenden 3D-Spannungssingularitäten sind durch rote Punkte gekennzeichnet.

$$\left(\mathbf{E}_0 \mathbf{V}_1^{v,p} (\mathbf{V}_1^{u,p})^T + \mathbf{E}_1^T \right) \hat{\mathbf{u}}_a = \mathbf{p}_a + \mathbf{p}_{T\xi} + \mathbf{E}_0 \left(\mathbf{V}_1^{v,p} (\mathbf{V}_1^{u,p})^T - \mathbf{I} \right) \phi_T. \quad (4.86)$$

Ähnlich gilt für unbeschränkte Gebiete mit $\xi_a \rightarrow \infty$ und einem Innenrand bei $\xi_i = 1$:

$$-\left(\mathbf{E}_0 \Phi_n^u \Lambda_n (\Phi_n^u)^{-1} + \mathbf{E}_1^T \right) \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{T\xi} - \mathbf{E}_0 \left(\Phi_n^u \Lambda_n (\Phi_n^u)^{-1} - \mathbf{I} \right) \phi_T \quad \text{bzw.} \quad (4.87)$$

$$-\left(\mathbf{E}_0 \mathbf{V}_1^{v,n} (\mathbf{V}_1^{u,n})^T + \mathbf{E}_1^T \right) \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{T\xi} - \mathbf{E}_0 \left(\mathbf{V}_1^{v,n} (\mathbf{V}_1^{u,n})^T - \mathbf{I} \right) \phi_T. \quad (4.88)$$

4.2 Analyse von Defektinteraktionen in faserverstärkten Verbund-Laminaten

Faserverbundlaminat weisen eine hoch komplexe Versagensentwicklung auf. Die Erstschädigung (engl.: first-ply-failure) erfolgt typischerweise durch Rissbildung in der meist deutlich schwächeren Matrix, während die hochfesten Fasern, und durch Lastumlagerung auch das Gesamtlaminat, weiter tragen. In der Folge interagieren eine Reihe lokaler Defekte und Versagensmechanismen, sodass eine detaillierte strukturmechanische Beschreibung auch nach Jahrzehnten der Forschung eine Herausforderung darstellt.

In zahlreichen Arbeiten wurden in ihrem Wesen zweidimensionale Untersuchungen von Spannungskonzentratoren in Faserverbundlaminaten durchgeführt: beispielsweise an rissähnlichen Defekten und Laminaträndern (vgl. z. B. die Arbeiten von Ting u. Hoang (1984), Im (1990), Leguillon u. Martin (2012) sowie die Übersichtsartikel von Berthelot (2003), Mittelstedt u. Becker (2007)). Gegenstand der aktuellen Untersuchungen sei eine detaillierte dreidimensionale Analyse der Interaktion solcher Spannungskonzentratoren. Im Speziellen seien Struktursituationen betrachtet, in denen rissähnliche Defekte untereinander oder mit einem freien Laminatrand interagieren (siehe Abb. 4.5). Dabei liege der Schwerpunkt darauf, diese strukturmechanisch sehr komplexen dreidimensionalen Interaktionen einem tieferen Verständnis zugänglich zu machen: Dies soll zum einen durch Bestimmung der asymptotischen Nahfelder solcher Struktursituationen erfolgen. Zum anderen sollen einige beispielhafte Untersuchungen einfacher, aber praxisrelevanter, quasi-isotroper Laminat nach Erstschädigung für verschiedene Randbedingungen durchgeführt werden.

Bezüglich rissähnlicher Defekte in Faserverbundlaminaten ist zunächst zwischen

- *inter*laminaren Rissen, also Rissen zwischen den Laminatlagen, die auch *Delaminationen* (DEL) genannt werden, und
- *intra*laminaren Rissen, d. h. Rissen innerhalb der Laminatlagen, die typischerweise Matrixrisse zwischen den Fasern darstellen und daher auch *Zwischenfaserrisse* (ZFR) genannt werden,

zu unterscheiden.

ZFR sind i. A. weniger kritisch, da ihr Wachstum von den hochfesten Fasern der Nachbarlagen gestoppt wird, sodass sich mit zunehmender Laststeigerung zunächst weitere ZFR in der überbelasteten Laminatlage bilden. Dieser Mechanismus führt zunächst lediglich zu einer Steifigkeitsreduktion des Laminats.²⁰ Der Winkel zwischen einem ZFR und der benachbarten Grenzfläche zwischen den Lagen beträgt für Zug- und Schubbeanspruchungen in der Laminebene $\beta \approx 90^\circ$ (Abb. 4.6), kann aber je nach Anteil der Druckbeanspruchung in der Laminebene der betreffenden Schicht auf bis zu $\beta \approx 35^\circ$ absinken (vergleiche hierzu z. B. die Arbeit von Puck u. Schürmann (2002) und die darin referenzierte Literatur). Solche schrägen ZFR sind aus praktischer Sicht von besonderer Kritikalität, da sie zu einer Umlenkung des Kraftflusses in die vergleichsweise niedrigfeste Vertikale des Laminats führen und so meist ein unmittelbares „Aufsprengen“ des Laminats (schlagartige Delamination) und damit das vollständige Versagen zur Folge haben (siehe z. B. Puck (1996) und Schürmann (2007)).

Delaminationen können beispielsweise infolge einer Schlagbelastung oder infolge des Laminatrandeffektes auftreten. Sie sind aber auch eine typische Folgeversagensform, die von bereits gebildeten Zwischenfaserrissen ausgehen kann (Puck, 1996, Kap. 2).²¹ Ihr Wachstum ist zwar als weitgehend verschiebungsgesteuerter Vorgang in gewissen Grenzen stabil, wird aber anders als die Zwischenfaserrisse nicht von inneren Barrieren (den Fasern) gestoppt und kann so letztendlich auch selbst zum vollständigen Laminatversagen führen.

Wie zu großen Teilen bereits in Kapitel 3.1.3 zum Stand der Forschung aufgeführt, war die Untersuchung der Interaktion von Spannungskonzentratoren in Faserverbundlaminaten auch schon Bestandteil anderer Arbeiten: Somaratna u. Ting (1986) untersuchten einen senkrecht auf der Grenzfläche stehenden, senkrecht auf einen freien Laminatrand treffenden ZFR (Rand-ZFR, vgl. auch Abb. 4.8) in einem $[0^\circ/90^\circ]$ -Kohlenstofffaser-Kunststoff-Verbund-Laminat (T300/Epoxid) mittels einer FEM-Eigenanalyse-Methode. Die gefundenen Spannungssingularitätsexponenten konnten mehrfach bestätigt werden (z. B. Ghahremani (1991), Hell u. Becker (2013)). Somaratna und Ting sowie auch Ghahremani untersuchten weitere Laminatlagen-aufbauten, passten jedoch nicht die Rissgeometrie entsprechend an. Dadurch betrachteten sie überwiegend Situationen mit durchtrennten Fasern, die aber aufgrund der hohen Faserefestigkeit so kaum auftreten. Leguillon u. Sanchez-Palencia (1999) untersuchten die gleiche Struktursituation für $[\pm\theta]$ -Lamine und passten dabei die Rissgeometrie so an, dass sie tatsächlich die Spannungssingularitätsexponenten für die Interaktion von Laminatrand und ZFR erhielten. Leider gaben sie keine Materialwerte an, sodass ihre Ergebnisse nicht reproduzierbar sind. Mittelstedt u. Becker (2006) betrachteten den Laminatrandeffekt, welcher ebenfalls als Defektinteraktion, nämlich die zweier Laminatränder, angesehen werden kann. Schließlich untersuchte Mayland (2012) die Spannungssingularitätsexponenten von senkrecht

²⁰ Eine eingehende analytische Untersuchung hierzu stammt von Hashin (1985, 1986), der eine spannungs-basierte Variationsformulierung nutzte, um diesen Effekt für einfache Lagenaufbauten und Lastfälle nachzubilden. Nairn u. Hu (1992a) erweiterten die Formulierung für einige weitere Laminatlagenaufbauten.

²¹ Eine auf der Variationsformulierung von Hashin (1985) aufbauende analytische Untersuchung hierzu ist den Arbeiten von Nairn u. Hu (1992b) zu entnehmen.

auf einen freien Laminatrand treffenden Delaminationen ebenfalls in einem T300/Epoxid-Verbund-Laminat für verschiedene Lagenaufbauten. Die allgemeinen Versagensmechanismen an dreidimensionalen Defektinteraktionen wurden auch ohne speziellen Fokus auf die asymptotischen Nahfelder betrachtet. Diese Analysen verwenden häufig schädigungsmechanische Ansätze wie in ein FE-Modell eingebettete Kohäsivzonenelemente (z. B. Hallett et al. (2008), van der Meer et al. (2011)) und scheinen experimentelle Ergebnisse gut wiedergeben zu können. Allerdings erlauben diese schädigungsmechanischen Ansätze kaum Einsicht in die Versagensevolution aus dem Blickwinkel der klassischen Bruchmechanik und sind daher nicht weiter Gegenstand der aktuellen Untersuchungen. Die numerischen und experimentellen Ergebnisse dieser Arbeiten weisen aber sehr wohl auf die Relevanz von dreidimensionalen Spannungssingularitäten für die Versagensevolution der untersuchten Gesamtlamine hin. So beinhalten sie beispielsweise eine Versagensreinitiierung (Delamination) ausgehend von der Stelle, wo ein in der Laminatlagengrenzfläche zunächst gestoppter ZFR auf den freien Laminatrand trifft (Hallett et al., 2008).

Die aufgeführte Literatur mit Untersuchungen zu Faser-Kunststoff-Verbund-Laminaten (FKV-Laminaten) behandelt ausschließlich kohlenstofffaserverstärkte Kunststoffe (CFK) – glasfaserverstärkte Kunststoffe (GFK) sind für die Praxis aber ebenso relevant. Daher werden auch Querverweise zu den weniger stark anisotropen GFK-Laminaten gezogen, wenn sich ihre Ergebnisse von denen der CFK-Lamine unterscheiden – insbesondere dann, wenn sie von höherer Kritikalität sind. Die dabei verwendeten Materialdaten eines typischen GFK-sowie CFK-Verbundes (T800/Epoxid) sind Tabelle A.1 zu entnehmen. Weiterhin sollen neben den sonst häufig ausschließlich betrachteten Spannungssingularitätsexponenten auch die Deformationsmoden grafisch aufbereitet dargestellt werden. Schließlich sind in nur wenigen bisherigen Arbeiten die vollständigen Randwertprobleme zur Bestimmung der generalisierten Spannungsintensitätsfaktoren (2.76) bzw. der äquivalenten modalen Wichtungsfaktoren \mathbf{c}_p (des positiven Anteils des Eigenwertspektrums) gelöst worden. Lediglich zwei Anwendungsfälle für dreidimensionale Spannungssingularitäten in FKV-Laminaten sind dem Autor bekannt: Mittels eines Zwei-Zustands-M-Integrals, angewendet auf eine FE-Lösung, bestimmten Lee et al. (2006) den modalen Wichtungsfaktor für den Fall des senkrecht auf der Grenzfläche stehenden und gleichzeitig senkrecht auf einen freien Laminatrand treffenden ZFR (Rand-ZFR) in einer einfachen geometrischen Konfiguration unter uniaxialem Zug (senkrecht zur ZFR-Ebene). Die genauen Abmessungen ihres betrachteten Halbmodells (mit Symmetriebedingung in der ZFR-Ebene) geben sie nicht an – in der gegebenen Darstellung ist es lediglich als würfelförmig zu erahnen. Ein weiterer Anwendungsfall, ebenfalls für eine würfelförmige Geometrie, stammt von Hell u. Becker (2015c) und beinhaltet die modalen Wichtungsfaktoren aller sechs Deformationsmoden mit singulären Spannungen für die Struktursituation zweier aufeinander treffender ZFR (ZFR-ZFR) bei einem homogenen Temperaturabfall. Dazu wurde die im vorangehenden Teilkapitel vorgestellte SBFEM-Formulierung im Zusammenhang mit einer vollständigen Eigenwertzerlegung verwendet. Die so berechneten Verschiebungen wurden mittels eines im kommerziellen FEM-Programmpaket ABAQUS[®] umgesetzten, fein vernetzten Standard-FE-Modells verifiziert (> 1 Mio. DOF).

4.2.1 Asymptotische Nahfelder der zweidimensionalen Struktursituationen – Zwischenfaserrisse

Bevor die dreidimensionalen Spannungssingularitäten, die aus der Interaktion der Liniensingularitäten hervorgehen, untersucht werden, soll das Augenmerk zunächst auf die asymptotischen

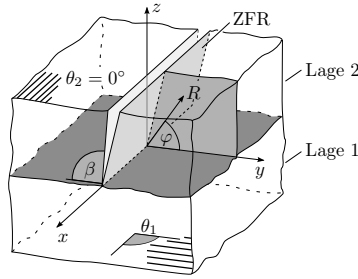


Abbildung 4.6: Schematische Darstellung der Einbettung der quasi-zweidimensionalen Situation mit zugrundeliegenden Annahmen des GEVZ (Kap. 2.1.1) in die dreidimensionale Situation des Zwischenfaserrisses, der auf eine Grenzfläche im Faserverbundlaminat trifft.

Tabelle 4.1: Deformationsmoden ZFR-I,-II,III eines senkrecht auf eine Grenzfläche treffenden Zwischenfaserrisses in einem $[90^\circ/0^\circ]$ -T800/Epoxid-Verbundlaminat ($\varphi = 90^\circ$).

ZFR-I	ZFR-II	ZFR-III
eben, symmetrisch	eben, antisymmetrisch	nicht-eben
$u = 0$ $v(y, z) = -v(-y, z)$ $w(y, z) = w(-y, z)$	$u = 0$ $v(y, z) = v(-y, z)$ $w(y, z) = -w(-y, z)$	$u(y, z) = -u(-y, z)$ $v = 0$ $w = 0$
$\lambda_{ZFR-I} = 0,650$ $(1 - \lambda_{ZFR-I} = 0,350)$	$\lambda_{ZFR-II} = 0,517$ $(1 - \lambda_{ZFR-II} = 0,483)$	$\lambda_{ZFR-III} = 0,468$ $(1 - \lambda_{ZFR-III} = 0,532)$

Nahfelder einiger dieser Liniensingularitäten gelegt werden (vgl. Abb. 4.5). Im Besonderen wird im Folgenden die Situation des ZFRs unter diversen Neigungswinkeln β (Winkel zwischen ZFR und Grenzfläche) sowie Faserorientierungen θ_2 der benachbarten Laminatlage betrachtet (vgl. Abb. 4.6). Die Delamination ist hier als Spezialfall ($\beta = 0^\circ$) mit enthalten. Dabei wird ein GEVZ, d. h. die Verschiebungen als allein abhängig von den Koordinaten der y, z - bzw. R, φ -Ebene im Laminatinneren, zugrundegelegt (Kap. 2.1.1).

Tabelle 4.1 zeigt exemplarisch anhand eines kreisförmigen (bzw. zylindrischen) Gebiets mit 28 linearen Elementen in Umfangsrichtung (in Skalierungsrichtung ist die Betrachtung analytisch) die drei Deformationsmoden mit singulären Spannungen für den Sonderfall eines senkrecht auf die Grenzfläche treffenden ZFR. Es sind die Materialdaten eines T800/Epoxid-Kohlenstofffaser-Kunststoff-Verbunds zugrundegelegt (Tab. A.1). Dabei steht die Faserorientierung der unteren Lage (horizontal, $\theta_1 = 90^\circ$) senkrecht auf der Faserorientierung der oberen (parallel zu Rissfront, schaut also aus der R, φ -Ebene heraus, $\theta_2 = 0^\circ$). Die Bezeichnung der

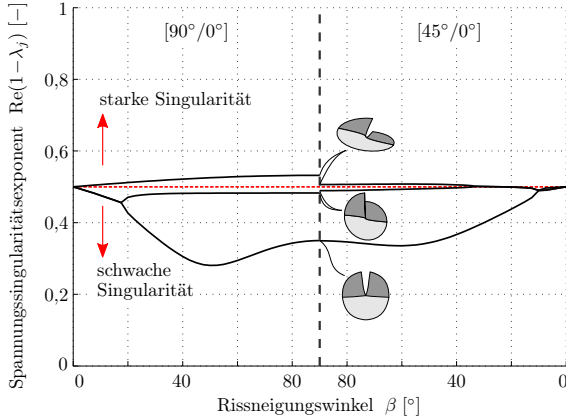


Abbildung 4.7: Realteile der Spannungssingularitätsexponenten $\text{Re}(1 - \lambda)$ der Struktursituation eines Zwischenfaserrisses, der mit Neigungswinkel β auf die Grenzfläche zwischen zwei unterschiedlich orientierten Lagen in einem T800/Epoxid-Verbundlaminat trifft.

Deformationsmoden erfolgt hier angelehnt an jene der klassischen Rissmoden: Deformationsmodus ZFR-I mit auskonvergiertem Abklingexponent $\lambda_{\text{I}} \approx 0,650$ (d. h. Singularitätsexponent $(1 - \lambda) \approx 0,350$) enthält rein symmetrische, ebene Verschiebungen, Deformationsmodus ZFR-II mit Abklingexponent $\lambda_{\text{II}} \approx 0,517$ (d. h. Singularitätsexponent $(1 - \lambda) \approx 0,483$) rein antimetrische, ebene Verschiebungen, und Deformationsmodus ZFR-III mit Abklingexponent $\lambda_{\text{III}} \approx 0,468$ (d. h. Singularitätsexponent $(1 - \lambda) \approx 0,532$) rein nichtebene Verschiebungen. Die Spannungssingularitäten der Deformationsmoden I und II sind also schwächer als die klassische Risspitzensingularität ($\lambda = 0,5$) und daher als schwach singular einzuordnen (Kap. 2.2.3, Gl. (2.112)). Die durch Deformationsmodus III hervorgerufene Spannungssingularität ist jedoch mit $\lambda_{\text{III}} > 0,5$ sogar stark singular und damit als besonders kritisch einzuschätzen.

Für andere strukturelle Konfigurationen ist der dargestellte Bezug der Deformationsmoden zu den klassischen Rissmoden i. A. nicht gegeben, sondern es treten typischerweise Kopplungen auf. Eine Variation des Faserwinkels θ_2 führt zu einer Kopplung von symmetrischen Deformationen mit solchen, die aus der R, φ -Ebene heraus zeigen. Eine Variation des Rissneigungswinkels β führt schließlich auch zu einer Kopplung mit antimetrischen Deformationen. In Abb. 4.7 sind die Realteile der Spannungssingularitätsexponenten $\text{Re}(1 - \lambda)$ für eine solche Variation des Rissneigungswinkels $\beta \in [0^\circ, 90^\circ]$ dargestellt.²² Der linke Teil des Diagramms enthält die Ergebnisse für eine Faserorientierung $\theta_1 = 90^\circ$ der unteren Lage und der rechte Teil für eine Faserorientierung $\theta_1 = 45^\circ$. Dabei ist zu beachten, dass die beiden

²² Der Winkelbereich $\beta \in [0^\circ, 90^\circ]$ ist bereits repräsentativ, d. h. für die Abklingexponenten λ für Winkel $\beta > 90^\circ$ gilt

$$\lambda(\beta - 90^\circ) = \lambda(90^\circ - \beta) \quad \text{für } \beta \in [0^\circ, 180^\circ]$$

sowie

$$\lambda(\theta_2) = \lambda(-\theta_2) \quad \text{für } \theta_2 \in [-90^\circ, 90^\circ].$$

Dies liegt darin begründet, dass die GEVZ-Lösung unabhängig von der x -Koordinate und damit auch unabhängig von der Orientierung der x -Achse gelten muss. Anschaulich gesprochen bedeutet dies, dass es egal sein muss, von welcher Seite der Riss (beispielsweise in Abb. 4.6) betrachtet wird.

Deformationsmoden mit schwach singulären Spannungen vergleichsweise wenig mit θ_1 variieren. Der dritte Deformationsmodus führt über weite Bereiche des Rissneigungswinkels β zu stark singulären Spannungen, mit einem Maximum des Spannungssingularitätsexponenten $(1 - \lambda) \approx 0,592$ (d. h. Abklingexponent $\lambda \approx 0,408$) bei einem Rissneigungswinkel $\beta = 90^\circ$ und einer Faserorientierung $\theta_1 \approx 65^\circ$.

Für sehr flache Neigungswinkel tendiert die Lösung gegen diejenige des Delaminationsrisses mit $\text{Re}(1 - \lambda) = 0,5$, dem auch komplex konjugierte Deformationsmoden und zugehörige Singularitätsexponenten zuzuordnen sind. Für einen Faserwinkel $\theta_1 = 90^\circ$ vereinigen sich die beiden Deformationsmoden mit schwach singulären Spannungen beispielsweise ab etwa einem Rissneigungswinkel $\beta < 20^\circ$ zu einem komplex konjugierten.

Für einen GFK- statt CFK-Verbund (Materialdaten Tab. A.1) stellt sich die Variation der Spannungssingularitätsexponenten in Abhängigkeit des Rissneigungswinkels β sehr ähnlich dar. Generell sind die schwachen Spannungssingularitäten bei GFK etwas kritischer, die starke ist aber weniger kritisch.

4.2.2 Asymptotische Nahfelder der dreidimensionalen Struktursituationen

Die folgenden Ergebnisse sind im Rahmen des DFG-Projektes BE 1090/35-1 „Analyse von Riss-Interaktionen in Laminaten mittels der skalierten Rand-Finite-Elemente-Methode“ entstanden und wurden in Teilen bereits publiziert (Hell u. Becker, 2014, 2015a,b,c). Zum Teil entstammen sie auch der im Rahmen dieses Projektes am Fachgebiet entstandenen Masterthesis von Brod (2015). Ergebnisse, auf die das zutrifft, sind entsprechend gekennzeichnet. In den genannten Arbeiten wurden zu Referenzzwecken stets zunächst die isotropen Strukturkonfigurationen betrachtet, bevor die strukturmechanisch merklich komplexeren Situationen in GFK- und CFK-Laminaten (Anisotropie, Materialgrenzflächen) untersucht wurden.

In den isotropen Fällen konnten die in Anwesenheit von Rissen für die Konvergenz der SBFEM erheblich effizienteren Viertelpunktelemente eingesetzt werden (vgl. auch Kap. 3.1). Mit diesem unabhängig von Lee u. Im (2003) verwendeten Ansatz ließ sich der numerische Aufwand der Parameterstudien von Brod (2015) bei isotropen Werkstoffen entscheidend verringern. Eine allgemeiner anwendbare Möglichkeit zur Steigerung der numerischen Effizienz der SBFEM in Gegenwart von Liniensingularitäten ist die Anreicherung der Verschiebungsansätze, die in Kapitel 5 ausführlich dargestellt werden wird.

Die Untersuchung der Interaktion zweier sich treffender Risse (ZFR oder DEL) in einem T800/Epoxid-Kohlenstoffaserverbund-Laminat stellt den wesentlichen Teil der in diesem Kapitel vorgestellten Ergebnisse dar. Neben senkrecht auf der Grenzfläche stehenden ZFR werden auch geneigte ZFR betrachtet. Dabei werden stets verschiedene Laminatlagenaufbauten und Winkel zwischen den auftretenden Singularitätslinien untersucht. Die resultierenden dreidimensionalen asymptotischen Nahfelder werden auszugsweise vorgestellt und mit den zweidimensional entlang der Liniensingularitäten vorherrschenden verglichen. Dabei erfolgt schon eine erste Einschätzung der Kritikalität der Deformationsmoden anhand der ihnen zugehörigen Spannungssingularitätsexponenten. Eine umfassende Parameterstudie wurde im Rahmen der Masterthesis von Brod (2015) durchgeführt. Die grundsätzlichen Schlussfolgerungen können aber bereits aus den hier präsentierten Ergebnissen gezogen werden und sind ein wichtiger Gegenstand der folgenden Ausführungen.

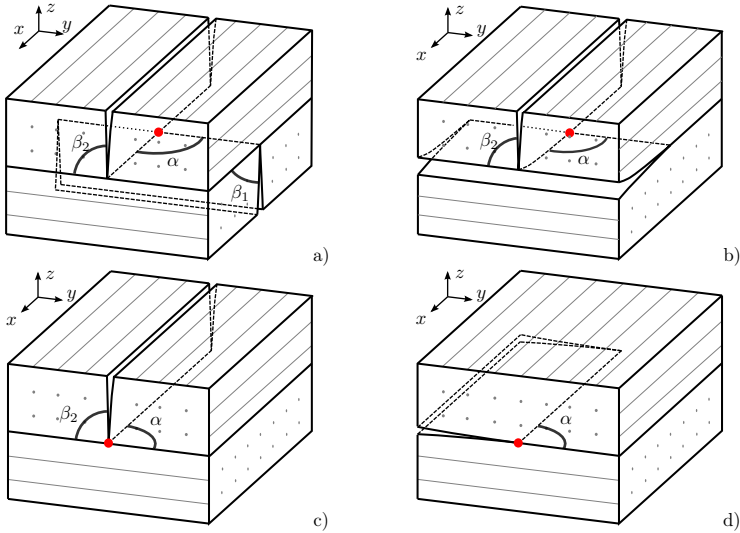


Abbildung 4.8: Illustration der untersuchten Defektinteraktionssituationen mit geometrischen Parametern: Winkel zwischen den Singularitätslinien α und Zwischenfaserriss-Neigungswinkel β . a) Zwei sich treffende Zwischenfaserrisse (ZFR-ZFR) mit $\alpha = \theta_1 - \theta_2$. b) Auf Delamination treffender Zwischenfaserriss (ZFR-DEL). c) Auf freien Rand treffender Zwischenfaserriss (Rand-ZFR) mit $\alpha = 90^\circ + \theta_2$. d) Auf freien Rand treffende Delamination (Rand-DEL).

Zunächst erfolgt die Untersuchung der Interaktion zweier gerader aufeinander treffender ZFR in einem Faserverbundlaminatelement (ZFR-ZFR, Abb. 4.8a). Die drei wesentlichen Geometrieparameter dieser Struktursituation sind die jeweiligen Neigungen β_1, β_2 der beiden ZFR sowie der Winkel α zwischen den Rissfronten bzw. Singularitätslinien, welcher automatisch auch die relativen Faserorientierungen θ_1, θ_2 der beiden angrenzenden Laminatelemente zueinander festlegt

$$\theta_1 - \theta_2 = \alpha .$$

Durch Beachtung vorhandener Symmetrien kann die Anzahl der zu betrachtenden Fälle reduziert werden:

- Für den Winkel zwischen den Rissfronten reicht es aus, einen Bereich $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ zu betrachten, wobei dieser Bereich durch Begrenzungen, die aus der Forderung nach einer angemessenen Diskretisierung des Gebietsrandes folgen, noch weiter reduziert wird:

$$10^\circ < \alpha < 170^\circ . \quad (4.89)$$

Beträgt einer der beiden Rissneigungswinkel $\beta = 90^\circ$ kann der Bereich der zu betrachtenden Winkel sogar auf $10^\circ < \alpha < 90^\circ$ reduziert werden.

- Für die Neigungswinkel sind wie bereits im vorangehenden Teilkapitel die Werte $0^\circ < \beta_1, \beta_2 < 90^\circ$ ausreichend, wobei dieser Bereich wiederum zugunsten der Qualität der Randvernetzung weiter reduziert wird:

$$30^\circ < \beta_1, \beta_2 < 90^\circ . \quad (4.90)$$

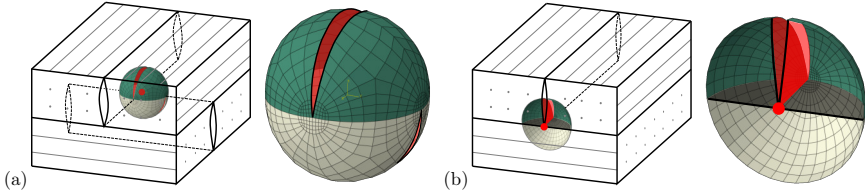


Abbildung 4.9: Illustration der asymptotischen Analyse der Defektinteraktionensituationen mittels der SBFEM unter Angabe von Beispielnetzungen eines virtuellen Randes bei $\xi_a = 1$: a) ZFR-ZFR; b) Rand-ZFR.

Diese Reduktion der Testfälle ist auch aus physikalischer Sicht begründbar, da die Neigungswinkel von ZFR, die aufgrund reiner Druckbeanspruchung der Laminatlage entstanden sind, nicht unter $\beta = 35^\circ$ fallen (Puck u. Schürmann, 2002).

Beträgt ein Rissneigungswinkel gerade $\beta = 0^\circ$ liegt der Fall eines auf eine Delamination treffenden ZFR vor (ZFR-DEL, Abb. 4.8b). Dann entkoppeln der Winkel zwischen den Rissfronten α und die Faserorientierung θ der entsprechenden Laminatlage und letztere wird zu einem zusätzlich variierbaren Parameter.

Schließlich werden Interaktionen von ZFR oder DEL mit einem freien Rand betrachtet (Abb. 4.8c, d). Der Winkel zwischen den Liniensingularitäten α beschreibt nun den Winkel zwischen der Rissfront von ZFR oder DEL und der Laminatgrenzflächenlinie am freien Laminatrand.

Zur asymptotischen Analyse der dreidimensionalen Verschiebungsfelder dieser Struktur-situationen wird ein kugelförmiges Gebiet um den Defektinteraktionspunkt betrachtet (vgl. Abb. 4.9). Das Skalierungszentrum (in der Abbildung durch einen roten Punkt angedeutet) wird am Defektinteraktionspunkt selbst positioniert. Somit werden die unbelasteten Rissflanken bzw. Laminatränder durch Skalierungsstrahlen abgebildet und stellen also Ränder vom Typ Γ_R dar (vgl. Kap. 4.1.1). Der Innenrand Γ_i ist auf das Skalierungszentrum zusammengezogen ($\xi_i = 0$). Die kugelförmige Oberfläche des Gebiets ist dann der Außenrand Γ_a bei $\xi_a = 1$ und wird dementsprechend als einziger mit Hilfe flächiger Elemente mit Lagrange-Ansatzfunktionen ähnlich der Darstellungen in Abb. 4.9 diskretisiert. Die Risse sind durch Verwendung von Doppelknoten entlang der Rissflanken realisiert. Diese Doppelknoten trennen die Freiheitsgrade der Elemente an einer Rissflanke von denen der anderen. Natürlich ist jeder virtuelle Gebietsrand zwischen Gebietsaußenrand und Skalierungszentrum identisch diskretisiert, was aber der übersichtlicheren Darstellung halber hier nicht abgebildet ist.

Insbesondere nahe der Rissfronten treten nach Aksentian (1967) (vgl. Kap. 3.1 zum Stand der Forschung) auch die asymptotischen Nahfelder der lokalen 2D-Struktursituation und somit auch singuläre Spannungen auf, wenn die entsprechenden Deformationsmoden angesprochen werden. Als Reaktion darauf wird dort eine wesentliche Verfeinerung der Diskretisierung implementiert.²³ Dies ist letztendlich auch ein Grund, warum ein kugelförmiges anstatt eines einfacher und effizienter numerisch integrierbaren würfelförmigen Gebiets verwendet wird: Es sind viele Freiheitsgrade notwendig, um die auftretenden Liniensingularitäten

²³ Die singulären Nahfelder des Laminatrandeffektes sind vergleichsweise schwach. Deshalb ist dort eine weniger starke Verfeinerung der Diskretisierung notwendig, um trotzdem die gewünschte Genauigkeit zumindest der Spannungssingularitätsexponenten zu erhalten.

Tabelle 4.2: Abklingexponenten und zugeordnete Deformationsmoden.

Abklingexponent	zugeordnete Deformationsmoden
$\lambda = 0$	Starrkörperverschiebungen
$0 < \lambda < 1$	Deformationsmoden mit Spannungssingularitäten (Singularitäten in Ableitungen 1. Ordnung)
$\lambda = 1$	Starrkörperrotationen, homogene Verzerrungen
$1 < \lambda < 2$	Deformationsmoden mit Singularitäten in Ableitungen 2. Ordnung)
$\lambda = 2$	Deformationsmoden aus Biegedeformationen, etc.
\vdots	\vdots

adäquat abzubilden, sodass der Integrationsaufwand gegenüber dem Lösungsaufwand für das Eigenwertproblem eine untergeordnete Rolle spielt. Gleichzeitig ist die Kugelgeometrie optimal bezüglich des Oberflächen-Volumen-Verhältnisses (dieses wird minimal), sodass weniger Elemente und somit auch Knoten und Freiheitsgrade notwendig sind, um die Oberfläche zu beschreiben.

Da im Rahmen der Analyse der asymptotischen Nahfelder vor allem diejenigen Deformationsmoden von Interesse sind, die zu singulären Spannungen führen, d. h. diejenigen, deren Abklingexponenten λ positiv und kleiner als 1 sind, war es hier hinreichend, einen partiellen Eigenwertlöser zu verwenden.²⁴

Deformationsmoden

Zur visuellen Darstellung der Deformationsmoden werden anstatt der sonst eingesetzten Kugelform und gradierten Randvernetzung würfelförmige Gebiete und uniforme Randvernetzungen betrachtet. Die Veränderung hat keinen wesentlichen Einfluss auf die grundsätzliche Form der Deformationsmoden, macht es jedoch beträchtlich einfacher, die teils sehr komplexen dreidimensionalen Deformationen einzuordnen.²⁵

Der ungerissene Voll-Würfel weist drei Deformationsmoden mit Abklingexponent $\lambda = 0$ (Starrkörperverschiebungen), neun Deformationsmoden mit $\lambda = 1$ (drei Starrkörperrotationen, drei homogene Dehnungen aufgrund von Zug-/Druckbeanspruchungen und drei homogene Schiebungen aufgrund von Schubbeanspruchungen), 15 Deformationsmoden mit $\lambda = 2$ etc. auf (vgl. auch Tab. 4.2). Die sechs Starrkörperdeformationen müssen für alle berechneten Fälle erhalten bleiben. Für die wohlbekannte Einfach-Riss-Situation ergeben sich gegenüber dem ungeschädigten Vollkörper typischerweise drei neue Deformationsmoden, deren Abklingexponenten zwischen Null und Eins liegen $0 < \lambda < 1$, sie also singuläre Spannungen hervorrufen. Gleichzeitig verschwinden drei Deformationsmoden mit $\lambda = 1$. Die untersuchten Doppelrissituationen führen hingegen typischerweise zu sechs Deformationsmoden, die Spannungssingularitäten hervorrufen ($0 < \lambda < 1$). Es sei an dieser Stelle vorweggenommen, dass davon bemerkenswerterweise immer mindestens ein Deformationsmodus auf Spannungen mit stark singulärem Charakter führt $0 < \lambda < 0,5$, die Doppelrissituationen aus diesem

²⁴ Konkret kam die MATLAB-Funktion `eigs()` zum Einsatz, die ähnlich dem SHIRA-Algorithmus aus der Arbeit von Apel et al. (2002b) auf einer iterativen Arnoldi-Methode basiert.

²⁵ Die so berechneten Abklingexponenten respektive Singularitätsexponenten wären allerdings teils stark beeinflusst, sodass die angegebenen Zahlenwerte einer feineren Diskretisierung und einer entsprechend auskonvergierten Lösung entstammen.

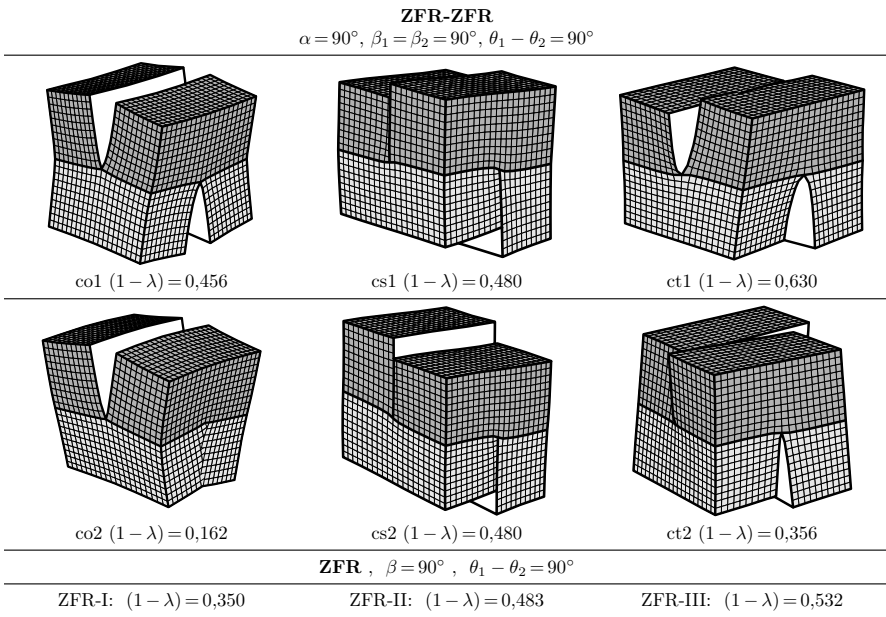


Abbildung 4.10: Deformationsmoden $\hat{u}_j(\xi)$ mit Spannungssingularitätsexponenten $\text{Re}(1 - \lambda_j)$ für zwei aufeinander treffende Zwischenfaserrisse (ZFR-ZFR) in T800/Epoxid-Verbundlagen mit Winkel $\alpha = 90^\circ$ ($= \theta_1 - \theta_2$) zwischen den Rissfronten und ZFR-Neigungswinkeln $\beta_1 = \beta_2 = 90^\circ$. Zum Vergleich sind die Spannungssingularitätsexponenten der Liniensingularität eines einfachen ZFR mit $\beta = 90^\circ$ und $\theta_1 - \theta_2 = 90^\circ$ angegeben (ZFR-I, II, III; vgl. Kap. 4.2.1).

Blickwinkel also immer das Potential zu einer größeren Kritikalität als die entsprechende 2D-Situation haben.

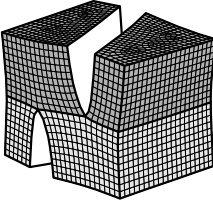
Die Abbildungen 4.10 bis 4.13 zeigen beispielhaft die Deformationsmoden einiger Doppelriss-situationen: drei ZFR-ZFR Interaktionen sowie zwei ZFR-DEL Interaktionen mit vertikalen ($\beta = 90^\circ$) sowie geneigten ZFR ($\beta = 40^\circ$) und bis auf eine Ausnahme einem Winkel $\alpha = 90^\circ$ zwischen den Rissfronten. Die Erfahrung aus den ausführlichen Parameterstudien hat für die betrachteten Struktursituationen gezeigt, dass die Form der Deformationsmoden insbesondere durch die Geometrie beeinflusst wird. Der Materialeinfluss ist bei den mäßigen Steifigkeitskontrasten der berücksichtigten GFK- und CFK-Lamine vergleichsweise klein.

Einige der untersuchten Struktursituationen weisen besondere Symmetrien auf, die es ermöglichen, bei den klassischen Rissmoden (Abb. 2.5) ähnliche Deformationsmoden zu identifizieren.²⁶ Dies sind jene Konfigurationen mit gleichzeitig rechten Winkeln $\alpha = 90^\circ$ zwischen den Liniensingularitäten, $\beta = 90^\circ$ zwischen den Rissen und Materialgrenzflächen sowie ebenfalls $\theta_1 - \theta_2 = 90^\circ$ zwischen den Faserorientierungen (Abb. 4.10 und 4.12). Entsprechend ist in diesen

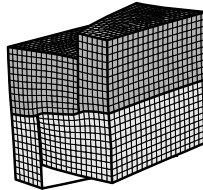
²⁶ Dabei ist zu berücksichtigen, dass die klassischen Rissmoden ebenfalls einer speziellen, symmetrischen Strukturkonfiguration entspringen – ebenso wie die Deformationsmoden der Einfach-ZFR-Situation mit $\beta = 90^\circ$ und $\theta_1 - \theta_2 = 90^\circ$ in Kapitel 4.2.1.

ZFR-ZFR

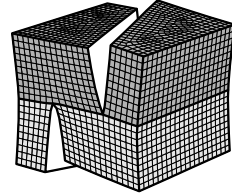
$$\alpha = 135^\circ, \beta_1 = \beta_2 = 90^\circ, \theta_1 - \theta_2 = 135^\circ$$



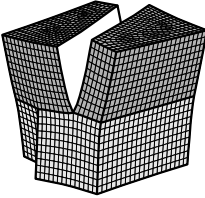
(4) $(1 - \lambda) = 0,701$



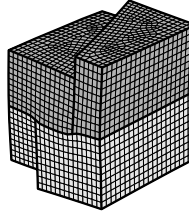
(5) $(1 - \lambda) = 0,597$



(6) $(1 - \lambda) = 0,385$



(7) $(1 - \lambda) = 0,347$



(8) $(1 - \lambda) = 0,342$

ZFR, $\beta = 90^\circ$, $\theta_1 - \theta_2 = 135^\circ$

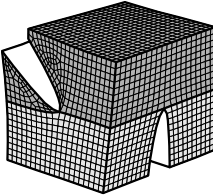
ZFR-a: $(1 - \lambda) = 0,507$

ZFR-b: $(1 - \lambda) = 0,489$

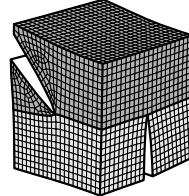
ZFR-c: $(1 - \lambda) = 0,350$

ZFR-ZFR

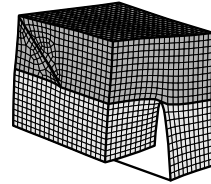
$$\alpha = 90^\circ, \beta_1 = 90^\circ, \beta_2 = 40^\circ, \theta_1 - \theta_2 = 90^\circ$$



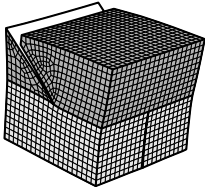
(4) $(1 - \lambda) = 0,619$



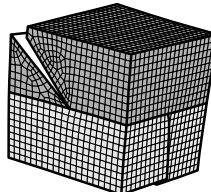
(5) $(1 - \lambda) = 0,542$



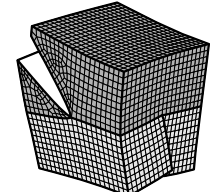
(6) $(1 - \lambda) = 0,502$



(7) $(1 - \lambda) = 0,321$



(8) $(1 - \lambda) = 0,316$



(9) $(1 - \lambda) = 0,158$

ZFR, $\beta = 40^\circ$, $\theta_1 - \theta_2 = 90^\circ$

ZFR40-a: $(1 - \lambda) = 0,522$

ZFR40-b: $(1 - \lambda) = 0,482$

ZFR40-c: $(1 - \lambda) = 0,305$

Abbildung 4.11: Deformationsmoden $\hat{u}_j(\xi)$ mit Spannungssingularitätsexponenten $\text{Re}(1 - \lambda_j)$ für zwei aufeinander treffende Zwischenfaserrisse (ZFR-ZFR) in T800/Epoxid-Verbundlagen. Nummerierung beginnt bei (4), da erste 3 Deformationsmoden im positiven Spektrum Λ_p Starrkörpermoden ($\lambda = 0$) darstellen. Zum Vergleich sind die Spannungssingularitätsexponenten der entsprechenden Liniensingularität eines einfachen ZFR angegeben.

Bildbeschriftungen die von Hell u. Becker (2014) eingeführte Benennung der Deformationsmoden verwendet: $co1/co2$ für die Rissöffnungsmoden (crack opening – Modus I), $cs1/cs2$ für die Risschermoden (crack shearing – Modus II) und $ct1/ct2$ für die Rissverwindungsmoden (crack twisting – Modus III).²⁷

Erwartungsgemäß gibt es für jeden Deformationsmodus des Einfach-Risses mit singulären Spannungen zwei für den Doppelriss, da bei zwei Rissen nicht immer beide gleichzeitig geöffnet sein müssen, sondern auch die Möglichkeit existieren muss, dass einer von beiden geschlossen sein kann. Dass dabei eine gleichzeitige Öffnung beider Risse zu kritischeren Deformationen und damit einem kleineren Spannungssingularitätsexponenten führt, erscheint intuitiv nachvollziehbar. Diese sind dann i. A. auch kritischer als die entsprechenden 2D-Singularitätsexponenten. Wenn einer der beiden Risse schließt, ist die resultierende Spannungssingularität typischerweise weniger kritisch.

Für diese einfachen Doppelrissituationen sind auch die zugehörigen Lastfälle noch anschaulich zu identifizieren. So wird der Deformationsmodus $co1$ in Abb. 4.10 insbesondere von einer hydrostatischen oder biaxialen Zug-Belastung und der Deformationsmodus $co2$ von uniaxialer Zug angeregt. Die Deformationsmoden $cs1/cs2$ werden besonders durch vertikale Scherbeanspruchung und der Deformationsmodus $ct1$ vor allem durch eine ebene Scherbeanspruchung (in der Ebene der Rissfronten) angesprochen. Deformationsmodus $ct2$ wird besonders bei einer Drillmomentenbelastung angeregt. Diese Zuordnung konnte durch Einbinden eines entsprechenden Super-Elements in ein FE-Modell eines flächigen CFK-Laminats in ABAQUS verifiziert werden (vgl. auch Teilkapitel 4.2.3), ergibt sich aber auch aus einer Analyse der resultierenden Kräfte und Momente auf den Würfelflächen (durch Aufsummierung der Knotenlasten auf dem Randnetz und gegebenenfalls ihres Produktes mit dem Abstand zum Mittelpunkt oder den Mittelpunktsachsen der jeweiligen Würfelseite).

Eine entsprechende Zuordnung ist ähnlich für die Deformationsmoden der ZFR-DEL-Interaktion in Abb. 4.12 denkbar: $co1$ wäre wieder hydrostatischer Zug und $co2$ beispielsweise ebener Zug aber vertikaler Druck zuzuordnen; $cs2$ würde insbesondere durch eine Schubbeanspruchung des Delaminationsrisses angeregt, wobei auch die entsprechende Singularitätsordnung sehr nahe an der Rissspitzensingularität des reinen Delaminationsrisses liegt und nur etwas stärker ist; $ct2$ scheint wiederum einer Modus-III-Beanspruchung des Delaminationsrisses ähnlich, führt aber zu einem merklich geringeren Singularitätsexponenten; $cs1$ und $cs2$ gehören zu einem komplex konjugierten Deformationsmodus mit besonders starker Spannungssingularität und treten (immer gemeinsam) für unterschiedliche Schubbeanspruchungen auf.

Es fällt auf, dass trotz der weitgehenden Material- und Geometriesymmetrien schon bei der ZFR-DEL-Interaktion von Abb. 4.12 es zunehmend schwerer wird, auf die klassischen Trennungen der Deformationsmoden der Einfach-Rissituation im homogenen isotropen Kontinuum zurückzugreifen. Fällt auch nur eine Symmetrieebene weg, wird die Lage über Kopplungen von 2D-Deformationsmoden schnell unübersichtlich und die bisher verwendete Benennung der Deformationsmoden ist nicht mehr durchzuhalten.

Ein Rückblick auf die ZFR-ZFR-Interaktion aus Abb. 4.10 zeigt, dass auch dort schon Kopplungen auftreten, die auf den ersten Blick nicht ersichtlich sind, was im Folgenden kurz erläutert sei. Die Deformationsmoden $cs1/cs2$ in der ZFR-ZFR-Konfiguration (Abb. 4.10)

²⁷ In Abb. 4.10 sind diese für die ZFR-ZFR-Interaktion noch deutlicher zu identifizieren als in Abb. 4.12 für die ZFR-DEL-Interaktion.

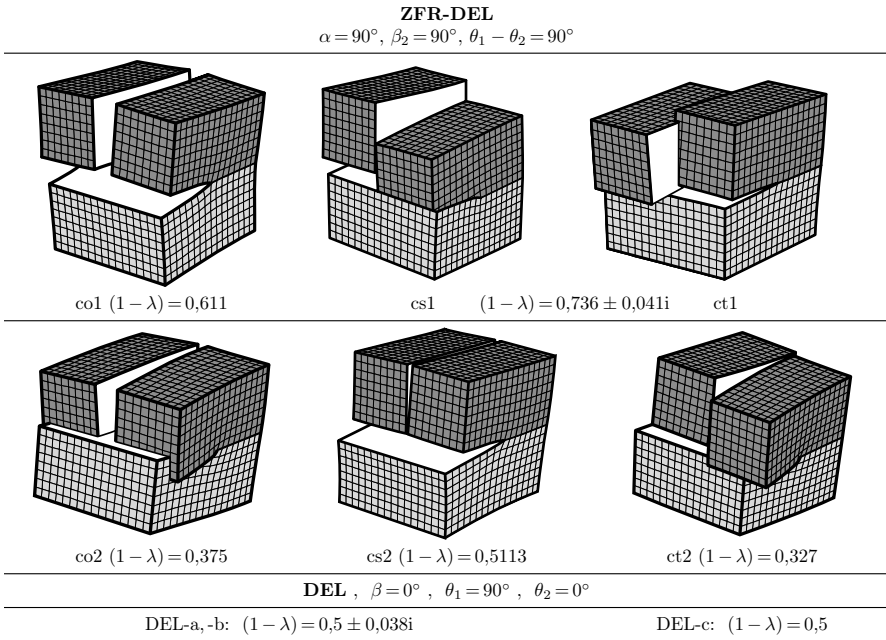


Abbildung 4.12: Deformationsmoden $\hat{u}_j(\xi)$ mit Spannungssingularitätsexponenten $\text{Re}(1 - \lambda_j)$ für einen auf eine Delamination treffenden Zwischenfaserriss (ZFR-DEL) in bzw. zwischen T800/Epoxid-Verbundlagen mit Winkel $\alpha = 90^\circ$ zwischen den Rissfronten, ZFR-Neigungswinkel $\beta_2 = 90^\circ$ und relativen Faserorientierungen $\theta_1 - \theta_2 = 90^\circ$. Zusätzlich sind die Spannungssingularitätsexponenten der Liniensingularität einer einfachen DEL (mit $\beta = 0^\circ$ und $\theta_1 = 90^\circ, \theta_2 = 0^\circ$) angegeben (DEL-a, b, c).

besitzen anders als die übrigen einander zugeordneten Deformationsmoden den gleichen Spannungssingularitätsexponenten, ohne jedoch komplex konjugiert zu sein. Zusätzlich ist dieser mit dem der zugehörigen 2D-Situation ZFR-II beinahe identisch. Entgegen dem allgemeinen Trend scheint also in diesem sehr speziellen Fall kaum eine Kopplung der Einzelrissdeformationsmoden vorzuliegen – zumal durch Linearkombination der beiden Deformationsmoden cs1 und cs2 der 2D-Deformationsmodus ZFR-II ebenfalls (der Anschauung nach) näherungsweise abgebildet werden kann.²⁸ Eine spätere Untersuchung mit Hilfe der entwickelten angereicherten skalierten Rand-Finite-Elemente-Methode (enrSBFEM, Kap. 5)²⁹, zeigte jedoch, dass bei den Deformationsmoden cs1 und cs2 neben dem 2D-Deformationsmodus ZFR-II trotzdem auch ZFR-I angesprochen wird. Das Verhältnis der Wichtungsfaktoren der 2D-Deformationsmoden

²⁸ Die Linearkombination nur der Randdeformationen der Deformationsmoden cs1 und cs2 anstatt der vollständigen Deformationsmoden ist hier gestattet, weil sie aufgrund des identischen Spannungssingularitätsexponenten ohnehin einen gemeinsamen Lösungsraum aufspannen.

²⁹ Die enrSBFEM verwendet die 2D-Deformationsmoden zur Anreicherung der Verschiebungsansätze und kann entsprechend schon eine Gewichtung der 2D-Deformationsmoden allein aus der Berechnung der 3D-Deformationsmoden angeben.

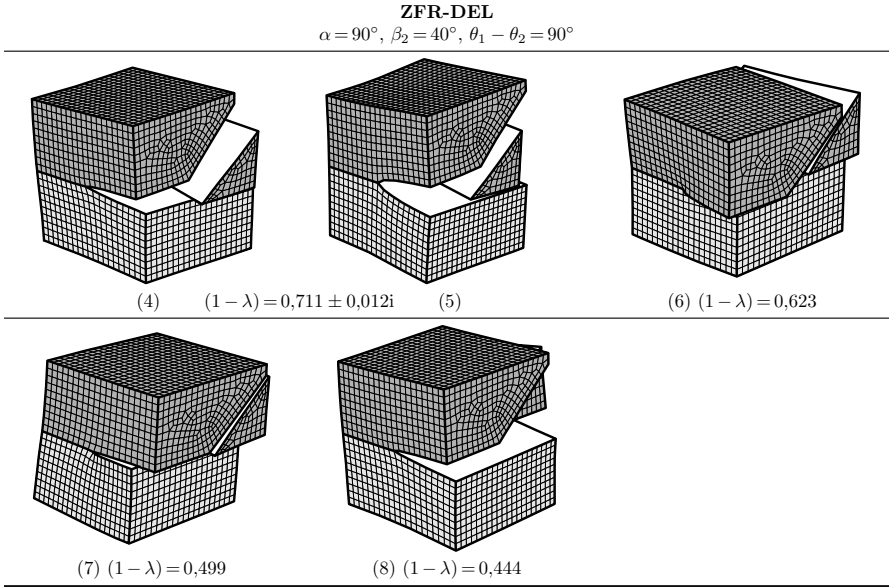


Abbildung 4.13: Deformationsmoden $\hat{\mathbf{u}}_j(\xi)$ mit Spannungssingularitätsexponenten $\text{Re}(1 - \lambda_j)$ für einen auf eine Delamination treffenden Zwischenfaserriss (ZFR-DEL) in bzw. zwischen T800/Epoxid-Verbundlagen mit Winkel $\alpha = 90^\circ$ zwischen den Rissfronten, ZFR-Neigungswinkel $\beta_2 = 40^\circ$ und relativen Faserorientierungen $\theta_1 - \theta_2 = 90^\circ$.

lag bei $c_1^{2D}/c_{II}^{2D} \approx 0,28$, wobei eine Normierung der Umfangerschiebungsfunktionen $\phi_{uj}^{2D}(r, \varphi)$ der 2D-Deformationsmoden (Gl. (2.75)) zu

$$\left\| \phi_{uj}^{2D}(r=1, \varphi=\pi) \right\| \stackrel{!}{=} 1$$

gewählt war. Dies ist zumindest als Hinweis darauf zu werten, dass hier doch in gewissem Maße eine Kopplung der 2D-Deformationsmoden vorliegt. Auch für die Deformationsmoden ct1 und ct2 folgt eine ähnliche nicht auf den ersten Blick ersichtliche Kopplung aus der enrSBFE-Analyse. So wird hier jeweils neben dem 2D-Deformationsmodus ZFR-III auch ZFR-II angesprochen (ct1: $c_{II}^{2D}/c_{III}^{2D} \approx 0,2$; ct2: $c_{II}^{2D}/c_{III}^{2D} \approx 0,5$; jeweils $c_I^{2D} \approx 0$). Nur den Deformationsmoden co1 und co2 ist eine reine Anregung des 2D-Deformationsmodus ZFR-I zuzuordnen, die Wichtungsfaktoren der beiden übrigen 2D-Deformationsmoden ZFR-II und ZFR-III liegen im Bereich des Rundungsfehlers.

Für die ZFR-ZFR-Interaktion bei einem Winkel $\alpha = 135^\circ$ zwischen den Rissfronten und aufrechten ZFR ($\beta_1 = \beta_2 = 90^\circ$) ist die Benennung nach den klassischen Rissmoden zwar nicht mehr möglich (Abb. 4.11). Es sind hier auch nur fünf 3D-Deformationsmoden mit Spannungssingularitäten am Interaktionspunkt vorhanden.³⁰ Allerdings scheinen die wesentlich anregenden Lastfälle noch aus der Form der Deformationsmoden identifizierbar: So wird der

³⁰ Die Nummerierung beginnt erst bei (4), da die ersten drei Deformationsmoden im positiven Spektrum Λ_p die Starrkörpermoden mit $\lambda = 0$ darstellen.

Deformationsmodus mit der stärksten Spannungssingularität durch eine uniaxiale Last in der Achse der ungeschädigten Würfelseiten (ohne Diskontinuität) angeregt. Die Anregung der nächst schwächeren Singularität erfolgt durch eine vertikale Schubbeanspruchung auf den ungeschädigten Würfelseiten. Deformationsmodus (6) ist beispielsweise einer Schubbeanspruchung in der Ebene der Rissfronten und Deformationsmodus (7) einer Torsionsbeanspruchung um die Zentralachse der ungeschädigten Würfelseiten zuzuordnen. Der letzte Deformationsmodus würde schließlich durch vertikale Dehnung der rechten und gleichzeitig vertikale Stauchung der linken ungeschädigten Würfelseite, beispielsweise durch eine entsprechende Momentenbelastung, hervorgerufen. Es ist beachtenswert, dass die Spannungssingularitätsexponenten dreier der fünf 3D-Deformationsmoden größer sind als die zwar schwächste aber in der Literatur mit Abstand am meisten beachtete Spannungssingularität des 2D-Deformationsmodus ZFR-I. Die Spannungssingularitätsexponenten der übrigen beiden 3D-Deformationsmoden liegen dabei ebenfalls kaum unterhalb desjenigen des ZFR-I.

Für die ZFR-ZFR-Interaktion bei einem Winkel $\alpha = 90^\circ$ zwischen den Rissfronten und einem aufrechten sowie einem geneigten ZFR ($\beta_1 = 90^\circ, \beta_2 = 40^\circ$) ist die Benennung nach den klassischen Rissmoden ebenfalls nicht mehr möglich (Abb. 4.11). Es existieren am Interaktionspunkt aber weiterhin Spannungssingularitäten für sechs 3D-Deformationsmoden. Ebenfalls führen 3D-Deformationsmoden mit Rissöffnung beider ZFR zu den kritischeren Spannungssingularitäten. Auch einige die Deformationsmoden anregende Lasten sind hier noch auszumachen: So sind die Deformationsmoden (4), (7) und (5) durch uniaxiale Belastungen (zweimal horizontal und einmal vertikal) anzuregen. Deformationsmodus (6) wird durch eine Schubbelastung in der Vertikalen angesprochen und scheint ähnlich wie die Deformationsmoden cs1 und cs2 in Abb. 4.10 auch eine weitgehend entkoppelte Einfach-Riss-Deformation (ZFR-II) abzubilden, zumal auch der zugehörige Spannungssingularitätsexponent nicht viel höher als derjenige des ZFR-II liegt.

Wie Abbildung 4.12, zeigt Abbildung 4.13 die 3D-Deformationsmoden mit singulären Spannungen am Interaktionspunkt für die ZFR-DEL-Interaktion, nun aber für einen geneigten Zwischenfaserriss ($\beta_2 = 40^\circ$). Diese Struktursituation weist auch zwei komplexe Spannungssingularitätsexponenten auf, die, wie in Kapitel 4.1.2 thematisiert, komplex konjugiert sein müssen. Sie gehören zu der stärksten auftretenden Spannungssingularität dieser Struktursituation und treten immer gemeinsam auf, auch wenn die Imaginärteile, wie bei den meisten Ingenieursanwendungen, sehr klein sind. Zwar enthält die Struktursituation insgesamt nur fünf Deformationsmoden mit singulären Spannungen im Interaktionspunkt, diese zeichnen sich aber durch vergleichsweise kritische Spannungssingularitäten aus.

Abbildung 4.14 zeigt schließlich die Deformationsmoden mit singulären Spannungen am Interaktionspunkt für zwei Struktursituationen mit Rand-ZFR-Interaktion. Hier ist in der vollkommen symmetrischen Struktursituation mit $\beta_2 = 90^\circ$ (Abb. 4.14-4, -5, -6), ähnlich wie im ausgiebig schon von Benfem (1977, 1980) und Bazant u. Estensoro (1979) untersuchten homogen-isotropen Fall (vgl. Kap. 3.1.3), nur noch für den symmetrischen Deformationsmodus eine relativ klare Zuordnung zum 2D-Deformationsmodus ZFR-I möglich. Dabei bleibt die zugehörige Spannungssingularität schwach und ist nur unwesentlich stärker als diejenige des 2D-Deformationsmodus. ZFR-II und ZFR-III treten in der Interaktion mit einem Rand hingegen immer gekoppelt auf und beinhalten auch eine starke Spannungssingularität. Im Falle eines geneigten ZFR (Abb. 4.14-7, -8, -9) treten dann stets alle drei 2D-Deformationsmoden ZFR-I, II, III gleichzeitig auf. Zu dieser Struktursituation sei ergänzt, dass jeweils zusätzlich ein vierter Deformationsmodus mit allerdings nur sehr schwach singulären Spannungen

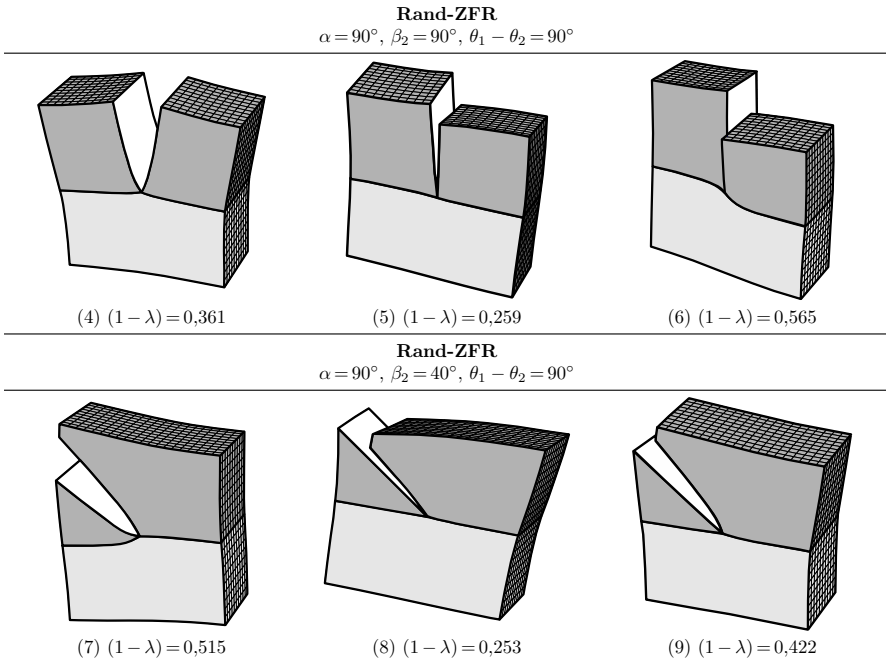


Abbildung 4.14: Deformationsmoden $\hat{u}_j(\xi)$ mit Spannungssingularitätsexponenten $\text{Re}(1 - \lambda_j)$ für einen auf einen freien Rand treffenden Zwischenfaserriss (Rand-ZFR) in T800/Epoxyd-Verbundlagen mit Winkel $\alpha = 90^\circ$ zwischen dem Rand und der Rissfront sowie relativen Faserorientierungen $\theta_1 - \theta_2 = 90^\circ$. 1. Reihe (4,5,6): ZFR-Neigungswinkel $\beta_2 = 90^\circ$. 2. Reihe (7,8,9): ZFR-Neigungswinkel $\beta_2 = 40^\circ$.

($\text{Re}(1 - \lambda) < 0,05$) am Defektinteraktionspunkt auftreten kann (vgl. auch Abb. 4.20, 4.21), welcher dem Deformationsmodus des Laminatrandeffektes ähnlich ist.

Spannungssingularitätsexponenten

Die Spannungssingularitätsexponenten geben einen ersten Hinweis auf die Versagensneigung einer bestimmten Struktursituation. Anhand ihrer lässt sich die auftretende Spannungssingularität als schwach oder stark klassifizieren. Nur die genau dazwischen liegende klassische Rissspitzensingularität liefert eine finite differentielle Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} (vgl. Gl. 2.111–2.113). Sie ist, wie der gesamte Deformationsmodus, zunächst unabhängig von der anliegenden Belastung. Die äußere Last geht erst in den assoziierten GSIF bzw. modalen Wichtungsfaktoren ein, die letztendlich entscheiden, ob ein Deformationsmodus und seine zugehörige Spannungssingularität angeregt sind. Dennoch kann anhand der Analyse der Deformationsmoden eine erste Einschätzung ihrer Kritikalität erfolgen. Unter der Annahme, dass die differentielle Energiefreisetzungsrate einen wesentlichen Bruchparameter darstellt, sind starke Spannungssingularitäten grundsätzlich kritischer einzuschätzen als schwache

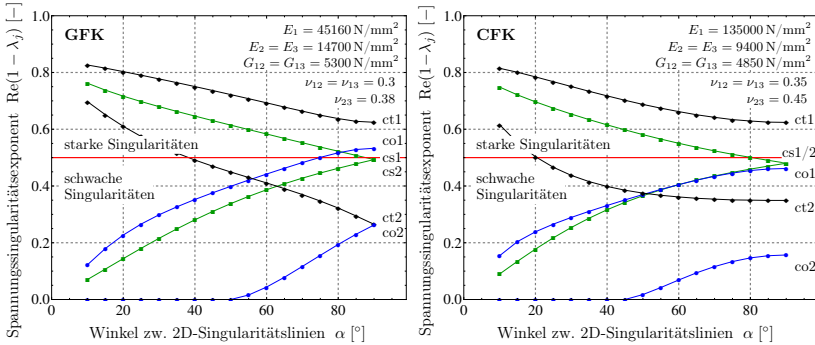


Abbildung 4.15: Spannungssingularitätsexponenten für die ZFR-ZFR-Interaktionssituation mit Rissneigungswinkeln $\beta_1 = \beta_2 = 90^\circ$ für einen jeweils typischen GFK- und CFK-Verbund (abgeleitet von Abbildungen aus Hell u. Becker (2014)).

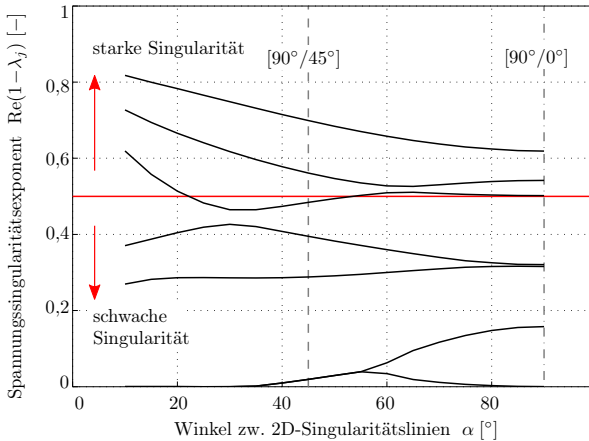


Abbildung 4.16: Spannungssingularitätsexponenten für zwei aufeinander treffende Zwischenfaserrisse (ZFR-ZFR) mit Rissneigungswinkeln $\beta_1 = 40^\circ$, $\beta_2 = 0^\circ$ für einen T800/Epoxid-Verbund (CFK).

(vgl. Kap. 2.2.3). Dabei gilt, dass die Kritikalität umso höher einzuschätzen ist, desto größer der Spannungssingularitätsexponent $(1 - \lambda)$ ist.

Treffen zwei Zwischenfaserrisse aufeinander (ZFR-ZFR, vgl. auch Abb. 4.10-4.11) ergeben sich meist fünf bis sechs Deformationsmoden mit singulären Spannungen am Defektinteraktionspunkt, wobei Winkel $\alpha > 90^\circ$ zwischen den Rissfronten meist zu weniger aber dafür stärkeren Spannungssingularitäten führen (vgl. Abb. 4.15-4.17). Mindestens einer, aber bis zu drei davon sind stark singulär. Ist einer der beiden ZFR geneigt (Rissneigungswinkel $\beta \neq 90^\circ$), können bis zu sieben Deformationsmoden mit singulären Spannungen im Rissinteraktionspunkt auftreten (vgl. Abb. 4.16 und 4.17). Für den Fall, dass zwei ZFR, die aufgrund einer Druckbeanspruchung der entsprechenden Laminatlage entstanden sind

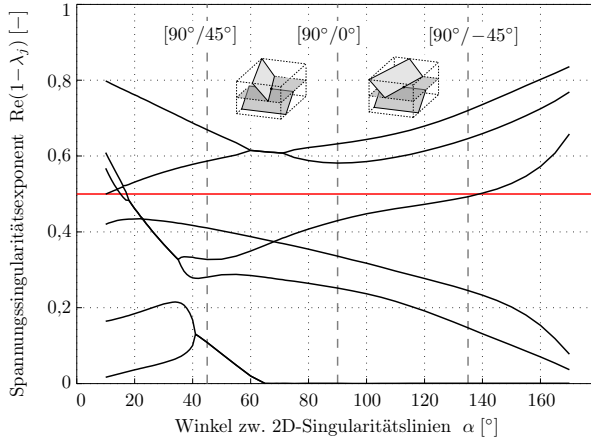


Abbildung 4.17: Spannungssingularitätsexponenten für zwei aufeinander treffende Zwischenfaserisse (ZFR-ZFR) mit Rissneigungswinkeln $\beta_1 = \beta_2 = 40^\circ$ für einen T800/Epoxid-Verbund (CFK).

(Rissneigungswinkel $\beta \approx 40^\circ$, aber $\beta_1 \neq \beta_2$) und etwa im Rissfrontwinkel $\alpha \approx 35^\circ$ aufeinander treffen, treten im stark anisotropen Fall, also z. B. für CFK-Laminaten, sogar bis zu acht Deformationsmoden mit $0 < \text{Re}(1 - \lambda_j) < 1$ auf. Allerdings führen, wenn sie denn auftreten, der siebte und der achte Deformationsmodus meist (der achte sogar immer) zu nur sehr schwachen 3D-Spannungssingularitäten ($\text{Re}(1 - \lambda) < 0,05$).

Wie auch für den Fall nur eines ZFR im Laminat, führen stark anisotrope Einzelschichten aufgrund der Steifigkeitsdifferenz tendenziell zu weniger kritischen Deformationsmoden, wenn diese eine symmetrische oder antisymmetrische Rissöffnung beinhalten (vgl. Abb. 4.15). Dieser Effekt nimmt natürlich mit fallendem Winkel zwischen den Materialorientierungen der aneinander angrenzenden Schichten ab.

Weiterhin treten für Rissneigungswinkel $\beta \neq 90^\circ$ neben rein reellen auch komplex konjugierte und damit oszillierende Spannungssingularitäten auf (vgl. Abb. 4.16), welche auch von stark singulärem Charakter sein können (vgl. Abb. 4.17). Tendenziell führen geneigte ZFR zu kritischeren Spannungssingularitätsexponenten und damit gegebenenfalls auch zu mehr starken Spannungssingularitäten.

Trifft eine Delamination auf einen Zwischenfaseriss (ZFR-DEL) treten ebenfalls stets auch komplex konjugierte Spannungssingularitäten auf (vgl. z. B. Abb. 4.18 und 4.19). Betrachtet man einen auf eine Delamination treffenden ZFR als Sonderfall zweier aufeinander treffender ZFR mit dem Rissneigungswinkel $\beta_1 = 0^\circ$ und $\beta_2 \neq 0^\circ$, folgt dies als eine Fortsetzung des dort beobachteten Trends. Hinzu kommt, dass auch aus der Einfach-Riss-Perspektive in Gegenwart eines Grenzflächenrisses stets oszillierende Spannungssingularitäten zu erwarten sind (z. B. Abb. 4.7).

Es gibt fünf bis sieben Deformationsmoden mit 3D-Spannungssingularitäten, wobei die des siebten Deformationsmodus nur vergleichsweise schwach ist. Dieser Deformationsmodus tritt auch nur dann auf, wenn der Winkel zwischen den Rissfronten $\alpha < 90^\circ$ und damit

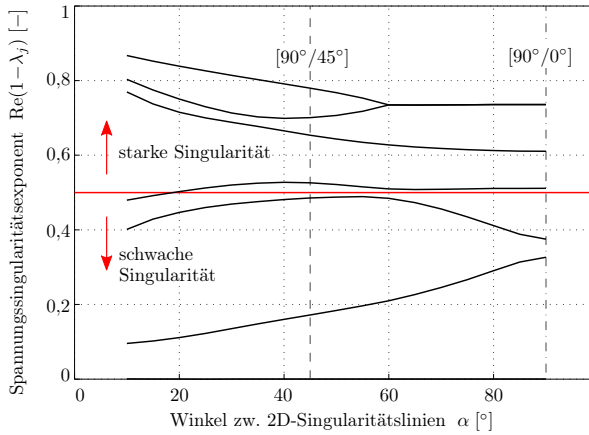


Abbildung 4.18: Spannungssingularitätsexponenten für einen auf eine Delamination treffenden Zwischenfaserriss (ZFR-DEL) mit Rissneigungswinkel $\beta_2 = 90^\circ$ für einen T800/Epoxid-Verbund (CFK) und eine Faserorientierung der unteren Laminatlage $\theta_1 = \theta_2 + \alpha = 90^\circ$.

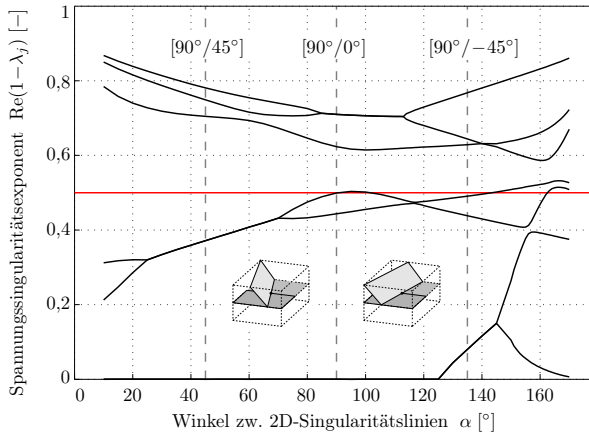


Abbildung 4.19: Spannungssingularitätsexponenten für einen auf eine Delamination treffenden Zwischenfaserriss (ZFR-DEL) mit Rissneigungswinkel $\beta_2 = 40^\circ$ für einen T800/Epoxid-Verbund (CFK) und eine Faserorientierung der unteren Laminatlage $\theta_1 = \theta_2 + \alpha = 90^\circ$.

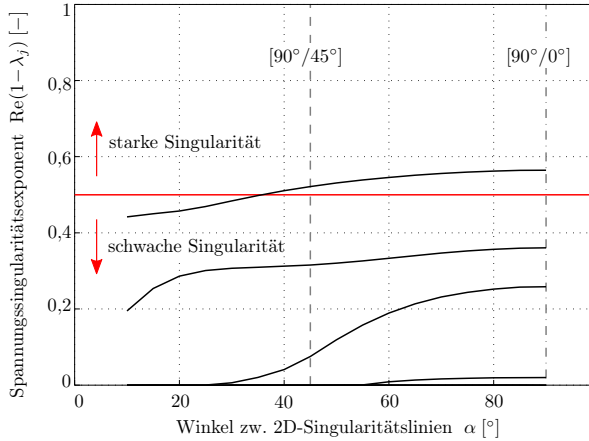


Abbildung 4.20: Spannungssingularitätsexponenten für einen auf einen freien Laminatrand treffenden Zwischenfaserriss (Rand-ZFR) mit Rissneigungswinkel $\beta_2 = 90^\circ$ für einen T800/Epoxid-Verbund (CFK) und eine Faserorientierung der unteren Laminatlage $\theta_1 = \alpha - \theta_2 = 90^\circ$.

der ZFR dem verbleibenden Ligament zwischen den Rissfronten zugeneigt ist ($\beta_2 < 90^\circ$, z. B. Abb. 4.13). Anders als bei zwei aufeinander treffenden ZFR existieren beim auf eine Delamination treffenden ZFR immer drei stark singuläre Deformationsmoden (vgl. Abb. 4.18 und 4.19). Zusätzlich bewegt sich der vierte Deformationsmodus für senkrechte ZFR (Rissneigungswinkel $\beta_2 = 90^\circ$) nahe um die Rissspitzensingularität und damit die Singularität der 2D-Delaminationssituation (Abb. 4.18). Damit ist die ZFR-DEL-Interaktionssituation in vielen Fällen als kritischer als die ZFR-ZFR-Interaktion einzuschätzen, was angesichts der i. A. gegenüber dem ZFR kritischeren Einzel-Riss-Situation der Delamination natürlich erscheint.

Wie bei der ZFR-ZFR-Interaktion führt auch hier eine Vergrößerung des Winkels α dazu, dass einige Spannungssingularitätsexponenten zum Teil noch kritischer werden, während andere, vorzugsweise ohnehin schwache Spannungssingularitäten, an Kritikalität verlieren. Die Faserorientierung in der Laminatschicht ohne ZFR hat hier ebenfalls, wie aus der Einfach-Riss-Situation bekannt, insbesondere auf Deformationsmoden mit symmetrischem Rissöffnungsanteil einen etwas entschärfenden Einfluss. Der Rissneigungswinkel beeinflusst besonders die nicht starken Spannungssingularitäten. Für $\alpha < 90^\circ$ werden sie tendenziell kritischer, für $\alpha > 90^\circ$ etwas weniger kritisch (Abb. 4.19).

Bei einem **auf einen freien Rand treffenden Zwischenfaserriss** (Rand-ZFR) ergeben sich drei bis vier Deformationsmoden mit $0 < \text{Re}(1 - \lambda) < 1$ (vgl. Abb. 4.20 und 4.21), wobei die Spannungssingularität des vierten ähnlich der Laminat-Rand-Effekt-Singularität ausgesprochen schwach ist (Abb. 4.20). Die Spannungssingularitäten der ersten drei Deformationsmoden können alle sowohl stark als auch schwach sein. Für geneigte ZFR $\beta_2 < 90^\circ$ gilt, dass sich diese drei Deformationsmoden mit steigendem Winkel α zwischen Rand und Rissfront von sehr stark singulär hin zu sehr schwach singulär verändern. Dabei ist anzumerken, dass die Ergebnisse für Rissneigungswinkel $\beta_2 > 90^\circ$ identische Ergebnisse liefern, der Trend in α aber gerade umgekehrt wird (Abb. 4.21). Damit sind Interaktionssituationen, in denen

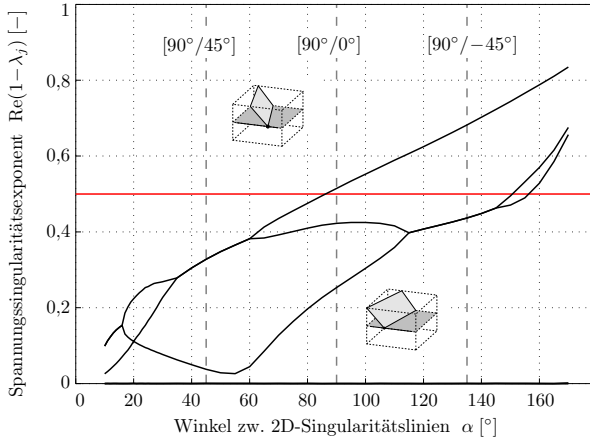


Abbildung 4.21: Spannungssingularitätsexponenten für einen auf einen freien Laminatrand treffenden Zwischenfaserriss (Rand-ZFR) mit Rissneigungswinkel $\beta_2 = 140^\circ$ für einen T800/Epoxid-Verbund (CFK) und eine Faserorientierung der unteren Laminatlage $\theta_1 = \alpha - \theta_2 = 90^\circ$.

der ZFR zum Rand hin geneigt ist, weniger kritisch als solche, in denen seine Neigung vom Rand weg zeigt. Weiterhin können sich insbesondere für geneigte ZFR komplex konjugierte Spannungssingularitäten sowohl im stark als auch im schwach singulären Bereich ergeben. Schließlich treten für GFK-Lamine tendenziell etwas kleinere und damit weniger kritische Spannungssingularitätsexponenten $(1 - \lambda)$ auf.

Eine Untersuchung der **Interaktion einer Delamination mit einem freien Rand** (Rand-DEL) liefert im betrachteten Parameterraum zwei bis vier Deformationsmoden mit 3D-Spannungssingularitäten, wobei der vierte wieder, wenn überhaupt, nur sehr schwach singulär ist. Die Spannungssingularitätsexponenten der drei übrigen Deformationsmoden fallen mit zunehmendem Winkel α zwischen Rissfront der Delamination und freiem Rand von $\text{Re}(1 - \lambda) \approx 0,9$ (bei $\alpha = 5^\circ$) bis nahe $\text{Re}(1 - \lambda) = 0$ (bei $\alpha = 175^\circ$) (Abb. 4.22 und 4.23). Die klassische Risspitzeningularität, und damit die Grenze zwischen starken und schwachen Singularitäten, tritt für den Deformationsmodus mit der stärksten Spannungssingularität bei einem Winkel von etwa $\alpha = 95^\circ \dots 130^\circ$, für den Deformationsmodus mit der nächst schwächeren 3D-Spannungssingularität bei etwa $\alpha = 75^\circ \dots 90^\circ$ und für den dritten Deformationsmodus bei etwa $\alpha = 60^\circ \dots 70^\circ$ auf. Der Argumentationslinie von Bažant u. Estenssoro (1979) folgend (vgl. Kap. 3.1.3 – Stand der Forschung) wären dies gerade die Winkel, die sich abhängig vom angesprochenen Deformationsmodus im Ligament zwischen der Rissfront einer wachsenden Delamination und dem freien Rand einstellen würden.

Verifikation

Um die dreidimensionalen asymptotischen Nahfelder zu verifizieren, wurden im Rahmen der Masterthesis von Brod (2015) Standard-FE-Analysen mit ABAQUS durchgeführt, die die Randverschiebungen der Deformationsmoden als Verschiebungsrandbedingungen verwendeten und das Abklingverhalten der resultierenden Verschiebungsfelder im Körperinneren

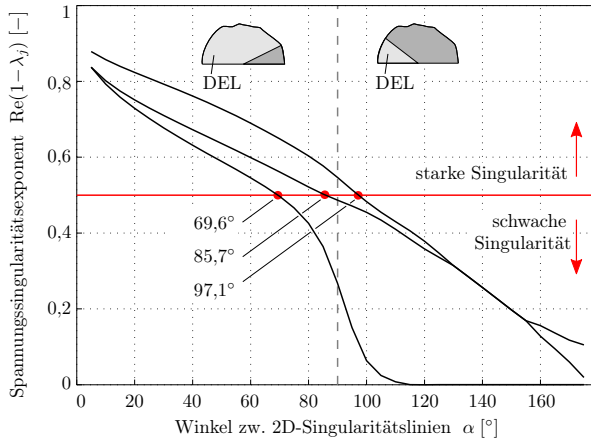


Abbildung 4.22: Spannungssingularitätsexponenten für eine auf einen freien Laminatrand treffende Delamination (Rand-DEL) für einen T800/Epoxid-Verbund (CFK) und eine Faserorientierung der Laminatlagen $\theta_1 = 90^\circ$ und $\theta_2 = 0^\circ$.

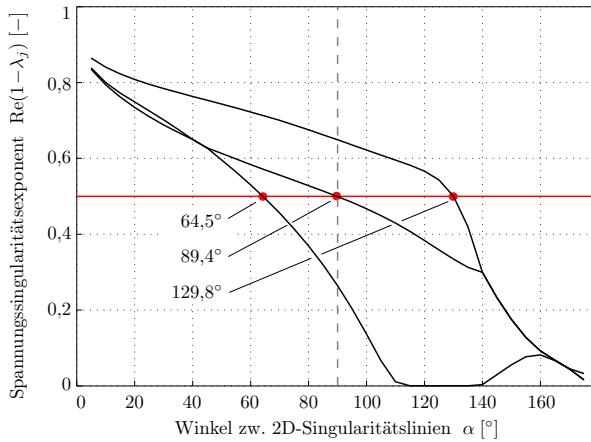


Abbildung 4.23: Spannungssingularitätsexponenten für eine auf einen freien Laminatrand treffende Delamination (Rand-DEL) für einen T800/Epoxid-Verbund (CFK) und eine Faserorientierung der Laminatlagen $\theta_1 = 90^\circ$ und $\theta_2 = 45^\circ$.

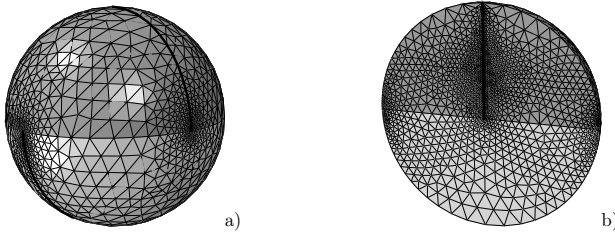


Abbildung 4.24: Beispielhafte Vernetzung eines Standard-FE-Referenzmodells zur Verifikation der Abklingexponenten der Defektinteraktionssituation ZFR-ZFR. a) Draufsicht von außen, b) Schnittansicht in der Rissebene. Die Risse sind jeweils durch fett-gedruckte durchgezogene Linien angedeutet.

verglichen. Abbildung 4.24 zeigt beispielhaft ein für eine FE-Analyse sehr fein vernetztes kugelförmiges Gebiet zur Untersuchung der ZFR-ZFR-Interaktion ($\alpha = \beta_1 = \beta_2 = 90^\circ$). Bei reiner Anregung eines Deformationsmodus ist sein zugehöriger Abklingexponent im doppellogarithmischen Verschiebungs-Abstands-Diagramm als Steigung ablesbar. Die so ermittelten Abklingexponenten λ wichen stets weniger als 2% von den mittels der SBFEM ermittelten Abklingexponenten ab. Dabei war die Qualität der so gefundenen Werte erwartungsgemäß am Rand, wo der genaue Deformationsmodus eingestellt wurde, besser als nahe der eigentlichen Spannungssingularität, wo die Vernetzung zunehmend unzureichend fein war.

4.2.3 Randwertprobleme und daraus resultierende modale Wichtungsfaktoren bzw. generalisierte Spannungsintensitätsfaktoren

Nachdem die dreidimensionalen asymptotischen Nahfelder an Interaktionspunkten rissähnlicher Defekte sowie freier Laminatränder in endlosfaserverstärkten Verbundlaminaten betrachtet wurden, sollen nun für einige konkrete Strukturen und Lastfälle, die solche Defektinteraktionen enthalten, auch die generalisierten Spannungsintensitätsfaktoren $c_{\sigma_j}^{2D}$, $c_{\sigma_j}^{3D}$ (2.75, 2.76) bzw. die äquivalenten modalen Wichtungsfaktoren $c_{u_j}^{2D}$, $c_{u_j}^{3D}$ (2.75, 2.76) bzw. \mathbf{c}_p (4.40, 4.52) bestimmt werden. Letztendlich kann eine Struktur nur auch unter Kenntnis der modalen Wichtungsfaktoren wirklich bezüglich eines bestimmten Lastfalls bewertet werden. Um aussagekräftige und vergleichbare modale Wichtungsfaktoren (oder GSIF) zu erhalten, sind die Deformationsmoden $r^{\lambda_j} \phi_{u_j}$ (2.75, 2.76) bzw. $\hat{\mathbf{u}}_j(\xi) = \phi_j^{\lambda_j} \xi^{\lambda_j}$ (4.39) geeignet zu normieren. Wie die Eigenvektoren eines Eigenwertproblems sind die Deformationsmoden zunächst beliebig skalierbar. Entsprechend ist eine Grundvoraussetzung für die Vergleichbarkeit der modalen Wichtungsfaktoren bzw. GSIF, dass die Deformationsmoden immer gleich normiert werden. Wie eine geeignete Normierung aussehen kann, soll im Folgeteilkapitel diskutiert werden.

Normierung der Deformationsmoden für die Vergleichbarkeit modaler Wichtungsfaktoren bzw. generalisierter Spannungsintensitätsfaktoren

Eine geeignete Normierung der Deformationsmoden zu finden, ist ein schwierigeres Unterfangen als es auf den ersten Blick erscheinen mag, was wohl der Grund dafür ist, dass es bisher kein generalistisches und allgemein akzeptiertes Konzept für die Normierung der Deformationsmoden (und damit auch der GSIF bzw. \mathbf{c}_p) gibt. Natürlich existiert jenes für

den (zwar klassischen und häufig anzutreffenden aber tatsächlich dennoch sehr speziellen) Fall des Risses im zweidimensionalen, homogenen Kontinuum. Hier wird der Deformationsmodus j so normiert, dass eine aus ihm resultierende charakteristische Spannungskomponente $\sigma_{\text{ch}}^{(j)}$, dividiert durch den entsprechenden Spannungssensitivitätsfaktor K_j und den radialen Faktor $r^{\lambda-1} = 1/\sqrt{r}$, im Rissligament $\varphi = 0$ gerade den Wert $1/\sqrt{2\pi}$ annimmt

$$\frac{\sigma_{\text{ch}}^{(j)}(\varphi=0)}{K_j r^{1/2-1}} = \phi_j^{\sigma_{\text{ch}}(\varphi=0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit einer Normierung der reinen Winkelfunktion der charakteristischen Spannungskomponente des Deformationsmodus im Rissligament auf den Wert $\phi_j^{\sigma_{\text{ch}}(\varphi=0)} = 1/\sqrt{2\pi}$.³¹ Dabei ergibt sich der glückliche Umstand, dass die jeweils übrigen zwei Deformationsmoden in dieser charakteristischen Spannungskomponente Null sind und alle drei Deformationsmoden die gleiche Spannungssingularitätsordnung $\sigma \propto 1/\sqrt{r}$ aufweisen. Dadurch ist eine gewisse Vergleichbarkeit auch der verschiedenen Deformationsmoden untereinander gegeben. Schon der Grenzflächenriss bietet diese Einfachheit durch seine komplex konjugierten Deformationsmoden, die immer gekoppelt auftreten müssen, nicht mehr. Für die noch allgemeinere zweidimensionale Multimaterialkerbe sind dann schon die Singularitätsordnungen der einzelnen Deformationsmoden unterschiedlich und es existiert kein einheitliches Normierungskonzept mehr (vgl. z. B. Leguillon u. Sanchez-Palencia (1987), Yosibash (2012)).

Der dreidimensionale Fall ist von nochmals allgemeinerer und komplexerer Natur, da hier noch mehr Deformationsmoden mit i. A. unterschiedlichen Spannungssingularitätsexponenten existieren (vgl. Kap. 2.2.2): Zu berücksichtigen sind hier zum einen die Deformationsmoden mit 3D-Spannungssingularitäten, aber prinzipiell auch all jene Deformationsmoden, in denen Liniensingularitäten angesprochen werden. Generell stellt das Auftreten von Singularitäten in den Winkelfunktionen $\phi_{\sigma_j}^{3D}(\varphi, \vartheta)$ der 3D-Deformationsmoden eine zusätzliche Herausforderung bezüglich der Findung eines allgemeingültigen und konsistenten Normierungskonzeptes dar.

Die forderste Anforderung an einen GSIF $c_{\sigma_j}^{3D}$ bzw. einen modalen Wichtungsfaktor $c_{u_j}^{3D}$ ist, dass er als Bruchindikator brauchbar ist. Diese Anforderung ist für den einfachen Fall nur eines angesprochenen Deformationsmodus stets erfüllt, da GSIF ein Maß für die Größe der Beanspruchung nahe der Spannungssingularität darstellen. Entsprechend wäre hiervon ausgehend ein einfaches Versagenskriterium basierend auf diesem GSIF und einem experimentell bestimmten kritischen Wert möglich. Dabei sind GSIF und modale Wichtungsfaktoren immer direkt proportional zueinander und damit weitgehend gleichwertig. Dies gilt besonders für die in dieser Arbeit betrachteten Multimaterialkonfigurationen, in denen auch die GSIF stets materialabhängig sind.

Wünschenswert für ein Versagenskriterium ist jedoch eine möglichst weitreichende Anwendbarkeit und damit Allgemeingültigkeit. Dafür ist wiederum eine möglichst allgemeingültige Vergleichbarkeit der GSIF bzw. modalen Wichtungsfaktoren notwendig:

- für verschiedene Lastfälle und damit verschiedene angesprochene Deformationsmoden (Mixed-Mode-Kriterium),
- für verschiedene Materialien und

³¹ Der Faktor $\sqrt{2\pi}$ ist zugunsten der möglichst einfachen Darstellung des Zusammenhangs zwischen den Spannungssensitivitätsfaktoren und zugehörigen differentiellen Energiefreisetzungsraten \mathcal{G} gewählt (vgl. Kap.2.2.3, Gl. (2.110)).

- für verschiedene Geometrien.

Hierbei erscheint das Ableiten der GSIF bzw. der modalen Wichtungsfaktoren von Spannungen oder einer Energie nützlicher als von Verschiebungen. Weiterhin sollten GSIF bzw. modale Wichtungsfaktoren für eine weitreichende Vergleichbarkeit unabhängig von Längen und Abständen im asymptotischen Nahfeld der Struktursituation sein, d. h. die Längenskala der radialen Koordinate ist einheitlich zu wählen. Dies ist z. B. nicht gegeben, wenn mit der relativen Koordinate ξ der SBFEM gearbeitet wird, die immer abhängig von den Randabmessungen des betrachteten Gebiets ist (Abstands- und Winkelabhängigkeit). Diese Problematik ist vergleichsweise einfach aufzulösen, indem der Deformationsmodus in einem willkürlich, aber immer gleich gewählten Abstand (z. B. $r = 1$ mm) von der Spannungssingularität ausgewertet wird. Dies kommt einem Dividieren der Spannungen durch $r^{\lambda-1}$ oder der Verschiebungen durch r^λ gleich. Schließlich sind für die Umsetzung von Parameterstudien Einfachheit und Allgemeingültigkeit zwei unabdingbare Anforderungen an das Normierungskonzept insgesamt. Die klassischen SIF erfüllen diese Anforderungen jedoch nicht vollständig. Sie sind beispielsweise auf die Rissgeometrie beschränkt und gelten nicht für Multimaterialkonfigurationen.

Wie bereits in Kapitel 3.2 dargestellt, gibt es bisher nicht viele Arbeiten, die GSIF von 3D-Spannungssingularitäten auswerten. Hinzu kommt, dass die meisten dieser Arbeiten die gleiche, sehr einfache, von Labossiere u. Dunn (2001) betrachtete Struktursituation behandeln, da es noch immer nur wenige gut dokumentierte Ergebnisse experimenteller Versuche gibt. In dieser speziellen Struktursituation trat nur ein Deformationsmodus mit 3D-Spannungssingularität auf und schon aus der Lastsituation ergab sich, dass die Normalspannung in der Materialgrenzfläche charakteristisch für das Versagen sein würde. Da in der Grenzfläche entlang der Ränder selbst Liniensingularitäten auftraten, die Struktur- und Lastsituation aber insgesamt symmetrisch war, bot sich also eine Normierung auf die Normalspannung in der Winkelhalbierenden der Materialgrenzfläche des gekanteten Bimaterialbiegebalkens im Abstand $r = 1$ mm vom Punkt der 3D-Spannungssingularität an. Um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu gewährleisten, orientierten sich nachfolgende Arbeiten, die sich auf diese Struktursituation bezogen, an dieser Normierungsprozedur (Lee u. Im, 2003, Leguillon, 2014, Luangarpa u. Koguchi, 2014).

Arbeiten zu anderen Struktursituationen verwendeten auch andere Normierungskonzepte. Koguchi u. da Costa (2010) normierten die Winkelfunktionen der Spannungen für jeden Deformationsmodus auf einen Extremwert dieser, was sich jedoch als problematisch herausstellte, wenn kein Extremwert der Spannung vorhanden war.

Lee u. Im (2003) sowie Lee et al. (2006) verwendeten für die Fälle, in denen sie nicht explizit die Ergebnisse von Labossiere u. Dunn (2001) nachrechneten, ein verschiebungsbasiertes Normierungskonzept für die Deformationsmoden $\hat{\mathbf{u}}_j(\xi)$. Es ist das in der Umsetzung wohl simpelste Konzept, da der Deformationsmodus einfach auf seine maximale Verschiebungskomponente normiert wird:

$$\max \left(\hat{\mathbf{u}}_j(\xi|_{r=1\text{ mm}}) \right) \stackrel{!}{=} 1 \text{ mm} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{u}}(\xi) = \sum_{j=1}^{n_{\lambda p}} \hat{\mathbf{u}}_j(\xi) c_{uj}. \quad (4.91)$$

Dieses verschiebungsbasierte Konzept zeichnet sich vor allem durch seine Einfachheit und Allgemeingültigkeit aus. Da es weder spannungs- noch energiebasiert ist, zeigen jedoch die daraus resultierenden modalen Wichtungsfaktoren nur mittelbar eine Intensität der Beanspruchung an, was den Vergleich mit den modalen Wichtungsfaktoren anderer Deformationsmoden etwas

erschwert. Weiterhin führt es im Gegensatz zu spannungsbasierten Normierungskonzepten auch in homogenen Kontinua zu einer Materialabhängigkeit der modalen Wichtungsfaktoren bzw. GSIF. In Anbetracht der Tatsache, dass auch Multimaterialkerben untersucht werden sollen und Deformationsmoden unterschiedlicher Spannungssingularitätsexponenten ohnehin schwer vergleichbar sind, relativieren sich diese Nachteile wieder. Weiterhin ist die Vergleichbarkeit der Intensität eines *einzelnen* Deformationsmodus zwischen unterschiedlichen geometrischen Konfigurationen schon durch die Verwendung eines modalen Wichtungsfaktors gegeben.

Ergänzend wird zum verschiebungsbasierten Normierungskonzept für Deformationsmoden folgendes angemerkt: Verschiebungen haben gegenüber Spannungen den Vorteil, dass sie (im Normalfall) überall beschränkt und somit endlich bleiben. Gleichzeitig besteht zumindest für den maximalen Betrag der Verschiebungen nicht die Möglichkeit, dass dieser null werden könnte. Dabei erreichen die Verschiebungen ihr Maximum fern der Stellen, wo die Singularitätslinien auf den diskretisierten Rand treffen und zu Ergebnissen minderer Qualität führen. Zusätzlich werden sie dort extremal, wo auch Skalierungsstrahlen verlaufen und somit die Verschiebungen in ihrer maximalen Qualität angegeben werden können. Dies ist auch ein Vorteil, wenn der diskretisierte Rand, wie es für eine SBFEM-Modellierung typisch ist, nicht einen konstanten Abstand vom Skalierungszentrum besitzt, die Normierung aber für den Abstand $r = 1$ mm durchgeführt werden soll. Entlang der Skalierungsstrahlen kann die Lösung immer unmittelbar angegeben werden – zwischen den Skalierungsstrahlen jedoch nicht.³² Generell sind die aus der SBFEM resultierenden Verschiebungen außerdem von höherer Qualität als die Spannungen.³³ Dies ist insbesondere dann problematisch, wenn die Diskretisierung des Randes aus Effizienzgründen nicht zu fein erfolgen soll. Dabei ist zu beachten, dass sich eine vollständige Lösung des Eigenwertproblems für die SBFEM nochmals deutlich aufwendiger gestaltet, als die partielle Lösung für die klassische FEM-Eigenanalyse. Natürlich wäre eine separate partielle Lösung des Eigenwertproblems eines wesentlich feiner diskretisierten Modells mit konstantem Abstand des diskretisierten Randes vom Skalierungszentrum zur Normierung möglich. Anschließend könnte über eine Abstimmung der Verschiebungsgrößen diese Normierung auf das eigentliche SBFEM-Modell übertragen werden. Allerdings ist zum einen zumindest fragwürdig, wie genau diese Abstimmung der Verschiebungsgrößen aufeinander aussehen sollte, ohne weitere numerische Fehler einzuführen. Zum anderen wäre dieses Vorgehen insgesamt wohl wenig effizient.

Ein weiteres denkbares, bisher aber noch nicht in der Literatur gefundenes Normierungskonzept für die Deformationsmoden $\hat{u}_r(\xi)$ könnte ein formänderungsenergiebasiertes sein. Hierbei könnte die Formänderungsenergie innerhalb eines Gebietes um die 3D-Spannungssingularität bis zu einem Abstand $r = 1$ mm zur Normierung dienen, sodass ein resultierender modaler Wichtungsfaktor unmittelbar die aufgrund des zugehörigen Deformationsmodus in einem solchen (z. B. kugelförmigen) Gebiet gespeicherte Formänderungsenergie angeben würde. Dieses Vorgehen hätte den wesentlichen Vorteil, dass keine charakteristische Spannungskomponente und im Speziellen kein bestimmter Punkt für die Normierung ausgewählt werden müsste. Gleichzeitig können hier, wie bei einem verschiebungsbasierten Normierungskonzept, keine unendlich großen Werte auftreten. Hat der diskretisierte Rand einen konstanten Abstand

³² Hier sind zunächst durch Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems die Koordinaten im SB-KOS zu bestimmen.

³³ Die Spannungen könnten zwar durch Spannungsglättung auch abseits der Gaußpunkte auf ein ähnliches Niveau in der Genauigkeit gehoben werden, allerdings wiederum nicht an Materialgrenzen, Ecken und Kanten des diskretisierten Randes (vgl. Kap. 2.3.2).

vom Skalierungszentrum, ist die Formänderungsenergie für ein solches Gebiet auch noch ausgesprochen einfach und ohne weitere Integration zu berechnen

$$\Pi_j^i = \xi^{2\lambda_j} \Big|_{r=1 \text{ mm}} (1/2 (\phi_j^a)^T \phi_j^a) . \quad (4.92)$$

Typischerweise liegt aber, wie bereits erwähnt, in einem SBFE-Modell zur Lösung des vollständigen Randwertproblems ein diskretisierter Rand mit variablem Abstand vom Skalierungszentrum vor, wodurch Gl. (4.92) nicht mehr unmittelbar anwendbar ist.³⁴ Auch hier wäre wieder eine separate partielle Lösung des Eigenwertproblems eines SBFE-Modells mit konstantem Abstand des diskretisierten Randes vom Skalierungszentrum zur Normierung möglich – allerdings ist auch hier die Effizienz des Verfahrens in Frage zu stellen. Ein weiterer Nachteil des energiebasierten Normierungskonzeptes ist schließlich, dass es nicht lastvorzeichenssensitiv ist, also nicht zwischen Zug- und Druckbeanspruchung differenziert.

Letztendlich wird hier dem allgemeingültigen und sehr simplen verschiebungsbasierten Normierungskonzept für die Deformationsmoden $\hat{\mathbf{u}}_j(\xi)$ der Vorzug gegeben. Um Unklarheiten zu vermeiden, sei von nun an nur noch von modalen Wichtungsfaktoren c_{uj}^{3D} (2.76) bzw. einfach c_j anstatt GSIF $c_{\sigma_j}^{3D}$ gesprochen. Sie sind mit Hilfe der euklidischen Vektornorm durch die Normierung der Deformationsmoden $\hat{\mathbf{u}}_j(\xi)$ als dimensionslos und dadurch prinzipiell anders definiert als die klassischen SIF:

$$\max \left(\left\| \hat{\mathbf{u}}_j(\xi) \Big|_{r=1 \text{ mm}} \right\| \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \text{ mm} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{u}}(\xi) = \sum_{j=1}^{n_{\Lambda p}} \hat{\mathbf{u}}_j(\xi) c_j \quad (4.93)$$

Es sei aber betont, dass die modalen Wichtungsfaktoren dennoch den GSIF, bis auf einen (dimensionsbehafteten) Vorfaktor, äquivalent bleiben.

Schließlich muss angemerkt werden, dass diese Normierung noch nicht immer eindeutig bezüglich des Vorzeichens der Deformation ist.³⁵ Es muss also eine weitere Information zur Verfügung gestellt werden. Im Rahmen dieser Arbeit sei das Vorzeichen der Deformation simplerweise an die bildliche Darstellung der Deformationsmoden in Kapitel 4.2.2 gebunden.

Modellierung in Abaqus mit Hilfe eines SBFEM-Superelements

Es werden beispielhaft Zwischenfaserriss-Interaktionen (ZFR-ZFR) mit Neigungswinkel $\beta_1 = \beta_2 = 90^\circ$ sowie mit Winkeln zwischen den Rissfronten $\alpha = 90^\circ$ und $\alpha = 135^\circ$ für diverse Laminateaufbauten, Lastfälle und anisotrope FKV betrachtet. Die Materialdaten der anisotropen FKV, T800/Epoxid-Verbund (CFK) und einem typischen GFK-Verbund, sind Tabelle A.1 zu entnehmen. Es werden zuerst die asymmetrischen Laminateaufbauten $[90^\circ/0^\circ]$ und $[90^\circ/-45^\circ]$ für klassische Scheibenlasten

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \quad , \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \quad , \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \quad (4.94)$$

³⁴ Zwar gelten die Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_j(\xi)$ überall entlang der Skalierungsstrahlen und mittels geeigneter Interpolation auch zwischen den Skalierungsstrahlen, aber die modalen Lastvektoren $\hat{\mathbf{q}}_j(\xi)$ sind aus einer Integration über den diskretisierten Rand resultierende Größen und damit nicht ohne Weiteres auf anders geformte virtuelle Ränder übertragbar.

³⁵ übrigens auch nicht bei Lee u. Im (2003), solange nicht zusätzlich der Ort der maximalen Verschiebung spezifiziert oder eine Abbildung des positiv ausgelenkten Deformationsmodus beigelegt wird.

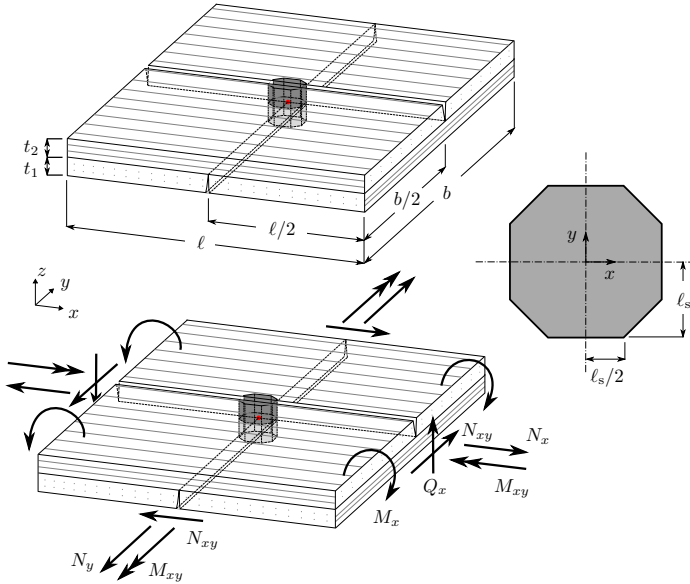


Abbildung 4.25: Geometrie und Lasten der untersuchten Laminat mit ZFR-ZFR-Interaktion am Beispiel des $[90^\circ/0^\circ]$ -Laminataufbaus. Das Laminat ist statisch bestimmt gelagert. Der Rissinteraktionspunkt mit zu erwartender 3D-Spannungssingularität ist durch einen roten Punkt gekennzeichnet. Die Modellierung der Umgebung dieses Punktes mit Hilfe eines SBFEM-Superlements ist durch ein extrudiertes Achteck über beide Laminatlagen hinweg angedeutet. Die Achteckform gestattet für beide behandelten Risskonfigurationen $\alpha = 90^\circ, 135^\circ$ senkrecht auf den Rissfronten stehende Oberflächen des Superlements.

und Plattenlasten

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (4.95)$$

untersucht (vgl. Abb. 4.25). Die gleichen Modelle werden dann mit Symmetrierandbedingungen am Oberrand $([90^\circ/0^\circ]_s, [90^\circ/-45^\circ]_s)$ bzw. Unterrand $([0^\circ/90^\circ]_s, [-45^\circ/90^\circ]_s)$ betrachtet. Schließlich folgt noch die Untersuchung von symmetrischen, quasi-isotropen Laminaten mit den Lagenaufbauten $[45^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$ und $[90^\circ/0^\circ/-45^\circ/45^\circ]_s$. Für die Modelle mit Symmetrierandbedingungen werden nur Scheibenlasten berücksichtigt, da nur diese die in der Laminatenebene gestellten Symmetrierandbedingungen erfüllen.

Insgesamt soll stets der Fall betrachtet werden, in dem der Interaktionspunkt, wo die Zwischenfaserrisse aufeinander treffen, hinreichend weit von anderen Störungen, wie Rissen oder Rändern, entfernt ist. Dazu werden die Abmessungen des Laminats mit den Seitenlängen $\ell = b = 16,0 \text{ mm}$ und Lagendicken $t_1 = t_2 = t_k = 0,1 \text{ mm}$, $k = 1, \dots, n_t$ gewählt (n_t : Anzahl Laminatlagen), wobei sich der ZFR-ZFR-Interaktionspunkt im Zentrum befindet (Abb. 4.25). Damit ergibt sich ein relativer Abstand des Interaktionspunktes zum Rand von mindestens $80t_k$.

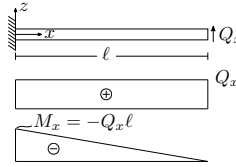


Abbildung 4.26: Querkraft- und Momentenverlauf in einseitig eingespannter, ungeschädigter Laminat-Platte unter Querkraftbelastung.

Um die Lasten annähernd vergleichbar zu halten, trotz unterschiedlicher Laminatdicken und vor allem unterschiedlicher Faserorientierungen³⁶, werden statt gleicher Streckenlasten N_x, N_y, N_{xy} äquivalente Durchschnittsspannungen

$$\sigma_x^{\text{eq}} = N_x/t_g = \sigma_y^{\text{eq}} = N_y/t_g = \tau_{xy}^{\text{eq}} = N_{xy}/t_g = 10 \text{ MPa} \quad (4.96)$$

aufgebracht (mit der Laminatgesamtdicke $t_g = \sum_{k=1}^{n_t} t_k$). Um auch durch die geplanten Plattenlasten Schichtspannungen von wenigstens gleicher Größenordnung zu erhalten, wurden hier die gleichen äquivalenten Durchschnittsspannungen $\sigma_x^{\text{eq}}, \sigma_y^{\text{eq}}$ verwendet: oberhalb der Laminatmittelebene $z > 0$ als Zug- und unterhalb $z < 0$ als Druckspannungen. Für die zweilagigen Laminat (nur für diese wurden auch Plattenlasten betrachtet) ergaben sich dadurch Streckenbiegemomente $M_x = M_y = 0,1 \text{ N}$ sowie eine Streckenquerkraft $Q_x = \tau_{xz}^{\text{eq}} t_g = 2 \text{ N/mm}$. Bei letzterer ist zu beachten, dass bei der gewählten zugehörigen Lagerung (Abb. 4.26) zusätzlich die in Platten üblichen, im Vergleich sehr großen Biegemomente resultieren, die sich dem Querkraftschub überlagern. Das Streckendrillmoment ist passend zu den Streckenbiegemomenten ebenfalls zu $M_{xy} = 0,1 \text{ N}$ gewählt und wird durch Eckenkräfte $F_{xy} = \mp 2M_{xy}$ eingeleitet.

Die aufgeführten Laminatvarianten wurden im kommerziellen Finite-Elemente-Programm ABAQUS modelliert. Die unmittelbare Umgebung des Rissinteraktionspunktes wurde aber mit Hilfe der SBFEM abgebildet. Über eine spezielle Schnittstelle in ABAQUS, die die Programmierung und Integration eines Superelements³⁷ ermöglicht, wurde dieses Gebiet wiederum mit der umgebenden FE-Diskretisierung gekoppelt. Abbildung 4.27 zeigt beispielhaft die Diskretisierung des FE-Modells mit Superelement für das zweilagige $[90^\circ/-45^\circ]$ -Laminat sowie das achtlagige $[90^\circ/0^\circ/-45^\circ/45^\circ]_s$. Die Modelle enthalten ca. 410 000 Knoten (ca. 1,23 Mio. DOF) bzw. ca. 855 000 Knoten (ca. 2,565 Mio. DOF). Dabei kommen achtknotige Kontinuumselemente (C3D8) mit linearen Ansatzfunktionen zum Einsatz. Nur wenn nicht anders möglich, finden auch sechsknotige Elemente (C3D6, extrudierte Dreiecke) Verwendung. Nahe der ZFR sowie nahe der Grenzflächen der Laminatlagen ist die Diskretisierung wesentlich verfeinert. Ebenfalls ist darauf geachtet, genügend Elemente über eine Laminatlagendicke zu verwenden, gerade wenn die Laminatlagen einen merklichen Anteil an Biegung erfahren. Die betrachteten Laminat sind in allen Lastfällen, mit Ausnahme des Querkraftlastfalls, statisch bestimmt gelagert.³⁸

Das SBFEM-Modell (der unmittelbaren Rissinteraktionsumgebung) ist ein extrudiertes Achteck, das sich über die Höhe zweier Laminatlagen $t_s = t_1 + t_2 = 0,2 \text{ mm}$ und sowohl in x - als auch

³⁶ Die Beanspruchung der einzelnen Laminatlagen, und damit auch die lokale Beanspruchung der einzelnen ZFR, hängt ganz wesentlich von den Faserorientierungen aller Laminatlagen ab.

³⁷ in ABAQUS als User-Element (UEL) bezeichnet

³⁸ Es werden genau 6 Freiheitsgrade in der Art gesperrt, dass weder Starrkörperverschiebungen noch -rotationen möglich sind.

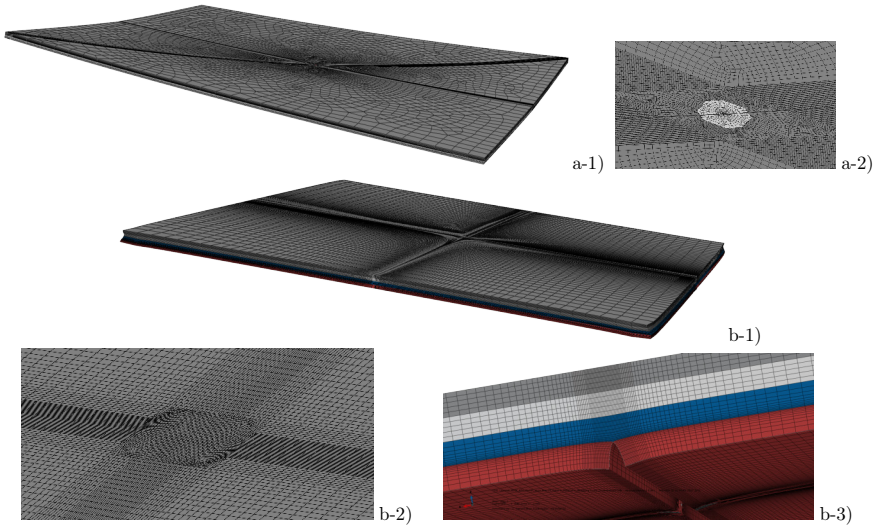


Abbildung 4.27: Beispielhafte Darstellungen des deformierten FE-Modells mit Superelement unter uniaxialer Zuglast σ_x^{eq} : a) Zweilagiges $[90^\circ/-45^\circ]$ -T800/Epoxid-Laminat. b) Halbmodell des achtlagigen $[90^\circ/0^\circ/-45^\circ/45^\circ]_s$ -T800/Epoxid-Laminat (Symmetriebedingung oben); b-2) Draufsicht nahe Superelement, b-3) Schnittansicht in x, z -Ebene fern von Laminatrand und Interaktionspunkt. Deformation um den Faktor a) 5, b) 800 skaliert.

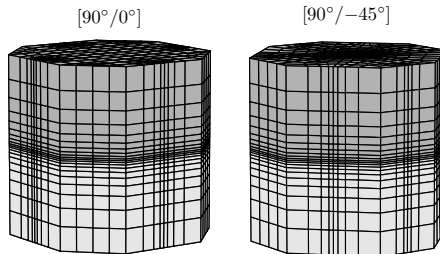


Abbildung 4.28: Diskretisierung des Gebietsrandes im SBFEM-Modell für $\alpha = 90^\circ$ (links) und $\alpha = 135^\circ$ (rechts).

in y -Richtung ebenfalls über diese Länge $2\ell_s = t_s = 0,2 \text{ mm}$ erstreckt (Abb. 4.25). Damit ist die Form immer noch vergleichsweise nahe an der für die Lösung des Eigenwertproblems optimalen Kugel (äquidistanter Gebietsrand), bietet aber durch die ebenen Randabschnitte, ähnlich wie ein Würfel, den Vorteil eines geringeren Integrationsaufwands und ist geometrisch einfacher an die umgebende FE-Struktur anzubinden. Im Gegensatz zum Würfel gestattet es außer bei einem Winkel zwischen den Rissfronten von $\alpha = 90^\circ$ auch bei $\alpha = 135^\circ$, dass die ZFR jeweils senkrecht auf den Rand des SBFEM-Gebiets treffen. Abbildung 4.28 zeigt die jeweilige Diskretisierung des Gebietsrandes mit einer Verfeinerung zur Grenzfläche und zu den Rissfronten hin.

Zur Kopplung des SBFEM-Modells mit dem FE-Modell wird in ABAQUS ein User-Element definiert, das alle Randknoten aus dem SBFEM-Modell enthält. Für dieses Element wird die mittels der SBFEM berechnete Randsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_B^u übergeben. Die einfachste Möglichkeit, das definierte User-Element an die umgebende Struktur anzubinden, ist, es für bereits im Modell vorhandene Knoten zu definieren. Das ist allerdings nur möglich, wenn die Oberflächenvernetzung aus der SBFEM exakt mit der Vernetzung an den Anschlussflächen der umgebenden Struktur übereinstimmt. Eine weitere Möglichkeit, die ohne diese Voraussetzung auskommt, ist die Anbindung mittels sogenannter „TIE-Constraints“. Dann kann das Oberflächennetz aus der SBFEM in ABAQUS in einem eigenen sogenannten „Part“ übernommen werden, während die umgebende Struktur in weiteren ebenfalls eigenen „Parts“ definiert wird. Schließlich können in der sogenannten „Assembly“ alle erstellten Parts an den vorgesehenen Stellen positioniert und über die erwähnten „TIE-Constraints“ verbunden werden. Aufgrund der einfacheren Umsetzbarkeit wurde letztere Möglichkeit implementiert.

Ergebnisse

In den betrachteten Struktur- und Lastsituationen treten nur reelle 3D- wie auch 2D-Spannungssingularitäten auf. Das Vorgehen für komplexe Spannungssingularitäten, die immer als komplex konjugierte Paare auftreten (vgl. Kap. 4.1.2), ist aber weitgehend identisch und würde einfach auf komplex konjugierte anstatt reelle modale Wichtungsfaktoren (2.76, 4.40, 4.52) führen. Abbildung 4.27 zeigt beispielhaft für einen der betrachteten Fälle die deformierten diskretisierten Laminatmodelle mit Superelement unter einer uniaxialen Zuglast.

In Tabelle 4.3 sind für die ZFR-ZFR-Interaktion mit Winkel $\alpha = 90^\circ$ zwischen den Rissfronten und ZFR-Neigungswinkeln $\beta_1 = \beta_2 = 90^\circ$ die modalen Wichtungsfaktoren der Deformationsmoden mit 3D-Spannungssingularitäten in rechteckigen CFK-Laminaten mit unterschiedlichem Lagenaufbau und unter verschiedenen Lasten dargestellt. Dabei ist zu beachten, dass die angegebenen Werte der modalen Wichtungsfaktoren, wie in allen Ergebnisdarstellungen dieses Kapitels, zur besseren Lesbarkeit mit 10^3 multipliziert wurden. Weiterhin entsprechen die Deformationsmoden den in Abbildung 4.10 gezeigten.

Wie bereits in Kapitel 4.2.2 angedeutet ist hier nun klar erkennbar, dass durch Lasten parallel und oder unmittelbar senkrecht zu den Faserorientierungen vor allem die 3D-Rissöffnungsmoden $co1$ & $co2$ angesprochen werden und im biaxialen Lastfall ($\sigma_x^{eq} = \sigma_y^{eq}$) sogar fast nur³⁹ Deformationsmodus $co1$ angesprochen wird. Durch eine Schubbelastung in der Laminebene τ_{xy}^{eq} wird, wie erwartet, besonders Deformationsmodus $ct1$ angeregt. Deformationsmodus $ct2$ wird durch ein auf die Laminatplatte aufgebrachtes Drillmoment M_{xy} hervorgerufen und ist in diesem Fall, wie $co1$ im biaxialen Lastfall, sogar der einzige angesprochene Deformationsmodus. Ebenfalls alleine angesprochen wird Deformationsmodus $co2$ durch eine gleichzeitige Belastung der Laminatplatte mit Biegemomenten $M_x = M_y$. Erwartungsgemäß treten schließlich die Deformationsmoden $cs1$ und $cs2$ bei Querkraftschub und damit bei der Streckenquerkraftbelastung Q_x auf. Allerdings werden aufgrund des großen überlagerten Biegemoments M_x , das gleichzeitig aus der Streckenquerkraftbelastung resultiert, auch andere Deformationsmoden angesprochen. Insbesondere $co1$ und $co2$ weisen deshalb sehr große modale Wichtungsfaktoren c_{co1} und c_{co2} auf, während c_{cs1} und c_{cs2} entsprechend

³⁹ Tatsächlich werden auch noch weitere höhere Deformationsmoden angesprochen, aber $co1$ als einziger, der auch eine 3D-Spannungssingularität anspricht.

Tabelle 4.3: Modale Wichtungsfaktoren c_j für einen Winkel $\alpha = 90^\circ$ zwischen den Rissfronten in rechteckigen T800/Epoxid-Verbund-Laminaten (CFK) mit Kantenlängen $\ell = b = 16$ mm und Lagendicken $t_k = 0,1$ mm für diverse Lagenaufbauten und Lastfälle (Scheibenlasten mit N_x, N_y, N_{xy} mit äquivalenten Randspannungen $\sigma_x^{\text{eq}}, \sigma_y^{\text{eq}}, \tau_{xy}^{\text{eq}}$ und Plattenlasten M_x, M_y, M_{xy}, Q_x).

Deformationsmodus (j)		co1 (7)	co2 (9)	cs1 (5)	cs2 (6)	ct1 (4)	ct2 (8)	
Sing.-Exp. $\text{Re}(1 - \lambda_j)$		0,456	0,162	0,480	0,480	0,630	0,356	
modaler Wichtungsfaktor $c_j \cdot 10^3$	Lastfall	Lagenaufbau						
	σ_x^{eq} 10 MPa	$[90^\circ/0^\circ]$	0,3756	-0,6015	-	-	-	-
		$[0^\circ/90^\circ]_s$	0,0822	-0,1353	-	-	-	-
		$[90^\circ/0^\circ]_s$	0,0884	-0,1295	-	-	-	-
		$[\pm 45^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$	0,0795	-0,2413	0,0003	0,0003	0,0004	-0,0015
	σ_y^{eq} 10 MPa	$[90^\circ/0^\circ]$	0,3756	0,6017	-	-	-	-
		$[0^\circ/90^\circ]_s$	0,0884	0,1295	-	-	-	-
		$[90^\circ/0^\circ]_s$	0,0822	0,1353	-	-	-	-
		$[\pm 45^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$	0,0509	0,2108	0,0003	-0,0003	-0,0017	0,0016
	$\sigma_x^{\text{eq}} = \sigma_y^{\text{eq}}$ 10 MPa	$[90^\circ/0^\circ]$	0,7512	0,0002	-	-	-	-
		$[0^\circ/90^\circ]_s$	0,1708	0,0058	-	-	-	-
		$[90^\circ/0^\circ]_s$	0,1708	0,0058	-	-	-	-
		$[\pm 45^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$	0,1304	-0,0304	0,0006	-	-0,0014	-
	τ_{xy}^{eq} 10 MPa	$[90^\circ/0^\circ]$	-	-	-	-	-0,7848	-
		$[0^\circ/90^\circ]_s$	-	-	-	-	-0,7852	-0,0042
		$[90^\circ/0^\circ]_s$	-	-	-	-	-0,7852	-0,0042
$[\pm 45^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$		0,0035	0,0016	-	-	-0,1277	-0,0958	
M_x	$[90^\circ/0^\circ]$	-0,3026	0,4861	-	-	-	-	
M_y	$[90^\circ/0^\circ]$	0,3026	0,4861	-	-	-	-	
M_{xy}	$[90^\circ/0^\circ]$	-	-	-	-	-	-1,5324	
Q_x	$[90^\circ/0^\circ]$	47,4216	-78,6188	0,4080	0,3809	0,0047	-0,0023	

Achtung: Die Werte der modalen Wichtungsfaktoren sind zur besseren Lesbarkeit mit 10^3 multipliziert.

„-“ steht für einen Betrag des modalen Wichtungsfaktors $|c_j| < 10^{-7}$.

der Wahl der Größe der aufgebrachtten Randlast $\tau_{xz}^{\text{eq}} = 10$ MPa von ähnlicher Größenordnung wie die modalen Wichtungsfaktoren der übrigen Lastfälle sind. Das durchschnittliche Streckenbiegemoment im vertikalen Schnitt bei $x = \ell/2$ beträgt

$$\frac{1}{b} \int_0^b M_x(x=\ell/2, y) dy = \frac{\ell}{2b} \int_0^b -Q_x dy = -2 \text{ N/mm} \cdot 8 \text{ mm} = -16 \text{ N} = -160 M_x.$$

Die Verhältnisse zwischen den modalen Wichtungsfaktoren, die im Momentenlastfall ungleich null sind, und den entsprechenden modalen Wichtungsfaktoren des Querkraftlastfalls liegen ebenfalls jeweils gerade um -160 ,

$$c_{\text{co1}}(Q_x)/c_{\text{co1}}(M_x) \approx -157 \quad , \quad c_{\text{co2}}(Q_x)/c_{\text{co2}}(M_x) \approx -162,$$

sodass es naheliegend erscheint, dass die Anregung dieser Deformationsmoden weitgehend auf das zusätzlich hervorgerufene Biegemoment zurückzuführen ist.

Im Folgenden sollen weitere Lastfälle und Laminataufbauten mit $\alpha = 90^\circ$ detaillierter betrachtet werden. Im Falle uniaxialen Zuges in x -Richtung ($\sigma_x^{\text{eq}} = 10$ MPa) ist der modale

Wichtungsfaktor c_{co1} positiv, was zunächst für eine Rissöffnung beider ZFR spricht. Gleichzeitig ist aber c_{co2} negativ, was die zu erwartende weitere Rissöffnung des unteren ZFR und gleichzeitig eine (zumindest teilweise) Risschließung des oberen ZFR bewirkt (vgl. Abb. 4.10). Bezogen auf den Radius $r = 0,1$ mm anstatt $r = 1$ mm zeigt sich, dass die Rissöffnung auch des oberen ZFR letztendlich leicht überwiegt:

$$[90^\circ/0^\circ]: \quad 0,62 \approx -c_{co1}/c_{co2} > (\xi(r=0,1 \text{ mm}))^{\lambda_{co2}-\lambda_{co1}} \approx 0,51 \quad \text{für } c_{co2} < 0.$$

Dies gilt ähnlich auch für die symmetrischen Kreuzverbunde $[0^\circ/90^\circ]_s$ und $[90^\circ/0^\circ]_s$, wobei es bei diesen aufgrund der Symmetrie keine überlagerten Biegemomente gibt – weder aufgrund des Lagenaufbaus noch aufgrund der asymmetrischen Erstschädigung. Daher sind die modalen Wichtungsfaktoren hier merklich kleiner. Beim quasi-isotropen Laminat mit Lagenaufbau $[\pm 45^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$ ist das Verhältnis $-c_{co1}/c_{co2} \approx 0,33 < 0,51$ und damit zu klein für eine Rissöffnung über die vollständigen Rissflanken der ZFR in den 0° -Lagen. Dies entspricht der Erwartung, da die Rissöffnung hier durch die Nachbarlage unmittelbar restringiert ist. Letztendlich muss aber der ZFR in den 0° -Lagen aufgrund der dort herrschenden Querkontraktion zumindest leicht geöffnet sein. Da nahe der ZFR-Rissfront der Deformationsmodus mit dem kleineren Abklingexponenten, also $co1$, dominiert (in diesem speziellen Fall bis $r = 0,023$ mm) ist dies auch gegeben.

Uniaxialer Zug in y -Richtung muss im Kreuzverbund zu den gleichen modalen Wichtungsfaktoren aber mit Vorzeichenumkehr bei Deformationsmodus $co2$ führen: Während weiterhin beide ZFR öffnen sollen und damit auch weiter $c_{co1} > 0$ gelten soll, ist es nun aber der untere ZFR, der sich teilweise auch wieder etwas schließen soll, d. h. $c_{co2} > 0$. Die Vorzeichenumkehr findet auch bei den übrigen asymmetrischen Deformationsmoden statt. Die Ergebnisse des biaxialen Zuges entsprechen der Superposition der beiden uniaxialen Lastfälle.

In der Literatur wird häufig berichtet, dass sich ZFR in äußeren Laminatlagen, deren Fasern quer zur Lastrichtung orientiert sind, tendenziell etwas früher als in inneren Laminatlagen, deren Fasern quer zur Lastrichtung orientiert sind, bilden (z. B. Nairn u. Hu (1992a)). Dies ist im Wesentlichen auf die außen fehlende Restriktion bezüglich der ZFR-Öffnung zurückzuführen. Diese Tendenz zur höheren Kritikalität von ZFR mit geringerer Öffnungsrestriktion lässt sich auch anhand der hier berechneten modalen Wichtungsfaktoren bei uniaxialem Zug erkennen. So ist gerade c_{co1} etwas größer, wenn die stärker öffnenden ZFR (quer zur Lastrichtung x) im Laminatinneren ($[0^\circ/90^\circ]_s$) oder außen ($[90^\circ/0^\circ]_s$) liegen.⁴⁰ Dass sich keine deutlicheren Unterschiede ergeben, liegt daran, dass auch die inneren ZFR dadurch, dass sie praktisch unmittelbar an einen weiteren gleich orientierten ZFR grenzen (bzw. sich der ZFR über die doppelte Lagendicke öffnen darf), eine abgeschwächte Öffnungsrestriktion erfahren. Ein deutlicheres Beispiel liefert das quasi-isotrope Laminat, das einmal in x -Richtung und einmal in y -Richtung uniaxial belastet wird. Dieser Wechsel der Lastrichtung entspricht gerade einem Tausch von 0° - und 90° -Lagen, wobei weiterhin angenommen werden soll, dass der Tausch der äußeren $\pm 45^\circ$ -Lagen keinen dominierenden Einfluss auf die modalen Wichtungsfaktoren hat. Die beiden ZFR in den 90° -Lagen erfahren hier eine deutlich geringere Öffnungsbehinderung als die ZFR in den 0° -Lagen, sodass eine uniaxiale Belastung in x -Richtung nun zu betragsmäßig merklich stärkeren modalen Wichtungsfaktoren c_{co1} (+56 %) und c_{co2} (+14 %) führt als eine uniaxiale Belastung in y -Richtung.

⁴⁰ Diese Zuordnung der Laminatlagenaufbauten gilt nur für uniaxialen Zug in x -Richtung und dreht sich bei uniaxialem Zug in y -Richtung gerade um.

Tabelle 4.4: Modale Wichtungsfaktoren c_j für einen Winkel $\alpha = 135^\circ$ zwischen den Rissfronten in rechteckigen T800/Epoxyd-Verbund-Laminaten (CFK) mit Kantenlängen $\ell = b = 16$ mm und Lagendicken $t_k = 0,1$ mm für diverse Lagenaufbauten und Lastfälle (Scheibenlasten mit N_x, N_y, N_{xy} mit äquivalenten Randspannungen $\sigma_x^{\text{eq}}, \sigma_y^{\text{eq}}, \tau_{xy}^{\text{eq}}$ und Plattenlasten M_x, M_y, M_{xy}, Q_x).

Deformationsmodus j		(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	
Sing.-Exp. $\text{Re}(1 - \lambda_j)$		0,701	0,597	0,385	0,347	0,342	
Lastfall		Lagenaufbau					
modaler Wichtungsfaktor $c_j \cdot 10^3$	σ_x^{eq} 10 MPa	$[90^\circ / -45^\circ]$	0,8130	-0,0002	-0,2946	0,1968	0,0003
		$[-45^\circ / 90^\circ]_s$	0,6139	-0,0001	-0,1018	-0,2092	0,0003
		$[90^\circ / -45^\circ]_s$	0,6139	-0,0001	-0,1030	-0,2030	0,0003
	σ_y^{eq} 10 MPa	$[90^\circ / -45^\circ]$	0,0412	-	0,2862	0,2742	-
		$[-45^\circ / 90^\circ]_s$	0,0010	-	0,1012	0,0745	-
		$[90^\circ / -45^\circ]_s$	0,0010	-	0,1023	0,0695	-
	$\sigma_x^{\text{eq}} = \sigma_y^{\text{eq}}$ 10 MPa	$[90^\circ / -45^\circ]$	0,8551	-0,0001	-0,0084	0,4710	0,0003
		$[-45^\circ / 90^\circ]_s$	0,6149	-0,0001	-0,0006	-0,1348	0,0003
		$[90^\circ / -45^\circ]_s$	0,6149	-0,0001	-0,0007	-0,1335	0,0003
	τ_{xy}^{eq} 10 MPa	$[90^\circ / -45^\circ]$	0,7712	-0,0001	0,5791	-0,0647	-0,0001
		$[-45^\circ / 90^\circ]_s$	0,6114	-0,0002	0,2029	-0,2665	0,0005
		$[90^\circ / -45^\circ]_s$	0,6114	-0,0002	0,2031	-0,2756	0,0003
	$M_x = 0,1$ N	$[90^\circ / -45^\circ]$	-0,0321	0,0001	0,1001	-0,1867	-0,0002
	$M_y = 0,1$ N	$[90^\circ / -45^\circ]$	0,0374	-	0,2175	0,2128	0,0001
	$M_{xy} = 0,1$ N	$[90^\circ / -45^\circ]$	-0,0794	-	0,1345	-0,4522	-0,0007
	$Q_x = 2 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$	$[90^\circ / -45^\circ]$	2,0648	1,7811	-24,4214	23,6380	-0,6086

Achtung: Die Werte der modalen Wichtungsfaktoren sind zur besseren Lesbarkeit mit 10^3 multipliziert.
 „-“ steht für einen Betrag des modalen Wichtungsfaktors $|c_j| < 10^{-7}$.

Weiterhin ist Tabelle 4.3 zu entnehmen, dass das komplexere quasi-isotrope Laminat über alle Scheibenlasten hinweg tendenziell mehr Deformationsmoden anspricht. Im Falle der uniaxialen Zuglasten sowie deren Kombination bei biaxialem Zug sind die daraus entstehenden Beiträge der anderen Deformationsmoden noch sehr klein ($c_{cs1}, c_{cs2}, c_{ct1}, c_{ct2} < 2 \cdot 10^{-6}$, während $c_{co1} > 5 \cdot 10^{-5}$). Für den ebenen Schublastfall τ_{xy}^{eq} wird der im asymmetrischen wie symmetrischen Kreuzverbund noch kaum angesprochene Deformationsmodus ct2 aber nun merklich angeregt $c_{ct2} \approx 9,6 \cdot 10^{-5}$ und führt auf einen modalen Wichtungsfaktor von ähnlicher Größenordnung wie der des vorher gänzlich dominanten Deformationsmodus ct1 mit $c_{ct1} \approx 12,8 \cdot 10^{-5}$. Das bedeutet, die Anregung des sehr kritischen Deformationsmodus ct1 wird spürbar abgeschwächt (-84%), sodass insgesamt die gegenüber einem Kreuzverbund zu erwartende⁴¹ wesentliche Entschärfung der Situation eintritt.

In Tabelle 4.4 sind für die ZFR-ZFR-Interaktion nun mit dem Winkel $\alpha = 135^\circ$ zwischen den Rissfronten die modalen Wichtungsfaktoren der Deformationsmoden mit 3D-Spannungssingularitäten in ebenfalls rechteckigen CFK-Laminaten unter verschiedenen Lasten dargestellt. Die Deformationsmoden entsprechen den in Abbildung 4.11 gezeigten. Da hier kein eindeutiges Benennungskonzept vorliegt, sind die Deformationsmoden aufsteigend nach der Größe ihrer zugehörigen Abklingexponenten λ_j und damit indirekt auch absteigend in der Stärke ihrer 3D-

⁴¹ Die $\pm 45^\circ$ -Lagen im quasi-isotropen Laminat nehmen den Großteil der ebenen Schublast auf, sodass die schubweichen 0° - und 90° -Lagen gegenüber einem reinen Kreuzverbund eine sehr viel kleinere Deformation erfahren.

Spannungssingularitäten geordnet. Die Nummerierung beginnt erst bei (4), da die ersten drei Deformationsmoden im positiven Spektrum Λ_p die Starrkörpermoden mit $\lambda = 0$ darstellen.

Nun existieren zwei Deformationsmoden mit starken 3D-Spannungssingularitäten, von denen eine nochmals deutlich stärker als die einzige starke im Falle mit $\alpha = 90^\circ$ ist. Es fällt auf, dass die stärkste Spannungssingularität für alle Lastfälle angesprochen wird – besonders für die Scheibenlasten. Nur bei uniaxialen Zug in y -Richtung ist die Anregung vergleichsweise gering: Hier liegt ein ZFR parallel zur Lastrichtung und auch der zweite ZFR ist gegenüber der Lastrichtung nur um 45° gedreht, sodass die für diesen Deformationsmodus charakteristische Rissöffnung kaum stattfindet.

Die Deformationsmoden (6) und (7) treten ebenfalls in fast allen Lastfällen auf. Hierzu ist anzumerken, dass die Zuordnung der in Kapitel 4.2.2 vorgestellten Deformationsmoden zu den betrachteten Lastfällen für $\alpha = 135^\circ$ nicht mehr so eindeutig zu bestätigen ist, wie es noch bei $\alpha = 90^\circ$ möglich war. Dies liegt darin begründet, dass bei der Betrachtung der Randwertprobleme die Orientierung der ZFR relativ zu den Laminatkanten eine andere als in Abbildung 4.11 ist. Unter biaxialen Zug spielt dies jedoch keine Rolle, sodass Deformationsmodus (6), der in Kapitel 4.2.2 als vor allem durch eine ebene Schubbeanspruchung anregbar identifiziert wurde, erwartungsgemäß weitgehend unangesprochen bleibt. Dass er im Schublastfall vergleichsweise große Beiträge liefert, dient als weitere Bestätigung. Deformationsmodus (7) liefert seine relativ zu den anderen Deformationsmoden größten Anteile, ebenfalls übereinstimmend mit den Aussagen aus Kapitel 4.2.2, unter der Drillmomentenbelastung M_{xy} sowie M_x . Die Deformationsmoden (5) und (8) mit hauptsächlich Schubdeformationen der beiden ZFR in der Laminatvertikalen bleiben erwartungsgemäß von Scheibenlasten weitgehend unberührt. Sie werden wieder durch die Querkraftbelastung des Laminats angesprochen, wobei das überlagerte, aus der Querkraftbelastung resultierende große Biegemoment auch wieder zu einer starken Anregung der übrigen Deformationsmoden führt.

Wie schon für die Lamine mit $\alpha = 90^\circ$ macht es hier für die Lamine mit $\alpha = 135^\circ$ kaum einen Unterschied, ob ein Lagenaufbau $[-45^\circ/90^\circ]_s$ oder $[90^\circ/-45^\circ]_s$ verwendet wird. Daher spielen bei der Vorstellung der folgenden Ergebnisse für GFK-Verbunde nicht mehr die Ergebnisse für beide, sondern nur noch einen symmetrischen Lagenaufbau eine Rolle.

Die Tabellen 4.5 und 4.6 zeigen die modalen Wichtungsfaktoren für die gleichen Struktur- und Lastsituationen, wie sie bisher für den T800/Epoxid-Verbund (CFK) gezeigt worden sind, aber nun für einen typischen GFK-Verbund. Da die Deformationsmoden für unterschiedliche Anisotropiegrade (aber bei gleicher lokaler Geometrie und Materialorientierung) sehr ähnlich sind und sich auf den ersten Blick vor allem durch die zugehörigen Spannungssingularitätsexponenten unterscheiden (vgl. Kap. 4.2.2) sind auch die resultierenden modalen Wichtungsfaktoren für CFK und GFK bei gleichen Lastfällen ähnlich: Es werden die gleichen Deformationsmoden mit gleichen Vorzeichen angesprochen. Auch die Größenverhältnisse der Deformationsmoden untereinander (bei einem bestimmten Lastfall) sind ähnlich, aber erwartungsgemäß nicht identisch. Sind also die genauen Verhältnisse der modalen Wichtungsfaktoren untereinander oder gar ihre absolute Größe gefragt, sind sie für jeden Materialfall separat zu ermitteln.

Aufgrund der unterschiedlichen Spannungssingularitätsexponenten sind die modalen Wichtungsfaktoren für CFK und GFK generell schwer vergleichbar. Trotzdem fällt auf, dass die modalen Wichtungsfaktoren für die meisten Deformationsmoden mit 3D-Spannungssingularitäten bei GFK etwas größer sind. Schon im 2D-Fall des einfachen ZFR unter Annahmen des GEVZ

Tabelle 4.5: Modale Wichtungsfaktoren c_j für einen Winkel $\alpha = 90^\circ$ zwischen den Rissfronten in rechteckigen GFK-Verbund-Laminaten mit Kantenlängen $\ell = b = 16$ mm und Lagendicken $t_k = 0,1$ mm für diverse Lagenaufbauten und Lastfälle (Scheibenlasten mit N_x, N_y, N_{xy} mit äquivalenten Randspannungen $\sigma_x^{\text{eq}}, \sigma_y^{\text{eq}}, \tau_{xy}^{\text{eq}}$ und Plattenlasten M_x, M_y, M_{xy}, Q_x).

Deformationsmodus j		co1 (5)	co2 (8)	cs1 (6)	cs2 (7)	ct1 (4)	ct2 (9)	
Sing.-Exp. $\text{Re}(1 - \lambda_j)$		0,531	0,263	0,490	0,490	0,620	0,2577	
Lastfall		Lagenaufbau						
modaler Wichtungsfaktor $c_j \cdot 10^3$	σ_x^{eq} 10 MPa	$[90^\circ/0^\circ]$	0,4834	-0,8931	-	-	0,0001	0,0017
		$[0^\circ/90^\circ]_s$	0,1528	-0,3003	-	-	-	0,0005
		$[\pm 45^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$	0,1455	-0,4034	0,0002	0,0002	0,0001	-0,0013
	σ_y^{eq} 10 MPa	$[90^\circ/0^\circ]$	0,4834	0,8931	-	-	-	-0,0019
		$[0^\circ/90^\circ]_s$	0,1654	0,2700	-	-	-	-0,0006
		$[\pm 45^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$	0,0924	0,3302	0,0002	-0,0002	-0,0021	0,0030
	τ_{xy}^{eq} 10 MPa	$[90^\circ/0^\circ]$	-	-	-	-	-0,7449	-
		$[0^\circ/90^\circ]_s$	-	-	-	-	-0,7451	-0,0063
		$[\pm 45^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$	0,0022	0,0010	-	-	-0,2813	-0,2978
	M_x	$[90^\circ/0^\circ]$	-0,3844	0,7045	-	-	-	-0,0014
M_y	$[90^\circ/0^\circ]$	0,3844	0,7045	-	-	-	-0,0014	
M_{xy}	$[90^\circ/0^\circ]$	-	-	-	-	-	-2,0691	
Q_x	$[90^\circ/0^\circ]$	57,4839	-117,3978	0,6048	0,5744	0,0050	0,2427	

Achtung: Die Werte der modalen Wichtungsfaktoren sind zur besseren Lesbarkeit mit 10^3 multipliziert.

„-“ steht für einen Betrag des modalen Wichtungsfaktors $|c_j| < 10^{-7}$.

Tabelle 4.6: Modale Wichtungsfaktoren c_j für einen Winkel $\alpha = 135^\circ$ zwischen den Rissfronten in rechteckigen GFK-Verbund-Laminaten mit Kantenlängen $\ell = b = 16$ mm und Lagendicken $t_k = 0,1$ mm für diverse Lagenaufbauten und Lastfälle (Scheibenlasten mit N_x, N_y, N_{xy} mit äquivalenten Randspannungen $\sigma_x^{\text{eq}}, \sigma_y^{\text{eq}}, \tau_{xy}^{\text{eq}}$ und Plattenlasten M_x, M_y, M_{xy}, Q_x).

Deformationsmodus j		(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	
Sing.-Exp. $\text{Re}(1 - \lambda_j)$		0,732	0,626	0,468	0,374	0,307	
Lastfall		Lagenaufbau					
modaler Wichtungsfaktor $c_j \cdot 10^3$	σ_x^{eq} 10 MPa	$[90^\circ/-45^\circ]$	0,6381	-0,0001	-0,3576	0,2489	0,0007
		$[-45^\circ/90^\circ]_s$	0,4215	-0,0001	-0,1973	-0,1049	0,0004
	σ_y^{eq} 10 MPa	$[90^\circ/-45^\circ]$	0,0672	-	0,3589	0,3259	-
		$[-45^\circ/90^\circ]_s$	0,0083	-	0,1827	0,1629	-0,0001
	$\sigma_x^{\text{eq}} = \sigma_y^{\text{eq}}$ 10 MPa	$[90^\circ/-45^\circ]$	0,7053	-	0,0014	0,5747	0,0006
		$[-45^\circ/90^\circ]_s$	0,4299	-0,0001	-0,0146	0,0581	0,0003
	τ_{xy}^{eq} 10 MPa	$[90^\circ/-45^\circ]$	0,5713	0,0001	0,7195	-0,0827	-0,0008
		$[-45^\circ/90^\circ]_s$	0,4137	-	0,3568	-0,2469	0,0003
	$M_x = 0,1$ N	$[90^\circ/-45^\circ]$	-0,0475	0,0002	0,2095	-0,1852	-0,0007
	$M_y = 0,1$ N	$[90^\circ/-45^\circ]$	0,0528	-	0,2584	0,2011	0,0001
$M_{xy} = 0,1$ N	$[90^\circ/-45^\circ]$	-0,1115	-	0,0510	-0,4411	-0,0019	
$Q_x = 2 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$	$[90^\circ/-45^\circ]$	4,9735	1,3372	-41,3433	22,0271	-0,7171	

Achtung: Die Werte der modalen Wichtungsfaktoren sind zur besseren Lesbarkeit mit 10^3 multipliziert.

„-“ steht für einen Betrag des modalen Wichtungsfaktors $|c_j| < 10^{-7}$.

war anhand des Spannungssingularitätsexponenten zu beobachten, dass sich die beiden schwächeren Spannungssingularitäten bei GFK etwas kritischer, die starke Spannungssingularität aber weniger kritisch als bei CFK darstellte (Abb. 4.7). Ähnliches war auch für Spannungssingularitätsexponenten der 3D-Deformationsmoden zu beobachten (vgl. Kap. 4). So sind auch für die Deformationsmoden $co1$, $co2$, $cs1$ und $cs2$ die Spannungssingularitätsexponenten bei GFK kritischer. Für Deformationsmodus $ct1$, der jeweils die stärkste Spannungssingularität stellt, und Deformationsmodus $ct2$ sind sie aber weniger kritisch. Ähnlich sind auch die modalen Wichtungsfaktoren bei der überwiegenden Anzahl der Deformationsmoden, die aber gerade nicht die jeweils stärkste Spannungssingularität stellen, bei GFK eher größer. Bei den Deformationsmoden mit den stärksten Spannungssingularitäten liefert hingegen durchweg CFK die größeren modalen Wichtungsfaktoren.

Fazit

Schließlich stellt sich die Frage, welche Schlussfolgerungen aus den gewonnenen Erkenntnissen gezogen und wie sie gewinnbringend eingesetzt werden können. Zunächst lässt sich eine Klassifizierung nach Kritikalität der Struktursituationen anhand der gefundenen Spannungssingularitätsexponenten durchführen. Dabei sind vor allem Struktursituationen mit starken Spannungssingularitäten und damit Energiefreisetzungsraten $\mathcal{G} \rightarrow \infty$ als besonders instabil und somit kritisch einzuschätzen. Diese starken Spannungssingularitäten müssen aber auch aktiv sein, um ihr kritisches Potential entfalten zu können. Dazu hat die Untersuchung der unterschiedlichen Lamine und deren Randwertprobleme gezeigt, dass in solch komplexen Strukturen, wie sie hier betrachtet wurden, und in denen mehrere Defekte unmittelbar interagieren, nur in Spezialfällen nicht alle Deformationsmoden mit 3D-Spannungssingularitäten angesprochen werden. Dies hat sich besonders in der Untersuchung der Lamine mit dem Winkel $\alpha = 135^\circ$ zwischen den Rissfronten bemerkbar gemacht, in denen die Symmetrien der Belastung zumeist nicht mehr mit den Symmetrien der betrachteten Struktur übereinstimmen. Generell muss also immer mit dem Ansprechen aller Deformationsmoden gerechnet werden. Folglich ist in einem ersten Schritt eine vergleichsweise weniger aufwendige Untersuchung nur der Spannungssingularitätsexponenten gerechtfertigt und die Ergebnisse aus Kapitel 4.2.1 zu den asymptotischen Nahfeldern sind hinreichend.

Für eine detailliertere Untersuchung ist zusätzlich die Größe der modalen Wichtungsfaktoren in den jeweiligen Struktursituationen und Lastfällen zu betrachten. Denn selbst wenn alle Deformationsmoden angesprochen werden, muss es natürlich einen Unterschied machen, wie stark sie jeweils angeregt werden. Dabei ist zu beachten, dass Spannungssingularitäten zunächst ein rein theoretisches Ergebnis der linearen Elastizität sind. In realen Strukturen werden sie in ihrer unmittelbaren Umgebung durch inelastische Deformationen abgebaut, sodass auch in sehr spröden Werkstoffen, in denen dieser Bereich inelastischer Deformationen sehr klein ist, die eigentliche elastizitätstheoretische Lösung erst in gewissem Abstand wieder näherungsweise Gültigkeit besitzt. Werden also sogar starke Spannungssingularitäten nur schwach angesprochen, kann trotzdem eine viel stärker angesprochene schwache Spannungssingularität die Gesamtstrukturantwort, und damit den Versagensprozess, dominieren.

Des Weiteren bleibt festzuhalten, dass die modalen Wichtungsfaktoren von Deformationsmoden unterschiedlicher Spannungssingularitäten nicht direkt vergleichbar sind. Damit sind automatisch auch die meisten Struktursituationen untereinander nicht direkt vergleichbar. Dies stellt das Konzept des modalen Wichtungsfaktors bzw. GSIF als unmittelbaren Bruchindikator nicht zwingend generell infrage. Wie in der Arbeit von Labossiere u. Dunn

(2001) gezeigt, kann es, sprödes Versagen vorausgesetzt, bei gleichbleibender Lastverteilung immer zur Abbildung eines Größeneffektes eingesetzt werden. Um jedoch wenigstens noch unterschiedliche Lastsituationen einer Strukturkonfiguration abbilden zu können, wäre im allgemeinen dreidimensionalen Fall mit mehreren 3D-Spannungssingularitäten schon ein Mixed-Mode-Bruchkriterium notwendig, das die Interaktion aller Deformationsmoden mit Spannungssingularitäten und dabei zusätzlich auch noch deren Abklingverhalten mit berücksichtigt. Diesen experimentellen Aufwand zur Beschaffung kritischer modaler Wichtungsfaktoren und/oder den konzeptionellen Aufwand zur Beschaffung hoch entwickelter Mixed-Mode-Bruchkriterien für jede einzelne zu betrachtende, mitunter sehr spezielle Strukturkonfiguration zu betreiben, kann durchaus fragwürdig sein.

Einen allgemeineren Ansatz, der an die Stelle eines komplexen Mixed-Mode-Bruchkriteriums treten kann und weniger experimentelle Ergebnisse (dafür aber umso mehr numerische Berechnungen) erfordert, bietet ein gekoppeltes Spannungs- und Energiekriterium im Rahmen der Bruchmechanik finiter Risse. Dieses kommt stets ausschließlich mit den beiden tatsächlichen Materialparametern Festigkeit und Bruchzähigkeit aus.

Um das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium auswerten zu können, ist jedoch noch mehr nötig als die Bestimmung der modalen Wichtungsfaktoren einer bestimmten Struktursituation: Zusätzlich sind etliche mögliche Folge-Risskonfigurationen und damit die angedeuteten vielen weiteren Modelle und Berechnungen erforderlich. Eine vergleichsweise effiziente numerische Umsetzung der Betrachtung dieser Folge-Risskonfigurationen, die auf einer asymptotischen Methodik zur Lösung eines Zweirandproblems mittels der SBFEM basiert, wird in Kapitel 6 präsentiert. Ein konkreter Anwendungsfall mit Umsetzung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums im Rahmen der Bruchmechanik finiter Risse ist Gegenstand der Untersuchungen in Kapitel 7.

Bevor sich aber weiter dem Thema der *Bewertung* von Spannungssingularitäten gewidmet wird, wird im nun folgenden Kapitel eine Erweiterung der klassischen SBFEM zur Steigerung von sowohl Effizienz als auch Genauigkeit der *Spannungsanalyse* von 3D-Spannungssingularitäten vorgeschlagen.

Kapitel 5

Erweiterung der Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode um eine Anreicherung mit 2D-Nahfeldlösungen

Die Untersuchungen der im vorherigen Kapitel betrachteten Randwertprobleme ergaben, dass sowohl die Konvergenz als auch die Genauigkeit der Verschiebungslösung gerade bei Rissinteraktionsproblemen mitunter wesentlich reduziert sind. Tatsächlich führt die Anwesenheit von Diskontinuitäten mit singulären Spannungen auf dem diskretisierten Gebietsrand wie auch in der klassischen FEM zu einer Abnahme der Konvergenzordnung (siehe auch Apel et al. (2002b)).

Innerhalb dieses Kapitels wird der diskretisierte Gebietsrand, insbesondere im Zusammenhang mit dort auftretenden Spannungssingularitäten, ausdrücklich nicht als tatsächlicher Rand/tatsächliche Oberfläche eines Körpers angesehen. Wie z. B. schon von Benthem (1977) aber auch innerhalb dieser Arbeit im vorherigen Kapitel gezeigt, stellen Liniensingularitäten, die auf den Rand eines elastischen Körpers treffen (egal ob frei, belastet oder eingespannt) i. A. eigene 3D-Struktursituationen dar. Sie besitzen eigene dreidimensionale asymptotische Nahfelder mit 3D-Spannungssingularitäten, zugehörigen 3D-Deformationsmoden und 3D-Abklingverhalten. Um solche komplexen Felder bestimmen zu können, wurde im vorangehenden Kapitel der tatsächliche Rand des betrachteten Körpers in der Umgebung des Punktes, wo die Liniensingularität auf diesen Rand trifft, gerade *nicht* diskretisiert, sondern statt dessen das Skalierungszentrum dort platziert. Entlang der Liniensingularität muss aber nach Aksentian (1967) das asymptotische 2D-Nahfeld existieren. Damit dieses für jeden beliebigen virtuellen Rand (vor allem die im Körperinneren liegenden) dargestellt werden kann, muss dieses 2D-Feld von den Ansatzfunktionen auf dem diskretisierten virtuellen Gebietsrand dargestellt werden. Deshalb ist die Stärke der Liniensingularität ausschlaggebend für die Konvergenz des Randwertproblems (Gl. (5.2)).

Am Beispiel einer Pyramide mit quadratischer Basis und Riss, der von ihrer Spitze bis zum Zentrum ihrer Basis verläuft, sollen diese Ausführungen kurz illustriert werden (Abb. 5.1). Der Riss ist rötlich dargestellt. Seine Rissfront trifft sowohl an der Pyramidenspitze S_1 als auch an der Pyramidenbasis in S_2 auf den Pyramidenrand. Um die dreidimensionalen asymptotischen Felder an S_1 und S_2 im Rahmen einer SBFE-Modellierung zu erfassen, ist eine Gebietszerlegung in einen oberen und einen unteren Teil gemäß Abbildung 5.1b notwendig, wobei je ein Skalierungszentrum an S_1 und S_2 platziert wird. Das obere Teilgebiet stellt wiederum selbst eine Pyramide dar, von welcher nur die Basis (in Abb. 5.1b mit 4 Elementen) diskretisiert wird.¹ Die Basis des unteren Teilgebiets ist nicht diskretisiert, sondern nur seine Deckfläche und Seitenflächen (in Abb. 5.1b mit 4 + 8 Elementen). Das sich entlang

¹ Diese Struktursituation wurde von Hell u. Becker (2016b) hinsichtlich auftretender Spannungssingularitätsexponenten und deren Konvergenz untersucht.

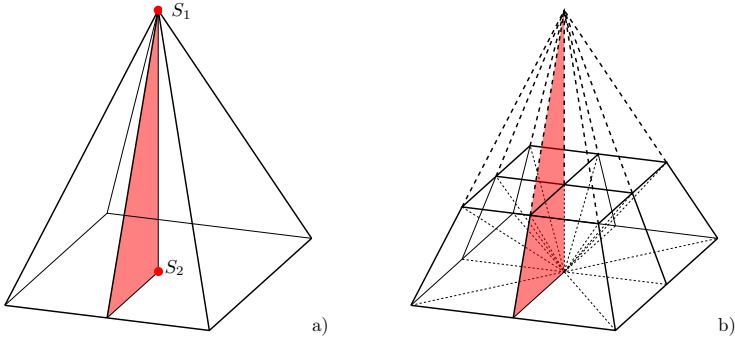


Abbildung 5.1: Pyramide mit quadratischer Basis, deren Zentrum direkt unterhalb der Pyramidenspitze liegt, und Riss, der von Pyramidenspitze bis zum Zentrum der Pyramidenbasis verläuft und dort (an S_1 und S_2) jeweils 3D-Spannungssingularitäten ausbilden kann. (b) SBFEM-Modellierung mit Unterteilung in zwei Teilgebiete mit Skalierungszentren bei S_1 bzw. S_2 .

der Rissfront ausbildende 2D-Rissspitzennahfeld ist dann nur von der Diskretisierung auf der den beiden Pyramidenteilten gemeinsamen, diskretisierten Schnittfläche (in Abb. 5.1b mit 4 Elementen) abzubilden. Genau hier liegt, sehr ähnlich wie in der klassischen FEM (vgl. Kap. 2.3.3 f.), der Ursprung für die Verschlechterung der Konvergenzeigenschaften in der SBFEM-Modellierung einer solchen Struktursituation.

Nach den Konvergenzbeweisen von Apel et al. (2002b) ist für FEM-Eigenanalyse-Methoden bei „glatten“ Randwertproblemen mit konvexen Rändern² eine Konvergenz der Singularitätsexponenten ($\lambda_{3D} - 1$) von

$$\|\lambda_{3D} - \lambda_{3D, \text{exakt}}\| \leq Ch^{2p} \tag{5.1}$$

zu erwarten (mit Konstante C , einer charakteristischen Elementabmessung h und Ansatzordnung p , vgl. Kap. 2.3.3 f.). D.h., im Falle linearer Ansatzpolynome kann quadratische Konvergenz, im Falle quadratischer Ansatzpolynome bereits quartische Konvergenz der Singularitätsexponenten erwartet werden. Hingegen ist die Konvergenzordnung im Falle eines Randwertproblems mit Spannungssingularitäten auf dem diskretisierten Gebietsrand, unabhängig von der verwendeten Ansatzordnung, auf das Zweifache des kleinsten Spannungssingularitätsexponenten ($\lambda^{2D} - 1$) der Liniensingularität plus 2 begrenzt:

$$\|\lambda_{3D} - \lambda_{3D, \text{exakt}}\| \leq Ch^{2\lambda^{2D}}. \tag{5.2}$$

Dies gilt zwar nur für diejenigen Deformationsmoden, die ein Ansprechen der entsprechenden 2D-Singularität beinhalten, häufig sind es jedoch genau diese, die von besonderem Interesse sind. Es kann also, wie in Hell u. Becker (2016a) durch numerische Experimente gezeigt, z. B. im Falle einer Rissspitze, die auf dem diskretisierten Rand eines homogen-isotropen Gebiets liegt, nur noch mit einer linearen Konvergenz gerechnet werden. Dies gilt unabhängig von der Wahl der Ansatzpolynome.³ Diese Konvergenzabschätzungen für FEM-Eigenanalyse-Methoden

² Innerhalb dieses Kapitels seien nur Randwertprobleme mit konvexen Rändern betrachtet, sodass der negative Teil des Eigenwertspektrums stets vernachlässigt werden kann und somit alle erwähnten Abklingexponenten Bestandteil des positiven Spektrums sind.

³ Ansatzpolynome höherer Ordnung führen aber durchaus zu kleineren Konstanten C und damit bei gleicher Elementzahl auch zu kleineren Diskretisierungsfehlern.

gleichen im Wesen ihrer Ergebnisse jenen der klassischen FEM (vgl. Kap. 2.3.3). Daher erscheint es naheliegend, die Methoden, die in der klassischen FEM zur Bewältigung dieser Herausforderung dienen, auch bei FEM-Eigenanalyse-Methoden bzw. der SBFEM anzuwenden (vgl. Kap. 3.1.2). Die populärsten sind Gebietsreskalierungsstrategien in der Umgebung des Punktes singulärer Spannungen: zum einen Netzverfeinerungsstrategien und zum anderen die Reskalierung des Elementgebiets durch eine neue Positionierung der Elementknoten zwischen den Elementeckenknoten (z. B. sogenannte Viertelpunktelemente, Henshell u. Shaw (1975), Barsoum (1977), Kuna (2008)).

Im vorangehenden Kapitel war, ähnlich wie von Apel et al. (2002b), die Strategie einer starken Verfeinerung der Randdiskretisierung in der Umgebung der Punkte singulärer Spannungen verfolgt worden, um eine hinreichende Genauigkeit der Singularitätsexponenten und Deformationsmoden zu erzielen. Die Problematik der verminderten Konvergenz und Genauigkeit vergrößert sich jedoch, wie aus Abschätzung (5.2) ersichtlich, mit stärker werdenden 2D-Spannungssingularitäten auf dem diskretisierten Gebietsrand. Außerdem wirken sich auch starke Anisotropien im Material und Materialgrenzen negativ auf die Genauigkeit aus. Genau dieser Fall, starke Liniensingularitäten und große Steifigkeitskontraste, lag aber bei den betrachteten Defektinteraktionssituationen des vorigen Kapitels vor und erforderte daher eine besonders starke Verfeinerung des Oberflächennetzes (siehe auch Abbildungen 4.9 bzw. 4.28). Eine hohe Anzahl an Freiheitsgraden (und damit auch starke Verfeinerungen der Oberflächendiskretisierung) sind in der SBFEM jedoch eine besondere Herausforderung, da der Rechenaufwand des zu lösenden Eigenwertproblems kubisch mit der Anzahl der Freiheitsgrade steigt.⁴ Im Gegensatz zu klassischen FEM-Eigenanalyse-Methoden, die typischerweise nur an der Berechnung einer vergleichsweise kleinen Anzahl an Deformationsmoden interessiert sind, hat die SBFEM zum Ziel, vollständige Randwertprobleme zu lösen. D. h., auch das Eigenwertproblem muss vollständig gelöst werden, sodass die sonst verwendeten sehr effizienten partiellen Eigenwertproblemlöser nicht zielführend eingesetzt werden können.

Der Viertelpunktelementansatz wurde erstmals im Rahmen einer FEM-Eigenanalyse-Methode von Lee u. Im (2003) angewendet, die so die beliebte Struktursituation eines Risses, der auf eine Oberfläche trifft (Rand-Riss, siehe auch Benthem (1977, 1980), Bažant u. Estenssoro (1979)) betrachteten. Dabei verwendeten sie die weniger geeignete Variante ohne Kollabierung einer Elementseite (Henshell u. Shaw, 1975). Unabhängig davon, und mit Kollabierung einer Elementseite (Barsoum, 1977) kam der Viertelpunktelementansatz im Rahmen einer SBFEM-Formulierung in der Master-Arbeit von Brod (2015) für seine Untersuchungen homogener Risskonfigurationen zum Einsatz. Er erfüllt die Forderung nach Vollständigkeit des Verschiebungsansatzes insofern, dass er spannungsfreie Starrkörperbewegungen genauso wie homogene Dehnungen abbilden kann, sodass mit ihm die Konvergenz der Methode garantiert ist. Diese besondere Eigenschaft kommt durch eine günstige Reskalierung des Elementgebiets folgender Art zustande:

$$u \propto r^\lambda \quad \text{mit} \quad r = \rho^{1/\lambda} \quad \longrightarrow \quad u \propto \rho \quad (5.3)$$

Im so reskalierten Gebiet ist die vorherige Wurzelfunktion des Verschiebungsfelds also mit einem linearen Ansatz abbildbar. Auf dieser Reskalierung beruhen auch die Netzverfeinerungsstrategien von Apel et al. (2002b). Da die Ansatzpolynome im reskalierten Gebiet

⁴ Zur Erinnerung: Eine Verdoppelung der Knoten führt also zu einer Verachtfachung des Rechenaufwands, wobei ein Knoten schon 6 Freiheitsgrade im Eigenwertproblem mit sich bringt (3 Komponenten des Verschiebungsvektors, Differentialgleichungssystem 2. Ordnung). Bei Anwendung der klassischen FEM-Eigenanalyse-Methoden waren häufig nur einige wenige Deformationsmoden von Interesse, sodass anstatt des QR-Algorithmus effizientere partielle Eigenwertlöser zum Einsatz kamen.

definiert sind, gilt aber auch, dass beispielsweise im Falle des klassischen Rissspitzenfeldes mit $\lambda = 0,5$ die quadratischen Ansatzfunktionen mit $p = 2$ auf dem realen Elementgebiet anstatt quadratischen nur noch lineare Funktionen exakt abbilden können:

$$u \propto \rho^p = (r^\lambda)^p \quad \text{mit} \quad p = 2 \wedge \lambda = 0,5 \quad \longrightarrow \quad u \propto r.$$

Es ist also mehr glücklicher Zufall als die Regel, dass bei einer Verschiebung der Mittelknoten lineare Verschiebungsverteilungen und damit homogene Dehnungen, die für die Konvergenz einer Finite-Elemente-Methode elementar sind (Kap. 2.3.1, Abschnitt: Anforderungen an Verschiebungsansätze), weiter abgebildet werden können. In jedem Fall haben sich Viertel-punktelemente in der Praxis der klassischen FEM bewährt und Eingang in kommerzielle FEM-Software (z. B. ABAQUS®) gefunden. Die Nachteile dieser Skalierungsmethodik innerhalb eines Elements liegen jedoch genauso auf der Hand:

- Das Gebiet, auf dem die Singularität abgebildet wird, ist immer nur so groß wie das Gebiet auf dem skaliert wird, sodass bei einer Netzverfeinerung (h-Methode) dieses Gebiet immer kleiner wird.
- Durch die Skalierung verringert sich die Ansatzordnung im Element.
- Generell gilt für die Skalierungsmethodik, dass so nur eine Singularitätsordnung direkt berücksichtigt werden kann (übrigens genauso bei auf der Skalierungsmethodik basierenden gradierten Netzverfeinerungsstrategien von Apel et al. (2002b)).
- Im Falle von Spannungssingularitäten, für die gilt $\lambda \cdot p \neq 1$, ergibt sich außerdem, dass homogene Dehnungen im Element nicht mehr darstellbar sind. Dies impliziert aber die *Unvollständigkeit des Ansatzes* und damit eine nicht mehr garantierte Konvergenz der Methode.

Im Rahmen des vorangehenden Kapitels (sowie generell im Rahmen dieser Arbeit) waren Struktursituationen, in denen Spannungssingularitäten mit $\lambda \neq 0,5$ auftraten, von besonderem Interesse. Auch für die Abbildung solcher Spannungssingularitäten sind Elementansätze, die auf eine Reskalierung des Elementgebiets setzen, im Rahmen einer FEM-Eigenanalyse vorgeschlagen und angewendet worden: so von Labossiere u. Dunn (2001), die einen um 45° gekippten, stoßgefügteten Balken aus Epoxid und Aluminium im Vier-Punkt-Biegeversuch untersuchten (vgl. Kap. 3.1.3). Um die Liniensingularität mit $\lambda^{2D} = 0,708$ entlang der Bimaterialkante abzubilden, verwendeten sie auf dem Randnetz 6-knotige quadratische Elemente mit entsprechend verschobenen Mittelknoten⁵ und gaben an, in einer Referenzrechnung mit wesentlich verfeinerter Diskretisierung vergleichbare Ergebnisse erhalten zu haben. Eine detaillierte Konvergenzstudie mit Untersuchung der Konvergenzeigenschaften blieben sie jedoch schuldig. Es sei noch angemerkt, dass sich die von Labossiere u. Dunn (2001) untersuchte Struktursituation durch ihre singularitätstheoretische Simplität auszeichnet. Sowohl für die Bimaterialkante (2D-Situation) als auch die 3D-Bimateriallecke existiert jeweils nur ein Deformationsmodus mit singulären Spannungen, die zudem in beiden Fällen nur schwach singular sind ($\lambda^{2D} = 0,708 > 0,5$, $\lambda^{2D} = 0,649 > 0,5$). Im Gegensatz dazu sind dreidimensionale Defektinteraktionssituationen in Faserverbundlaminate von grundsätzlich wesentlich komplexerer Natur.

Alternativ zu den Gebietsreskalierungsstrategien kann in der klassischen FEM auch eine Anreicherung des Verschiebungsansatzes gewählt werden (siehe auch Benzley (1974), Gifford

⁵Der Mittelknoten wurde auf die $3/8$ -Position verschoben, was einer Skalierung mit dem Exponent $\ln(1/2)/\ln(3/8) \approx 0,7067 (\approx 0,708)$ entspricht.

u. Hilton (1978), Kaya u. Nied (1993)). Dieser Ansatz wird in leicht abgewandelter Form ebenfalls in der weitläufig bekannten „Erweiterten Finite-Elemente-Methode“ (XFEM: Fries u. Belytschko (2010), Mohammadi (2012)) verwendet. Er beinhaltet die lokale Ergänzung des Verschiebungsansatzes, der typischerweise aus einfachen Lagrange-Polynomen besteht, um ein analytisches Verschiebungsfeld, das die lokalen Randbedingungen an der Spannungssingularität bereits exakt erfüllt. Der Vorteil dieser Herangehensweise liegt darin, dass bei geschickter Anwendung schon mit einer sehr kleinen Anzahl zusätzlicher Freiheitsgrade die ursprünglich zu erwartende Konvergenzordnung wiederhergestellt und gleichzeitig für gleiche Diskretisierungen auch eine wesentlich höhere Genauigkeit erzielt werden kann (vgl. z. B. Laborde et al. (2005)).

Damit erscheint diese Methodik der optimale Weg aus dem Dilemma der SBFEM mit Singularitäten auf der Oberflächendiskretisierung zu sein und wird in diesem Kapitel ausführlich anhand des Beispiels eines würfelförmigen Gebiets im homogen-isotropen Kontinuum mit Riss vorgestellt.

5.1 Die angereicherte Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode (enrSBFEM)

Aufgrund der bereits ausführlichen Darstellung der BFEM im vorherigen Kapitel, sollen dabei vor allem die wesentlichen Änderungen, die sich aufgrund der Anreicherung ergeben, dargestellt werden. Weiterhin sind die folgenden Darstellungen auf den in der Arbeit verwendeten Spezialfall der *Skalierten-Rand-Finite-Elemente-Methode* (SBFEM) bezogen, aber sehr ähnlich auch auf den anderen Spezialfall der BFEM mit „Skalierungszentrum im Unendlichen“ übertragbar.

5.1.1 Skaliertes Rand-Koordinatensystem

Wie in der Standard-SBFEM wird zunächst ein skaliertes Rand-Koordinatensystem (KOS $\hat{=}$ Koordinatensystem) der Skalierungskoordinate $\xi \in [\xi_i, \xi_a]$ und den Randkoordinaten η_1, η_2 eingeführt. Weiterhin werden auch für jedes Element e ($e = 1, \dots, n_e$) die Einheitskoordinatensysteme mit $\eta_1^e, \eta_2^e \in [-1, 1]$ übernommen. Zusätzlich wird für die Anreicherung für jeden Punkt P_s^S ($s = 1, \dots, n_S$), wo eine Liniensingularität auf einen zu diskretisierenden Gebietsrand trifft, ein weiteres skaliertes Rand-Koordinatensystem mit Randkoordinaten η_1^s, η_2^s definiert (vgl. Abb. 5.2). In den meisten Fällen ist es weiterhin sinnvoll ausgehend von diesem Hilfs-Koordinatensystem auch ein polares Koordinatensystem mit radialer Koordinate r_s und Winkelkoordinate φ_s einzuführen, da die Funktionen, mit denen der Verschiebungsansatz angereichert werden soll, normalerweise in polaren Koordinaten gegeben sind. Wie die von η_1 und η_2 aufgespannten Flächen sind dann auch diese polaren Koordinatensysteme zum Skalierungszentrum hin zu skalieren, sodass jeweils ein Kegel-Koordinatensystem entsteht. Damit ergeben sich bezogen auf ein kartesisches x, y, z -KOS und dem Skalierungszentrum bei \mathbf{x}_0 die nachfolgenden Koordinatentransformationen:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \xi \mathbf{x}_\eta^{(e)}(\eta_1^e, \eta_2^e) \quad \text{skaliertes Rand-KOS}, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \xi \mathbf{x}_{r\varphi}^{(s)}(r_s, \varphi_s) \quad \text{Kegel-KOS}. \quad (5.5)$$

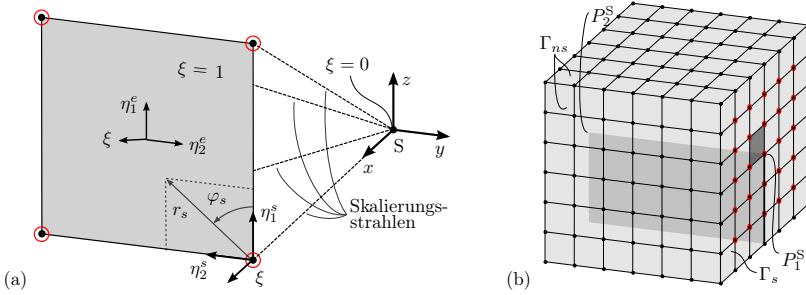


Abbildung 5.2: (a) Ebenes, 4-knotiges, isoparametrisches, skaliertes Rand-Finite-Element bildet quadratische Pyramide. Das Skalierungszentrum S mit $\xi=0$ befindet sich im Ursprung des globalen x, y, z -KOS. Zusätzlich sind das skalierte Rand-KOS ξ, η_1^e, η_2^e und Kegel-KOS ξ, r_s, φ_s eingeführt, wobei $r_s=0$ entlang der Liniensingularität s (hier: Rissfront). (b) Randnetz aus ebenen 4-Knotenelementen für würfelförmiges Gebiet mit durch Doppelknoten modelliertem Riss. Das Skalierungszentrum S befindet sich im Zentrum des Würfels. Der Riss (hell schattiert) trifft an den Punkten P_s^S ($s=1, \dots, n_S$ mit $n_S=2$) auf den diskretisierten Rand. Angereicherte Knoten sind rot markiert. Zusammenhängende Elemente, die angereicherte Knoten enthalten, bilden den Gebietsrand Γ_s des Gebiets Ω , die übrigen Elemente den Gebietsrand $\Gamma_{n,s}$. Das in (a) gezeigte Element findet sich in (b), um 90° um die Vertikalachse gedreht, wieder (dunkel schattiert), sodass sich das Rissligament gerade bei $\varphi_s=0$ befindet.

Im Folgenden sollen die Superskripte zugunsten einer übersichtlicheren Darstellung weggelassen werden, sofern sie nicht unbedingt nötig sind.

Analog zum Vorgehen beim skalierten Rand-Koordinatensystem müssen auch für das Kegel-Koordinatensystem die Jacobimatrix $\mathbf{J}_{r\varphi}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{r\varphi} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

und aus ihr resultierend der Differentialoperator \mathcal{L} entsprechend bereitgestellt werden.

$$\mathcal{L} = \mathbf{L}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{L}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{L}_z \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{L}_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathbf{L}_r \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{L}_\varphi \frac{1}{\xi r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (5.7)$$

Weiterhin können auch die Volumen- und Oberflächendifferentiale bestimmt werden:

$$dV = \|\mathbf{J}_{r\varphi}(r, \varphi)\| \xi^2 r \, d\xi \, dr \, d\varphi \quad , \quad dS_\xi = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}_{r\varphi}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{x}_{r\varphi}}{r \partial \varphi} \right\| \xi^2 r \, dr \, d\varphi. \quad (5.8)$$

Um die eingeführten Größen besser greifbar zu machen, sollen insbesondere die Jacobimatrix $\mathbf{J}_{r\varphi}$ und die aus ihr bestimmbare Zerlegung des Differentialoperators \mathcal{L} für das in Abbildung 5.2 gezeigte Beispiel angegeben werden. Das in Abbildung 5.2a gezeigte einzelne Element ist dabei auch in Abbildung 5.2b links oberhalb des Punktes, wo die Rissfront auf die Würfelvorderseite trifft, wiederzufinden. Die Koordinatentransformation für das Kegelkoordinatensystem ergibt sich in diesem Fall zu

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} d \\ -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

wobei mit d der Abstand des diskretisierten Randes vom Skalierungszentrum bei $r=0$ bezeichnet sei. Dann folgen die Jacobimatrix und ihre zugehörige Inverse zu

$$\mathbf{J}_{r\varphi}(r, \varphi) = \begin{bmatrix} d & -r \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ 0 & -\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{r\varphi}^{-1}(r, \varphi) = \begin{bmatrix} 1/d & -r/d & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

und die Zerlegung des Differentialoperators schließlich zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \underbrace{(\mathbf{L}_x/d)}_{\mathbf{L}_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \underbrace{(-\mathbf{L}_x r/d - \mathbf{L}_y \sin(\varphi) + \mathbf{L}_z \cos(\varphi))}_{\mathbf{L}_r} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial r} \\ &\quad + \underbrace{(-\mathbf{L}_y \cos(\varphi) - \mathbf{L}_z \sin(\varphi))}_{\mathbf{L}_\varphi} \frac{1}{\xi r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &= \mathbf{L}_x \frac{1}{d} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - r \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \mathbf{L}_y \left(-\sin(\varphi) \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial r} - \cos(\varphi) \frac{1}{\xi r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &\quad + \mathbf{L}_z \left(\cos(\varphi) \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial r} - \sin(\varphi) \frac{1}{\xi r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

In dieser Darstellung ist nun sowohl die Ähnlichkeit als auch der Unterschied von der Transformation in ein Kegel-KOS zu der Transformation in ein Zylinder-KOS sichtbar. Die Inversen der entsprechenden Jacobimatrizen unterscheiden sich im Wesentlichen im linearen $(-r/d)$ -Term, der bei der Transformation in ein Zylinder-KOS nicht auftritt. Ergänzend muss erwähnt werden, dass sich auch die Metriken der Koordinatensysteme unterscheiden, deren Einfluss hier aber in Form des Faktors $1/\xi$ in die partiellen Ableitungsoperatoren hineingeht und deshalb nicht mehr in $\mathbf{J}_{r\varphi}^{-1}$ enthalten ist. Nichtsdestotrotz sei das Hauptaugenmerk auf den linearen $(-r/d)$ -Term gelegt, da dieser bereits einen Einfluss innerhalb der r, φ -Ebene hat und die berechtigte Frage aufwirft, inwiefern die analytischen Anreicherungsfunktionen, die typischerweise für ein Zylinderkoordinatensystem bestimmt wurden, überhaupt noch in einem hier eingeführten (und für die Skalierbarkeit des Randwertproblems essentiellen) Kegel-Koordinatensystem brauchbar sind. Tatsächlich wird sich herausstellen (Kap. 5.1.5), dass der $(-r/d)$ -Term wichtig ist, um überhaupt ein entlang der Kegellachse invariantes Verzerrungs- bzw. Spannungsfeld herstellen zu können.

5.1.2 Angereicherter Separationsansatz

Die fundamentale Voraussetzung für die Anwendbarkeit der SBFEM ist, dass das gegebene Randwertproblem die Skalierungsbedingung erfüllt, sodass ein Separationsansatz in den Verschiebungen formuliert werden kann (siehe auch Kap. 4.1.1). Eine entsprechende Anreicherung muss dann auch die Skalierungsbedingung erfüllen, sodass folgender Separationsansatz für die Verschiebungen innerhalb eines angereicherten skalierten Rand-Finite-Elements (enrSBFE) e angegeben werden kann:

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(e)}(\xi, \eta_1^e, \eta_2^e) = \underbrace{\mathbf{N}(\eta_1^e, \eta_2^e) \hat{\mathbf{u}}_e(\xi)}_{\tilde{\mathbf{u}}_e^{\text{st}}(\xi, \eta_1^e, \eta_2^e)} + \underbrace{\mathbf{F}^{(s)}(\eta_1^e, \eta_2^e) \mathbf{c}^{2\text{D}(s)}(\xi)}_{\tilde{\mathbf{u}}_e^{\text{enr}}(\xi, \eta_1^e, \eta_2^e)}. \quad (5.12)$$

Dabei stellt der erste Summand $\tilde{\mathbf{u}}_e^{\text{st}}(\xi, \eta_1^e, \eta_2^e)$ den bereits aus Kapitel 4.1.1 bekannten Separationsansatz (4.9) für die Standard-SBFEM und der zweite Summand $\tilde{\mathbf{u}}_e^{\text{enr}}(\xi, \eta_1, \eta_2)$ die

Anreicherung am Punkt P_s^S bzw. am Skalierungsstrahl $\overline{SP_s^S}$ dar. Die Anreicherung setzt sich aus den in der Fläche des diskretisierten Randes definierten Anreicherungsfunktionen⁶ $\mathbf{F}_s(\eta_1^e, \eta_2^e)$ und zugehörigen Koeffizientenfunktionen $\mathcal{C}_s^{2D}(\xi)$ zusammen. Als Anreicherungsfunktionen werden typischerweise aus einer 2D-Betrachtung resultierende asymptotische Nahfelder um eine Liniensingularität verwendet, die meist in Polarkoordinaten (radiale Koordinate r , Winkelkoordinate φ , siehe auch Abb. 5.2) verfügbar sind. Eine sehr flexibel einsetzbare und gleichzeitig effiziente Methode zur Bestimmung solcher asymptotischer Nahfelder ist wiederum die SBFEM selbst (in Kombination mit einer Glättung der Ableitungen, s. Kap. 4.1 und 2.3.2). Weiterhin wird hier anders als in klassischen XFEM-Implementierungen (vgl. Mohammadi (2012)), in der jedem angereicherten Knoten ein eigener Satz an Anreicherungsfunktionen und zugehörigen Koeffizientenfunktionen zugesprochen wird, für jedes komplette Anreicherungsgebiet jeweils nur ein Satz an Koeffizientenfunktionen angenommen, was eher dem klassischen Anreicherungsansatz von Benzley (1974) und dem später auch für eine XFEM-Implementierung angenommenen Ansatz von Laborde et al. (2005) entspricht. Damit wird zwar einerseits die Flexibilität der Lösung eingeschränkt, gleichzeitig aber vor allem die Anzahl zusätzlicher Freiheitsgrade auf ein Minimum reduziert.

Der angereicherte Separationsansatz ist in geeigneter Weise zu ergänzen, um einige weitere grundlegende Anforderungen der Finite-Elemente-Methoden zu erfüllen. Dazu lieferte die Arbeit von Ventura et al. (2009) neben der Arbeit von Benzley (1974) wesentliche Anregungen. Weiterhin soll von hier an wieder zugunsten der besseren Lesbarkeit auf die Subskripte e und s verzichtet werden.

Zum einen sei gefordert, dass der Ansatz trotz Anreicherung die Interpolationsbedingung erfüllt, wonach $\hat{\mathbf{u}}(\xi)$ auch weiterhin die tatsächlichen Verschiebungsfunktionen entlang der Skalierungsstrahlen enthalten soll. Dazu muss die Anreicherung an den jeweiligen Skalierungsstrahlen verschwinden. Um das zu erreichen, werden im Element die Werte der Anreicherung an den jeweiligen Skalierungsstrahlen, multipliziert mit den Lagrange-Ansatzfunktionen aus dem Standardansatz, abgezogen. Zum anderen ist i. A. nicht der vollständige diskretisierte Gebietsrand anzureichern, sondern eine Anreicherung in der näheren Umgebung des singulären Punktes ist hinreichend. Dann muss trotzdem die Konformität des Separationsansatzes gewahrt bleiben, also die Kompatibilität der Ansätze von angereicherten mit nicht angereicherten Teilflächen gewährleistet sein. In der simpelsten Art dies zu implementieren wird die Anreicherung von angereicherten zu nicht angereicherten Teilflächen über eine Elementreihe⁷ hinweg wiederum mit Hilfe der Standard-Ansatzpolynome auf Null reduziert. Es ist aber genauso möglich, die Anreicherung über mehrere Elementreihen hinweg und mit Hilfe anderer Funktionen⁸ abklingen zu lassen. Durch diese Modifikationen sind auch die Forderung nach Vollständigkeit des Ansatzes und die „Zerlegung-der-Eins“-Bedingung (englisch: „partition of unity“) automatisch erfüllt (vgl. Kap. 2.3.1, Abschnitt: Anforderungen an die Ansätze).

⁶ Da das wesentliche Ziel dieser Anreicherung die Verbesserung der Konvergenzeigenschaften der SBFEM in Gegenwart von auf den diskretisierten Gebietsrand treffenden Liniensingularitäten ist, werden im Rahmen dieser Arbeit und zur Abgrenzung von der XFEM nur Anreicherungsfunktionen betrachtet, die asymptotische singuläre Nahfelder beinhalten. Das impliziert, dass singuläre Punkte stets auf einem Knoten liegen und Materialgrenzen sowie Rissflanken ausschließlich durch Elementgrenzen selbst modelliert werden. Für die Modellierung von Rissen im Besonderen werden entlang der Rissflanken Doppelknoten definiert, die dann je einem Rissufer zugeordnet werden. Es ergibt sich also beispielsweise nie die Notwendigkeit, eine Heaviside-Funktion (siehe z. B. Mohammadi (2012)) zu verwenden.

⁷ In der XFEM werden diese Elemente, die einen kontinuierlichen Übergang der Verschiebungsansätze von angereicherten zu nicht angereicherten Gebieten gewährleisten, „Blending-Elemente“ genannt.

⁸ Dies können z. B. trigonometrische Ansatzfunktionen sein, die dann aber so konstruiert sein müssen, dass sie weiterhin das „Zerlegung-der-Eins“-Prinzip erfüllen.

Der vollständige angereicherte Separationsansatz für die Verschiebungen $\tilde{u}_i(\mathbf{x})$, $i = x, y, z$, ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(\mathbf{x}) = & \sum_{k \in \mathcal{N}} N_k(\mathbf{x}_\eta) \hat{u}_{ik}(\xi) + \\ & \sum_{l \in \mathcal{P}} N_l(\mathbf{x}_\eta) \left[\sum_{s=1}^{n_S} \sum_{m=1}^{n_F} \left(F_{ism}(\mathbf{x}_{r\varphi}) - \sum_{k \in \mathcal{N}} N_k(\mathbf{x}_\eta) F_{ism}(\mathbf{x}_{r\varphi_k}) \right) c_{sm}^{2D}(\xi) \right] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Der erste Teil in Gleichung (5.13) stellt wie schon in Gleichung (5.12) den Standard-SBFEM-Ansatz dar. Entsprechend enthält der zweite die Terme, welche aus der Anreicherung folgen. Die Menge \mathcal{N} beinhaltet alle Knoten auf dem diskretisierten Gebietsrand, die Menge \mathcal{P} nur die angereicherten. $N(\eta_1, \eta_2)$ sind die Ansatzpolynome, $F_{ism}(r, \varphi)$ die Anreicherungsfunktionen. Die Anzahl der Anreicherungsfunktionen ist durch n_F gegeben und n_S ist die Anzahl der Punkte, an denen mit singulären Spannungen auf dem diskretisierten Gebietsrand zu rechnen ist. Die Funktionen entlang der Skalierungsstrahlen $\hat{u}_{ik}(\xi)$ und $c_{sm}^{2D}(\xi)$ sind die Verschiebungen bzw. die Koeffizienten der Anreicherungsfunktionen. Dadurch, dass die Knotenwerte der Anreicherungsfunktionen wieder abgezogen werden, ist die Anreicherung nur zwischen den Skalierungsstrahlen ungleich null, sodass die Funktionen $\hat{u}_{ik}(\xi)$, wie gefordert, an den Skalierungsstrahlen direkt die errechneten Gesamtverschiebungen wiedergeben. Schließlich wird in Gleichung (5.13) die Reduktion der Anreicherung von angereicherten hin zu nicht angereicherten Knoten auf Null mit Hilfe der Ansatzpolynome N_l erreicht.

5.1.3 Spannungen und Verzerrungen

Die approximierten Verzerrungen $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ergeben sich durch Anwenden des Differentialoperators \mathcal{L} auf den Verschiebungsansatz $\tilde{\mathbf{u}}(\xi, \eta_1, \eta_2)$. Die Spannungen $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ errechnen sich dann durch weitere Multiplikation mit der Elastizitätsmatrix \mathbf{C} :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathcal{L} \tilde{\mathbf{u}} \quad , \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C} \mathcal{L} \tilde{\mathbf{u}} .$$

Da sich die Anreicherung im Verschiebungsansatz (5.13) de facto aus zwei Summanden, die jeweils für sich ein Produkt aus drei Funktionen beinhalten, zusammensetzt, ist auf jeden dieser Summanden wieder die Produktregel der Differentialrechnung anzuwenden. Mit den Zerlegungen (4.4) und (5.7) des Differentialoperators \mathcal{L} ergibt sich dann für die Verzerrungen in Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = & \underbrace{\mathbf{L}_\xi \mathbf{N}(\eta_1, \eta_2)}_{\mathbf{B}_\xi^s(\eta_1, \eta_2)} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}(\xi)}{\partial \xi} + \underbrace{\left(\mathbf{L}_{\eta_1} \frac{\partial \mathbf{N}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} + \mathbf{L}_{\eta_2} \frac{\partial \mathbf{N}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \right)}_{\mathbf{B}_\eta^s(\eta_1, \eta_2)} \frac{\hat{\mathbf{u}}(\xi)}{\xi} \\ & + \underbrace{\mathbf{L}_\xi \mathbf{N}_B(\eta_1, \eta_2) \left(\mathbf{F}(r, \varphi) - \mathbf{N}_{\text{enr}}(\eta_1, \eta_2) \mathbf{F}(r_k, \varphi_k) \right)}_{\mathbf{B}_\xi^{\text{enr}}(\eta_1, \eta_2)} \frac{\partial \mathbf{c}^{2D}(\xi)}{\partial \xi} \\ & + \underbrace{\left(\mathbf{L}_{\eta_1} \frac{\partial \mathbf{N}_B(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} + \mathbf{L}_{\eta_2} \frac{\partial \mathbf{N}_B(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \right) \left(\mathbf{F}(r, \varphi) - \mathbf{N}_{\text{enr}}(\eta_1, \eta_2) \mathbf{F}(r_k, \varphi_k) \right)}_{\mathbf{B}_{\eta_1}^{\text{enr}}(\eta_1, \eta_2, r(\eta_1, \eta_2), \varphi(\eta_1, \eta_2))} \frac{\mathbf{c}^{2D}(\xi)}{\xi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \underbrace{\left(\mathbf{L}_{\eta_1} \mathbf{N}_B(\eta_1, \eta_2) \frac{\partial \mathbf{N}_{\text{enr}}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} + \mathbf{L}_{\eta_2} \mathbf{N}_B(\eta_1, \eta_2) \frac{\partial \mathbf{N}_{\text{enr}}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \right) \mathbf{F}(r_k, \varphi_k)}_{\mathbf{B}_{\eta_1^2}^{\text{enr}}(\eta_1, \eta_2, r(\eta_1, \eta_2), \varphi(\eta_1, \eta_2))} \frac{\mathbf{c}^{2\text{D}}(\xi)}{\xi} \\
 & + \underbrace{\left(\mathbf{L}_r \mathbf{N}_B(\eta_1, \eta_2) \frac{\partial \mathbf{F}(r, \varphi)}{\partial r} + \mathbf{L}_\varphi \mathbf{N}_B(\eta_1, \eta_2) \frac{\partial \mathbf{F}(r, \varphi)}{r \partial \varphi} \right)}_{\mathbf{B}_{r\varphi}^{\text{enr}}(\eta_1, \eta_2, r(\eta_1, \eta_2), \varphi(\eta_1, \eta_2))} \frac{\mathbf{c}^{2\text{D}}(\xi)}{\xi}. \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

$$= \mathbf{B}_\xi^{\text{st}}(\eta_1, \eta_2) \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}(\xi)}{\partial \xi} + \mathbf{B}_\eta^{\text{st}}(\eta_1, \eta_2) \frac{\hat{\mathbf{u}}(\xi)}{\xi} + \mathbf{B}_\xi^{\text{enr}}(\eta_1, \eta_2) \frac{\partial \mathbf{c}^{2\text{D}}(\xi)}{\partial \xi} + \mathbf{B}_\eta^{\text{enr}}(\eta_1, \eta_2) \frac{\mathbf{c}^{2\text{D}}(\xi)}{\xi} \quad (5.15)$$

Dabei enthalten die Matrizenfunktionen $\mathbf{N}(\eta_1, \eta_2)$, $\mathbf{N}_B(\eta_1, \eta_2)$ und $\mathbf{N}_{\text{enr}}(\eta_1, \eta_2)$ in der in dieser Arbeit verwendeten Formulierung⁹ die gleichen Ansatzpolynome $N(\eta_1, \eta_2)$, haben aber verschiedene Funktionen und sind daher i. A. von verschiedener Dimension. So gewährleisten die Funktionen $\mathbf{N}_B(\eta_1, \eta_2)$ das „Blending“ zwischen den angereicherten und nicht angereicherten Teilflächen, sind also in allen vollständig angereicherten Elementen 1 und in vollständig nicht angereicherten Elementen 0. Da sie somit nur in den „Blending-Elementen“ einen Gradienten ungleich 0 aufweisen, kann in Gleichung (5.14) die Matrix $\mathbf{B}_{\eta_1}^{\text{enr}}$ ebenfalls nur dort von 0 verschiedene Elemente haben. Ventura et al. (2009) diskutieren deshalb die Notwendigkeit dieses Terms im Rahmen der XFEM und kommen für die dort betrachteten Fälle zu dem Schluss, dass er vernachlässigt werden kann. Im Rahmen dieser Arbeit wird er jedoch der Vollständigkeit halber und aufgrund des unwesentlichen Zusatzaufwands mit berücksichtigt.

Bei den verschiedenen Summanden in Gleichung (5.14) ist zwischen in den Randkoordinaten kontinuierlichen und diskontinuierlichen Termen zu unterscheiden. Zum einen ist, wie in der Standardformulierung der SBFEM, die Matrix $\mathbf{B}_\xi^{\text{st}}(\eta_1, \eta_2)$ kontinuierlich in η_1 und η_2 . Ihr Pendant $\mathbf{B}_\xi^{\text{enr}}(\eta_1, \eta_2)$ ¹⁰ aus der Anreicherung ist ebenfalls kontinuierlich, enthält aber neben den klassischen Ansatzpolynomen in \mathbf{N}^{enr} auch die Anreicherungsfunktionen \mathbf{F} , welche i. A. Wurzelterme in der radialen Koordinate beinhalten. Zum anderen ist die Matrix $\mathbf{B}_{r\varphi}^{\text{enr}}(\eta_1, \eta_2)$ (überall außer am Punkt der Spannungssingularität) nicht nur C^0 -stetig, sondern auch in höheren Ableitungen glatt¹¹. Sie enthält allerdings typischerweise auch die singulären Terme vom Typ $r^{\lambda^{2\text{D}}-1}$ und stellt damit das Nadelöhr in der numerischen Integration nach Einsetzen in ein geeignetes Energieprinzip dar. Die übrigen Matrizenfunktionen $\mathbf{B}_\eta^{\text{st}}$, $\mathbf{B}_{\eta_1}^{\text{enr}}$ und $\mathbf{B}_{\eta_2}^{\text{enr}}$ sind diskontinuierlich in den Randkoordinaten, sodass, wie in Kapitel 5.3 noch zu sehen sein wird, gerade diese für eine Spannungsglättung von Bedeutung sind.

5.1.4 Implementierung der enrSBFEM

Wie in der Standard-SBFEM ist der angereicherte Verschiebungsansatz (5.13) in das Prinzip der virtuellen Verrückungen (2.52) einzusetzen und über die Randkoordinaten zu integrieren. Dabei sind für die virtuellen Größen (virtuelle Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ und virtuelle Verzerrungen $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$) die gleichen Separationsansätze zu verwenden wie für die realen Größen: Nur

⁹ Für Näherungen der Geometrie sowie alle Formfunktionen $N(\eta_1, \eta_2)$ im Separationsansatz für die Verschiebungen (5.13) werden immer gleiche Ansatzpolynome verwendet.

¹⁰ Da die Polarkoordinaten r, φ ohne Weiteres in die lokalen Elementkoordinaten η_1, η_2 umgerechnet werden können, sind die Matrixfunktionen, die sowohl von η_1, η_2 als auch r, φ abhängig sind, vereinfachend als nur von η_1, η_2 abhängig dargestellt.

¹¹ Sind die Anreicherungsfunktionen auf geschlossen-analytischem Wege mit Hilfe der Methode komplexer Potentiale bestimmt worden, sind sie holomorph und somit sogar beliebig oft stetig differenzierbar.

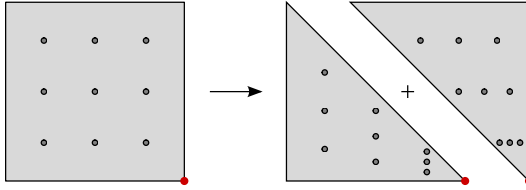


Abbildung 5.3: Quasi-polare Integration im Einheitsselement: Zerlegung des Rechteckgebiets in zwei Dreiecksgebiete und Mapping des Integrationsgebiets des Einheitselements auf jedes der beiden Dreiecksgebiete, sodass Gauß-Punkte bei $r=0$ (rot markiert) nahe beieinander liegen.

die Verschiebungsfunktionen $\hat{\mathbf{u}}(\xi)$ und Koeffizientenfunktionen $\mathbf{c}^{2D}(\xi)$ sind in den Gleichungen (5.13 u. 5.14) durch ihre virtuellen Gegenstücke $\delta\hat{\mathbf{u}}(\xi)$ und $\delta\mathbf{c}^{2D}(\xi)$ zu ersetzen. Weiterhin werden für die Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen die freien Funktionen und ihre virtuellen Pendanten wie folgt zusammengefasst:

$$\hat{\mathbf{u}}_c(\xi) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}(\xi) \\ \mathbf{c}^{2D}(\xi) \end{bmatrix}, \quad \delta\hat{\mathbf{u}}_c(\xi) = \begin{bmatrix} \delta\hat{\mathbf{u}}(\xi) \\ \delta\mathbf{c}^{2D}(\xi) \end{bmatrix}.$$

Analog zu der Standardformulierung erfolgt eine Zusammenlegung der Matrixfunktionen $\mathbf{B}^{\text{enr}}(\eta_1, \eta_2)$ aus dem Anreicherungsanteil der Verzerrungen zu $\mathbf{B}_\xi^{\text{enr}}(\eta_1, \eta_2)$, die keine Ableitungen in den Randkoordinaten enthält, und $\mathbf{B}_\eta^{\text{enr}}(\eta_1, \eta_2)$ (vgl. Gl. (5.15)). Damit und aufgrund der Linearität des Integrals kann die Integration über Terme mit und ohne Anreicherung separat durchgeführt werden. So sind im Vergleich zur Standard-SBFEM zusätzlich zu den aus der Integration über die Randkoordinaten resultierenden Systemmatrizen $\mathbf{E}_0^{\text{st}}, \mathbf{E}_1^{\text{st}}, \mathbf{E}_2^{\text{st}}$, deren Integranden die Ableitungen nach der Skalierungscoordinate und/oder nach den Randkoordinaten enthalten, „nur“ die zusätzlichen Matrizen aus der Anreicherung $\mathbf{E}_0^{\text{enr}}, \mathbf{E}_1^{\text{enr}}, \mathbf{E}_2^{\text{enr}}$ sowie die entsprechenden Koppelmatrizen $\mathbf{E}_0^{\text{kop}}, \mathbf{E}_1^{\text{kop1}}, \mathbf{E}_1^{\text{kop2}}, \mathbf{E}_2^{\text{kop}}$ zu berechnen¹².

Die Integration erfolgt elementweise und allein über die Randkoordinaten η_1 und η_2 , da keine nur in Kegelkoordinaten beschriebenen Integranden auftreten, die Kegelkoordinaten aber ohne Weiteres ungerechnet werden können. Für die Integration der singulären Ableitungen der Anreicherungsfunktionen (siehe $\mathbf{B}_{r\varphi}^{\text{enr}}$ in Gl. (5.14)) ist es innerhalb von an $r=0$ angrenzenden Elementen empfehlenswert, die Integration in einem quasi-polaren Koordinatensystem durchzuführen (vgl. Laborde et al. (2005)). Dazu ist das rechteckige Integrationsgebiet in zwei dreieckige zu zerlegen, wobei für die numerische Integration das Dreiecksgebiet nun wiederum auf das isoparametrische Rechteck transformiert wird, sodass die Gauß-Punkte nahe $r=0$ sehr eng und auf der $r=0$ abgewandten Seite weit auseinander stehen (vgl. Abb. 5.3). Dadurch macht man sich zunutze, dass bei der Integration in einem polaren Koordinatensystem das Flächendifferential $r dr d\varphi$ die radiale Koordinate r selbst als Faktor enthält, welcher singuläre Integranden deutlich abschwächt¹³. Mit diesem Trick lässt sich der sonst benötigte numerische Integrationsaufwand erheblich reduzieren, wobei sich die notwendige Integrationsordnung natürlich weiterhin nach der Stärke der Singularität der Ableitungen der

¹² Die Parallelisierung der Berechnung der Systemmatrizen ist damit einfach durchzuführen und auch empfehlenswert, weil bei angereicherten Elementen trotz der quasi-polaren Integration (Abb. 5.3) immer noch eine Gaußintegration von merklich höherer Ordnung als bei nicht angereicherten Elementen nötig ist.

¹³ So wird für den Fall der klassischen Rissspitzeningularität ($\sigma \propto 1/\sqrt{r}$) der Integrand konstant in r .

Anreicherungsfunktionen richtet. Für die übrigen angereicherten Elemente liefert eine normale Gaußintegration höherer Ordnung im Regelfall bereits hinreichend genaue Ergebnisse¹⁴.

Es folgt die Zusammenführung der Systemmatrizen zu

$$\mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_0^{\text{st}} & \mathbf{E}_0^{\text{kop}} \\ (\mathbf{E}_0^{\text{kop}})^{\text{T}} & \mathbf{E}_0^{\text{enr}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^{\text{st}} & \mathbf{E}_1^{\text{kop1}} \\ (\mathbf{E}_1^{\text{kop2}})^{\text{T}} & \mathbf{E}_1^{\text{enr}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_2^{\text{st}} & \mathbf{E}_2^{\text{kop}} \\ (\mathbf{E}_2^{\text{kop}})^{\text{T}} & \mathbf{E}_2^{\text{enr}} \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Sie sind standardmäßig in die Gleichungen der 3D-SBFEM einzusetzen (hier ohne Volumenlasten, Eigendehnungen oder Belastungen entlang von Skalierungsstrahlen):

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_c(\xi) \left(\mathbf{E}_0 \xi^2 \hat{\mathbf{u}}_c''(\xi) + \left[2\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1^{\text{T}} \right] \xi \hat{\mathbf{u}}_c'(\xi) + \left[\mathbf{E}_1^{\text{T}} - \mathbf{E}_2 \right] \hat{\mathbf{u}}_c(\xi) \right) = 0, \quad (5.17)$$

$$\left[\delta \hat{\mathbf{u}}_c(\xi) \left(\mathbf{E}_0 \xi^2 \hat{\mathbf{u}}_c'(\xi) + \mathbf{E}_1^{\text{T}} \xi \hat{\mathbf{u}}_c(\xi) \right) \right]_{\xi=\xi_i}^{\xi=\xi_a} = \delta \hat{\mathbf{u}}_c(\xi_a) \mathbf{p}_a + \delta \hat{\mathbf{u}}_c(\xi_i) \mathbf{p}_i. \quad (5.18)$$

Wie zuvor stellt $(\cdot)'$ die Ableitung nach der Skalierungsordinate ξ dar. Bei der Bestimmung der Randlastvektoren $\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_i$ am Außen- und Innenrand ist zu beachten, dass die Integranden zur Bestimmung dieser nun auch den angereicherten Separationsansatz für die virtuellen Verschiebungen enthalten und dementsprechend für den Anreicherungsanteil i. A. wieder eine Gaußintegration höherer Ordnung notwendig ist. Gleichung (5.17) muss für beliebige virtuelle Verdrückungsfunktionen $\delta \hat{\mathbf{u}}_c(\xi)$ gelten und die Lösung des aus dieser Forderung resultierenden Differentialgleichungssystems ist wieder durch Lösen eines Eigenwertproblems zu erhalten.

Es sei an dieser Stelle hervorgehoben, dass jeder Oberflächenknoten 6 Freiheitsgrade im Eigenwertproblem mit sich bringt, während pro Anreicherungsfunktion an jedem singulären Punkt bereits 2 weitere Freiheitsgrade genügen können. Im Falle einer Risspitzeningularität sind 3 Deformationsmoden mit singulären Spannungen zu erwarten, die hier also schon mit nur 6 zusätzlichen Freiheitsgraden pro Risspitze auf dem diskretisierten Gebietsrand abgedeckt werden können, wenn die Rissmoden direkt als Anreicherungsfunktionen eingesetzt werden. Der wesentliche Zusatzaufwand ergibt sich bei der numerischen Integration der Anreicherungsfunktionen, welcher aber zum einen durch eine mögliche quasi-polare Integration und Parallelisierung weniger zu Buche schlägt und zum anderen bei steigender Netzverfeinerung schnell vergleichsweise klein gegenüber dem Lösungsaufwand des Eigenwertproblems wird.

Die Verschiebungslösung der angereicherten SBFEM ergibt sich mit der Lösung des Eigenwertproblems, mit den Eigenwerten λ_j und den zugehörigen Eigenvektoren

$$\phi_j^{\text{u}} = [(\phi_j^{\text{st}})^{\text{T}}, (\phi_j^{\text{enr}})^{\text{T}}]^{\text{T}} \quad \text{bzw.} \quad \Phi^{\text{u}} = [(\Phi^{\text{st}})^{\text{T}}, (\Phi^{\text{enr}})^{\text{T}}]^{\text{T}} \quad (5.19)$$

die jetzt ebenfalls Anteile ϕ_j^{st} aus der Standardformulierung mit den Knotenverschiebungen und Anteile ϕ_j^{enr} aus der Anreicherung mit den Anreicherungskoeffizienten enthalten, zu:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^{n_\lambda} \sum_{k \in \mathcal{N}} N_k(\mathbf{x}_\eta) \phi_{ikj}^{\text{st}} \xi^{\lambda_j} c_j \quad + \\ & \sum_{j=1}^{n_\lambda} \sum_{l \in \mathcal{P}} N_l(\mathbf{x}_\eta) \left[\sum_{s=1}^{n_S} \sum_{m=1}^{n_F} \left(F_{ism}(\mathbf{x}_{\text{r}\varphi}) - \sum_{k \in \mathcal{N}} N_k(\mathbf{x}_\eta) F_{ism}(\mathbf{x}_{\text{r}\varphi_k}) \right) \phi_{smj}^{\text{enr}} \xi^{\lambda_j} c_j \right]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

¹⁴ In der vorliegenden Implementierung hat sich eine Integrationsordnung $n_G = 10$ bewährt, womit Polynome bis zum Grad $2n_G - 1 = 19$ exakt integriert werden. (Zum Vergleich: Ayhan et al. (2007) verwendeten für ihre 3D-Elemente mit Grenzflächenrissanreicherung eine Gaußquadratur mit $n_G = 48$.)

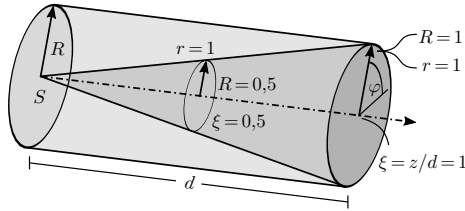


Abbildung 5.4: Koordinaten im Zylinder-KOS (R, φ, z) und Kegel-KOS (ξ, r, φ) an Skalierungszentrum S mit Liniensingularität auf ξ -Achse.

Die Wichtungsfaktoren c_j für die jeweiligen Deformationsmoden $\hat{\mathbf{u}}_{c_j}(\xi)$ ergeben sich aus Gleichung (5.18) bzw. dem daraus resultierenden¹⁵ linearen Gleichungssystem und den Randbedingungen an den diskretisierten Rändern bei ξ_j (Innenrand) und ξ_a (Außenrand). Weiterhin bleibt bei dieser Darstellung zu beachten, dass Eigenwerte mit einer höheren algebraischen als geometrischen Vielfachheit (vgl. Kap. 4.1.2) in der SBFEM für Randwertprobleme der 3D-Elastizitätstheorie (im Gegensatz zur 2D-Formulierung) nur in ausgesprochenen Ausnahmefällen, nämlich an Verzweigungspunkten, auftreten und daher mögliche logarithmische Anteile in der angegebenen Darstellung vernachlässigt sind.

5.1.5 Interaktion von 2D- und 3D-Singularitäten

In der Verschiebungslösung (5.20) ist unmittelbar erkennbar, dass das Abklingverhalten der Deformationsmoden zum Skalierungszentrum ($\xi = 0$) hin sowohl im Standard- als auch im Anreicherungsanteil vom Eigenwert und Abklingexponenten λ (bzw. λ^{3D}) gesteuert wird. Dies gilt im Anreicherungsanteil speziell für die Koeffizientenfunktionen

$$c_{sm}^{2D}(\xi) = \phi_{sm}^{enr} \xi^{\lambda^{3D}} c_j,$$

wo ϕ_{sm}^{enr} (als Teil des zunächst frei skalierbaren Eigenvektors ϕ^u) das Verhältnis, in dem die Anreicherungsfunktionen bei $\xi = 1$ angesprochen werden, festlegt¹⁶. Gleichzeitig existiert aber auch ein Abklingverhalten des Anreicherungsanteils in radialer Richtung r des Kegelkoordinatensystems, wobei der tatsächliche Abstand R vom Skalierungsstrahl mit Liniensingularität ($r = 0$) sowohl von r als auch von ξ abhängt (siehe Abb. 5.4):

$$R = \xi r. \quad (5.21)$$

Damit entsteht eine auf den ersten Blick unübersichtliche Situation, in der 2D- und 3D-Abklingverhalten nur schwer trennbar sind.

Deshalb sei nun der Spezialfall betrachtet, in dem nur eine 2D-Spannungssingularität vorhanden ist, sodass dieser Fall auch mit einer reinen 2D-Betrachtung untersucht werden könnte. Dies könnte beispielsweise die in Abbildung 5.2b gezeigte Situation eines geraden, ebenen Risses im 3D-Kontinuum sein, wobei der gezeigte Würfel dabei nur ein aus dem

¹⁵ Gleichung (5.18) muss für beliebige virtuelle Verrückungen/Anreicherungskoeffizienten $\delta \hat{\mathbf{u}}_c(\xi_a), \delta \hat{\mathbf{u}}_c(\xi_i)$ an Außen- und Innenrand gelten.

¹⁶ Damit enthält ϕ_{sm}^{enr} , wenn direkt mit den 2D-Deformationsmoden angereichert wurde, gerade die entsprechenden 2D-GSIFS bzw. zweidimensionalen modalen Wichtungsfaktoren.

unendlichen Kontinuum herausgeschnittenes Teilgebiet darstelle.¹⁷ Die analytische Lösung in Polarkoordinaten r, φ sei dann für den Fall eines unendlichen Kontinuums und nur eines angesprochenen Deformationsmodus mit Abklingexponent λ^{2D} folgendermaßen gegeben:¹⁸

$$\mathbf{u}(r, \varphi) = c^{2D} r^{\lambda^{2D}} \boldsymbol{\phi}^{2D}(\varphi). \tag{5.22}$$

Diese Lösung soll auch als Anreicherung im Separationsansatz verwendet und das beschriebene Randwertproblem gelöst werden.

Eine Möglichkeit dies umzusetzen, die auch später noch in der Anwendung (Kap. 5.2) zu sehen sein wird, ist auf dem Teilrand Γ_{ns} des diskretisierten Gebietsrandes, wo keine Anreicherung stattfindet, die Verschiebungen der analytischen Lösung vorzugeben und auf dem angereicherten Gebietsrand Γ_s die Verschiebungen senkrecht zum ebenen Gebietsrand zu sperren, um einen EVZ zu simulieren.

Konvergiert dann die enrSBFEM-Verschiebungslösung gegen die analytische Lösung, konvergieren auch die Verschiebungen $\hat{u}_{ik}(\xi)$ entlang der Skalierungsstrahlen im angereicherten Gebiet gegen diejenigen der analytischen Lösung. Da letztere gerade identisch mit den Anreicherungswerten $F_{ism}(r_k, \varphi_k) c_{sm}^{2D}(\xi)$ entlang der Skalierungsstrahlen ist, bleibt im angereicherten Gebiet zwischen den Skalierungsstrahlen von der Verschiebungslösung näherungsweise nur noch folgender Anteil mit dem vorgegebenen analytischen Feld (5.22) übereinzubringen:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}(\xi, r, \varphi) &= \mathbf{F}(r, \varphi) c^{2D}(\xi) \\ &= r^{\lambda^{2D}} \boldsymbol{\phi}^{2D}(\varphi) \xi^{\lambda^{3D}} \phi^{enr} c^{3D}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Zur Vergleichbarkeit der beiden Felder ist zuerst noch eine Transformation in ein Zylinder-KOS¹⁹ (vgl. Abb. 5.4) nötig. Dann ergibt sich das Verschiebungsfeld im angereicherten Gebiet zu:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}(R, \varphi, z) &= \left(\frac{Rd}{z}\right)^{\lambda^{2D}} \boldsymbol{\phi}^{2D}(\varphi) \left(\frac{z}{d}\right)^{\lambda^{3D}} \phi^{enr} c^{3D} \\ &= c^{3D} \phi^{enr} \left(\frac{z}{d}\right)^{\lambda^{3D}-\lambda^{2D}} R^{\lambda^{2D}} \boldsymbol{\phi}^{2D}(\varphi) \end{aligned} \tag{5.24}$$

$$= c^{2D}(z) R^{\lambda^{2D}} \boldsymbol{\phi}^{2D}(\varphi) \tag{5.25}$$

und bildet folglich für $\lambda^{3D} = \lambda^{2D}$ und $c^{3D} \phi^{enr} = c^{2D}$, wie gefordert und trotz Skalierung, das vorgegebene Feld (5.22) ab.

Schließlich sei anhand dieses Beispiels kurz auf die Ende des Kapitels 5.1.1 aufgetane Fragestellung nach der Bedeutung des $(-r/d)$ -Terms in der Jacobi-Matrix des Kegelkoordinatensystems für die Spannungslösung eingegangen. Im gegebenen quasi-zweidimensionalen Problem (Abb. 5.2, reiner 2D-Deformationsmodus angeregt) müssen alle Feldgrößen von der zur Rissfront parallelen Koordinatenrichtung (hier x) unabhängig sein. Demzufolge muss für die entsprechenden Ableitungen gelten (Gl. (5.11)):

$$\mathbf{L}_x \underbrace{\frac{1}{d} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - r \frac{\partial}{\partial r} \right)}_{\partial/\partial x} \tilde{\mathbf{u}}(\xi, r, \varphi) = \mathbf{0} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Gl. (5.23)} \\ \lambda^{3D}, \lambda^{2D} \neq 0 \end{array} \right. \tag{5.26}$$

¹⁷ vgl. Darstellungen zu Beginn des Kapitels um Abb. 5.1

¹⁸ Dabei kann $\lambda^{2D} < 1$ sein, muss aber nicht.

¹⁹ Dabei ist zu beachten, dass die Transformation $r = Rd/z$ bei $z=0$ singularär und damit ungültig wird.

$$\mathbf{L}_x \frac{1}{d} (\lambda^{3D} - \lambda^{2D}) r^{\lambda^{2D}} \phi^{2D}(\varphi) \xi^{\lambda^{3D-1}} \phi^{\text{enr}} e^{3D} = \mathbf{0} \quad \implies \quad \lambda^{3D} \stackrel{!}{=} \lambda^{2D} \quad (5.27)$$

Die Bedingung führt also, genauso wie oben für das Verschiebungsfeld, letztendlich darauf, dass der 3D-Abklingexponent der enrSBFEM-Lösung und der 2D-Abklingexponent der Anreicherung identisch sein müssen. Damit stellt sich der $(-r/d)$ -Term als notwendig heraus, um die Forderung nach Invarianz der Verzerrungs- und Spannungsfelder parallel zur Rissfront zu ermöglichen.

5.1.6 Bestimmung von Anreicherungsfunktionen

Die wohl eleganteste, da analytische, Möglichkeit Anreicherungsfunktionen zu bestimmen, bietet die *Methode komplexer Potentiale* (Muskhelishvili, 1977, Lekhnitskii, 1963, Eshelby et al., 1953, Stroh, 1958).²⁰ Für einfache Felder in homogen-isotropen Materialien wurde auch auf diese zurückgegriffen: So wird in den Folgeteilkapiteln 5.2.1 und 5.2.2 die Konvergenz der Lösung für 3D-Struktursituationen mit Riss(en) im homogen-isotropen Kontinuum betrachtet. Dazu werden die aus der Methode komplexer Potentiale entwickelten analytischen Nahfelder für die Rissmoden mit Abklingexponenten $\lambda = 0,5$ (und teilweise auch $\lambda = 1,5$) zur Anreicherung verwendet.

Für den allgemeinen Fall anisotroper Multimaterialkerben wird der aus der Methode komplexer Potentiale folgende Formalismus jedoch merklich aufwendiger und mathematisch anspruchsvoller. Hier bietet sich als Alternative eine vergleichsweise sehr einfach anwendbare *2D-SBFEM-Formulierung auf Grundlage der Annahmen des GEVZ* an (Kap. 4.1.2) – gerade wenn die Grundlagen der SBFEM für eine 3D-Formulierung ohnehin schon erarbeitet wurden. Dadurch, dass diejenigen Deformationsmoden, die dem Eigenwert null zugeordnet sind, nicht benötigt werden, spielen die Herausforderungen, die mit der Bestimmung dieser durch Lösung des SBFEM-DGLS (4.28) mittels der Eigenwert-Zerlegungs-Methode verbunden sind, hier keine Rolle.

Allerdings werden für eine Anreicherung neben dem Verschiebungsfeld der Deformationsmoden auch deren Ableitungen benötigt. Von analytischen Lösungen, die (außer am singulären Punkt) perfekt glatt sind und beispielsweise mit der Methode komplexer Potentiale bestimmt wurden, sind die Ableitungen natürlich einfach analytisch zu bestimmen und ebenso glatt sowie auch von gleicher Qualität wie die Verschiebungslösung selbst. In der nur semi-analytischen 2D-SBFEM, die in Umfangsrichtung einen FE-Ansatz zur Approximation verwendet, ist einem FE-Ansatz entsprechend die Ableitung in Umfangsrichtung nicht einmal stetig, weiterhin von schlechterer Qualität als die Verschiebungslösung und konvergiert schließlich auch noch mit niedrigerer Ordnung.

Diese Nachteile der Ableitung in Umfangsrichtung gegenüber dem Verschiebungsfeld sowie dessen Ableitung in Radialrichtung können durch eine Glättung der Ableitungen (z. B. mittels einer SPR, Kap. 2.3.2, Abb. 2.13-1D) weitgehend beseitigt werden. Durch eine einfache Konvergenzanalyse kann dann sichergestellt werden, dass die mit der 2D-SBFEM generierten Anreicherungsfunktionen von ähnlicher Qualität sind, wie es die analytischen wären.

²⁰ Neben der Methode komplexer Potentiale existieren auch noch weitere Ansätze zur analytischen Bestimmung asymptotischer Nahfelder, wie die Eigenfunktionsexpansionsmethode nach Williams (1952) (vgl. auch Kap. 3.1), auf die hier aber nicht näher eingegangen sei.

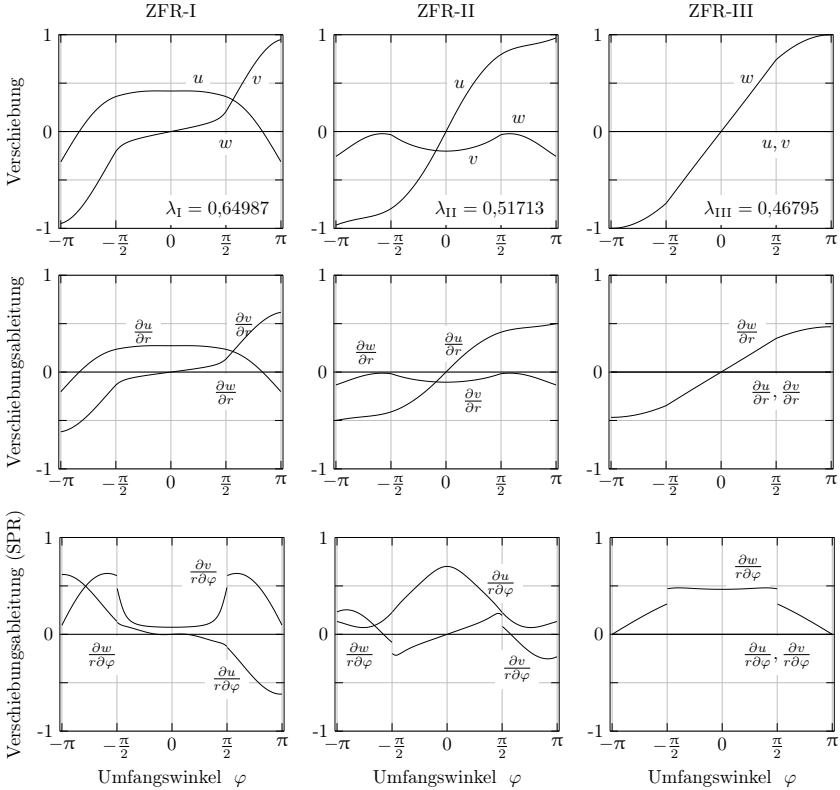


Abbildung 5.5: Winkelfunktionen der drei 2D-Deformationsmoden ZFR-I, ZFR-II und ZFR-III (Kap. 4.2.1) und deren Ableitungen bei $r = 1$ mm für einen senkrecht auf eine Materialgrenzfläche in einem $[90^\circ/0^\circ]$ -T800/Epoxid-Laminat (CFK) treffenden ZFR: 1. Zeile: $\mathbf{u}_j(r=1\text{ mm}, \varphi)$, 2. Zeile: $\left. \frac{\partial \mathbf{u}_j(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=1\text{ mm}}$, 3. Zeile: $\left. \frac{\partial \mathbf{u}_j(r, \varphi)}{r \partial \varphi} \right|_{r=1\text{ mm}}$. Auskonvergierte Lösung: 48 gleichmäßig über Umfang verteilte 2D-SBFE, quadratische Ansatzfunktionen, GEVZ.

Abbildung 5.5 zeigt beispielhaft für den bereits in Kapitel 4.2.1 betrachteten Fall eines senkrecht auf die Materialgrenzfläche in einem $[90^\circ/0^\circ]$ -T800/Epoxid-Laminat (CFK) treffenden ZFR (vgl. auch Abb. 4.6 für $\beta = 90^\circ$) die auskonvergierten Winkelfunktionen der drei 2D-Deformationsmoden

$$\mathbf{u}_j = r^{\lambda_j} \phi_j^{2D}(\varphi) \quad \text{mit} \quad \lambda_j < 1,$$

die zu 2D-Spannungssingularitäten (Liniensingularitäten) führen, sowie deren Ableitungen in radialer und Umfangsrichtung

$$\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial r} = \lambda_j r^{\lambda_j - 1} \phi_j^{2D}(\varphi) \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{u}_j}{r \partial \varphi} = r^{\lambda_j - 1} \frac{\partial \phi_j^{2D}(\varphi)}{\partial \varphi}.$$

Für die auskonvergierte Lösung (Abklingexponenten, Winkelfunktionen sowie deren Ableitung) wurden 48 uniform verteilte 2D-SBFE mit quadratischen Ansatzfunktionen auf dem Umfang

verwendet. Die Ableitung in Umfangsrichtung wurde mit einer SPR geglättet. Die Benennung der 2D-Deformationsmoden folgt derjenigen in Kapitel 4.2.1. Anders als dort ist das KOS für die Berechnung der Anreicherungsfunktionen, der Darstellung in Abbildung 5.2 folgend, aber so gewählt, dass die Rissflanken gerade bei $\varphi = \pm\pi$ und die Materialgrenzfläche bei $\varphi = \pm\pi/2$ liegen. Entsprechend sind die Verschiebungskomponenten u, v, w der in Abbildung 5.5 angegebenen Winkelfunktionen ϕ_j^{2D} in einem kartesischen x, y, z -KOS angegeben, in dem die x -Achse in Richtung des Rissligaments und die z -Achse aus der betrachteten Ebene heraus zeigt.²¹ Weiterhin sind die Winkelfunktionen, wie in Kapitel 4.2.2 bereits vorweggenommen, so normiert, dass ihre euklidische Norm an der Rissflanke bei $\varphi = \pi$ gerade unitär wird:

$$\|\phi_j^{2D}(\varphi = \pi)\| = 1.$$

Die Winkelfunktionen $\phi_j^{2D}(\varphi)$ zeigen das erwartete symmetrische (ZFR-I), antimetrische (ZFR-II) und schließlich rein nicht-ebene Profil (ZFR-III). Die reinen Winkelfunktionen der Ableitungen $\frac{\partial u_j}{\partial r}$ der Deformationsmoden in Radialrichtung sind offensichtlich bis auf einen Faktor λ_j identisch mit den Winkelfunktionen $\phi_j^{2D}(\varphi)$. Die Winkelfunktionen der Ableitungen $\frac{\partial u_j}{r\partial\varphi}$ in Umfangsrichtung enthalten die erwarteten Unstetigkeiten an den Materialübergängen und teils auch größere Gradienten als die Winkelfunktionen ϕ_j^{2D} . Dies lässt darauf schließen, dass vor allem für eine qualitativ gute Darstellung der Ableitung in Umfangsrichtung so viele 2D-SBFE auf dem Umfang notwendig waren und deshalb der für die Implementierung einer SPR betriebene Aufwand gerechtfertigt war.²²

Diese mit Hilfe der 2D-SBFEM (GEVZ) generierten Anreicherungsfunktionen werden ebenfalls, neben den schon erwähnten klassischen Rissmoden, im Folgekapitel im Rahmen einiger Konvergenzanalysen für die enrSBFEM Anwendung finden.

5.2 Konvergenzanalyse für einige kanonische Beispiele

Im Folgenden wird die Konvergenz der Lösung des Randwertproblems anhand einiger kanonischer Beispiele untersucht. Im Fokus steht dabei der Vergleich zwischen angereicherter und nicht angereicherter Formulierung der SBFEM – insbesondere hinsichtlich Einbußen bei den Konvergenzeigenschaften und die Rückgewinnung der optimalen Konvergenz.

Dazu wird jeweils ein 3D-Kontinuum mit mindestens einem Riss betrachtet und daraus ein Teilgebiet herausgeschnitten, welches dann mit der SBFEM zu modellieren ist. Dieses Teilgebiet Ω ist der Einfachheit halber würfelförmig mit Kantenlänge $\ell = 2$ mm gewählt. Der abgebildete Abschnitt der Rissfront verläuft zentral von einer Würfelseite zur gegenüberliegenden und die Rissflanken sind parallel zu den Würfelkanten ausgerichtet. Abbildung 5.6 zeigt ein solches Teilgebiet für ein Kontinuum mit Einzelriss (Abb. 5.6a) und eines mit zwei senkrecht aufeinander treffenden Rissen (Abb. 5.6b), wobei hier jeweils auch noch eine Materialgrenzfläche (senkrecht auf Rissebenen stehend) mit berücksichtigt ist.

²¹ Für $\xi = 1$ und $r = 0$ entspricht dieses kartesische KOS gerade dem η_1^s, η_2^s, ξ -KOS in Abbildung 5.2.

²² Zum Vergleich: Im Falle des klassischen Rissspitzenfeldes sind für eine gute Qualität der Anreicherungs-funktionen schon ca. ein Viertel der hier verwendeten quadratischen 2D-SBFE ausreichend.

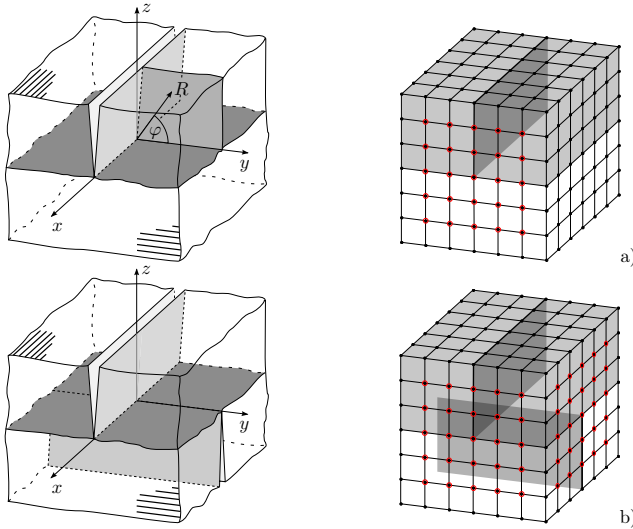


Abbildung 5.6: Würfelförmiger Ausschnitt aus 3D-Kontinuum mit Riss(en) sowie Materialgrenzfläche (und angedeuteter möglicher Material-/Faser-Ausrichtung). Modellierung dessen mit der SBFEM/enrSBFEM: Skalierungszentrum im Würfelzentrum und Diskretisierung des Gebietsrands. Angereicherte Randknoten sind rot markiert. (a) Ein, (b) zwei durchlaufende Risse mit Rissfront auf Materialgrenzfläche.

Die Würfeloberflächen sind mit einem uniformen Netz mit einer geraden Anzahl von n_e Rechteck-Elementen entlang einer Würfelkante diskretisiert. Dann können Risse durch Doppelknoten auf dem Randnetz modelliert werden, sodass sich ohne Anreicherung insgesamt

$$n_{\text{DOF}} = \underbrace{[(6n_e^2 + 2)]}_{\text{Würfel}} + \underbrace{[2n_e - 1]}_{\text{Riss}} \cdot 3 \tag{5.28}$$

Freiheitsgrade ergeben. Das Skalierungszentrum ist im Würfelzentrum zu platzieren, sodass die Rissfront, durch das Skalierungszentrum verlaufend, von zwei in einer Linie liegenden Skalierungsstrahlen abgebildet wird. Als Ansatzfunktionen werden lineare oder quadratische Lagrangepolynome (C4- bzw. C8-Elemente mit 4 bzw. 8 Knoten auf dem diskretisierten Rand) verwendet. In der angereicherten Formulierung werden an Würfelseiten Γ_s , wo die Rissfront auf einen diskretisierten Gebietsrand trifft, alle Knoten mit Ausnahme der Kantenknoten angereichert. Damit ist, unabhängig von der Vernetzung, immer ein gleich großes Gebiet durch angereicherte Elemente²³ abgedeckt. Dies ist in der XFEM entscheidend (Laborde et al., 2005), um die optimale Konvergenz durch die Anreicherung vollständig wiederzuerlangen, und hat sich auch für die enrSBFEM als notwendig erwiesen.

Für die numerische Integration der SBFEM-Systemmatrizen wird in Elementen mit angereicherten Knoten eine Gaußintegration 10-ter Ordnung und in Elementen, die unmittelbar an die Rissfront grenzen, gleichzeitig eine quasi-polare Integration (Abb. 5.3) durchgeführt. Weiterhin wird die numerische Integration parallelisiert, um weiter Rechenzeit einzusparen.

²³ Elemente, die angereicherte Knoten enthalten

Die gesamte Implementierung fand im selbst geschriebenen SBFEM-Code in MATLAB[®] statt.

Zur Überprüfung der Konvergenzeigenschaften werden die aus dem Eigenwertproblem extrahierten Abklingexponenten λ_j , sowie im Rahmen von vollständig gelösten Randwertproblemen auch die L_2 -Norm des Verschiebungsfehlers und die entsprechende Energie-Norm herangezogen. Der relative Fehler für die berechneten Abklingexponenten λ_j lässt sich bei bekannter exakter Lösung λ_j^* folgendermaßen angeben:

$$\epsilon_{\lambda,j} = \frac{|\lambda_j - \lambda_j^*|}{\lambda_j^*} \approx C h^m = C \left(\frac{\ell}{n_e} \right)^m. \quad (5.29)$$

Bei hinreichend feiner Diskretisierung ist dann, wie bei allen Finite-Elemente-Methoden, ein Konvergenzverhalten in der Art eines Potenzgesetzes mit Vorfaktor C und Konvergenzordnung m zu erwarten ($h = \ell/n_e$ stellt dabei eine charakteristische Elementabmessung dar, vgl. Kap. 2.3.3).

Die Eigenvektoren ϕ_j sind als zweiter wesentlicher Lösungsanteil des Eigenwertproblems (REF) nur schwer direkt für eine Konvergenzbetrachtung zugänglich. Dies liegt maßgeblich daran, dass sie als Eigenvektoren stets beliebig skalierbar und deshalb zunächst für die Vergleichbarkeit geeignet zu normieren sind. Die Auswirkungen dieser Eigenschaft auf die Konvergenzanalyse wurden in der Arbeit von Bremm (2017) mit Hilfe des vorliegenden enrSBFEM-Codes untersucht und am Beispiel des klassischen Risses im homogenen isotropen Kontinuum eine signifikante Abhängigkeit der Konvergenzordnung von der gewählten Normierung gezeigt. Über den Umweg der vollständigen Lösung eines Randwertproblems, in dem über die Randbedingungen nur der Deformationsmodus mit Eigenvektor ϕ_j angeregt wurde, konnte die Konvergenz des Eigenvektors und damit des gesamten Deformationsmodus aber dennoch zielführend untersucht werden. Die Lösung des vollständigen Randwertproblems lieferte also gerade die geforderte geeignete Normierung des Eigenvektors. Im Folgekapitel ist unter anderem eine Zusammenfassung der Ergebnisse dieser Untersuchung dargestellt.

Ist die exakte Lösung \mathbf{u} des gesamten Randwertproblems bekannt, kann auch der relative Verschiebungsfehler in der L_2 - und Energienorm angegeben werden. Dies ist erstrebenswert, da die mathematischen Konvergenzbeweise klassischerweise in der L_2 -Norm der Verschiebungen bzw. in der Energienorm ausgeführt sind. Allerdings existieren entsprechende Beweise nach Wissen des Autors bisher nur für die Standardformulierung der SBFEM mit uniformen sowie speziell gradierten Netzen (Apel et al. (2002b)). Da diese aber identische Konvergenzeigenschaften ergeben haben, wie sie auch schon für die klassische FEM gezeigt wurden (z. B. in Apel et al. (1996)), sei hier davon ausgegangen, dass entsprechende Ergebnisse, die für eine Anreicherung der klassischen FEM gelten (vgl. Blum (1988) und Kap. 2.3.4), auch auf eine angereicherte Formulierung der SBFEM übertragbar sind. Tatsächlich wird sich im Laufe dieses Kapitels zeigen, dass sich diese Annahme in der Praxis als gerechtfertigt erwiesen hat. Da im Speziellen die Konvergenz der Eigenvektoren (als weiterer Indikator der Konvergenz der Deformationsmoden, neben der Konvergenz der Eigenwerte) untersucht werden soll, reicht es aus, die L_2 - und Energienorm nur über den diskretisierten Rand Γ_d zu bilden.

$$e_{\mathbf{u},L_2}(\Gamma_d) = \frac{\|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{L_2(\Gamma_d)}}{\|\mathbf{u}\|_{L_2(\Gamma_d)}}, \quad e_{\mathbf{u},\alpha}(\Gamma_d) = \frac{\|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{\alpha(\Gamma_d)}}{\|\mathbf{u}\|_{\alpha(\Gamma_d)}} \quad (5.30)$$

Etwas anwendungsnäher und mit weniger Aufwand berechenbar sind die Gesamtformänderungsenergie U oder beispielsweise eine geeignete Durchschnittsverschiebung \bar{u} . Eine geeignete

Durchschnittsverschiebung \bar{u} ist z. B. zu bestimmen, indem die Verschiebungen in jeder Diskretisierung an den gleichen Stellen ausgewertet und gemittelt werden. Die Gesamtformänderungsenergie kann direkt aus der Verschiebungslösung des Randwertproblems und der Randsteifigkeitsmatrix berechnet werden, woraus sich dann wieder ein relativer Fehler e_U bestimmen lässt.

$$U = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}}_{nc}^T \mathbf{K}_B \tilde{\mathbf{u}}_{nc} \quad \longrightarrow \quad e_U = \frac{|U - U^*|}{U^*} \quad (5.31)$$

Der Fehler e_U in der Gesamtformänderungsenergie unterscheidet sich vom Fehler $e_{u,a}(\Gamma_d)$ in der Energienorm zum einen dadurch, dass er über das gesamte betrachtete Gebiet Ω anstatt nur über den diskretisierten Gebietsrand Γ_d gebildet wird. Zum anderen ist die Berechnung der Gesamtformänderungsenergie nichtlinear in den Verschiebungen, sodass es einen Unterschied macht, ob die Berechnung des Fehlers auf der Verschiebungsebene ($\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}$) oder erst auf der Energieebene ($U - U^*$) erfolgt.

Im Allgemeinen ist die exakte Lösung λ_j^* , \mathbf{u} jedoch unbekannt, sodass die angegebenen Fehlermaße nicht direkt bestimmt werden können. Mit Hilfe einer Richardson-Extrapolation (Richardson (1911), Richardson u. Gaunt (1927)) des Typs

$$\lambda_j = C h^m + \lambda_j^{\text{ext}} \quad (5.32)$$

kann anhand dreier Lösungen des Eigenwertproblems verschiedener Diskretisierungen h_1, h_2, h_3 ein extrapoliertes Abklingexponent λ_j^{ext} bestimmt und als Ersatz für den exakten Wert verwendet werden. Dabei wird der extrapolierte Wert umso näher am exakten liegen, desto feiner die drei Diskretisierungen gewählt wurden. Dieses Vorgehen kann analog auch auf die relativen Fehler der Gesamtformänderungsenergie und einer Durchschnittsverschiebung, nicht aber auf die L_2 - und Energienorm des Verschiebungsfehlers, angewendet werden.²⁴

Im Folgenden werden die Fälle des klassischen Risses im homogen-isotropen Kontinuum, der senkrecht auf der Grenzfläche stehende Zwischenfaserriss in einem $[0^\circ/90^\circ]$ -T800/Epoxid-Laminat (CFK), sowie die entsprechenden Doppelrissituationen betrachtet, in denen zwei ebene Risse im Skalierungszentrum senkrecht aufeinander treffen (Abb. 5.6b).

5.2.1 Riss in homogen-isotropem Kontinuum

Das kanonische Problem eines ebenen Risses mit gerader Rissfront in einem homogen-isotropen Kontinuum wird betrachtet. Die Rissflanken seien unbelastet. Da die resultierenden Spannungsfelder hier unabhängig vom Elastizitätsmodul E sind und auch die Verschiebungsfelder nur antiproportional mit E skalieren (vgl. analytische Lösung), sind die im folgenden gezeigten Ergebnisse weitgehend unabhängig von den Materialeigenschaften. Für die Querkontraktionszahl wurde ein Wert von $\nu = 0.3$ gewählt, doch hat auch sie nur einen untergeordneten Einfluss auf die in diesem Teilkapitel dargestellten Ergebnisse.

In der dreidimensionalen Lösung der Struktursituation treten zum einen die drei klassischen Deformationsmoden mit Abklingexponent $\lambda = 0,5$, die auch zu singulären Spannungen an der Rissfront führen und in der Bruchmechanikliteratur häufig nur als Modus I, II und III bezeichnet werden (z. B. Gross u. Seelig (2016)), auf (1. Zeile in Abb. 5.7). Zum anderen liegen sechs weitere Deformationsmoden mit Abklingexponent $\lambda = 1,5$ vor, wovon aber nur drei auch

²⁴ Die L_2 - und Energienorm des Verschiebungsfehlers benötigen die exakte Verschiebungslösung bereits vor Bildung der (nichtlinearen) Norm.

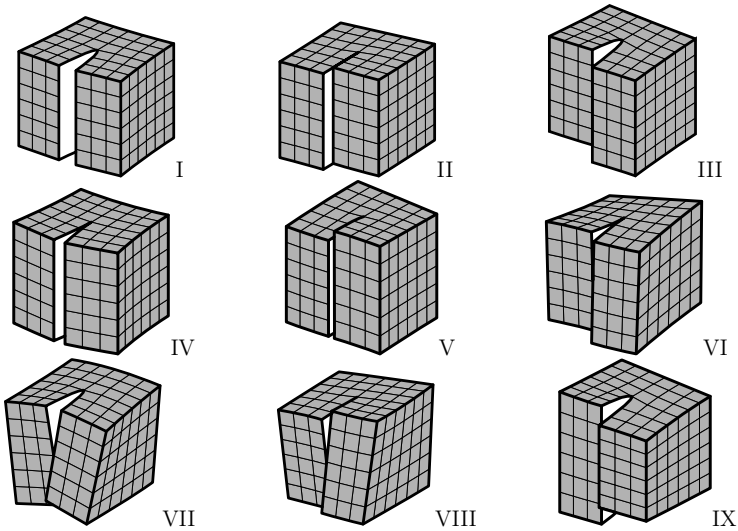


Abbildung 5.7: Deformationsmoden der Struktursituation eines geraden, ebenen Risses im homogen-isotropen 3D-Kontinuum (zur besseren Darstellung um 90° gegenüber Abb. 5.6a gedreht). 1. Zeile: klassische Rissmoden mit Abklingexponent $\lambda^{3D} = \lambda^{2D} = 0,5$ (z. B. Gross u. Seelig (2016)). 2. Zeile: höhere Rissmoden mit $\lambda^{3D} = \lambda^{2D} = 1,5$ und zweidimensional veränderlichem Verschiebungsfeld. 3. Zeile: höhere Rissmoden mit in Richtung der Rissfront veränderlichem Verschiebungsfeld: $\lambda^{3D} = 1,5$, $\lambda^{2D} = 0,5$.

über eine 2D-Analyse mit zugrundeliegendem GEVZ zugänglich sind (2. Zeile in Abb. 5.7). Das jeweilige Verschiebungsfeld der übrigen drei ist in Richtung der Rissfront veränderlich (3. Zeile in Abb. 5.7). Diese sechs Deformationsmoden sind im Rahmen dieser Arbeit in Anlehnung an die Definition der klassischen Rissmoden eingeordnet und fortlaufend römisch nummeriert: Spalte 1 in Abb. 5.7 enthält bezüglich der Ebene der Rissflanken symmetrische Rissmoden (I, IV, VII), Spalte 2 antisymmetrische Rissmoden mit einer dominierenden Relativverschiebung der Rissflanken normal zur Rissfront (II, V, VIII) und Spalte 3 die Rissmoden mit einer dominierenden Relativverschiebung der Rissflanken tangential zur Rissfront (III, VI, IX).²⁵

In Hell u. Becker (2016a) wurden gegenüber der Standardformulierung wesentlich verbesserte Konvergenzeigenschaften der enrSBFEM für diese Struktursituation gefunden, wobei in der dort verwendeten Implementierung noch keine quasi-polare Integration und keine Parallelisierung der Berechnung der Systemmatrizen integriert war. Des Weiteren wurde dort die Zerlegung (2.170) des Rissspitzenfeldes nach Fleming et al. (1997) für die Anreicherungsfunktionen verwendet. Diese Wahl der Anreicherungsfunktionen bot gegenüber der direkten

²⁵ In der gegebenen Struktursituation treten natürlich auch Deformationsmoden mit $\lambda = 0$ (Starrkörperverschiebungen) und $\lambda = 1$ (Starrkörperrotationen und homogene Verzerrungen) auf, die aber alle schon mit linearen Ansatzfunktionen nahezu exakt abgebildet werden und daher für eine Konvergenzbetrachtung uninteressant sind. Höhere Deformationsmoden sollen hier zugunsten einer übersichtlicheren Darstellung ebenfalls außen vor bleiben. Deformationsmoden mit ganzzahligen Abklingexponenten konvergieren ohnehin stets optimal und auf die übrigen sind die in diesem Teilkapitel gezogenen Schlussfolgerungen zu den oben genannten Rissmoden analog übertragbar.

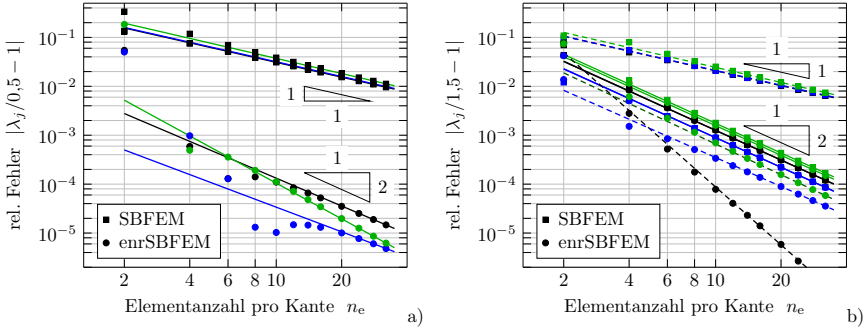


Abbildung 5.8: Vergleich der Konvergenz der relativen Fehler e_{λ_j} (5.29) der Abklingexponenten/Eigenwerte λ_j zwischen Standardformulierung und angereicherter Formulierung der SBFEM unter Verwendung von bilinearen C4-Elementen. a) Rissmoden I (schwarz), II (blau), III (grün); b) Rissmoden IV, VII (schwarz), V, VIII (blau), VI, IX (grün). Näherungsgeraden der Form $Cn_e^{-m\lambda}$ an die berechneten Werte e_{λ} sind aus den beiden feinsten Diskretisierungen bestimmt (durchgängig: Rissmoden I-VI; gestrichelt: Rissmoden VII-IX).

Verwendung der Rissmoden eine höhere Flexibilität in der Gewichtung der trigonometrischen Funktionen im Rissspitzenfeld. Andererseits führte es durch die höhere Anzahl an Freiheitsgraden (24 statt nur 6 zusätzliche DOF pro angereichertem Gebiet Ω_s für die ersten drei Rissmoden) zu einem etwas gesteigerten Rechenaufwand. Hinzu kommt, dass sich eine Anreicherung für höhere Rissmoden (IV, V, ...) mit $\lambda = 1,5$ als problematisch herausstellte, während gleichzeitig die gewonnene Flexibilität aus der Zerlegung des Rissspitzenfeldes weitgehend ungenutzt blieb. Denn Hell u. Becker (2016a) konnten auch zeigen, dass die Verhältnisse der Anreicherungskoeffizienten in der gegebenen Situation gerade zu denen eines EVZ konvergieren.²⁶ Deshalb werden im Folgenden die Ergebnisse für den schon von Benzley (1974) verfolgten Ansatz einer direkten Anreicherung mit den eigentlichen Rissmoden (Gln. (2.91)–(2.93), EVZ) gezeigt.

Konvergenz der Abklingexponenten λ

Nach Apel et al. (2002b) ist in Abwesenheit jeglicher Spannungssingularitäten in allen diskretisierten Ebenen mit einer optimalen Konvergenzordnung der Abklingexponenten von $m_\lambda = 2p$ zu rechnen, wobei p den Polynomgrad der verwendeten Ansatzfunktionen darstellt. Dies entspricht gerade der zu erwartenden Konvergenzordnung für die Gesamtformänderungsenergie der SBFEM aber auch der Standard-FEM. Wird jedoch innerhalb einer diskretisierten Ebene ein 2D-Deformationsmodus mit Abklingexponent $\lambda^{2D} < p$ angesprochen (z. B. solche mit singulären Spannungen), dann ist die Konvergenzordnung unabhängig vom Polynomgrad p auf $m_\lambda = 2\lambda^{2D}$ beschränkt. An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass klar zwischen den Abklingexponenten λ^{2D} der 2D-Deformationsmoden (Linieningularität) auf dem diskretisierten Gebietsrand und den Abklingexponenten λ^{3D} der 3D-Deformationsmoden (Punktsingularität) zu unterscheiden ist. Letztere werden im Folgenden der einfacheren Schreibweise halber meist nur mit λ betitelt.

²⁶wie nach Aksentian (1967) zu erwarten

Tabelle 5.1: Konvergenzordnungen m_λ des relativen Fehlers $e_{\lambda,j}$ (Gl. (5.29)) der Abklingexponenten/Eigenwerte λ_j .

Rissmodus	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
SBFEM	1,0	1,0	1,0	2,0	2,0	2,0	1,0	1,0	1,0
enrSBFEM	1,9	1,7	2,4	2,0	2,0	2,0	3,9	2,0	2,1

Die Abbildungen 5.8a und b zeigen für die neun Rissmoden aus Abbildung 5.7 die Konvergenz des relativen Fehlers e_λ (5.29) der Abklingexponenten in doppellogarithmischer Auftragung. Für die zugrunde liegenden Berechnungen sind lineare Ansatzfunktionen (C4-Elemente, $p=1$) verwendet worden. Die kreisförmigen Punkte stellen die mit Hilfe der angereicherten Formulierung der SBFEM (enrSBFEM) gewonnenen Ergebnisse für verschiedene Diskretisierungen dar, die quadratischen Punkte entstammen Berechnungen mit identischer Diskretisierung aber ohne Anreicherung. Dadurch enthalten hier alle SBFEM-Rechnungen genau 12 DOF weniger als die entsprechenden enrSBFEM-Rechnungen gleicher Diskretisierung, was aber in Anbetracht der mit n_e schnell wachsenden Gesamtzahl der Freiheitsgrade (s. Gl. 5.28: $n_{\text{DOF}}(n_e=6) = 687$) kaum ins Gewicht fällt. Zur Reduzierung der Rechenzeit wurde für die hier durchgeführten Analysen anstatt des sonst verwendeten QR-Algorithmus auf ein iteratives Arnoldi-Verfahren²⁷ zur Lösung des Eigenwertproblems zurückgegriffen. Dieses liefert zwar nur eine ausgewählte Anzahl von Eigenwerten und Eigenvektoren, ist dafür aber insbesondere für große Matrizen schneller und benötigt weniger Arbeitsspeicher. Letzterer stellt bei Berechnungen auf einfachen Desktop-PCs häufig den begrenzenden Faktor dar. Die Näherungsgeraden in Abbildungen 5.8a und b der Art $Cn_e^{-m_\lambda}$ sind aus den Datenpunkten der zwei feinsten betrachteten Diskretisierungen ($n_e = 28, 32$) bestimmt. Ihre Steigung bildet im doppellogarithmischen Diagramm die Konvergenzordnung m_λ ab. Phänomenologisch kann mit ihrer Hilfe abhängig davon, durch wie viele der berechneten Datenpunkte diese Funktionen verlaufen, argumentiert werden, ob mit einer weiteren Änderung der Konvergenzordnung bei zunehmender Verfeinerung der Diskretisierung zu rechnen ist oder nicht.

In Abbildung 5.8a werden die Rissmoden I-III ($\lambda = 0,5$) betrachtet. Die immense Verbesserung der Genauigkeit aufgrund der Anreicherung ist unmittelbar ersichtlich: Der relative Fehler reduziert sich um mehrere Größenordnungen und nimmt schon für grobe Diskretisierungen sehr kleine Werte an. Nur für die grösste Diskretisierung mit $n_e = 2$ ist der Fehler mit Anreicherung von ähnlicher Größe wie ohne Anreicherung. Dies liegt darin begründet, dass bei dieser Diskretisierung noch keine voll angereicherten Elemente, sondern nur Blending-Elemente, um die Rissfront herum vorhanden sind. Die Konvergenzordnungen sind ohne Anreicherung, wie erwartet, auf den doppelten Wert des Abklingexponenten $\lambda^{2D} = 0,5$ beschränkt $m_\lambda \approx 2\lambda^{2D} = 1$. Mit Anreicherung verbessern sich auch die Konvergenzordnungen wesentlich (vgl. Tab. 5.1). Für Rissmodus III wird sogar die optimale²⁸ Konvergenzordnung von $m_\lambda^{\text{opt}} = 2$ mit $m_{\lambda_{\text{III}}}^{\text{enr}} \approx 2,4$ übertroffen und ist damit superkonvergent. Für Rissmodus I wird eine Konvergenzordnung von $m_{\lambda_{\text{I}}}^{\text{enr}} \approx 1,9$, aber für Rissmodus II der etwas niedrigere Werte von nur $m_{\lambda_{\text{II}}}^{\text{enr}} \approx 1,7$ erreicht. Gerade für Rissmodus II durchläuft die zugehörige Näherungsfunktion vergleichsweise wenige

²⁷ MATLAB-Funktion `eigs()`, Arnoldi (1951), MATLAB (2014)

²⁸ Die „optimale“ Konvergenzordnung bezeichnet hier diejenige, die im Falle eines glatten Randwertproblems (keine Spannungssingularitäten) theoretisch mindestens zu erwarten sind.

Datenpunkte und lässt somit auf eine wahrscheinlich zunehmende Konvergenzordnung bei weiterer Netzverfeinerung schließen.²⁹

In Abbildung 5.8b ist die Konvergenz der Abklingexponenten der Rissmoden IV-IX ($\lambda = 1,5$) dargestellt. Die zu den Rissmoden VII-IX zugehörigen Näherungsgeraden sind gestrichelt dargestellt, die übrigen drei durchgezogen. Die mit und ohne Anreicherung erhaltenen Ergebnisse sind für die Rissmoden IV-VI kaum auseinander zu halten. Es wird stets die optimale Konvergenzordnung von $m_\lambda^{\text{opt}} \approx 2$ erreicht, was darin begründet liegt, dass der Abklingexponent des jeweils auf dem diskretisierten Gebietsrand aktiven 2D-Deformationsmodus nicht kleiner ist als der verwendete Polynomgrad

$$\lambda^{2D} = 1,5 > p = 1 .$$

Anders stellt sich die Situation hingegen bei den Rissmoden VII-IX dar, die ein auch parallel zur Rissfront veränderliches Verschiebungsfeld aufweisen. Der Abklingexponent des auf dem diskretisierten Gebietsrand an der Rissfront aktiven 2D-Deformationsmodus entspricht hier nicht mehr wie in den bisher betrachteten Fällen gerade dem Abklingexponenten des 3D-Deformationsmodus (hier $\lambda^{3D} = 1,5$), sondern trägt wie bei den Rissmoden I-III nur $\lambda^{2D} = 0,5 < p = 1$. Somit liegt ohne Anreicherung nur eine Konvergenzordnung $m_\lambda^{\text{st}} \approx 1$ und eine ähnlich eingeschränkte Genauigkeit vor, wie es bei den Rissmoden I-III der Fall war. Mit Anreicherung reduziert sich der relative Fehler in der Berechnung der 3D-Abklingexponenten wieder um mehr als eine Größenordnung und es werden Konvergenzordnungen $m_\lambda^{\text{enr}} \geq 2$ erreicht (vgl. Tab. 5.1).

Am Beispiel der hier betrachteten Rissmoden I-IX soll ein kurzer Blick auf das Thema der Interaktion von 2D- und 3D-Deformationsmoden geworfen werden. Dazu sei im Folgenden für eine bessere Übersichtlichkeit nur der Anreicherungsanteil der Verschiebungslösung (5.20) im voll angereicherten Gebiet und ohne Abzug der Knotenwerte berücksichtigt (vgl. Gl. 5.24). So liegen bei den Rissmoden I-III mit $\lambda^{2D} = \lambda^{3D} = 0,5$ und bei den Rissmoden IV-VI mit $\lambda^{2D} = \lambda^{3D} = 1,5$ jeweils identische Abklingexponenten der angesprochenen 2D- und 3D-Deformationsmoden vor. Damit ist der 2D-Spannungsintensitätsfaktor c^{2D} nach Gleichung (5.24) richtigerweise konstant entlang der Rissfront:

$$c_{I-VI}^{2D} = \text{konst} .$$

Hingegen ergibt sich für die Rissmoden VII-IX mit $\lambda^{3D} - \lambda^{2D} = 1,5 - 0,5 = 1$ gerade eine lineare Variation des Spannungsintensitätsfaktors entlang der Rissfront (hier entlang der x -Achse):

$$c_{VII-IX}^{2D} \propto x .$$

Daher liegt die Vermutung nahe, dass zumindest einige dieser Rissmoden auch durch eine quasi-zweidimensionale Analyse mit einer Schubdeformationstheorie erster Ordnung (Reissner-Mindlin-Plattentheorie, z. B. Mittelstedt u. Becker (2016)) abzubilden sind. In dieser Plattentheorie werden folgende Ansätze für die Verschiebungen formuliert:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u(y, z) \\ x \psi_y(y, z) \\ x \psi_z(y, z) \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

²⁹ Feinere Diskretisierungen wurden aufgrund des schnell mit n_e steigenden Rechenaufwands und besonders auch Arbeitsspeicherbedarfs nicht berücksichtigt. Allein die Lösung des Eigenwertproblems mit $n_{\text{DOF}}(n_e = 32) = 18627$ mittels der MATLAB-Funktion *eigs()* benötigte auf einem Standard-Desktop-PC etwa 20 min Rechenzeit und einen Maximalwert von 50 GB Arbeitsspeicher.

mit der Absenkung der Plattenmittelebene $u(y, z)$ sowie den Neigungen $\psi_y(y, z)$ und $\psi_z(y, z)$ der Normalen auf der Plattenmittelebene in y - bzw. z -Richtung. Die Rissnahfelder in entsprechenden Reissner-Mindlin-Platten wurden von zahlreichen Autoren untersucht (siehe z. B. Felger u. Becker (2017) und die darin zitierten Arbeiten). Tatsächlich scheinen die hier dargestellten Rissmoden VII und VIII gerade jenen in der Arbeit von Felger u. Becker (2017), die allgemein die Singularitätsordnungen und zugehörigen Deformationsmoden an Bimaterialkerben in Reissner-Mindlin-Platten mit der Methode komplexer Potentiale untersuchten, zu entsprechen: Beide enthalten im Wesentlichen ebene Verschiebungen senkrecht zur Rissfront und sind in Richtung der Rissfront selbst, wie gezeigt, nur linear veränderlich. Dann kann der symmetrische Rissmodus VII gerade dem aus dem symmetrischen Biegemoment M^S resultierenden Deformationsmodus und der antisymmetrische Rissmodus VIII gerade dem aus dem antisymmetrischen Drillmoment M^A resultierenden Deformationsmodus in Felger u. Becker (2017) zugeordnet werden. Hingegen kann Rissmodus IX nicht dieser Analogie folgend dem aus der antisymmetrischen Querkraft Q^A resultierenden Deformationsmodus dort entsprechen, da schon der Verschiebungsansatz (5.33) keine lineare Veränderung des Verschiebungsfeldes in $u = u(y, z)$ parallel zur Rissfront (x -Richtung) vorsieht.

Konvergenz der Deformationsmoden im Randwertproblem

Wie zu Beginn dieses Kapitels dargestellt, sind die Deformationsmoden aufgrund der beliebigen Skalierbarkeit der in ihnen enthaltenen Eigenvektoren nicht unmittelbar bezüglich ihrer Konvergenzeigenschaften zu untersuchen. Sie sind zuerst geeignet zu normieren, was beispielsweise durch Lösung eines vollständigen Randwertproblems möglich ist. Damit ein Deformationsmodus isoliert untersucht werden kann, muss seine exakte Lösung bekannt sein³⁰, denn dann kann er gezielt durch eine entsprechende Wahl der Randbedingungen angeregt werden.

Im Folgenden werden nur die Rissmoden I-VI aus Abbildung 5.7 betrachtet, da nur für diese eine analytische Lösung vorliegt. Diese ist für die Rissmoden I-III den Gleichungen (2.91–2.93) zu entnehmen. Für die Rissmoden IV-VI lautet sie wie folgt:

$$\mathbf{u}_{\text{IV}}(r, \varphi) = \frac{K_{\text{IV}}}{2G} \sqrt{\frac{r^3}{2\pi}} \begin{bmatrix} \cos(\varphi/2)(2 + \kappa - (2\kappa + 1) \cos(\varphi)) \\ \sin(\varphi/2)(2 - \kappa - (2\kappa - 1) \cos(\varphi)) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Modus IV} \quad (5.34)$$

$$\mathbf{u}_{\text{V}}(r, \varphi) = \frac{K_{\text{V}}}{2G} \sqrt{\frac{r^3}{2\pi}} \begin{bmatrix} \sin(\varphi/2)(\kappa + 4 + (5 + 2\kappa) \cos(\varphi)) \\ \cos(\varphi/2)(\kappa - 4 + (5 - 2\kappa) \cos(\varphi)) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Modus V} \quad (5.35)$$

$$\mathbf{u}_{\text{VI}}(r, \varphi) = \frac{2K_{\text{VI}}}{G} \sqrt{\frac{r^3}{2\pi}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\varphi/2)(2 \cos(\varphi) + 1) \end{bmatrix} \quad \text{Modus VI} \quad (5.36)$$

Mit den analytischen Lösungen konforme Verschiebungen werden an den Knoten auf dem diskretisierten Gebietsrand Γ_{ns} (vgl. Abb. 5.2b) vorgeschrieben. An den übrigen Würfelflächen Γ_{s} , wo also die Rissfront auf den diskretisierten Gebietsrand Γ_{d} trifft, werden im Falle der

³⁰ Die Bestimmung einer Näherung der exakten Lösung mit Hilfe einer Richardson-Extrapolation ist problematisch. Zwar können die Verschiebungen einzelner Knoten extrapoliert werden, wenn diese Knoten in allen für die Extrapolation herangezogenen Netzen vorhanden sind. Zwischen diesen Knoten greift das Schema jedoch nicht.

Rissmoden I, II, IV und V die Verschiebungen senkrecht auf der Fläche gesperrt³¹, um den zu Grunde liegenden EVZ zu simulieren. Dazu sind im Falle der angereicherten Formulierung auch die Koeffizienten der Anreicherungsfunktionen zu Modus III zu null zu setzen. Für die Rissmoden III und VI ist ein longitudinaler Schubspannungszustand nachzubilden. Hierfür werden an den Würfelflächen Γ_s die Verschiebungen senkrecht zur Rissfront gesperrt³² und nun die Koeffizienten der Anreicherungsfunktionen zu Modus I und II zu null gesetzt. Tatsächlich sind die Wichtungsfaktoren aller Deformationsmoden $c_j \neq 0$ und nicht nur desjenigen, der angeregt werden sollte. Allerdings waren sie in den durchgeführten Berechnungen stets um mindestens vier Größenordnungen kleiner und daher vermutlich vor allem auf numerische Ungenauigkeiten zurückzuführen. In jedem Fall fielen sie, wie in der Arbeit von Bremm (2017) gezeigt, bei der Bestimmung der Konvergenzeigenschaften kaum ins Gewicht (Einfluss auf Konvergenzordnung des relativen Fehlers in L_2 - und Energienorm stets $< 3\%$).

Die Konvergenzeigenschaften werden für die einzelnen Rissmoden mit Hilfe der Energienorm und L_2 -Norm in den Verschiebungen (Gln. (5.30)) untersucht. Dabei wird der relative Fehler $e_{\mathbf{u},L_2}(\Gamma_s)$, $e_{\mathbf{u},a}(\Gamma_s)$ der jeweiligen Norm nur über den diskretisierten Gebietsrand Γ_s gebildet, denn am übrigen diskretisierten Rand Γ_{ns} sind die Verschiebungen über die Randbedingungen ohnehin vollständig vorgeschrieben. Gleichzeitig existiert auf Γ_{ns} ein in den Randkoordinaten glattes Verschiebungsfeld, sodass dort die Normen nur auf den klassischen Interpolationsfehler eines Gebiets ohne Singularitäten führen können. Dadurch ergeben sich dort unabhängig von einer Anreicherung automatisch (mindestens) die optimalen Konvergenzeigenschaften, die klassischerweise gerade aus einer Abschätzung des Interpolationsfehlers abgeleitet sind (vgl. Kap. 2.3.4). Die Integration über Γ_s erfolgt wieder numerisch mittels einer Gaußquadratur. Da der Integrand mit der analytischen Lösung nun stets singuläre Terme enthält, wird sowohl für Berechnungen mit als auch ohne Anreicherung mit 10×10 Integrationspunkten pro Element und bei Elementen an der Rissfront quasi-polar integriert.

Tabelle 2.1 zeigt die erwarteten Konvergenzordnungen einer klassischen FEM nach den Abschätzungen (2.172) und (2.173) für die gegebene Struktursituation. Dabei ist eine Unterscheidung zwischen den zu erwartenden Werten für lineare und quadratische Ansatzfunktionen, sowie ohne und mit Anreicherung getroffen. Die Anreicherung kann mit 2D-Deformationsmoden bis halbzahligen Abklingexponenten $\lambda^{2D} = 0,5$ oder $1,5$ erfolgen. Ohne Anreicherung ist unabhängig vom Polynomgrad in der L_2 -Norm nur eine Konvergenz der Ordnung $\mathcal{O}(h)$ und in der Energienorm der Ordnung $\mathcal{O}(h^{0,5})$ zu erwarten. Unter der Verwendung linearer Ansatzfunktionen ($p = 1$) wird bei einer Anreicherung mit den 2D-Deformationsmoden zu $\lambda^{2D} = 0,5$ die optimale Konvergenz wiederhergestellt. Für quadratische Ansatzfunktionen ($p = 2$) sind dazu zusätzlich die 2D-Deformationsmoden zu $\lambda^{2D} = 1,5$ notwendig – immer vorausgesetzt, dass diese auch auf dem diskretisierten Gebietsrand angesprochen werden.

Die Abbildungen 5.9a und b zeigen Ergebnisse aus Bremm (2017) im doppellogarithmischen Diagramm zur Konvergenz der Verschiebungslösungen bei zunehmender Netzfeinheit für die sechs betrachteten Rissmoden I-VI in der L_2 - und der Energienorm. Die Berechnungen hierfür wurden mit linearen Ansatzfunktionen (C4-Elemente, $p = 1$) durchgeführt. Schwarze Datenpunkte stellen Ergebnisse, die ohne Anreicherung berechnet wurden, und rote Datenpunkte diejenigen, die mit Anreicherung mit den singulären 2D-Deformationsmoden zu $\lambda^{2D} = 0,5$ bestimmt wurden, dar. Die eingezeichneten Geraden sind wie in Abbildung 5.8

³¹ $u_x(\Gamma_s) = 0$, wobei das kartesische KOS im Skalierungszentrum liegt, die x -Achse in Richtung der Rissfront zeigt und die z -Achse ebenfalls in der Rissebene liegt.

³² $u_y(\Gamma_s) = u_z(\Gamma_s) = 0$

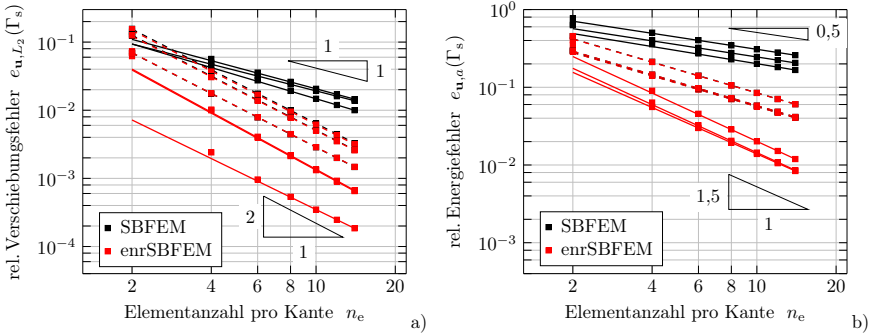


Abbildung 5.9: Relativer Fehler in (a) L_2 -Norm, (b) Energienorm über Rand Γ_s für C4-Elemente ($p=1$) bei Lösung des Randwertproblems ohne und mit Anreicherung (mit $\lambda^{2D}=0,5$), – Rissmoden I-III, - - Rissmoden IV-VI. (Ergebnisse aus Bremm (2017).)

Tabelle 5.2: Konvergenzordnungen des relativen Fehlers e_{u, L_2} bzw. $e_{u, a}$ in der L_2 - respektive Energienorm über den Rand Γ_s für C4-Elemente ($p=1$) ohne (SBFEM) und mit Anreicherung (enrSBFEM, $\lambda^{2D}=0,5$).

Rissmodus	I	II	III	IV	V	VI
SBFEM, $\ \cdot\ _{L_2}$	0,99	1,05	1,17	1,98	1,99	1,98
enrSBFEM, $\ \cdot\ _{L_2}$	2,12	2,12	1,91	1,98	1,98	1,98
SBFEM, $\ \cdot\ _a$	0,52	0,52	0,56	0,99	0,99	1,00
enrSBFEM, $\ \cdot\ _a$	1,57	1,56	1,50	0,99	0,99	1,00

wieder Potenznäherungsfunktionen an die zwei Datenpunkte der beiden feinsten Diskretisierungen. In beiden Normen ist für die Rissmoden I-III (durchgezogene Linien) eine wesentliche Verbesserung sowohl der Genauigkeit als auch der Konvergenzordnung durch die Anreicherung erkennbar (vergleiche auch Tab. 5.2). Ohne Anreicherung beträgt die Konvergenzordnung für alle drei Rissmoden in der L_2 -Norm $m_{L_2}^{st} \approx 1$ und in der Energienorm $m_a^{st} \approx 0,5$. Mit Anreicherung verbessern sie sich in der L_2 -Norm auf $m_{L_2}^{enr} \approx 2$ und in der Energienorm auf $m_a^{enr} \approx 1,5$. Diese Werte entsprechen gerade den nach Blum (1988) für eine klassische FEM-Lösung erwarteten Werten aus Tabelle 2.1. Nur die Konvergenzordnung des relativen Fehlers in der Energienorm übertrifft den erwarteten Wert von 1. Da der relative Fehler auf dem nicht einbezogenen Teilrand Γ_{ns} als Interpolationsfehler aber gerade der Ordnung $\mathcal{O}(h)$ entsprechen muss, ergäbe sich für den gesamten diskretisierten Gebietsrand $\Gamma_d = \Gamma_s \cup \Gamma_{ns}$ (und hinreichend feine Diskretisierungen) wieder eine Konvergenzordnung von $m_a^{enr} \approx 1$.

Für die Rissmoden IV-VI (gestrichelte Linien in Abb. 5.9a und b) sind die Ergebnisse mit und ohne Anreicherung, wie schon zuvor bei der Konvergenzanalyse der Abklingexponenten (vgl. Abb. 5.8b), kaum von einander zu unterscheiden: Die Konvergenzordnung beträgt $m_{L_2} \approx 2$ in der L_2 -Norm und $m_a \approx 1$ in der Energienorm, welche jeweils auch die erwarteten Werte nach Tabelle 2.1 darstellen.

Nachdem die für die klassische FEM mit Anreicherung erwarteten Konvergenzordnungen (Tab. 2.1) auch für die SBFEM in Standardformulierung und mit Anreicherung jeweils unter

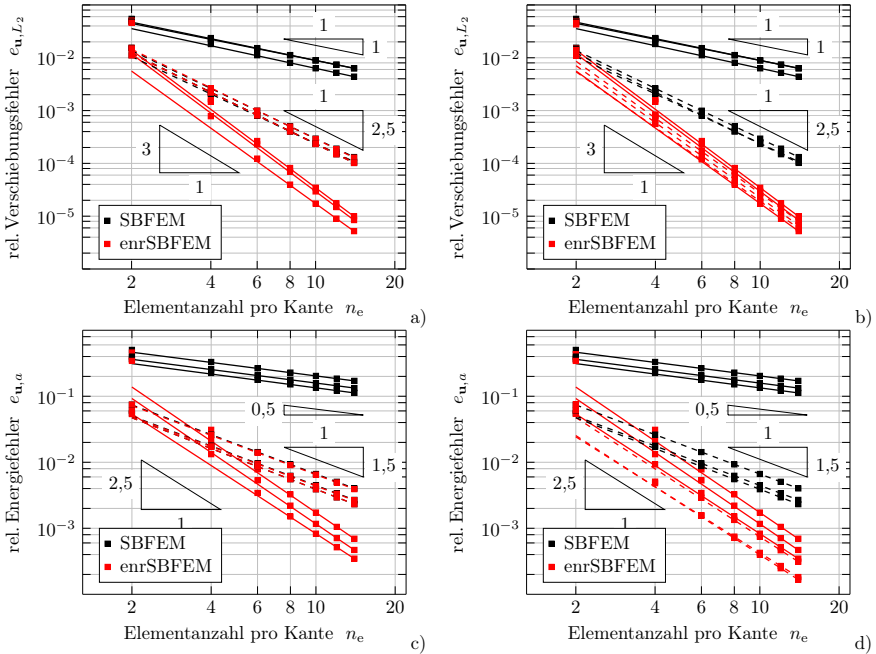


Abbildung 5.10: Relativer Fehler in (a,b) L_2 -Norm, (c,d) Energienorm über Rand Γ_s für C8-Elemente ($p=2$) bei Lösung des Randwertproblems ohne und mit Anreicherung, – Moden I-III, -- Moden IV-VI. (a) Anreicherung bis $\lambda_{\max}^{2D} = 0,5$, (b) Anreicherung bis $\lambda_{\max}^{2D} = 1,5$. (Ergebnisse entnommen aus Bremm (2017)).

Verwendung von linearen Ansatzfunktionen bestätigt wurden, bleibt die Frage, ob dies auch für die Verwendung von Ansatzfunktionen höherer Ordnung genauso gilt. Zur Beantwortung dessen seien im Folgenden quadratische Ansatzfunktionen auf dem diskretisierten Rand betrachtet. Die entsprechenden SBFEM besitzen auf dem diskretisierten Rand acht Knoten³³ und werden daher im Folgenden als C8-Elemente bezeichnet. Der Abbildung 5.9 für C4-Elemente entsprechend, zeigt Abbildung 5.10 die Ergebnisse der Konvergenzstudie von Bremm (2017) für C8-Elemente. Dabei zeigen Abbildungen 5.10 a und c die Konvergenz des relativen Fehlers in L_2 - bzw. Energienorm bei gleicher Anreicherung, wie sie vorher für die C4-Elemente verwendet wurden (mit den 2D-Deformationsmoden zu $\lambda^{2D} = 0,5$). Durch die Anreicherung zeigt sich sowohl in der L_2 - als auch in der Energienorm eine fundamentale Verbesserung der Genauigkeit für die Rissmoden I-III (durchgezogene Linien). Auch die zugehörigen Konvergenzordnungen verbessern sich mit Anreicherung von $m_{L_2}^{st} \approx 1$ auf nun $m_{L_2}^{enr} \approx 3,8$ in der L_2 -Norm und von $m_a^{st} \approx 0,5$ auf $m_a^{enr} \approx 2,8$ in der Energienorm (s. Tab. 5.3). Damit übersteigen die beiden mit der angereicherten Formulierung erhaltenen Werte die nach Tabelle 2.1 erwarteten jeweils um mehr als 1. Hierzu ist jedoch wieder anzuführen, dass die Normen nur über den Teilrand

³³ Finite-Elemente mit einer reduzierten Lagrange-Polynombasis werden auch Serendipity-Elemente genannt (vgl. z. B. Zienkiewicz et al. (2013)). Allerdings ist zu beachten, dass diese für nichtebene, gekrümmte Elementgeometrien nur begrenzt geeignet sind.

Tabelle 5.3: Konvergenzordnungen des relativen Fehlers $e_{\mathbf{u},L_2}$ bzw. $e_{\mathbf{u},a}$ in der L_2 - respektive Energienorm über dem Rand Γ_s für C8-Elemente ($p=2$) ohne (SBFEM) und mit Anreicherung (enrSBFEM).

Rissmodus	I	II	III	IV	V	VI
SBFEM, $\ \cdot\ _{L_2}$	1,01	1,04	1,09	2,36	2,39	2,46
enrSBFEM (bis $\lambda=0,5$), $\ \cdot\ _{L_2}$	3,82	3,83	3,67	2,43	2,42	2,46
enrSBFEM (bis $\lambda=1,5$), $\ \cdot\ _{L_2}$	3,82	3,83	3,67	3,60	3,61	3,52
SBFEM, $\ \cdot\ _a$	0,52	0,52	0,53	1,50	1,50	1,56
enrSBFEM (bis $\lambda=0,5$), $\ \cdot\ _a$	2,80	2,80	2,65	1,50	1,50	1,56
enrSBFEM (bis $\lambda=1,5$), $\ \cdot\ _a$	2,80	2,80	2,65	2,61	2,61	2,53

Γ_s gebildet wurden, und dass eine Berücksichtigung auch des Teilrandes Γ_{ns} , wo die Bildung der Normen jeweils genau den Interpolationsfehler ergeben muss, die Konvergenzordnungen in der L_2 -Norm bis auf 3 und in der Energienorm bis auf 2 begrenzen könnte. Dennoch wären auch diese beiden Werte nach Tabelle 2.1 erst für eine zusätzliche Anreicherung mit den 2D-Deformationsmoden zu $\lambda^{2D}=1,5$ zu erwarten. Hier ist darauf zu verweisen, dass die in Tabelle 2.1 angegebenen Konvergenzordnungen Untergrenzen für die Konvergenz der jeweiligen Normen darstellen, und dass die angegebenen Konvergenzordnungen für C8-Elemente und Anreicherung mit den 2D-Deformationsmoden zu $\lambda^{2D}=0,5$ insbesondere dann gelten, wenn auf dem diskretisierten Rand die 2D-Deformationsmoden zu $\lambda^{2D}=1,5$ angesprochen werden. Dies ist für die Rissmoden I-III gerade nicht der Fall, gilt aber natürlich bei den Rissmoden IV-VI (gestrichelte Linien). Für diese werden ohne Anreicherung mit den 2D-Deformationsmoden zu $\lambda^{2D}=1,5$ nur Konvergenzordnungen $m_{L_2} \approx 2,5$ und $m_a \approx 1,5$ erreicht (vgl. Abb. 5.10 a, c und Tab. 5.3). Mit der entsprechenden Anreicherung verbessern jedoch auch sie sich auf die optimale Konvergenz für quadratische Ansatzfunktionen (vgl. Abb. 5.10 b und d). Damit bleibt festzuhalten, dass die aus den Konvergenzbeweisen zur klassischen FEM mit Anreicherung von Blum (1988) ableitbaren Schlussfolgerungen zu den Konvergenzeigenschaften augenscheinlich auch auf die enrSBFEM anwendbar sind. Dies erscheint zwar auf den ersten Blick natürlich, war aber in Anbetracht des Konvergenzbeweises zur Verwendung von gradierten Randdiskretisierungen in der SBFEM von Apel et al. (2002b), welcher sich deutlich komplexer als sein Pendant in der klassischen FEM darstellt, nicht unbedingt zu erwarten.

Für ein tieferes Verständnis der Auswirkungen der Anreicherung auf die Verschiebungslösung seien im Folgenden die Fehlerverteilung sowie die lokale Konvergenz in ausgewählten Patches auf dem diskretisierten Rand betrachtet. In Abbildung 5.11 ist die Verteilung der relativen Fehler $e_{\mathbf{u},L_2}$ und $e_{\mathbf{u},a}$ am Beispiel des Randwertproblems für Rissmodus I jeweils für eine Berechnung ohne und mit Anreicherung dargestellt. Dazu ist beispielhaft die Diskretisierung mit $n_e=14$ C4-Elementen (lineare Ansatzfunktionen) pro Würfelkante und die in diesem Fall ausreichende Anreicherung mit den 2D-Deformationsmoden zu $\lambda^{2D}=0,5$ ausgewählt worden. Ohne Anreicherung ist der relative Fehler in der L_2 -Norm auf dem Teilrand Γ_{ns} nahezu vernachlässigbar klein (Abb. 5.11 a). Er bildet, bedingt durch die Formulierung des Randwertproblems, gerade den Interpolationsfehler in der L_2 -Norm ab. Vergleichsweise klein fällt er aber aufgrund der Tatsache, dass auf Γ_{ns} nur die glatte Winkelfunktion des Rissmodus mit den gegebenen linearen Ansatzfunktionen nachgebildet werden muss, aus. Auf dem Teilrand Γ_s , also den Würfelseiten, wo die Rissfront auf den diskretisierten Gebietsrand trifft, ergibt sich hingegen der erwartungsgemäß große Fehler (hier ist insbesondere die \sqrt{r} -Funktion

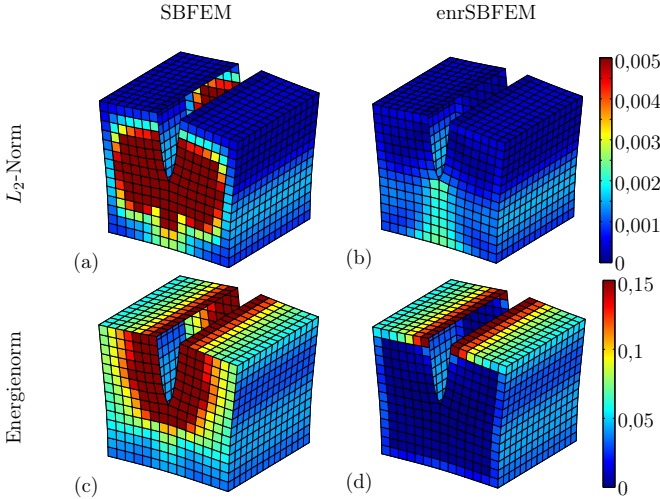


Abbildung 5.11: Verteilung des relativen Fehlers für $n_e = 14$ C4-Elemente ($p = 1$) über Würfelkante in der L_2 -Norm $\epsilon_{\mathbf{u}, L_2}$ (erste Zeile) und der Energienorm $\epsilon_{\mathbf{u}, a}$ (zweite Zeile). SBFEM (linke Spalte), enrSBFEM (rechte Spalte, mit Anreicherung bis $\lambda^{2D} = 0,5$). (Bremm, 2017)

mit unendlicher Steigung an der Rissfront abzubilden). Mit Anreicherung wird der Fehler auf Γ_s auf das Niveau des Interpolationsfehlers auf Γ_{ns} und damit wesentlich reduziert.

Bei Betrachtung der Verteilung des relativen Fehlers in der Energienorm (Abb. 5.11 c, d) fällt zunächst anhand der unterschiedlichen Skalen auf, dass dieser den Fehler in der L_2 -Norm um mehr als eine Größenordnung übersteigt. Ohne Anreicherung konzentriert er sich vor allem in der näheren Umgebung der Rissflanken, hier auch auf dem Teilrand Γ_{ns} , wo nur der Interpolationsfehler auftreten kann (Abb. 5.11 a). Dies liegt darin begründet, dass dort die Spannungen der exakten Lösung in der Ebene senkrecht zur Rissfront zu null werden, was von der Näherungslösung aber nicht abgebildet wird. Der resultierende Fehler in den Spannungen geht dann in den Integranden der Energienorm ein. Wird mit der exakten Lösung angereichert (Abb. 5.11 d), werden die Spannungsrandbedingungen natürlich auch exakt erfüllt, sodass der relative Fehler insbesondere in voll angereicherten Elementen wesentlich reduziert wird. Der hohe Fehlerwert in den Elementen an den Rissflanken auf Γ_{ns} (Interpolationsfehler) bleibt davon natürlich unberührt. In den Blending-Elementen wird der Fehler immerhin so weit reduziert, dass er ungefähr dem Interpolationsfehler entspricht.

Zur Betrachtung der lokalen Konvergenz werden Teilgebiete $E1, \dots, E10$ definiert (Abb. 5.12) und die Diskretisierungen mit $n_e = 4, 8, 12, 16, 20$ Elementen je Würfelkante verwendet. Die Diskretisierungen mit C4-Elementen sind so gewählt, dass nur ganze Elemente in den Teilgebieten liegen. Die Abbildungen 5.13 a und b zeigen die Konvergenz des relativen Fehlers der Verschiebungen in der L_2 -Norm für die einzelnen Teilgebiete am Beispiel von Rissmodus I. Abbildung 5.13 a enthält die Ergebnisse für die Standardformulierung der SBFEM. Wie zu erwarten, ist der Fehler in den Teilgebieten $E1, E2$ an der Rissfront besonders groß, während er in den Teilgebieten $E9, E10$ mit dem reinen Interpolationsfehler besonders klein ist. Die entsprechenden Konvergenzordnungen ergeben sich zu $m_{L_2}^{st} \approx 1$ bzw. $m_{L_2}^{st} \approx 2$ (vgl. Tab. 5.4). Die

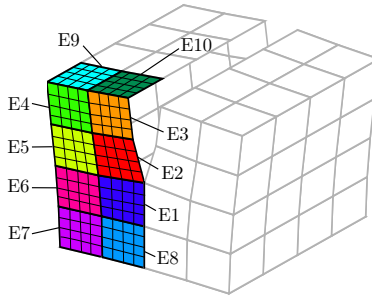


Abbildung 5.12: Teilgebiete zur Betrachtung der lokalen Konvergenz. (Bremm, 2017)

Tabelle 5.4: Gebietsweise Konvergenzordnungen für Deformationsmodus I (aus Bremm (2017)). Zuordnung: siehe Abbildung 5.12.

Element- nummer	Fehler in L_2 -Norm		Fehler in Energienorm	
	SBFEM	enrSBFEM	SBFEM	enrSBFEM
E1	0,849	2,051	0,441	2,075
E2	0,992	2,048	0,519	2,045
E3	1,261	2,236	1,039	1,575
E4	1,249	2,179	1,131	1,518
E5	1,030	2,201	1,027	1,593
E6	0,837	2,025	0,939	1,554
E7	1,346	2,119	1,088	1,525
E8	1,769	2,119	0,986	1,628
E9	2,001	2,001	1,011	1,001
E10	1,982	1,982	0,999	0,999

Konvergenzordnung und Genauigkeit für die Teilgebiete $E3$ - $E8$ bewegen sich zwischen diesen beiden Extremen, zeigen aber auch klar, dass sich der negative Einfluss der Singularität nicht nur auf ihre unmittelbare Umgebung beschränkt. Dies indiziert, dass die Verwendung von Viertelpunktelementen (Lee u. Im, 2003, Brod, 2015) nicht ausreichend ist, um die optimale Konvergenz wiederherzustellen, sondern dass es dazu der Anreicherung eines konstant großen Gebietes bedarf (wie auch von Laborde et al. (2005) für den Fall einer 2D-XFEM gezeigt). Die Abbildung 5.13b zeigt die entsprechenden Ergebnisse der enrSBFEM. Hier konvergiert der relative Fehler aller Teilgebiete mit der gleichen, optimalen Ordnung.

Die Abbildungen 5.13c und d enthalten die Ergebnisse für die Energienorm. Ohne Anreicherung ist der relative Fehler in den Teilgebieten $E1$, $E2$ an der Singularität besonders ausgeprägt, aber auch in den weiteren nahe der Rissflanken liegenden Teilgebieten $E3$, $E10$ noch vergleichsweise groß. Trotzdem konvergiert er nur in den Teilgebieten $E1$, $E2$ mit der reduzierten Ordnung $\mathcal{O}(h^{0.5})$ ansonsten aber mit $\mathcal{O}(h)$. Mit Anreicherung ist die Genauigkeit wieder stark verbessert, besonders für die Teilgebiete $E1$, $E2$, auf denen der relative Fehler sogar quadratisch konvergiert und für alle Diskretisierungen um mehr als zwei Größenordnungen kleiner ist. Auch auf den Teilgebieten $E3$ - $E8$ liegt die Konvergenzordnung des Fehlers nun durchweg bei verbesserten Werten um 1,5. Nur auf den Teilgebieten $E9$, $E10$ zeigen die Ergebnisse weiter den Interpolationsfehler und bleiben damit unverändert.

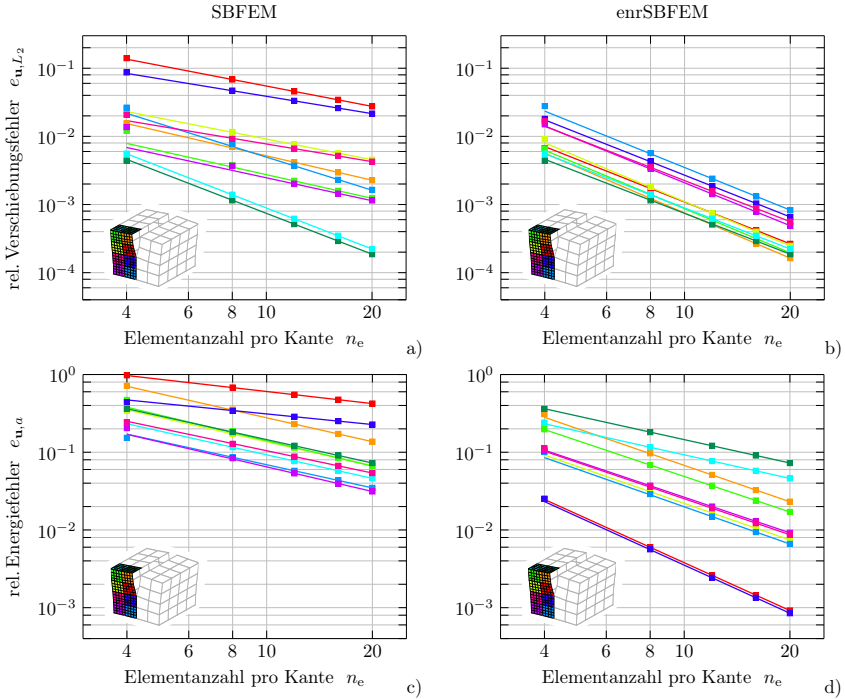


Abbildung 5.13: Gebietsweise Konvergenz der relativen Fehler in der L_2 -Norm ϵ_{u, L_2} (obere Zeile) und in der Energienorm (untere Zeile) für Deformationsmodus I unter Verwendung von C4-Elementen ($p = 1$): SBFEM (linke Spalte), enrSBFEM (rechte Spalte). (Bremm, 2017)

5.2.2 Zwei senkrecht aufeinander treffende ebene Risse im homogen-isotropen Kontinuum

Das im vorangehenden Teilkapitel betrachtete Problem eines Risses im unendlichen, homogenen und isotropen Körper war zwar im dreidimensionalen Raum gestellt, jedoch (zumindest in Teilen) auch auf ein Problem zweidimensionalen Charakters reduzierbar, sodass sogar analytische Lösungen (z. B. mit der Methode komplexer Potentiale) zugänglich waren. Nun soll ein inhärent dreidimensionales Problem mit Rissinteraktion, für das eine analytische Lösung *nicht* mehr bekannt ist, betrachtet und die enrSBFEM in Bezug auf dieses Beispiel auf ihre Tauglichkeit überprüft werden. Hierzu sei angemerkt, dass dadurch, dass numerisch berechnete Werte nicht mehr direkt mit einem exakten, analytischen Wert verglichen werden können, die angekündigte Richardson-Extrapolation (5.32) genutzt wird, um dennoch Aussagen über die Konvergenzeigenschaften ableiten zu können.

Beispielhaft soll auf das Rissinteraktionsproblem zweier senkrecht aufeinander treffender ebener Risse im homogen-isotropen Kontinuum (vgl. Abb. 5.6b), wie es von Hell u. Becker (2014) schon mit der Standardformulierung der SBFEM und einer gradierten Diskretisierung behandelt wurde, zurückgekommen werden. Die Leistungsfähigkeit der enrSBFEM gegen-

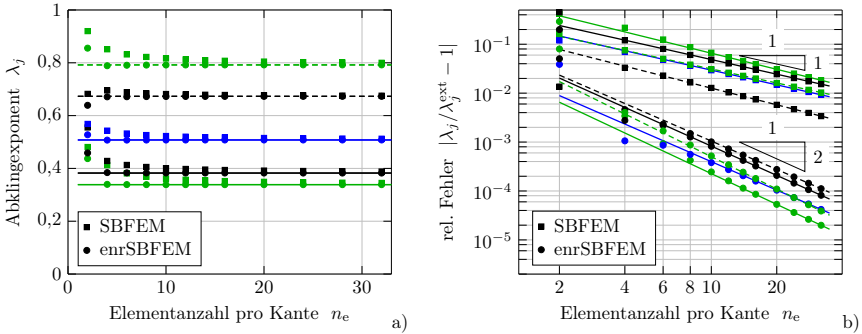


Abbildung 5.14: Konvergenz der Abklingexponenten/Eigenwerte λ_j der Deformationsmoden co1/co2 (schwarz, durchgängig/gestrichelt), cs1/cs2 (blau), ct1/ct2 (grün) für homogenes, isotropes Kontinuum. Vergleich zwischen Standardformulierung (SBFEM) und angereicherter Formulierung (enrSBFEM) unter Verwendung von bilinearen C4-Elementen. Eingezeichnete Geraden stellen (a) die mit einer Richardson-Extrapolation (5.32) bestimmten Abklingexponenten λ^{ext} bzw. (b) Näherungsfunktionen der Form $Cn_e^{-m_\lambda}$ an die Datenpunkte der zwei feinsten Diskretisierungen dar.

Tabelle 5.5: Mit einer Richardson-Extrapolation ermittelte Abklingexponenten λ^{ext} und Konvergenzordnungen ihres relativen Fehlers m_λ für singuläre Deformationsmoden mit $0 < \lambda_j < 1$ aus Berechnungen mit C4-Elementen ($p=1$) ohne (SBFEM) und mit Anreicherung (enrSBFEM, $\lambda^{2D}=0,5$).

Deformationsmodus	co1	co2	cs1 / cs2	ct1	ct2
SBFEM, λ^{ext}	0,38240	0,67313	0,50773	0,33880	0,79185
enrSBFEM, λ^{ext}	0,38242	0,67299	0,50775	0,33847	0,79207
SBFEM, m_λ^{st}	0,99	1,13	1,00	1,09	0,95
enrSBFEM, m_λ^{enr}	1,99	1,93	1,93	2,09	2,20

über der Standardformulierung wird wieder anhand eines Vergleichs der Konvergenz der Abklingexponenten λ_j gezeigt. Dazu werden auch hier würfelförmige Ausschnitte aus dem infiniten Kontinuum mit einem uniformen Randnetz aus C4-Elementen ($p=1$) diskretisiert. In der angereicherten Formulierung sind alle Knoten auf Würfel­flächen Γ_s , auf denen eine Rissfront mündet, bis auf die Kanten- und Eckenknoten angereichert. Als Anreicherungsfunktionen werden direkt die Rissmoden I-III mit $\lambda^{2D}=0,5$ genutzt (siehe Gln. (2.91–2.93)). Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass als Materialdaten der Elastizitätsmodul und die Quer­kontraktionszahl von Stahl verwendet werden,

$$E = 210\,000 \text{ MPa}, \nu = 0,3,$$

die Ergebnisse aufgrund der Homogenität der Materialeigenschaften im Modell aber natürlich wieder unabhängig vom Elastizitätsmodul sein müssen.

Diese Struktursituation führt, wie ihr anisotropes Pendant mit Materialgrenzfläche aus Kapitel 4.2.2, zu sechs Deformationsmoden, die singuläre Spannungen im Rissinteraktionspunkt beinhalten: die beiden symmetrischen Rissöffnungsmoden co1/co2, die beiden Riss­schernmoden

Tabelle 5.6: Mit einer Richardson-Extrapolation ermittelte Abklingexponenten λ^{ext} und Konvergenzordnungen ihres relativen Fehlers m_λ für einige Deformationsmoden mit $\lambda_j > 1$ aus Berechnungen mit C4-Elementen ($p=1$) ohne (SBFEM) und mit Anreicherung (enrSBFEM, $\lambda^{2D}=0,5$).

Deformationsmodus	14	15	16-19	20-21	22	23	24
SBFEM, λ^{ext}	-	1,298	1,412±0,150i	1,499	1,696	1,795	2,000
enrSBFEM, λ^{ext}	1,260	1,298	1,411±0,150i	1,500	1,696	1,797	2,000
SBFEM, m_λ^{st}	-	1,09	1,06	1,36	1,54	0,79	2,01
enrSBFEM, m_λ^{enr}	1,99	2,12	2,24	1,85	2,00	1,99	1,98

cs1/cs2 und die beiden Rissverwindungsmoden ct1/ct2 (vgl. Abb. 4.10). In den Abbildungen 5.14 a und b ist das Konvergenzverhalten der zugehörigen Abklingexponenten grafisch dargestellt. Abbildung 5.14 a zeigt die mit Hilfe der angereicherten (runde Marker) und Standardformulierung (quadratische Marker) der SBFEM berechneten Abklingexponenten für Diskretisierungen mit $n_e = 2, 4, \dots, 16, 20, \dots, 32$ Elementen entlang jeder Würfelkante. Die mittels einer Richardson-Extrapolation aus den drei feinsten Diskretisierungen ermittelten Abklingexponenten λ_{ext} sind für die angereicherte und die Standardformulierung nahezu identisch (Tab. 5.5, maximale relative Abweichung $< 0,1\%$) und in Abbildung 5.14 a als horizontale Linien eingezeichnet. Schon in dieser Darstellung ist die Überlegenheit der enrSBFEM ersichtlich: Während die Abklingexponenten der Standardformulierung nur langsam gegen die extrapolierten Werte konvergieren, liegen die mittels der enrSBFEM berechneten Werte schon für sehr grobe Diskretisierungen auf den eingezeichneten horizontalen Linien. Im doppellogarithmischen Diagramm des relativen Fehlers (Abb. 5.14 b) wird dies noch offensichtlicher: Die berechneten Werte der angereicherten Formulierung konvergieren ungefähr quadratisch gegen λ_{ext} , die mit der Standardformulierung berechneten Werte hingegen nur linear (vgl. Tab. 5.5). Die Genauigkeit, die mit der Standardformulierung erst für eine Diskretisierung mit $n_e = 32$ erreicht wird, wird von der angereicherten Formulierung bereits für die Diskretisierung mit $n_e = 4$ erreicht.

Tabelle 5.6 zeigt entsprechende Ergebnisse für höhere Deformationsmoden, d.h. solche mit höherwertigen Abklingexponenten. Deformationsmoden mit Abklingexponenten $\lambda_j = 0$ und $\lambda_j = 1$ werden in der Betrachtung ausgespart, da sie natürlicherweise schon von der SBFEM mit C4-Elementen ($p=1$), egal ob angereichert oder nicht und unabhängig vom Diskretisierungsgrad, nahezu exakt abgebildet werden (Fehler ist numerisch Null). Die Ergebnisse der höheren Deformationsmoden zeigen wie schon vorher bei den Deformationsmoden mit 3D-Spannungssingularitäten ($\lambda < 1$), dass die aus den drei feinsten Diskretisierungen extrapolierten Abklingexponenten für die angereicherte und die Standardformulierung weitgehend übereinstimmen³⁴. Auch hier beträgt die relative Abweichung weniger als $0,1\%$. Die angereicherte Formulierung liefert weiterhin in etwa quadratische Konvergenzraten, nur bei den Deformationsmoden $j = 20, 21$ liegt die Konvergenzrate mit $m_\lambda^{\text{enr}} \approx 1,85$ zwar niedriger, trifft diejenige der Standardformulierung $m_\lambda^{\text{st}} \approx 1,36$ jedoch immer noch deutlich. Erst für den Deformationsmodus mit $\lambda_{24} = 2$ erreicht auch die Standardformulierung wieder quadratische Konvergenz, da hier keine singulären 2D-Rissmoden mehr auf dem Würfelrand angesprochen werden.

³⁴ Anmerkung: Für λ_{14} konnten mit der SBFEM keine sinnvoll extrapolierten Werte bestimmt werden, da die Ergebnisse nicht die notwendige monotone Konvergenz zeigten, auch wenn deren Abweichungen gegenüber dem extrapolierten Wert aus der angereicherten Formulierung klein waren ($\approx 0,1\%$)

Tabelle 5.7: Mit einer Richardson-Extrapolation bestimmte Abklingexponenten λ^{ext} und Konvergenzordnungen ihres relativen Fehlers m_λ für die Rissmoden I, II, III eines vertikalen Zwischenfaserrisses an der Grenzfläche eines T800/Epoxid-Kreuzverbundes. Berechnungen mit dreidimensionaler SBFEM mit C4-Elementen ($p=1$) ohne (SBFEM-3D) und mit Anreicherung (enrSBFEM-3D). Anreicherung mit entsprechenden Rissmoden I, II, III aus 2D-SBFEM-Rechnung (GEVZ) mit 48 quadratischen Elementen über Rissumfang (vgl. Kap. 5.1.6).

ZFR-Modus	I	II	III
SBFEM-2D (GEVZ, 48S3), λ^{2D}	0,64987	0,51713	0,46795
SBFEM-3D, λ^{ext}	0,64987	0,51707	0,47104
enrSBFEM-3D, λ^{ext}	0,64986	0,51713	0,46792
SBFEM-3D, m_λ^{st}	1,37	1,01	1,14
enrSBFEM-3D, m_λ^{enr}	1,96	5,29	2,17

Damit hat die angereicherte Formulierung auch für inhärent dreidimensionale singuläre asymptotische Felder gezeigt, dass sie in der Lage ist, die erwarteten optimalen Konvergenzeigenschaften eines glatten Randwertproblems wiederherzustellen.

5.2.3 Zwischenfaserriss trifft auf Grenzfläche im Kreuzverbund

Bisher wurden nur Spannungssingularitäten an Rissen in homogen-isotropen Kontinua betrachtet. Diese hätten ebenfalls mit einem Viertelpunktelementansatz (der das Rissverschiebungsfeld $u \propto r^{1/2}$ abbilden kann, Henshell u. Shaw (1975), Kuna (2008)) auf dem diskretisierten Rand an der Rissfront gewinnbringend untersucht werden können, wenn auch mit geringerer Konvergenzgeschwindigkeit und Effizienz.

Nun seien jedoch allgemeinere und komplexere Struktursituationen, in denen Spannungssingularitäten mit $\lambda \neq 0,5$ auftreten können und die eigentlich im Fokus der vorliegenden Arbeit stehen, betrachtet. Bei Anwendung einfacher Gebietsreskalierungsstrategien treten hier die eingangs des Kapitels diskutierten Nachteile auf:

- im Falle der Reskalierung des Gebietes der an den Punkt singulärer Spannungen angrenzenden Elemente: Verlust der Vollständigkeit des Ansatzes und schwindender Bereich der exakten Abbildung des singulären Feldes bei einer Verfeinerung der Diskretisierung.
- im Falle der gradierten Diskretisierung in der Umgebung des Punktes singulärer Spannungen: mangelnde Effizienz bezüglich der Freiheitsgrade.

Hier soll nun die an einen Zwischenfaserriss im Faserverbundlaminate angelehnte Struktursituation eines Zwischenfaserrisses auf der Grenzfläche eines T800/Epoxid-Kreuzverbundes aus Kapitel 4.2.1 und 5.1.6 rekapituliert werden (Abb. 4.6, 5.6 a). Dieses Problem wurde dort zu Vergleichszwecken reduziert auf einen GEVZ mit einer 2D-SBFEM-Analyse betrachtet und die drei Deformationsmoden mit singulären Spannungen genauer untersucht und dargestellt. Zur Struktursituation des klassischen Risses im homogen-isotropen Kontinuum analoge symmetrische und antisymmetrische Rissmoden wurden auch hier gefunden und seien im Folgenden weiterhin mit Zwischenfaser-Rissmodus (ZFR-Modus) I, II und III benannt. Tabelle 5.7 gibt die Abklingexponenten dieser ZFR-Moden für eine auskonvergierte 2D-SBFEM-Lösung mit 48 quadratischen Elementen auf dem Umfang an. Wie im eingangs des Kapitels dargestellten,

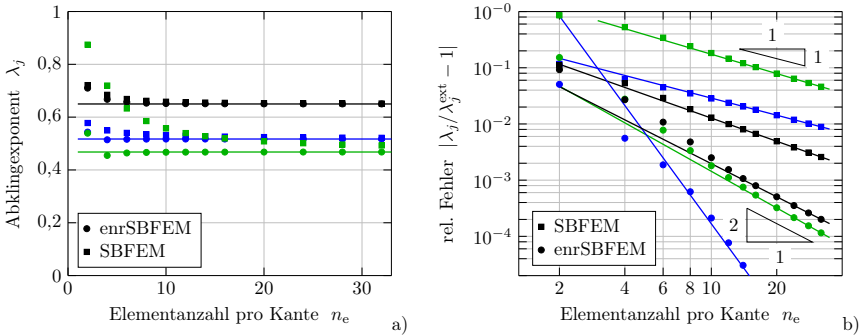


Abbildung 5.15: Konvergenz der Abklingexponenten zu ZFR-Moden I (schwarz, durchgängig/gestrichelt), II (blau), III (grün) an einer $[0^\circ/90^\circ]$ -T800/Epoxid-Grenzfläche. Vergleich zwischen Standardformulierung (SBFEM) und angereicherter Formulierung (enrSBFEM) unter Verwendung von bilinearen C4-Elementen. Linien stellen (a) die mit einer Richardson-Extrapolation (5.32) bestimmten Abklingexponenten λ_j^{ext} bzw. (b) Näherungsfunktionen der Form $Cn_e^{-m\lambda}$ an die letzten drei Datenpunkte dar.

vergleichsweise simplen Problem von Labossiere u. Dunn (2001) sind die Abklingexponenten reell. Anstatt nur eines Deformationsmoden mit singulären Spannungen existieren hier aber drei, wovon ZFR-Modus III mit $\lambda = 0,46795 < 0,5$ sogar einer Supersingularität (Kap. 4.2.1) zuzuordnen ist.

Nun soll diese auch durch eine 2D-Analyse zugängliche Struktursituation wie in Teilkapitel 5.2.1 genutzt werden, um die Konvergenzeigenschaften der 3D-SBFEM mit und ohne Anreicherung zu analysieren. Dazu sei wieder ein würfelförmiges Gebiet um die Rissfront betrachtet und der Gebietsrand mit bilinearen C4-Elementen diskretisiert (Abb. 5.6 a). Die Materialdaten des T800/Epoxid-Verbundes sind in Tabelle A.1 gegeben. Es sollen die Abklingexponenten der Deformationsmoden mit singulären Spannungen bezüglich ihrer Konvergenzeigenschaften sowohl mit der angereicherten als auch mit der Standardformulierung der SBFEM untersucht werden. Für die enrSBFEM erfolgt die Anreicherung wie in den bisherigen Untersuchungen auf den Würfelseiten Γ_s , wo aber die Würfelkanten ausgespart werden. Als Anreicherungsfunktionen können natürlich nicht mehr die analytischen Rissmoden nach Gln. (2.91–2.93) verwendet werden, sondern die zur Struktursituation passenden Deformationsmoden mit singulären Spannungen. Da eine vollständige analytische Lösung für diese in der Literatur nicht gefunden wurde, wurden die Ergebnisse aus der 2D-SBFEM-Analyse (GEVZ) aus Kapitel 5.1.6 eingesetzt.

Zunächst ist bei allen drei ZFR-Moden festzustellen (Tab. 5.7), dass die extrapolierten Abklingexponenten, die mittels einer Richardson-Extrapolation für die angereicherte wie Standardformulierung der SBFEM bestimmt wurden, sowohl untereinander als auch vom Wert der auskonvergierten 2D-SBFEM-Lösung kaum abweichen (ZFR-Modus I, II: $< 0,01\%$). Nur für den ZFR-Modus III ist die Abweichung des extrapolierten Wertes ohne Anreicherung größer (ca. 0,67%). Für die ZFR-Moden I, II (schwarz, blau in Abb. 5.15) mit $\lambda > 0,5$ ist das Konvergenzverhalten des Abklingexponenten ähnlich der bisherigen Ergebnisse: Die angereicherte Formulierung zeigt schon bei sehr groben Diskretisierungen kaum Abweichungen gegenüber dem extrapolierten Wert, während die Standardformulierung langsamer konver-

giert (Abb. 5.15 a). Dies spiegelt sich auch in Abbildung 5.15 b wider, wo direkt ersichtlich ist, dass sich außer der Genauigkeit auch die Konvergenzordnung durch die Anreicherung verbessert. Ein genauerer Blick auf die Konvergenzordnung (Tab. 5.7) zeigt, dass diese für die Standardformulierung, wie erwartet, jeweils ungefähr dem doppelten Abklingexponenten des angeregten 2D-ZFR-Modus entspricht:

$$m_{\lambda_I}^{\text{st}} = 1,37 \approx 2 \lambda_I^{2\text{D}} = 1,30 \quad , \quad m_{\lambda_{\text{III}}}^{\text{st}} = 1,01 \approx 2 \lambda_{\text{III}}^{2\text{D}} = 1,03 \quad .$$

Mit Anreicherung verbessert sich die Konvergenzordnung für ZFR-Modus I erwartungsgemäß auf $m_{\lambda_I}^{\text{enr}} \approx 2$. Für ZFR-Modus II wird eine ungewöhnlich, aber nicht unerwünscht, hohe Konvergenzordnung von über $m_{\lambda_{\text{III}}}^{\text{st}} = 5$ erreicht.

Sehr interessant gestaltet sich hingegen das Konvergenzverhalten des Abklingexponenten von ZFR-Modus III (grün in Abb. 5.15). Seine Konvergenzordnung verbessert sich mit Anreicherung wie erwartet von $m_{\lambda_{\text{III}}}^{\text{st}} = 1,14$ auf $m_{\lambda_{\text{III}}}^{\text{enr}} = 2,17$. Aber in Abb. 5.15 a fällt sofort die außergewöhnlich große Abweichung des Abklingexponenten, der mit Hilfe der Standardformulierung bestimmt wurde, auf. Die relative Abweichung beträgt auch bei $n_e = 10$ Elementen entlang einer Würfelseite noch 20 % und liegt selbst bei der feinsten Diskretisierung noch über 4 %. Der relative Fehler mit Anreicherung liegt hingegen schon für $n_e = 10$ klar unter 1 %.

Die Anreicherung der SBFEM zeigt sich also auch für anisotrope Materialien an Mehrmaterial-ecken bzw. -kanten geeignet, um die optimalen Konvergenzeigenschaften wiederherzustellen. Zur Abbildung der Supersingularität von ZFR-Modus III lohnt sich der Einsatz der Anreicherung aber besonders bzw. erscheint beinahe unverzichtbar. Dabei ist für die Anreicherung nicht unbedingt eine analytische 2D-Lösung notwendig, sondern es kann auch eine 2D-SBFEM-Lösung verwendet werden.

5.2.4 Zwei aufeinander treffende Zwischenfaserrisse im Kreuzverbund

Schließlich soll auch für den anisotropen Mehrmaterialfall einer 3D-Rissinteraktion die Konvergenz der Abklingexponenten untersucht werden. Beispielhaft sei dazu die Struktursituation aus Kapitel 4.2.2 rekapituliert, in der zwei gerade, ebene Zwischenfaserrisse im T800/Epoxyd-Kreuzverbund senkrecht auf die Grenzfläche und aufeinander treffen (Abb. 5.6 b, Materialdaten UD-Schicht: Tab. A.1). Es wird ein würfelförmiges Gebiet um den Rissinteraktionspunkt betrachtet und der Gebietsrand mit bilinearen C4-Elementen diskretisiert. Die Anreicherung erfolgt mit den gleichen drei Deformationsmoden wie im vorangehenden Teilkapitel (siehe auch Kap. 5.1.6): ZFR-Modus I mit $\lambda_I^{2\text{D}} = 0,64986$, ZFR-Modus II mit $\lambda_{\text{II}}^{2\text{D}} = 0,51713$ und ZFR-Modus III mit $\lambda_{\text{III}}^{2\text{D}} = 0,46792$.

Es resultieren die bekannten Deformationsmoden mit Singularitäten am Rissinteraktionspunkt co1, co2, cs1, cs2, ct1, ct2. Wieder weichen die extrapolierten Abklingexponenten der angereicherten sowie Standardformulierung der SBFEM für Deformationsmoden, in denen maßgeblich die ZFR-Moden I und/oder II angesprochen werden, kaum voneinander ab (< 0,02 %, Tab. 5.8), was für ihre Zuverlässigkeit spricht. Nur für Deformationsmoden ct1 und ct2, bei denen an beiden ZFR im wesentlich ZFR-Modus III angesprochen ist, ist die Abweichung wieder größer (ca. 0,09 %). In Anbetracht der Tatsache, dass im vorangehenden Teilkapitel der extrapolierte Abklingexponent der SBFEM-Standardformulierung die größere Abweichung von der Referenzlösung aufwies, liegt der Schluss nahe, dass auch hier die angereicherte Formulierung den zuverlässigeren Wert liefert.

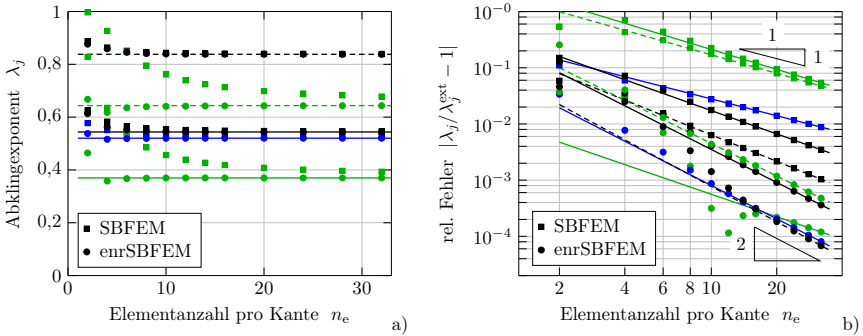


Abbildung 5.16: Konvergenz der Abklingexponenten/Eigenwerte λ_j der Deformationsmoden $\text{co1}/\text{co2}$ (schwarz, durchgängig/gestrichelt), $\text{cs1}/\text{cs2}$ (blau), $\text{ct1}/\text{ct2}$ (grün) von zwei senkrecht in der Grenzfläche eines T800/Epoxid-Kreuzverbundes aufeinander treffenden Zwischenfaserrissen. Vergleich zwischen Standardformulierung (SBFEM) und angereicherter Formulierung (enrSBFEM) bei Nutzung von bilinearen C4-Elementen. Linien stellen (a) die mit einer Richardson-Extrapolation (5.32) bestimmten Abklingexponenten λ^{ext} bzw. (b) Näherungsfunktionen der Form $Cn_e^{-m_\lambda}$ an die letzten drei Datenpunkte dar.

Tabelle 5.8: Mit einer Richardson-Extrapolation bestimmte Abklingexponenten λ^{ext} und Konvergenzordnungen ihres relativen Fehlers m_λ für singuläre Deformationsmoden mit $0 < \lambda_j < 1$ aus Berechnungen mit C4-Elementen ($p=1$) ohne (SBFEM) und mit Anreicherung (enrSBFEM, $\lambda_1^{\text{2D}}=0,64986$, $\lambda_{\text{II}}^{\text{2D}}=0,51713$, $\lambda_{\text{III}}^{\text{2D}}=0,46792$).

Deformationsmodus	co1	co2	cs1 / cs2	ct1	ct2
SBFEM, λ^{ext}	0,54378	0,83812	0,52021	0,37294	0,64720
enrSBFEM, λ^{ext}	0,54381	0,83798	0,52029	0,36970	0,64368
SBFEM, m_λ^{st}	1,37	1,56	0,99	1,17	1,09
enrSBFEM, m_λ^{enr}	1,95	2,08	1,97	1,32	1,92

Auch bezüglich der Genauigkeit der Abklingexponenten der Deformationsmoden ct1 und ct2 (grün in Abb. 5.16 a und b) zeichnet sich ein ähnliches Bild, wie im Falle des Einfach-ZFR: Mit der Standardformulierung liegen sie teils fernab der extrapolierten Werte (wieder ca. 20% Abweichung bei $n_e = 10$) und konvergieren erwartungsgemäß langsam ($m_\lambda^{\text{st}} \approx 1,1$), während der relative Fehler mit der angereicherten Formulierung der SBFEM schon für $n_e = 6$ unter 2% liegt. Die Konvergenzordnung bleibt dabei mit einem aus den drei feinsten Diskretisierungen abgeschätzten Wert $m_\lambda^{\text{enr}} \approx 1,3$ zwar hinter den Erwartungen zurück, jedoch ist anhand von Abbildung 5.16 b zu antizipieren, dass diese mit zunehmender Diskretisierung weiter ansteigen würde. Für die übrigen fünf Deformationsmoden co1 , co2 , cs1 , cs2 und ct2 wird durch die Anreicherung die erwartete optimale Konvergenzordnung von $m_\lambda^{\text{enr}} \approx 2$ erreicht. Auch bei den vier Deformationsmoden co1 , co2 , cs1 und cs2 bringt die Anreicherung eine merkliche Verbesserung der Genauigkeit der Abklingexponenten (siehe Abb. 5.16 b), wenn auch weniger ausgeprägt als bei ct1 und ct2 .

Schließlich ist in Tabelle 5.9 ein Vergleich der Konvergenz auch der höheren Deformationsmoden (aus in Teilkapitel 5.2.1 genannten Gründen ohne jene mit $\lambda = 1$) gegeben. Die

Tabelle 5.9: Mit einer Richardson-Extrapolation bestimmte Abklingexponenten λ^{ext} und Konvergenzordnungen ihres relativen Fehlers m_λ für einige Deformationsmoden mit $\lambda_j > 1$ aus Berechnungen mit C4-Elementen ($p=1$) ohne (SBFEM) und mit Anreicherung (enrSBFEM, $\lambda_I^{2D}=0,64986$, $\lambda_{II}^{2D}=0,51713$, $\lambda_{III}^{2D}=0,46792$).

Deformationsmodus	14	15	16-19	20	21-22	23-26
SBFEM, λ^{ext}	1,306	1,410	1,446±0,131i	1,636	1,892	1,932±0,358i
enrSBFEM, λ^{ext}	1,307	1,409	1,443±0,131i	1,635	1,892	1,933±0,358i
SBFEM, m_λ^{st}	0,61	1,23	1,13	1,23	1,47	1,29
enrSBFEM, m_λ^{enr}	2,04	1,84	1,15	2,44	2,03	1,73

extrapolierten Abklingexponenten aus der angereicherten Formulierung stimmen mit jenen aus der Standardformulierung wieder gut überein (relativer Fehler $< 0,2\%$). Generell wird auch die Konvergenzordnung durch die Anreicherung wieder zu $m_\lambda^{\text{enr}} \approx 2$ hin verbessert. Eine wesentliche Ausnahme bilden die Deformationsmoden $\hat{\mathbf{u}}_{16}$ - $\hat{\mathbf{u}}_{19}$ mit $m_\lambda^{\text{enr}} \approx 1,15$. Allerdings ist hier die Konvergenzordnung selbst noch nicht auskonvergiert, denn unter Verwendung der fünf anstatt drei feinsten Diskretisierungen und eines Least-Squares-Verfahrens für die Richardson-Extrapolation, ergibt sich zwar ein extrapoliertes Abklingexponent mit weniger als 0,0005% Abweichung jedoch eine gänzlich andere Konvergenzordnung von $m_\lambda^{\text{enr}} \approx 1,61$. Weiterhin ist zu berücksichtigen, dass die Bimaterialeckensingularität am Würfelrand in einem Deformationsmodus angesprochen sein kann, die sich ohne entsprechende Anreicherung natürlich auch auf die Konvergenzordnung des Deformationsmodus auswirkt. Dieser Deformationsmodus würde in der gegebenen Struktursituation eines in ein Kontinuum eingebetteten Würfels allerdings niemals zum Tragen kommen, was im Rahmen der SBFEM aber erst nach der Lösung des vollständigen Randwertproblems, nämlich auf der Ebene der Randbedingungen am diskretisierten Gebietsrand, Eingang findet.

Zusammenfassend konnte an diversen Beispielen für Riss- und Rissinteraktionsprobleme in homogen-isotropen wie anisotropen Mehrmaterialkonfigurationen gezeigt werden, dass die angereicherte Formulierung der 3D-SBFEM (enrSBFEM) in der Lage ist, die erwartete optimale Konvergenz der Deformationsmoden, insbesondere ihrer zugehörigen Abklingexponenten, wiederherzustellen. Dabei führt die Anreicherung genauso zu einer wesentlichen und, wie in den Fällen mit angesprochenem ZFR-Modus III gesehen, sogar teils ernsthaft nötigen³⁵ Verbesserung der Genauigkeit. Weitere vergleichende Konvergenzuntersuchungen werden in Kapitel 7 betrachtet.

5.3 Spannungsglättung für die enrSBFEM

Spannungen lassen sich im Rahmen der SBFEM genauso durch Rückrechnung bestimmen wie in der klassischen FEM (vgl. Gl. (2.150)). Dabei macht es keinen Unterschied, ob eine Spannungsrückrechnung für jeden Deformationsmodus $\hat{\mathbf{u}}_j(\mathbf{x})$ einzeln erfolgt und die Gesamtspannungen am Ende über Multiplikation mit den modalen Wichtungsfaktoren und anschließende Aufsummierung berechnet wird,

³⁵ SBFEM: $e_\lambda(n_e=10) = 20\%$; enrSBFEM: $e_\lambda(n_e=6) = 2\%$; vgl. Abb. 5.16

$$\tilde{\sigma}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \mathcal{L} \tilde{\mathbf{u}}_j(\mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad \tilde{\sigma}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_\lambda} \tilde{\sigma}_j(\mathbf{x}) c_j, \quad (5.37)$$

oder ob die Spannungsrückrechnung anhand der Verschiebungslösung eines vollständigen Randwertproblems durchgeführt wird

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \mathcal{L} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}). \quad (5.38)$$

Die erste Variante hat den Vorteil, dass sie für eine Struktursituation nur einmal ausgeführt werden muss und dann für beliebige Lastfälle darauf zurückgegriffen werden kann. Andererseits können gerade 3D-SBFE-Modelle sehr viele Freiheitsgrade besitzen und daher auf entsprechend viele Deformationsmoden führen. Daher ist die zweite Variante effizienter, wenn weniger Lastfälle einer bestimmten Struktursituation zu betrachten sind, als die Struktursituation Deformationsmoden besitzt.³⁶

Im Rahmen der enrSBFEM ist entsprechend die Verschiebungslösung (5.20) bzw. sind die Verzerrungen (5.15) zu verwenden. Beispielhaft sei hier wieder die Struktursituation zweier senkrecht aufeinander treffender Zwischenfaserrisse (ZFR-ZFR, Abb. 5.6b) in einem T800/Epoxyd-Laminat (Tab. A.1) betrachtet. Eine würfelförmige Umgebung des Rissinteraktionspunktes mit diesem in ihrem Zentrum sei mit der SBFEM modelliert und enthalte gegebenenfalls die in Abbildung 5.6b ebenfalls angegebenen, angereicherten Teilgebiete.

Im Folgenden sollen nun die Spannungen auf der Würfelvorderseite ($x=1$) für den der Struktursituation zugehörigen Deformationsmodus *co1* (vgl. Abb. 4.10) Gegenstand der Betrachtungen sein: In Abbildung 5.17 sind die Spannungsverteilungen der für diesen Deformationsmodus dominanten Normalspannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ sowie die Schubspannung τ_{yz} in der linken Spalte ohne und in der rechten Spalte mit Anreicherung dargestellt.³⁷ Die übrigen Spannungskomponenten τ_{xz}, τ_{xy} sind in diesem Fall vernachlässigbar klein. Ohne Anreicherung sind die erwarteten unstetigen Spannungsverläufe zu beobachten, wobei sich das Ausmaß dieser Unstetigkeiten in den meisten Spannungskomponenten noch in Grenzen hält. Durch die Anreicherung werden die Spannungsverläufe dann teils schon sehr glatt – insbesondere in den voll angereicherten Elementen (siehe z. B. $\sigma_{y(x=1,y,z)}$). Die aus der betrachteten y,z -Ebene heraus zeigende Normalspannung σ_x bleibt jedoch von einer Anreicherung unbeeinflusst. Die Spannungsverläufe innerhalb eines Elements zeigen hier sogar entgegengesetzt zum elementübergreifenden Trend.

Wie in der Spannungslösung der klassischen FEM können hier also auch mit Anreicherung erhebliche Unstetigkeiten auftreten, insbesondere dort, wo der Lösungsanteil aus der Anreicherung gering ist. Daher ist es sinnvoll, ähnlich wie in der Arbeit von Ródenas et al. (2008) für eine XFEM-Formulierung ausgeführt, eine Auftrennung der Spannungen in stetige und unstetige Anteile $\tilde{\sigma}^{\text{cont}}$ und $\tilde{\sigma}^{\text{disc}}$ vorzunehmen

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^{\text{cont}} + \tilde{\sigma}^{\text{disc}} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\sigma} = \mathbf{C} (\tilde{\varepsilon}^{\text{cont}} + \tilde{\varepsilon}^{\text{disc}}), \quad (5.39)$$

³⁶ Eine bisher noch nicht diskutierte Möglichkeit, ein Randwertproblem auf effiziente Art und Weise zu lösen, bestünde prinzipiell auch darin, nur eine reduzierte Eigenvektorbasis zu verwenden, die unter geeigneter Wichtung die Randbedingungen näherungsweise erfüllt (sog. *reduced basis methods* und Lösungsverfahren nach Trefftz (Trefftz, 1926, Piltner, 1982)). Dann wäre eine deformationsmodenweise Spannungsglättung gegebenenfalls schon viel früher lohnend.

³⁷ Dabei ist zur Sichtbarkeit der Elementgrenzen in jedem Element nur der Bereich $\eta_1^e, \eta_2^e \in [0,8,0,8]$ ausgewertet.

um die unstetigen Anteile mit einer Superconvergent Patch Recovery (SPR, Kap. 2.3.2) zu glätten. Dabei ergeben sich die beiden Anteile der Spannungen zu:

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{C} \left(\mathbf{B}_{\xi}^{\text{st}} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}(\xi)}{\partial \xi} + \mathbf{B}_{\xi}^{\text{enr}} \frac{\partial \mathbf{c}^{2\text{D}}(\xi)}{\partial \xi} + \mathbf{B}_{\Gamma\varphi}^{\text{enr}} \frac{\mathbf{c}^{2\text{D}}(\xi)}{\xi} \right. \\ \left. + \mathbf{B}_{\eta}^{\text{st}} \frac{\hat{\mathbf{u}}(\xi)}{\xi} + (\mathbf{B}_{\eta_1}^{\text{enr}} + \mathbf{B}_{\eta_2}^{\text{enr}}) \frac{\mathbf{c}^{2\text{D}}(\xi)}{\xi} \right) \quad (5.40)$$

$$= \mathbf{C} \left(\overbrace{\mathbf{B}_{\xi}^{\text{st}} \Phi^{\text{st}} \Lambda + \mathbf{B}_{\xi}^{\text{enr}} \Phi^{\text{enr}} \Lambda + \mathbf{B}_{\Gamma\varphi}^{\text{enr}} \Phi^{\text{enr}}}^{\tilde{\mathbf{E}}^{\text{cont}}_{(\xi=1, \eta_1, \eta_2)}} \right. \\ \left. + \overbrace{\mathbf{B}_{\eta}^{\text{st}} \Phi^{\text{st}} + (\mathbf{B}_{\eta_1}^{\text{enr}} + \mathbf{B}_{\eta_2}^{\text{enr}}) \Phi^{\text{enr}}}^{\tilde{\mathbf{E}}^{\text{disc}}_{(\xi=1, \eta_1, \eta_2)}} \right) \xi^{\Lambda - \mathbf{I}} \mathbf{c}. \quad (5.41)$$

Folglich ist es hinreichend, die SPR auf nur *einem* diskretisierten Rand auszuführen (Außenrand Γ_a , Innenrand Γ_i , oder auch beliebiger virtueller Rand). Dabei besteht der kontinuierliche Anteil der Spannungen, anders als in der Arbeit von Ródenas et al. (2008) zur XFEM, nicht allein aus dem glatten Spannungsfeld der Anreicherung, sondern auch aus den in der SBFEM ebenfalls kontinuierlichen Anteilen aus den Ableitungen nach ξ . Damit ist diese Aufteilung der Spannungen in kontinuierliche und diskontinuierliche Anteile auch für eine nicht angereicherte Formulierung der SBFEM sinnvoll.

Abbildung 5.18 zeigt die Ergebnisse aus einer entsprechenden Spannungsglättung mittels der SPR – wieder sowohl für die nicht angereicherte (linke Spalte) als auch die angereicherte SBFEM-Formulierung (rechte Spalte). Gerade für die nicht angereicherte Formulierung ergibt sich ein wesentlicher Gewinn in der Glattheit der Spannungslösung und hier wiederum besonders in der Spannungskomponente σ_y . Die Spannungssingularität an der Rissfront wird in deren unmittelbarer Umgebung dennoch nicht verbessert abgebildet. Dies leistet nur die angereicherte Formulierung. Vor allem ist durch die Spannungsglättung nun aber der unphysikalische Verlauf der Spannungskomponente σ_x innerhalb der Elemente sowohl für die nicht angereicherte also auch die angereicherte SBFEM-Formulierung korrigiert.

Ergänzend soll ein weiterer Deformationsmodus der ZFR-ZFR-Interaktion betrachtet werden, nämlich einer jener, die bisher eine besondere Notwendigkeit einer Anreicherung gezeigt haben: der Deformationsmodus ct1, der ebenfalls die stärkste Spannungssingularität der Struktursituation stellt. In Abbildung 5.19 sind nun die Verläufe der hier dominanten Schubspannungen τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} sowie außerdem σ_x wieder für eine klassische (linke Spalte) und eine angereicherte SBFEM-Formulierung dargestellt (ohne Spannungsglättung). Hier sind die fehlenden Spannungskomponenten σ_y , σ_z nun zwar nicht mehr gänzlich vernachlässigbar klein, aber dennoch nur von etwa gleicher Größenordnung wie τ_{yz} und damit merklich kleiner als die übrigen drei Spannungskomponenten. Weiterhin ist zu beachten, dass die hier angegebenen Spannungsverteilungen für eine Deformation gelten, die gegenüber derjenigen in der Darstellung des Deformationsmodus ct1 in Abbildung 4.10 mit einem Vorzeichenwechsel in den Verschiebungen versehen ist.

Grundsätzlich zeichnet sich im Falle des Deformationsmodus ct1 ein ähnliches Bild wie zuvor bei Deformationsmodus co1, das aber in seinen Ausprägungen noch verstärkt ist: Die Unstetigkeiten im Spannungsverlauf der klassischen SBFEM-Formulierung sind in den dominanten Spannungskomponenten τ_{xy} und τ_{xz} deutlicher zu sehen als zuvor bei Deformationsmodus co1, geben aber weiterhin den richtigen Trend wieder. Die Spannungssingularität an der ZFR-Front

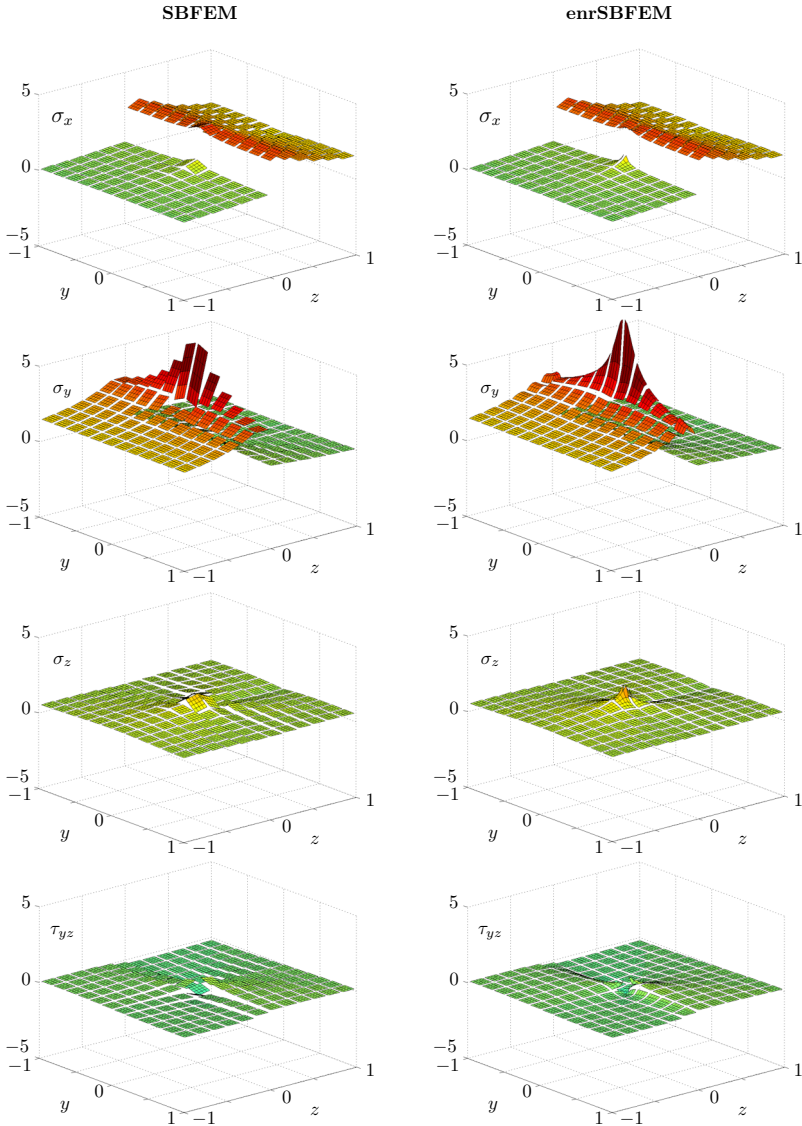


Abbildung 5.17: Spannungsverteilung ohne Anreicherung (linke Spalte) und mit Anreicherung (rechte Spalte) auf der Vorderseite ($x=1$) des mit der SBFEM modellierten, würfelförmigen Gebiets (Abb. 5.6b) um den Rissinteraktionspunkt einer ZFR-ZFR-Interaktion in einem T800/Epoxid-Laminat (Tab. A.1) für eine uniforme Diskretisierung mit $n_e = 12$ Elementen entlang der Würfelkanten: Deformationsmodus col (Abb. 4.10) für die dominanten Normalspannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ sowie die Schubspannung τ_{yz} .

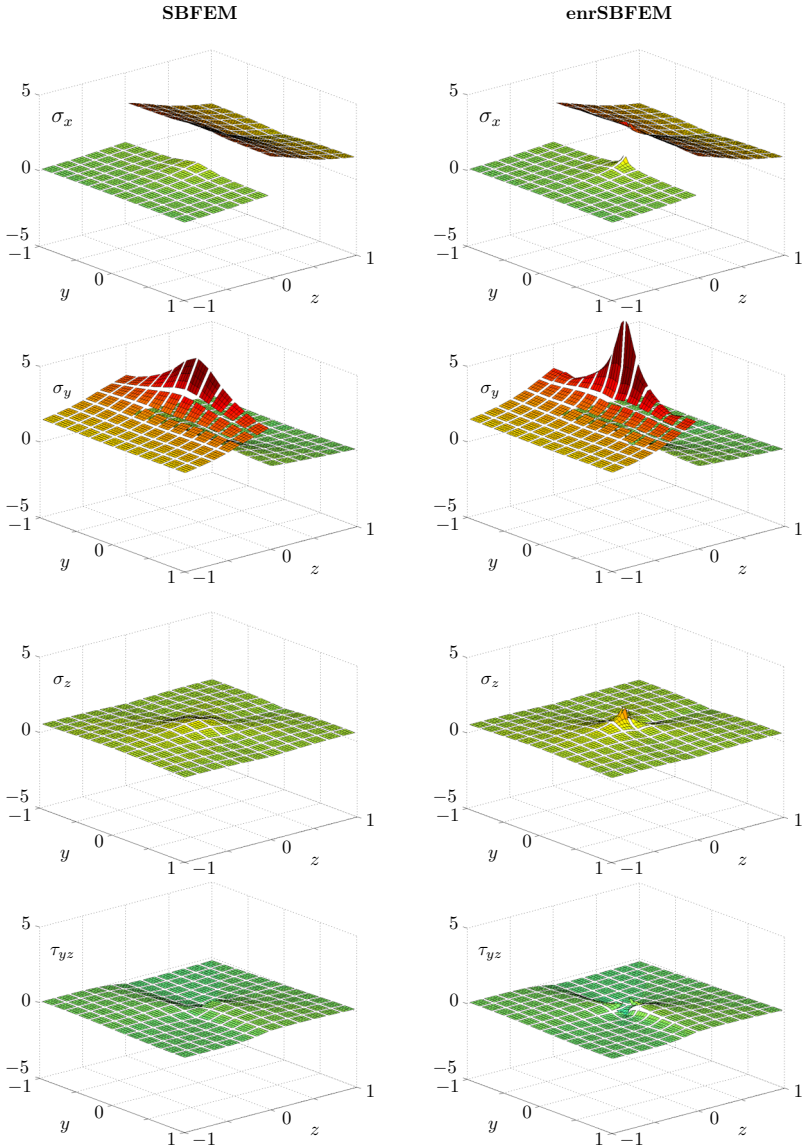


Abbildung 5.18: Mittels SPR geglättete Spannungsverteilung ohne Anreicherung (linke Spalte) und mit Anreicherung (rechte Spalte) auf der Vorderseite ($x=1$) des mit der SBFEM modellierten, würfelförmigen Gebiets um den Rissinteraktionspunkt einer ZFR-ZFR-Interaktion in einem T800/Epoxid-Laminat für eine uniforme Diskretisierung mit $n_e = 12$ Elementen entlang der Würfelkanten: Deformationsmodus col.

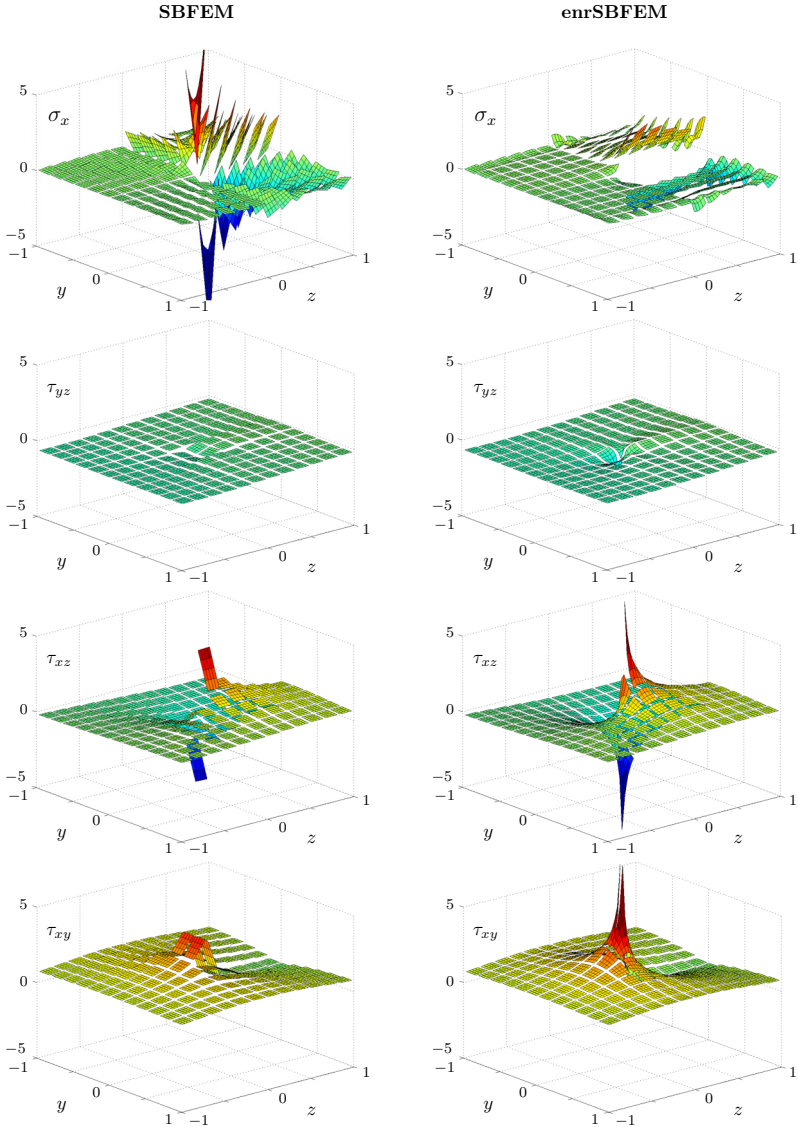


Abbildung 5.19: Spannungsverteilung ohne Anreicherung (linke Spalte) und mit Anreicherung (rechte Spalte) auf der Vorderseite ($x=1$) des mit der SBFEM modellierten, würfelförmigen Gebiets um den Rissinteraktionspunkt zweier senkrecht aufeinander treffender ZFR in T800/Epoxid-Laminat für eine uniforme Diskretisierung mit $n_e = 12$ Elementen entlang der Würfelkanten: Deformationsmodus ct1 (wie in Abb. 4.10, aber mit „-1“ multipliziert) für die dominanten Schubspannungen τ_{yz} , τ_{xz} , τ_{xy} sowie σ_x .

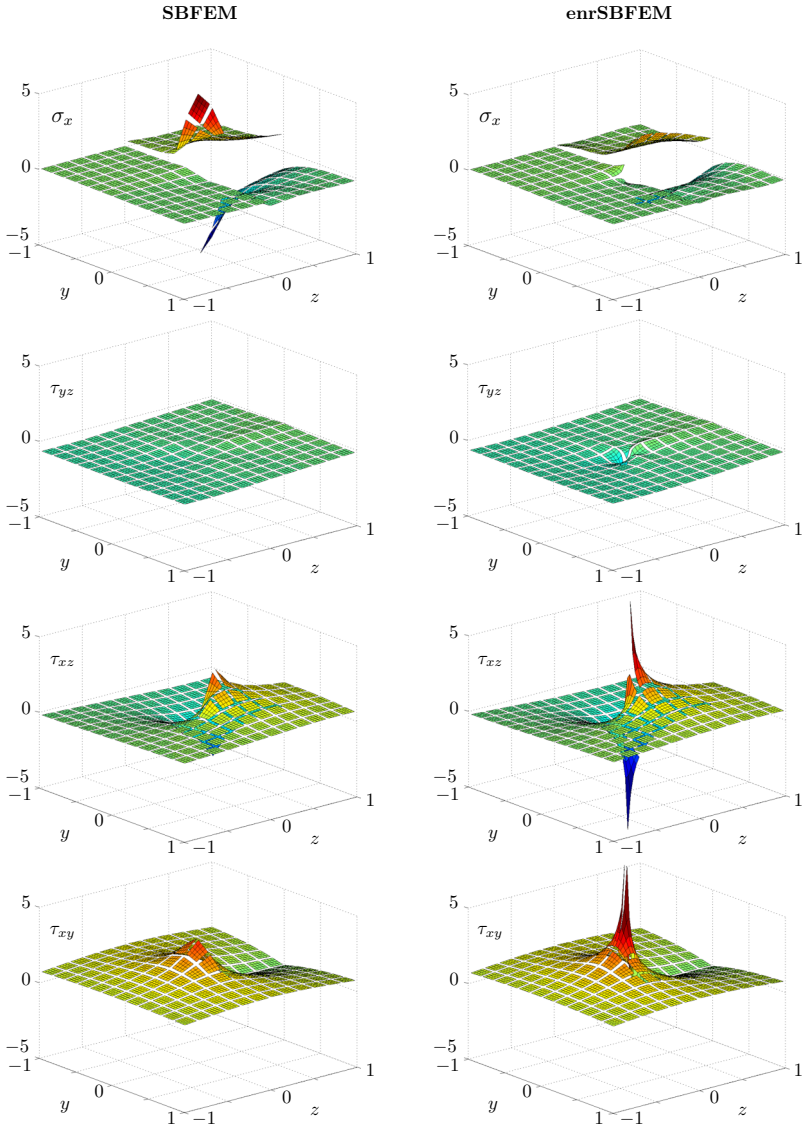


Abbildung 5.20: Spannungverteilung ohne Anreicherung (linke Spalte) und mit Anreicherung (rechte Spalte) auf der Vorderseite ($x=1$) des mit der SBFEM modellierten, würfelförmigen Gebiets um den Rissinteraktionspunkt zweier senkrecht aufeinander treffender ZFR in T800/Epoxid-Laminat für eine uniforme Diskretisierung mit $n_e = 12$ Elementen entlang der Würfelkanten: Deformationsmodus ct1 für die dominanten Schubspannungen τ_{yz} , τ_{xz} , τ_{xy} sowie σ_x .

wird innerhalb der anliegenden Elemente dennoch de facto kaum aufgelöst. Eine Anreicherung führt hier wiederum zu einer weitgehenden Behebung dieser Mängel: Die Verläufe werden glatt und die Spannungssingularität sehr gut aufgelöst.

Gegenüber Deformationsmodus `col` zeigt sich die Lage in der Spannungskomponente σ_x eklatant verschlechtert. Von physikalisch sinnvollen Spannungsverläufen kann innerhalb der einzelnen Elemente keine Rede mehr sein. Eine Anreicherung führt zwar zu einer wesentlichen Verbesserung, aber, wie schon bei Deformationsmodus `col`, noch nicht zu einem glatten Spannungsverlauf, sodass auch hier wieder die Notwendigkeit einer Spannungsglättung gegeben ist.

Abbildung 5.20 enthält wiederum die mittels einer SPR geglätteten Spannungsverläufe. Die Spannungsglättung hat natürlich auf die schon vorher glatten, mittels der `enrSBFEM` erhaltenen Schubspannungsverläufe kaum einen Einfluss. Andererseits sind Schubspannungsverläufe aus der klassischen SBFEM nun zwar glatt, aber die Spannungssingularitäten weiterhin kaum aus den Verläufen ablesbar. Stattdessen impliziert der geglättete Normalspannungsverlauf σ_x aus der klassischen SBFEM, eine starke Spannungskonzentration in dieser Spannungskomponente an der Rissfront, die aber in der angereicherten Formulierung gar nicht auftritt und somit anzuzweifeln ist. Die hochgradig volatile Normalspannungsverteilung σ_x und deren Implikation einer starken Spannungserhöhung, wo keine sein sollte, bei gleichzeitig schlechter Auflösung der eigentlichen Spannungssingularitäten (in den Schubspannungen) sind Gründe für die schlechte Genauigkeit und Konvergenz der mit der klassischen SBFEM für diesen Deformationsmodus erzielten Ergebnisse in den vorangehenden Teilkapiteln (z. B. Abb. 5.16).

Somit sind sowohl die Spannungsglättung als auch die Anreicherung selbst durch dieses Beispiel nochmals motiviert worden. Abschließend sei perspektivisch noch die Möglichkeit erwähnt, dass die mittels der SPR geglätteten Spannungen auch für sogenannte „A posteriori“-Fehlerschätzer verwendet werden können (Zienkiewicz et al., 2013, Ródenas et al., 2008). Diese gehen von der (meist gerechtfertigten) Annahme aus, dass die auf Basis der Elementspannungen in den Gaußpunkten geglätteten Spannungen von höherer Qualität sind und bis zu eine Konvergenzordnung schneller konvergieren als die nicht geglätteten Spannungen. Der Fehler wird dann als relative Differenz der geglätteten und ungeglätteten Spannungen geschätzt und gibt immerhin einen Anhaltspunkt dafür, wie auskonvergiert die vorhandene Lösung bereits ist. Die Möglichkeit der elementweisen Auswertung erlaubt zusätzlich zu unterscheiden, wo der Fehler noch vergleichsweise groß und wo er schon recht klein ist, sodass „A posteriori“-Fehlerschätzer häufig auch als Basis für adaptive Diskretisierungsstrategien dienen (vgl. z. B. auch Dimitrov u. Schnack (2002)). Im Rahmen dieser Arbeit wurde dies jedoch nicht umgesetzt und bleibt damit anderen Arbeiten vorbehalten.

Kapitel 6

Asymptotische Lösung von Zwei-Rand-Problemen im Rahmen der SBFEM und ihre Anwendung zur semi-analytischen Berechnung von Energiefreisetzungsraten

Dem Konzept der Bruchmechanik finiter Risse folgend kommen für eine mögliche Sekundärrissbildung zunächst alle denkbaren Rissgeometrien innerhalb des durch ein Spannungskriterium identifizierten überbeanspruchten Bereichs infrage (Kap. 2.2.4). Gerade in 3D-Problemstellungen führt dies jedoch zu einer kaum überschaubaren Anzahl potentieller Sekundärrisse (verschiedener Größen und Formen), sodass es unerlässlich wird, zum einen diese Anzahl durch zusätzliche Annahmen zu verringern und zum anderen effiziente Berechnungswege zu finden, um die Energiefreisetzungsraten der übrigen Sekundärrisse mit vertretbarem Aufwand berechnen zu können. Ein Ziel dieses Kapitels ist es, einen solchen effizienten Berechnungsweg im Rahmen einer SBFEM-Formulierung für Risse, die an einer 3D-Spannungssingularität initiieren, aufzuzeigen.

Die dabei verfolgte Idee wird hier kurz skizziert und detaillierter in Teilkapitel 6.2.2 behandelt. Es wird ein Gebiet unter äußerer Belastung betrachtet, das eine Spannungssingularität enthält (vgl. Abb. 6.1 a). Volumenkräfte seien vernachlässigbar klein. Diese Problemstellung wird mit der SBFEM modelliert, also das Skalierungszentrum S an der Spannungssingularität platziert und nur in den Randkoordinaten diskretisiert. Hier existiert nur ein Außenrand, entsprechend enthält die Lösung nur Deformationsmoden des positiven Spektrums (vgl. Kap. 4.1.3). Von dieser Problemstellung und sprödem Strukturverhalten ausgehend, wird nun eine geschädigte Folgekonfiguration betrachtet (Abb. 6.1 b). Diese enthalte einen Riss nahe der Spannungssingularität, welcher dort zu einem neuen spannungsfreien Randabschnitt führt. Dabei entspreche dieser neue Randabschnitt gerade dem mit einem Faktor ϵ skalierten Außenrand ($\epsilon = \xi_i/\xi_a$) und stellt damit einen validen Innenrand im SBFEM-Problem dar.¹² Das Folgeproblem mit Schädigung ist also ein Zwei-Rand-Problem mit spannungsfreiem Innenrand einzuordnen, wobei Form und Diskretisierung des skalierbaren Randes gerade denjenigen des Ausgangsproblems entsprechen. Folglich kann die Lösung des SBFEM-DGLS des Ausgangsproblems (Abb. 6.1 a) hier wiederverwendet werden, wobei neben den Deformationsmoden des positiven Spektrums nun auch diejenigen des negativen Spektrums Verwendung finden. Zur Lösung des Folgeproblems, und damit auch zur Bestimmung der Energiefreisetzung im Zuge der Schädigung, ist also nur noch das LGS des Zwei-Rand-Problems zu lösen (Gl. (4.54, 4.57)). Dies gilt für jede Größe der Schädigungszone und führt, da sich die Lösung des SBFEM-LGS

¹ Natürlich ist die Entstehung einer solchen Schädigungsfläche energetisch vergleichsweise ungünstig. Wie ein energetisch günstiger, direkt von der Spannungssingularität ausgehender Anriss modelliert werden kann, wird Gegenstand des Teilkapitels 6.2.2 sein.

² Das neu entstehende Teilgebiet um die ursprüngliche Spannungssingularität wird spannungsfrei und ist nicht weiter von Interesse.

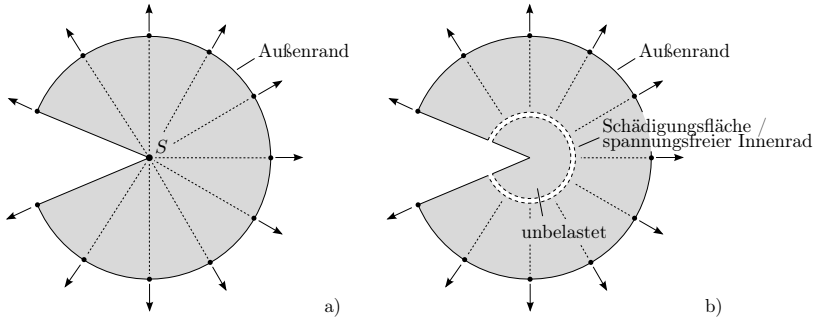


Abbildung 6.1: Vereinfachte Skizze zur Berücksichtigung spröder Schädigung an einer Spannungssingularität im Rahmen einer SBFEM-Modellierung (2D-Beispiel zur leichteren Anschauung). (a) Ausgangssituation: belastetes Gebiet mit Spannungssingularität (im Kerbgrund). Skalierungszentrum S an Spannungssingularität platziert und nur Rand diskretisiert. (b) eine Folgekonfiguration mit vereinfachter, spröder Schädigung nahe der Spannungssingularität.

im Vergleich zur Lösung des SBFEM-DGLS deutlich weniger aufwendig darstellt, bereits zu merklichen Einsparungen im Berechnungsaufwand. Dieser kann nochmals deutlich reduziert werden, wenn das Zwei-Rand-Problem asymptotisch gelöst wird. Dann können die Lösungsgrößen des Zwei-Rand-Problems und sogar Differenzen in den Lösungsgrößen zwischen dem Ausgangsproblem (ohne Innenrand) und dem Folgeproblem (mit Innenrand) *explicit* abhängig von der Größe des Innenrandes, und damit auch der Schädigungszone, angegeben werden.

Dieses Kapitel behandelt die Lösung von Randwertproblemen der SBFEM mit zwei diskretisierten Rändern (Außen- und Innenrand). Es wird dargestellt, wie mittels asymptotischer Näherungsmethoden durch nur wenige numerische Berechnungen semi-analytische Näherungslösungen für beliebige Skalierungen der Innen- bzw. Außenränder erzeugt werden können, solange die beiden Ränder hinreichend weit voneinander entfernt sind. Dazu wird zunächst das einfache und rein analytisch betrachtbare Beispiel einer Hohlkugel unter Außendruck untersucht (Kap. 6.1). Der Zweck ist die generelle Funktionsweise der Asymptotik an einem überschaubaren zu erläutern, bevor sie auf die verwandte, allgemeinere Problemstellung der 3D-SBFEM übertragen wird (Kap. 6.2). Bei dieser wird zunächst wie im Hohlkugelbeispiel eine modenbasierte Formulierung untersucht, die aber auf folgenden Spezialfall beschränkt ist: Das gesamte betrachtete Gebiet wird durch nur ein SBFEM-Gebiet beschrieben und reine Spannungs- oder Verschiebungsrandbedingungen sind an jeweils einem diskretisierten Rand gegeben. (Kap. 6.2.1).³ Es folgt die Verallgemeinerung auf eine verschiebungsbasierte Formulierung, die auch auf Fälle angewendet werden kann, in denen eine Gebietszerlegung in mehrere Teilgebiete vorliegt und gemischte Randbedingungen gegeben sind (Kap. 6.2.2).⁴ Schließlich werden die gewünschten asymptotischen Reihendarstellungen für inkrementelle und differentielle Energiefreisetzungsraten \mathcal{G}, \mathcal{G} aus den bis dahin bereitgestellten asymptotischen Lösungen des Zwei-Rand-Problems abgeleitet.

³ der Fall des oben beschriebenen Beispiels (Abb. 6.1)

⁴ Diese Formulierung ist notwendig, um Folgekonfigurationen darstellen zu können, die realistischer als die oben beschriebene sind.

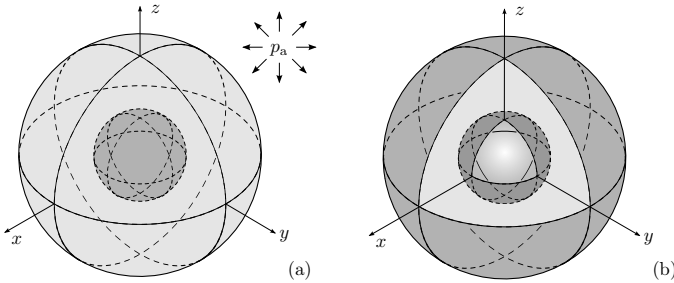


Abbildung 6.2: (a) Hohlkugel unter Außendruck. (b) Schnittbild der Hohlkugel mit herausgeschnittenem Achtel.

6.1 Einführendes Beispiel zur Vorgehensweise der Asymptotik: Hohlkugel unter Außendruck

Es sei das kugelsymmetrische Randwertproblem einer homogen-isotropen Hohlkugel im Kugelkoordinatensystem r, φ, ϑ unter Außendruck betrachtet. Die Hohlkugel besitze den Außenradius r_a und Innenradius r_i . Im kugelsymmetrischen Randwertproblem sind alle Zustandsgrößen nur Funktionen des Radius, sodass eine rein analytische Lösung des Problems möglich ist. Die zugehörige Verschiebungsdifferentialgleichung (Verschiebungs-DGL) ergibt sich aus den Feldgleichungen der Kinematik

$$u_{,\varphi} = u_{,\vartheta} = 0, \quad u(r) = u_r \implies \varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\vartheta = \frac{u}{r}, \quad \gamma_{r\varphi} = \gamma_{r\vartheta} = \gamma_{\varphi\vartheta} = 0, \tag{6.1}$$

des isotropen Materialgesetzes

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (\lambda + 2\mu) \frac{du}{dr} + 2\lambda \frac{u}{r} \\ \sigma_\varphi = \sigma_\vartheta &= \lambda \frac{du}{dr} + 2(\lambda + \mu) \frac{u}{r} \\ \tau_{r\varphi} = \tau_{r\vartheta} = \tau_{\varphi\vartheta} &= 0 \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ \mu &= G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{aligned} \tag{6.2}$$

sowie des lokalen Gleichgewichts

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0. \tag{6.3}$$

Die Verschiebungs-DGL ist, wie die das SBFEM-DGLS, vom Euler-Typ und lautet

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du(r)}{dr} - \frac{2}{r^2} u(r) = 0 \tag{6.4}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$u(r) = \frac{A}{r^2} + Br. \tag{6.5}$$

Ebenfalls wie in der SBFEM-Lösung enthält sie Terme, die von innen nach außen abklingen (r im Nenner), und Terme, die von außen nach innen abklingen (r im Zähler), von denen hier allerdings jeweils nur einer existiert.

Dieses von den jeweiligen Rändern ausgehende Abklingverhalten wird noch deutlicher ersichtlich, wenn die Konstanten A, B auf bestimmte Weise neu gewichtet werden:

$$\hat{A} = A/r_i^{1,5} \quad , \quad \hat{B} = B r_a^{1,5} .$$

Die Neuwichtung der freien Konstanten kann auch als die Einführung zweier unterschiedlicher Normierungen der Radialkoordinate verstanden werden, sodass die Radialkoordinate für von innen nach außen abklingende Terme auf den Innenradius r_i und für von außen nach innen abklingende Terme auf den Außenradius r_a normiert ist. Anstatt der Verschiebungsfunktion $u(r)$ wird im vorliegenden 3D-Fall aber das Produkt

$$u(r) \cdot \sqrt{r} = \hat{A}(r_i/r)^{1,5} + \hat{B}(r/r_a)^{1,5} \quad (6.6)$$

und anstatt der Radialspannungsfunktion $\sigma_r(r)$ das Produkt

$$\sigma_r(r) \cdot r\sqrt{r} = -\frac{2E}{1+\nu}\hat{A}(r_i/r)^{1,5} + \frac{E}{1-2\nu}\hat{B}(r/r_a)^{1,5} \quad (6.7)$$

betrachtet.⁵ Ausgehend von dieser symmetrischen Formulierung des Lösungsansatzes und unter Einführung des dimensionslosen Parameters⁶

$$\epsilon = r_i/r_a$$

können kinematische Beziehungen zwischen Randverschiebungen $u_a = u(r_a), u_i = u(r_i)$ und den neu gewichteten freien Konstanten \hat{A}, \hat{B} zur Lösung eines Randwertproblems mit reinen Verschiebungsrandbedingungen angegeben werden:

$$u_a = A/r_a^2 + Br_a = \hat{A}\frac{r_i^{1,5}}{r_a^{2,5}} + \hat{B}\frac{r_a}{r_a^{1,5}} \implies u_a\sqrt{r_a} = \hat{A}\epsilon^{1,5} + \hat{B} , \quad (6.8)$$

$$u_i = A/r_i^2 + Br = \hat{A}\frac{r_i^{1,5}}{r_i^2} + \hat{B}\frac{r_i}{r_a^{1,5}} \implies u_i\sqrt{r_i} = \hat{A} + \hat{B}\epsilon^{1,5} . \quad (6.9)$$

Im vorliegenden Randwertproblem der Hohlkugel mit reinen Spannungsrandbedingungen ergeben sich die Gleichgewichtsbeziehungen zwischen den Druckspannungen $p_a = -\sigma(r_a), p_i = -\sigma(r_i)$ an Außen- und Innenrand sowie den freien Konstanten \hat{A}, \hat{B} zu:

$$-p_a = -\frac{2E}{1+\nu}\frac{\hat{A}r_i^{1,5}}{r_a^3} + \frac{E}{1-2\nu}\frac{\hat{B}}{r_a^{1,5}} \implies \frac{p_a r_a^{1,5}}{E} = \frac{2\hat{A}}{1+\nu}\epsilon^{1,5} - \frac{\hat{B}}{1-2\nu} \quad (6.10)$$

$$-p_i = -\frac{2E}{1+\nu}\frac{\hat{A}r_i^{1,5}}{r_i^3} + \frac{E}{1-2\nu}\frac{\hat{B}}{r_a^{1,5}} \implies \frac{p_i r_i^{1,5}}{E} = \frac{2\hat{A}}{1+\nu} - \frac{\hat{B}}{1-2\nu}\epsilon^{1,5} . \quad (6.11)$$

Diesen Beziehungen ist unmittelbar zu entnehmen, wie der Einfluss von Randbedingungen an Außen- und Innenrand aufeinander maßgeblich von deren Abstand zueinander abhängt: Ist der Abstand groß ($\epsilon \ll 1$), sind die Gleichungssysteme jeweils nur noch schwach gekoppelt und der Einfluss der beiden Ränder – und der dort vorgegebenen Randbedingungen – aufeinander ist klein. Diese Eigenschaft hat weitreichende Konsequenzen und stellt die Basis für die in diesem Kapitel betrachteten asymptotischen Näherungslösungen dar.

⁵ ähnlich der Lösung (4.42) des SBFEM-DGLS in Hamiltonform

⁶ Der Parameter ϵ wird im Folgenden auch als Kopplungs- oder Skalierungsparameter bezeichnet.

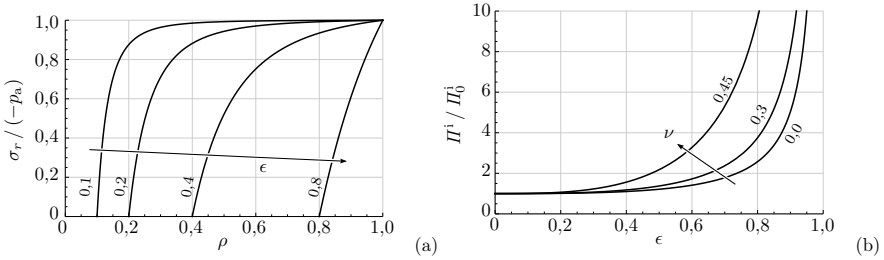


Abbildung 6.3: Einfluss des Innenrandes auf die Lösung des Randwertproblems: (a) auf Außendruck $-p_a$ normierter Radialspannungsverlauf über normierter Radialkoordinate $\rho = r/r_a$ für verschiedene normierte Innenrandradien $\epsilon = r_i/r_a$; (b) auf inneres Potential der Vollkugel ($\epsilon = 0$) normiertes inneres Potential in Abhängigkeit des normierten Innenrandradius für verschiedene Querkontraktionszahlen ν .

6.1.1 Analytische Lösung

Mit der Forderung nach Spannungsfreiheit am Innenrand $p_i = 0$ folgen die freien Konstanten im Falle der Hohlkugel unter Außendruck zu:

$$\hat{A} = \frac{1 + \nu}{2E} \frac{\epsilon^3}{1 - \epsilon^3} (-p_a) r_a^3, \quad \hat{B} = \frac{1 - 2\nu}{E} \frac{1}{1 - \epsilon^3} (-p_a) r_a^3 \quad (6.12)$$

Damit und mit dem auf den Außenrand bezogenen entdimensionierten Radius $\rho = r/r_a$ resultiert die einfache Spannungslösung:

$$\sigma_r = \frac{\rho^3 - \epsilon^3}{\rho^3(1 - \epsilon^3)} (-p_a), \quad \sigma_\varphi = \sigma_\vartheta = \frac{2\rho^3 + \epsilon^3}{\rho^3(1 - \epsilon^3)} (-p_a). \quad (6.13)$$

Schließlich lauten die Lösungen für die Verschiebung u und das innere Potential Π^i :

$$u = u_r = \frac{1}{2E} \frac{2\rho^3(1 - 2\nu) + \epsilon^3(1 + \nu)}{\rho^2(1 - \epsilon^3)} (-p_a) r_a \quad (6.14)$$

$$\Pi^i = \frac{\pi}{E} \frac{2(1 - 2\nu) + \epsilon^3(1 + \nu)}{1 - \epsilon^3} (-p_a)^2 r_a^3 \quad (6.15)$$

Entsprechend der allgemeinen Verschiebungslösung setzt sich auch die Lösung des Randwertproblems prinzipiell aus zwei Summanden zusammen: einem, der von der Randbedingung am Außenrand, und einem, der von der Randbedingung am Innenrand dominiert wird. Dies macht sich insbesondere dann bemerkbar, wenn die beiden Ränder weit voneinander entfernt und damit das aus den Randbedingungen resultierende Gleichungssystem nur noch schwach gekoppelt ist. Beispielsweise ist der Spannungslösung (6.13) zu entnehmen, dass der Einfluss des spannungsfreien Innenrandes auf die Gesamtlösung mit abnehmendem Innenradius rapide kleiner wird (vgl. Abb. 6.3 a) und die Spannungslösung für einen verschwindenden Innenrand ($\epsilon \rightarrow 0$) gegen den zu erwartenden hydrostatischen Spannungszustand tendiert. Ähnliches gilt für das innere Potential (Abb. 6.3 b): Es zeigt sich über einen weiten Bereich von Innenrandabmessungen bzw. relativen Innenrandradien ϵ kaum beeinflusst von der Existenz des

spannungsfreien Innenrandes.⁷ Dies ist gerade Ausdruck der schwachen Kopplung der beiden Ränder über den dann kleinen Parameter ϵ .

6.1.2 Asymptotische / Iterative Lösung

Die Dominanz jeweils eines der beiden Lösungsterme nahe je eines der beiden Ränder kann genutzt werden, um das Randwertproblem auch iterativ zu lösen. Dazu werden nicht beide Ränder und zugehörige Gleichungen (6.10, 6.11) gleichzeitig betrachtet, sondern jeweils nur eine der beiden Gleichungen. Diese wird genutzt, um die freie Konstante des an diesem Rand dominanten Lösungsterms zu bestimmen bzw. zu korrigieren, während der andere Lösungsterm, der mit $\epsilon^{1.5}$ skaliert, näherungsweise aus der vorherigen Iteration übernommen oder, im ersten Iterationsschritt, einfach vernachlässigt wird. So werden *abwechselnd* an Außen- und Innenrand die dort jeweils gestellten Randbedingungen durch Korrektur des an diesem Rand dominierenden Terms der allgemeinen Verschiebungslösung erfüllt. Entsprechende Rekursionsformeln können sowohl für reine Verschiebungs- als auch reine Spannungsrandbedingungen formuliert werden:

$$\begin{array}{l} \text{Rekursionsformel} \\ \text{Verschiebungs-RB} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{B}_i = u_a \sqrt{r_a} - \epsilon^{1.5} \hat{A}_{i-1}, \\ \hat{A}_i = u_i \sqrt{r_i} - \epsilon^{1.5} \hat{B}_{i-1}, \end{array} \right. \quad (6.16)$$

$$\begin{array}{l} \text{Rekursionsformel} \\ \text{Spannungs-RB} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{B}_i = (2\nu - 1) \left(\frac{p_a r_a^{1.5}}{E} - \frac{\epsilon^{1.5}}{1 + \nu} 2\hat{A}_{i-1} \right), \\ \hat{A}_i = \frac{1 + \nu}{2} \left(\frac{p_i r_i^{1.5}}{E} + \frac{\epsilon^{1.5}}{1 - 2\nu} \hat{B}_{i-1} \right). \end{array} \right. \quad (6.17)$$

Im betrachteten Fall der Hohlkugel unter Außendruck und mit spannungsfreiem Innenrand ergeben sich daraus folgende Reihenentwicklungen für die freien Konstanten

$$\hat{B} = \hat{B}_0 + \Delta \hat{B}_1 + \Delta \hat{B}_2 + \Delta \hat{B}_3 + \dots = \frac{2\nu - 1}{E} p_a r_a^{1.5} (1 + \epsilon^3 + \epsilon^6 + \epsilon^9 + \dots) \quad (6.18)$$

$$\hat{A} = \hat{A}_0 + \Delta \hat{A}_1 + \Delta \hat{A}_2 + \Delta \hat{A}_3 + \dots = \frac{1 + \nu}{2 - 4\nu} \hat{B}_0 \epsilon^{1.5} (1 + \epsilon^3 + \epsilon^6 + \dots) \quad (6.19)$$

Die Reihendarstellungen für die Spannungen⁸ und Verschiebungen lauten damit:

$$\sigma_r = -p_a + {}_i^1 \Delta \sigma_r + {}_a^2 \Delta \sigma_r + {}_i^3 \Delta \sigma_r + {}_a^4 \Delta \sigma_r + {}_i^5 \Delta \sigma_r + {}_a^6 \Delta \sigma_r + \mathcal{O}(\epsilon^{12}) \quad (6.20)$$

$$= -p_a + \frac{\epsilon^3}{\rho^3} p_a - \epsilon^3 p_a + \frac{\epsilon^6}{\rho^3} p_a - \epsilon^6 p_a + \frac{\epsilon^9}{\rho^3} p_a - \epsilon^9 p_a + \mathcal{O}(\epsilon^{12}), \quad (6.21)$$

$$u_r = -\frac{p_a r_a}{E} \left(\rho(1 - 2\nu) + \left(\rho(1 - 2\nu) + \frac{1 + \nu}{2\rho^2} \right) (\epsilon^3 + \epsilon^6 + \epsilon^9 + \mathcal{O}(\epsilon^{12})) \right). \quad (6.22)$$

Hierbei sind die Reihenglieder bis zur sechsten Iteration ausgeschrieben (4 mal Gleichgewicht am Außenrand, 3 mal am Innenrand) und alle weiteren Glieder im Landau-Symbol zusammengefasst.

⁷ wobei die Sensitivität gegenüber dem Innenrand mit zunehmender Querkontraktionszahl steigt. Schließlich wird für inkompressibles Materialverhalten das innere Potential ohne Existenz eines Innenrandes null, sodass das auf diesen Wert bezogene relative innere Potential (in Abb. 6.3b) singularär wird.

⁸ Bezüglich der Notation ist zu beachten: Den betrachteten Spannungen ist der Iterationsschritt als Superskript vorangestellt. Zur besseren Orientierung ist ebenfalls ein „i“ oder „a“ für den Rand, an dem die letzte Iteration durchgeführt wurde, als Subskript vorangestellt.

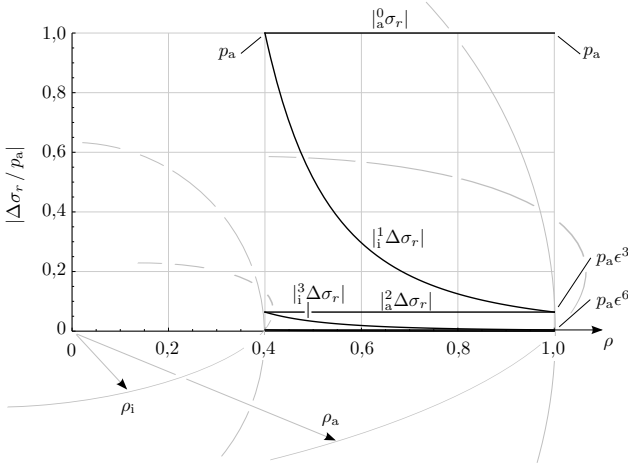


Abbildung 6.4: Entwicklung des Fehlers in der Radialspannung über den Iterationsprozess hinweg am Beispiel einer Hohlkugel mit normiertem Innenradius $\epsilon = 0,4$.

Konkret wird zunächst am Außenrand Gleichgewicht hergestellt und daraus eine erste Näherung B_0 der Konstanten B bestimmt. Der hydrostatische Term (mit Konstante B bzw. B_i) alleine erfüllt nun zwar die Gleichgewichtsbedingung am Außenrand, ist aber nicht in der Lage gleichzeitig auch die Spannungsrandbedingung des unbelasteten, freien Innenrandes zu erfüllen (vgl. auch Abb. 6.4). Der Fehler des hydrostatischen Terms am Innenrand wird in der zweiten Iteration durch Hinzunahme des nach außen abklingenden Lösungsterms und durch Bestimmung einer ersten Näherung A_0 der ihm zugehörigen Konstanten A behoben, wodurch jedoch das Gleichgewicht am Außenrand wiederum nicht mehr exakt erfüllt wird. Allerdings ist der relative Fehler am Außenrand von der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ schon vergleichsweise klein (bis $\epsilon \approx 0,22$ weniger als $\epsilon^3 = 0,22^3 \approx 1\%$). Zwei weitere Iterationen reduzieren ihn weiter auf $\mathcal{O}(\epsilon^6)$ (bis zu $\epsilon \approx 0,46$ ist $\epsilon^6 = 0,46^6 \approx 1\%$).

Für das innere Potential ergibt sich die Reihendarstellung zu:

$$\begin{aligned} \Pi^i = {}^6\Pi^i + \mathcal{O}(\epsilon^{12}) &= \frac{\pi p_a^2 r_a^3}{E} \left(2(1 - 2\nu)(1 - \epsilon^{21}) + \right. \\ &\quad \left. 3(1 - \nu)(\epsilon^3 + \epsilon^6 + \epsilon^9 - \epsilon^{12} - \epsilon^{15} - \epsilon^{18}) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^{12}) \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$= {}^6\Pi_{\text{red}}^i + \mathcal{O}(\epsilon^{12}) = \frac{\pi p_a^2 r_a^3}{E} \left(2(1 - 2\nu) + 3(1 - \nu)(\epsilon^3 + \epsilon^6 + \epsilon^9) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^{12}). \quad (6.24)$$

Hier ist anzumerken, dass die angegebenen Glieder der Reihendarstellungen von Spannungen und Verschiebungen in ϵ bis zur höchsten darin vorkommenden Ordnung vollständig sind (in diesem Falle bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^9)$), während dies auf das angegebene innere Potential, aufgrund seiner Eigenschaft als Produkt, nicht zutrifft. So enthält ${}^6\Pi^i$ Terme bis einschließlich der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^{21})$, eine weitere Iteration würde jedoch schon Terme ab der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^{12})$ hinzufügen. Das reduzierte innere Potential nach 6. Iteration ${}^6\Pi_{\text{red}}^i$ ist hingegen um unvollständig bestimmte Glieder bereinigt.

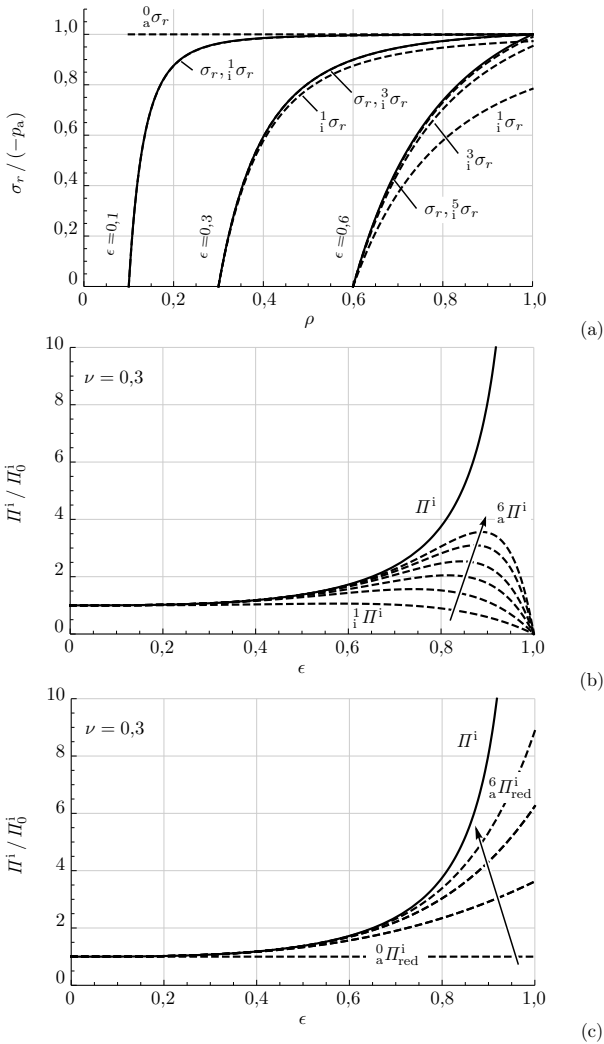


Abbildung 6.5: Vergleich von analytischer Lösung mit iterativer Lösung für diverse Iterations-schritte: (a) auf Außendruck normierte Radialspannung über enddimensionierten Kugelradius ρ für verschiedene enddimensionierte Innenrandradien ϵ ; (b, c) auf Wert ohne Innenrand normiertes inneres Potential über enddimensioniertem Innenrandradius mit vollständigen bzw. reduzierten Iterationslösungen.

Abbildung 6.5 zeigt einige iterativ gewonnene asymptotische Näherungen im Vergleich zu der jeweils exakten Lösung der Radialspannung σ_r bzw. des inneren Potentials Π^i . Die schnelle Konvergenz der asymptotischen Näherung zur analytischen Lösung hin, gerade für kleine ϵ (gleichbedeutend mit großen Randabständen), ist offensichtlich. Ein Vergleich der Diagramme 6.5 b und 6.5 c offenbart weiterhin, dass ein Aussparen unvollständig bestimmter Reihenglieder den Gültigkeitsbereich der asymptotischen Lösung ausweitet. Bei diesem Vergleich fällt weiterhin auf, dass sich je ein weiteres vollständig bestimmtes Reihenglied erst mit jeder zweiten Iteration ergibt (jeweils am Außenrand). Der asymptotischen Reihe ist jedoch schnell anzusehen, wie sie fortzusetzen ist, wodurch weiterer Rechenaufwand zur Bestimmung der Reihenglieder eingespart werden kann.

Die hier angewendete Vorgehensweise einer iterativen Lösung entspricht weitgehend der Methodik der „zusammengesetzten asymptotischen Reihen“ (engl.: compound asymptotic expansions) aus der Theorie der Störungsrechnung (z. B. Hinch (1991)). Von dieser ist bekannt, dass sie nicht zwingend unmittelbar auf Reihendarstellungen führt, die von vornherein bis ins letzte Glied die korrekten Koeffizienten besitzen, sondern, dass sich die korrekten Koeffizienten teils erst durch weitere Iterationen ergeben. Sie bietet aber den Vorteil der Einfachheit und Anschaulichkeit. Eine Alternative stellt die „Expansionsmethode“ (engl.: matched asymptotic expansions) dar. Bei dieser Methode wird von vornherein ein Reihenansatz als Lösung (hier der Konstanten A, B) angenommen und in die zu erfüllenden Gleichungen (hier die Randbedingungen) eingesetzt und die Koeffizienten der einzelnen Terme durch Koeffizientenvergleich bestimmt. Der Nachteil der Expansionsmethode liegt vor allem darin, dass der richtige zu wählende Reihenansatz häufig nicht a priori bekannt ist.

Im gegebenen Beispiel ist der Mehrwert einer solchen Asymptotik zugegebenermaßen gering. Anstatt den Rechenaufwand zu reduzieren, wird zusätzlicher Rechenaufwand generiert und gleichzeitig nur eine Näherungslösung erzeugt. Dies ist aber der Einfachheit und möglichen analytischen Lösung dieses speziellen Beispiels geschuldet. Die Vorteile der Asymptotik kommen, wie im folgenden Teilkapitel angedeutet und im Folgekapitel schließlich zu sehen sein wird, bei komplexeren Beispielen ohne analytische Lösung zum Tragen. Dann ist die Abhängigkeit der Lösung des Zwei-Rand-Problems vom entdimensionierten Innenrandradius ϵ i. A. nur noch implizit gegeben. Eine asymptotische Lösung in Reihendarstellung enthält ϵ hingegen auch dann weiterhin explizit.

Abschließend ist nochmals hervorzuheben, dass das führende Glied der Reihendarstellungen jeweils die Lösung ohne Innenrand enthält. Somit ist die aufgrund des Entstehens eines Innenrandes auftretende Energiefreisetzung (z. B. durch spröde Schädigung/Rissbildung) einfach durch Weglassen des führenden Gliedes in der Reihendarstellung umsetzbar. Der Vollständigkeit halber ist die für dieses Beispiel resultierende inkrementelle Energiefreisetzungsrates $(\bar{\mathcal{G}} = -\Delta\Pi/\Delta A$ mit $\Delta A = 4\pi\epsilon^2 r_a^2$) angegeben:⁹

$$\text{Analytik:} \quad \bar{\mathcal{G}} = \frac{r_a p_a^2}{4E} 3(1 - \nu) \frac{\epsilon}{1 - \epsilon^3}, \quad (6.25)$$

$$\text{Asymptotik:} \quad \bar{\mathcal{G}} = \frac{r_a p_a^2}{4E} 3(1 - \nu)(\epsilon^3 + \epsilon^6 + \epsilon^9) + \mathcal{O}(\epsilon^{12}). \quad (6.26)$$

⁹ Diese machen natürlich nur für einen negativen Außendruck $p_a < 0$ Sinn.

6.2 Das skalierbare Zwei-Rand-Problem in der SBFEM und seine Lösung mittels asymptotischer Reihenentwicklungen

Bereits in Kapitel 4.1.3 wurde die Lösung eines Randwertproblems mittels der SBFEM (auch mit zwei diskretisierten Rändern) ausführlich diskutiert. Hier sei im Speziellen der linear-elastische Fall mit äußeren Belastungen allein auf den diskretisierten Gebietsrändern betrachtet. Dabei werde das gesamte betrachtete Gebiet durch nur ein SBFEM-Gebiet beschrieben und an einem diskretisierten Gebietsrand seien je reine Spannungs- oder reine Verschiebungsrandbedingungen gegeben.

6.2.1 Modale Formulierung

Analog zum Spezialfall des kugelsymmetrischen Hohlkugelproblems werden auch hier neu gewichtete¹⁰ modale Wichtungsfaktoren, ihre virtuellen Gegenstücke

$$\hat{\mathbf{c}}_p = \xi_a^{\bar{\Lambda}_p} \mathbf{c}_p, \quad \delta \hat{\mathbf{c}}_p = \xi_a^{\bar{\Lambda}_p} \delta \mathbf{c}_p, \quad (6.27)$$

$$\hat{\mathbf{c}}_n = \xi_i^{\bar{\Lambda}_n} \mathbf{c}_n, \quad \delta \hat{\mathbf{c}}_n = \xi_i^{\bar{\Lambda}_n} \delta \mathbf{c}_n \quad (6.28)$$

sowie ein Kopplungs-/Skalierungs-/Störungsparameter¹¹

$$\epsilon = \xi_i / \xi_a$$

zur Beschreibung des Abstands von Innen- zu Außenrand eingeführt. Die modale Formulierung (4.63) des Zweirandproblems lässt sich damit folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta \hat{\mathbf{c}}_p \\ \delta \hat{\mathbf{c}}_n \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} \Phi_p^{uT} \Phi_p^q - \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \Phi_p^{uT} \Phi_p^q \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} & \Phi_p^{uT} \Phi_n^q \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} - \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \Phi_p^{uT} \Phi_n^q \\ \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \Phi_n^{uT} \Phi_p^q - \Phi_n^{uT} \Phi_p^q \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} & \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \Phi_n^{uT} \Phi_n^q \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} - \Phi_n^{uT} \Phi_n^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}}_p \\ \hat{\mathbf{c}}_n \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \delta \hat{\mathbf{c}}_p \\ \delta \hat{\mathbf{c}}_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi_p^{uT} \mathbf{p}_a - \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \Phi_p^{uT} \mathbf{p}_i \\ \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \Phi_n^{uT} \mathbf{p}_a - \Phi_n^{uT} \mathbf{p}_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Damit lässt sich die Lösung des Zwei-Rand-Problems für beliebige ϵ bestimmen, ohne Deformations- und Lastmoden neu berechnen zu müssen. Allerdings ist die Problemlösung immer noch nur implizit von ϵ abhängig und damit natürlich aufwendiger als mit einer expliziten Form zu bestimmen.

In den vier Blöcken der modalen Randsteifigkeitsmatrix sind jeweils zuerst die Außenrand-Terme und dann die Innenrand-Terme angegeben. Ähnlich wie in Kapitel 4.1 ist $\epsilon^{\bar{\Lambda}_p}$ als Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\epsilon^{\lambda_{p,j}}$ zu verstehen. In der Darstellung (6.29) wird die Bedeutung des Parameters ϵ für die Kopplung des Gleichungssystems unmittelbar ersichtlich. Er ist als Faktor in den Koppelmatrizen¹² enthalten, genauso aber auch in den Lastvektoren der rechten Seite von Gleichung (6.29). Dabei ist sein Einfluss maßgeblich

¹⁰ Es ist zu beachten, dass hier das symmetrische Eigenwertspektrum, im hier betrachteten 3D-Fall $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda} + 1/2 \mathbf{I}$, $\bar{\Lambda}_p = -\bar{\Lambda}_n$, zum Einsatz kommt. Dies führt auf eine besser lesbare Form der Gleichungen.

¹¹ Der Ausdruck „Störung“ bezieht sich hier vor allem auf Situationen mit weit voneinander entfernten Rändern Γ_a, Γ_i (kleine ϵ), in denen die einfacheren Randwertprobleme mit jeweils nur einem diskretisierten Rand durch die Existenz eines zweiten Randes gestört sind.

¹² also in den beiden querdagonalen Blöcken der modalen Steifigkeitsmatrix, die die Kopplung zwischen positivem und negativem Spektrum der Deformationsmoden abbilden

von seinen Exponenten, den Abklingexponenten $\bar{\lambda}_{p,j}$ in der Diagonalmatrix $\bar{\Lambda}_p$, abhängig: Erwartungsgemäß folgt aus hohen Abklingexponenten eine geringere Kopplung der beiden Teile des Deformationsmodenspektrums – und damit indirekt ein geringerer Einfluss auf den jeweils anderen Rand. Es sei weiterhin angemerkt, dass diese Umformulierung aus numerischer Sicht, insbesondere bei weit voneinander entfernten diskretisierten Rändern (kleine ϵ), eine wesentliche Verbesserung der Konditionierung des beteiligten LGS zur Folge hat.

Die Verwendung des Kopplungsparameters ϵ sowie die Neuichtung der modalen Wichtungsfaktoren schon in der Lösung der SBFEM-DGL für Randverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}(\xi)$ und Randlastvektoren $\hat{\mathbf{q}}(\xi)$

$$\hat{\mathbf{u}}(\xi)\sqrt{\xi} = \Phi_p^u(\xi/\xi_a)^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_p + \Phi_n^u(\xi/\xi_i)^{\bar{\Lambda}_n} \hat{\mathbf{c}}_n, \quad (6.30)$$

$$\hat{\mathbf{q}}(\xi)/\sqrt{\xi} = \Phi_p^q(\xi/\xi_a)^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_p + \Phi_n^q(\xi/\xi_i)^{\bar{\Lambda}_n} \hat{\mathbf{c}}_n. \quad (6.31)$$

führt ausgewertet an Außen- und Innenrand jeweils auf eine Art kinematischer sowie Gleichgewichtsbeziehungen, die durch ein Konstitutivgesetz verbunden sind.

- Kinematik (Kopplung der Ränder durch ϵ):

$$\hat{\mathbf{u}}_a\sqrt{\xi_a} = \Phi_p^u \hat{\mathbf{c}}_p + \Phi_n^u \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_n, \quad (6.32)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_i\sqrt{\xi_i} = \Phi_p^u \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_p + \Phi_n^u \hat{\mathbf{c}}_n. \quad (6.33)$$

- Gleichgewicht (Kopplung der Ränder durch ϵ):

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_a^T \sqrt{\xi_a} \left(\Phi_p^q \hat{\mathbf{c}}_p + \Phi_n^q \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_n \right) = \delta \hat{\mathbf{u}}_a^T \left(\xi_a^2 \mathbf{p}_a(\xi=1) \right), \quad (6.34)$$

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_i^T \sqrt{\xi_i} \left(-\Phi_p^q \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_p - \Phi_n^q \hat{\mathbf{c}}_n \right) = \delta \hat{\mathbf{u}}_i^T \left(-\xi_i^2 \mathbf{p}_i(\xi=1) \right). \quad (6.35)$$

- Konstitutivgesetz:¹³

$$\Phi_p^q = \left(\mathbf{E}_0 \Phi_p^u \Lambda_p (\Phi_p^u)^{-1} + \mathbf{E}_I^T \right) \Phi_p^u \quad (6.36)$$

$$\Phi_n^q = \left(\mathbf{E}_0 \Phi_n^u \Lambda_n (\Phi_n^u)^{-1} + \mathbf{E}_I^T \right) \Phi_n^u \quad (6.37)$$

Hierbei stellen $\hat{\mathbf{u}}_a$, $\hat{\mathbf{u}}_i$, $\delta \hat{\mathbf{u}}_a$, $\delta \hat{\mathbf{u}}_i$ jeweils die Verschiebungen bzw. virtuellen Verrückungen an den Rändern ξ_a , ξ_i dar. $\xi_a^2 \mathbf{p}_a(\xi=1)$, $\xi_i^2 \mathbf{p}_i(\xi=1)$ sind die dortigen Randlastvektoren:

$$\hat{\mathbf{u}}_a = \hat{\mathbf{u}}(\xi_a) \quad , \quad \delta \hat{\mathbf{u}}_a = \delta \hat{\mathbf{u}}(\xi_a) \quad , \quad \hat{\mathbf{u}}_i = \hat{\mathbf{u}}(\xi_i) \quad , \quad \delta \hat{\mathbf{u}}_i = \delta \hat{\mathbf{u}}(\xi_i).$$

In einem Randwertproblem mit nur einem SBFEM-Feld und reinen Verschiebungsrandbedingungen sind die kinematischen Beziehungen (6.32, 6.33) ausreichend und bei reinen Spannungsrandbedingungen sind es die beiden Gleichgewichtsbeziehungen (6.34, 6.35). Aus diesen lassen sich Rekursionsformeln ableiten, mit deren Hilfe, nach Vorbild der Vorgehensweise des vorangehenden Teilkapitels, abwechselnd an Außen- und Innenrand entweder Kinematik oder Gleichgewichtsbedingungen erfüllt werden können:

$$\begin{array}{l} \text{Rekursionsformel} \\ \text{Verschiebungs-RB} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{c}}_p^{(i)} = (\Phi_p^u)^{-1} \left(\hat{\mathbf{u}}_a \sqrt{\xi_a} - \Phi_n^u \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_n^{(i-1)} \right), \\ \hat{\mathbf{c}}_n^{(i)} = (\Phi_n^u)^{-1} \left(\hat{\mathbf{u}}_i \sqrt{\xi_i} - \Phi_p^u \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_p^{(i-1)} \right), \end{array} \right. \quad (6.38)$$

¹³ Es ist zu beachten, dass im vorliegenden 3D-Fall an dieser Stelle das asymmetrische Eigenwertspektrum $\Lambda_p + \mathbf{I} = -\Lambda_n$ zu verwenden ist.

$$\begin{array}{l}
 \text{Rekursionsformel} \\
 \text{Spannungs-RB}
 \end{array}
 \quad
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \hat{\mathbf{c}}_p^{(i)} = (\Phi_p^q)^{-1} \left(\xi_a^{1,5} \mathbf{p}_a(\xi=1) - \Phi_n^q \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_n^{(i-1)} \right), \\
 \hat{\mathbf{c}}_n^{(i)} = (\Phi_n^q)^{-1} \left(\xi_i^{1,5} \mathbf{p}_i(\xi=1) - \Phi_p^q \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_p^{(i-1)} \right),
 \end{array}
 \right.
 \quad (6.39)$$

Die Startwerte $\hat{\mathbf{c}}_p^{(0)}$ und $\hat{\mathbf{c}}_n^{(0)}$ der modalen Wichtungsfaktoren $\hat{\mathbf{c}}_p$ und $\hat{\mathbf{c}}_n$ ergeben sich jeweils für $\epsilon=0$ und stellen somit die Lösung des reinen Außenrandproblems bzw. des reinen Innenrandproblems dar. Die Rekursionsformeln können auch kombiniert werden, solange an je einem diskretisierten Rand jeweils entweder nur Spannungs- oder Verschiebungsrandbedingungen vorgegeben sind.

Reihendarstellungen für die modalen Wichtungsfaktoren

Wie im vorangehenden Teilkapitel, können aus den Rekursionsformeln (6.38, 6.39) Reihendarstellungen abgeleitet werden. Dabei spielt die Übertragung der Deformations- bzw. Lastmoden des positiven Spektrums in jene des negativen Spektrums und umgekehrt eine wesentliche Rolle. Der Logik der iterativen Randwertproblemlösung folgend, sind an einem diskretisierten Rand (z. B. Innenrand Γ_i), die Residuen der Deformations- bzw. Lastmoden (des Spektrums Λ_p), welche am gegenüberliegenden diskretisierten Rand dominieren (Außenrand Γ_a), durch die Deformations-/Lastmoden (des Spektrums Λ_n), die am betrachteten diskretisierten Rand (Γ_i) dominieren, auszugleichen.¹⁴ Mittels der Übertragung wird bestimmt, wie eine gegebene Anregung der Deformations-/Lastmoden eines Teils des Spektrums, durch eine Anregung der Deformations-/Lastmoden des anderen Teils des Spektrums an einem Rand $\xi=1$ abgebildet werden kann. Im Rahmen einer diskretisierten SBFEM-Formulierung erfolgt die Übertragung für die an dieser Stelle zu betrachtenden unskalierten Wichtungsfaktoren mittels der Transfermatrizen \mathbf{k}_p^* , \mathbf{k}_n^* :

$$\mathbf{c}_p = \mathbf{k}_p^* \mathbf{c}_n \quad , \quad \mathbf{c}_n = \mathbf{k}_n^* \mathbf{c}_p \quad . \quad (6.40)$$

Sie kann sowohl auf Verschiebungs- als auch auf Lastmodenbasis geschehen:¹⁵

$$\text{verschiebungsbasiert: } \mathbf{k}_p^* = (\Phi_p^u)^{-1} \Phi_n^u \quad , \quad \mathbf{k}_n^* = (\Phi_n^u)^{-1} \Phi_p^u = (\mathbf{k}_p^*)^{-1} \quad , \quad (6.41)$$

$$\text{lastbasiert: } \mathbf{k}_p^* = (\Phi_p^q)^{-1} \Phi_n^q \quad , \quad \mathbf{k}_n^* = (\Phi_n^q)^{-1} \Phi_p^q = (\mathbf{k}_p^*)^{-1} \quad . \quad (6.42)$$

Mit Hilfe dieser Transfermatrizen lässt sich die Reihendarstellung wie folgt angeben:

$$\hat{\mathbf{c}}_p = \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\mathbf{k}_p^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \mathbf{k}_n^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \right)^m \right] \hat{\mathbf{c}}_p^{(0)} - \mathbf{k}_p^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\mathbf{k}_n^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \mathbf{k}_p^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \right)^m \right] \hat{\mathbf{c}}_n^{(0)} \quad (6.43)$$

$$\hat{\mathbf{c}}_n = \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\mathbf{k}_n^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \mathbf{k}_p^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \right)^m \right] \hat{\mathbf{c}}_n^{(0)} - \mathbf{k}_n^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\mathbf{k}_p^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \mathbf{k}_n^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \right)^m \right] \hat{\mathbf{c}}_p^{(0)} \quad (6.44)$$

Es ist zu beachten, dass diese Reihendarstellungen, im Gegensatz zu jenen des vorangehenden Teilkapitels zum kugelsymmetrischen Hohlkugelproblem, nun Matrizen enthalten, deren Ausmultiplikation für jedes Reihenglied mit $m=0, 1, 2, \dots$ wiederum eine Reihendarstellung

¹⁴ vgl. auch Abbildung 6.4 für das Beispiel der Hohlkugel unter Außendruck

¹⁵ Im lastbasierten Beispiel der Hohlraumkugel unter Außendruck folgt aus der Forderung $\sigma_r(r=1)=0$ und Gl. (6.7):

$$c_p = B = \frac{2-4\nu}{1+\nu} A = k_p^* c_n \quad , \quad c_n = A = \frac{1+\nu}{2-4\nu} B = k_n^* c_p \quad .$$

in ϵ zur Folge hat. Daher ist zwischen den Gliedern der Matrix-Reihe (in $\epsilon^{\bar{\Lambda}_p}$) und den Reihengliedern im skalaren Parameter ϵ zu unterscheiden.

Die Tatsache, ob an einem Rand reine Verschiebungsrandbedingungen oder reine Spannungsrandbedingungen vorgeschrieben sind, geht nur über die Wahl der Transfermatrizen ein: Die Transfermatrix \mathbf{k}_p^* kommt für die Übertragung am Außenrand und \mathbf{k}_n^* am Innenrand zum Einsatz. Dabei hat die Übertragung bei Verschiebungsrandbedingungen naheliegenderweise verschiebungsbasiert (Gln. (6.41)) und bei Spannungsrandbedingungen lastbasiert (Gln. (6.42)) zu erfolgen. Die Reihendarstellung vereinfacht sich entsprechend, wenn beispielsweise ein spannungsfreier oder eingespannter Innenrand vorgeschrieben sind, da dann $\hat{\mathbf{c}}_n^{(0)} = \mathbf{0}$ wird. Umgekehrt, werden bei spannungsfreiem oder eingespanntem Außenrand die Startwerte für die modalen Wichtungsfaktoren des positiven Spektrums identisch null $\hat{\mathbf{c}}_p^{(0)} = \mathbf{0}$, sodass dann in den Reihen (6.43, 6.44) die entsprechenden Terme verschwinden.

Reihendarstellungen für inneres und Gesamtpotential

Nun seien die im betrachteten Gebiet gespeicherten Energien untersucht.¹⁶ Das innere bzw. elastische Potential Π^i des SBFEM-Zweirandproblems lässt sich durch die Summe der an Außen- und Innenrand von den inneren Kräften über den quasistatischen Belastungsprozess hinweg geleisteten Arbeit ausdrücken:

$$\begin{aligned} \Pi^i = & \frac{1}{2} \left[\Phi_p^u \hat{\mathbf{c}}_p + \Phi_n^u \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_n \right]^T \left[\Phi_p^q \hat{\mathbf{c}}_p + \Phi_n^q \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_n \right] \quad \text{Außenrand-Terme} \\ & + \frac{1}{2} \left[\Phi_p^u \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_p + \Phi_n^u \hat{\mathbf{c}}_n \right]^T \left[-\Phi_p^q \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_p - \Phi_n^q \hat{\mathbf{c}}_n \right] \quad \text{Innenrand-Terme} \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und Ausnutzen der Symmetrieeigenschaft des inneren Potentials führen unter Beachtung, dass die Skalierungsmatrix $\epsilon^{\bar{\Lambda}_p}$ eine Diagonalmatrix ist, auf

$$\begin{aligned} \Pi^i = & \frac{1}{2} \hat{\mathbf{c}}_p^T \Phi_p^u \Phi_p^q \hat{\mathbf{c}}_p + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{c}}_p^T (\Phi_p^u \Phi_n^q + \Phi_p^q \Phi_n^u) \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_n + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{c}}_n^T \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \Phi_n^u \Phi_n^q \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_n \\ & - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{c}}_n^T \Phi_n^u \Phi_n^q \hat{\mathbf{c}}_n - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{c}}_n^T (\Phi_n^u \Phi_p^q + \Phi_n^q \Phi_p^u) \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_p - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{c}}_p^T \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \Phi_p^u \Phi_p^q \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_p. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Die beiden linken Terme sind auf die Arbeit zurückzuführen, die die Deformations- und Lastmoden des jeweils positiven und negativen Anteils des Spektrums ($\bar{\Lambda}_p$ und $\bar{\Lambda}_n$) an jeweils dem Rand, an welchem sie dominant sind (Γ_a und Γ_i), verrichten. Die beiden rechten Terme beinhalten die Anteile des inneren Potentials, die sich aus den entsprechenden Residuen am jeweils anderen Rand ergeben (Γ_i und Γ_a). Die mittleren Terme beinhalten die energetische Interaktion der Deformations- und Lastmoden von positivem und negativem Anteil des Spektrums.

Hier können die Reihendarstellungen (6.43, 6.44) eingesetzt werden. Ausmultiplizieren führt sehr schnell auf sehr längliche Ausdrücke, sodass dieser Prozess im Folgenden nur für einen einfachen Spezialfall genauer betrachtet sei:

- Der Innenrand sei unbelastet oder eingespannt, sodass $\hat{\mathbf{c}}_n^{(0)} = \mathbf{0}$ gelte und dort keine Arbeit verrichtet werde.

¹⁶ Sie sind die Grundlage, um später Reihendarstellungen für Energiefreisetzungsraten erhalten zu können (Kap. 6.3).

- Die resultierende Reihendarstellung des inneren Potentials sei nur bis zum ersten matrixbasierten Glied (in $\epsilon^{\bar{\Lambda}_p}$) ${}_1\Pi_p^i$ betrachtet. Dafür ist es hinreichend die ersten beiden Glieder der Matrix-Reihe (6.43) bis $m=1$ sowie das erste Glied der Matrix-Reihe (6.44) bis $m=0$ zu berücksichtigen:¹⁷

$$\hat{c}_p = \hat{c}_p^{(0)} + \mathbf{k}_p^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \mathbf{k}_n^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{c}_p^{(0)} + \mathcal{O}(\epsilon^{4\bar{\Lambda}_p}) \quad , \quad \hat{c}_n = -\mathbf{k}_n^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{c}_n^{(0)} - \mathcal{O}(\epsilon^{3\bar{\Lambda}_p}) .$$

Da am Innenrand keine Arbeit verrichtet wird, ist die zweite Zeile in Gleichung (6.45) identisch null. Dabei werden die beiden äußeren Summanden, unabhängig vom Typ der Randbedingungen, vom mittigen Interaktionsterm ausgeglichen. Unter Berücksichtigung der Symmetrie der modalen Steifigkeitsmatrix des positiven Spektrums $\mathbf{K}_p^c = \Phi_p^{uT} \Phi_p^q$

$$\Phi_p^{uT} \Phi_p^q (\Phi_p^u)^{-1} = \Phi_p^{qT} \Phi_p^u \quad \Leftarrow \quad \Phi_p^{uT} \Phi_p^q = \Phi_p^{qT} \Phi_p^u \quad \Rightarrow \quad \Phi_p^{uT} = \Phi_p^{qT} \Phi_p^u (\Phi_p^q)^{-1} , \quad (6.46)$$

ergibt sich das innere Potential zu

$$\Pi^i = \underbrace{\frac{1}{2} \hat{c}_p^{(0)T} \Phi_p^{uT} \Phi_p^q \hat{c}_p^{(0)}}_{{}_0\Pi_p^i} + \underbrace{\frac{1}{2} \hat{c}_p^{(0)T} (2\Phi_p^{uT} \Phi_p^q \mathbf{k}_p^* - \Phi_p^{uT} \Phi_n^q - \Phi_p^{qT} \Phi_n^u) \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \mathbf{k}_n^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{c}_p^{(0)}}_{{}_1\Pi_p^i} + \mathcal{O}(\epsilon^{4\bar{\Lambda}_p}) \quad (6.47)$$

Das erste Glied ${}_0\Pi_p^i$ entspricht gerade dem inneren Potential des reinen Außenrandproblems ($\epsilon=0$). Der Klammerausdruck im zweiten Glied ${}_1\Pi_p^i$ lässt sich weiter vereinfachen, wobei wieder zwischen Spannungs- und Verschiebungsrandbedingungen am Außenrand zu unterscheiden ist.

- *Spannungsrandbedingung am Außenrand:* Hier ist die Transfermatrix nach Gleichung (6.42) durch $\mathbf{k}_p^* = (\Phi_p^q)^{-1} \Phi_n^q$ definiert. Einsetzen in den Klammerausdruck führt auf:

$$2\Phi_p^{uT} \Phi_p^q (\Phi_p^q)^{-1} \Phi_n^q - \Phi_p^{uT} \Phi_n^q - \Phi_p^{qT} \Phi_n^u = \Phi_p^{uT} \Phi_n^q - \Phi_p^{qT} \Phi_n^u =: 2\mathcal{W} . \quad (6.48)$$

- *Verschiebungsrandbedingung am Außenrand:* Hier ist die Transfermatrix nach Gleichung (6.41) durch $\mathbf{k}_p^* = (\Phi_p^u)^{-1} \Phi_n^u$ bestimmt. Einsetzen in den Klammerausdruck und Beachtung der Identität (6.46) führt auf:

$$2\left(\Phi_p^{uT} \Phi_p^q (\Phi_p^u)^{-1}\right) \Phi_n^u - \Phi_p^{uT} \Phi_n^q - \Phi_p^{qT} \Phi_n^u = \Phi_p^{qT} \Phi_n^u - \Phi_p^{uT} \Phi_n^q = -2\mathcal{W} . \quad (6.49)$$

In beiden Fällen gelangt man also, bis auf den Vorzeichenwechsel, auf den gleichen, bereits aus Kapitel 4.1.3, Gleichung (4.69) bekannten Ausdruck, der von hier an als Energieinteraktionsmatrix \mathcal{W} bezeichnet sei. Sie beinhaltet die energetische Interaktion der Deformations- und Lastmoden des positiven Spektrums $\bar{\Lambda}_p$ mit jenen des negativen Spektrums $\bar{\Lambda}_n$. Gleichung (4.69) zufolge, die aus dem Satz von Betti (2.58) resultiert, ist sie eine Blockdiagonalmatrix.

¹⁷ Die Terme von höherer Ordnung in $\epsilon^{\bar{\Lambda}_p}$ sind jeweils mit Hilfe des Landau-Symbols $\mathcal{O}(\epsilon^{\alpha\bar{\Lambda}_p})$ zusammengefasst, wobei der Skalar α hier dafür stehe, wie häufig die Diagonalmatrix $\epsilon^{\bar{\Lambda}_p}$ im Matrixprodukt eines Summanden mindestens vorhanden sei.

Aus dem inneren Potential kann das Gesamtpotential $\Pi = \Pi^i + \Pi^a$, das auch das äußere Potential Π^a enthält, bestimmt werden. Für reine Verschiebungsrandbedingungen ist das äußere Potential $\Pi^a = 0$ und das innere Potential entspricht dem Gesamtpotential $\Pi = \Pi^i$. Für reine Spannungsrandbedingungen, die als Totlasten aufgebracht sind, gilt der Satz von Clapeyron (2.57), womit $\Pi = -\Pi^i$ folgt. Dieser Vorzeichenwechsel entspricht gerade dem vorher beobachteten Vorzeichenwechsel des Klammerausdrucks aus Gleichung (6.47), sodass sich das Gesamtpotential folgendermaßen angeben lässt:

$$\Pi = {}_0\Pi_p - \hat{c}_p^{(0)T} \mathcal{W} \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \mathbf{k}_n^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{c}_p^{(0)} + \mathcal{O}(\epsilon^{4\bar{\Lambda}_p}), \quad (6.50)$$

wobei ${}_0\Pi_p$, analog wie vorher ${}_0\Pi_p^i$, nun das Gesamtpotential des reinen Außenrandproblems darstellt. Die Berücksichtigung auch weiterer Matrixreihenglieder führt auf die matrixbasierte, aber auf einen skalaren Wert führende Reihendarstellung

$$\Pi = {}_0\Pi_p - \hat{c}_p^{(0)T} \mathcal{W} \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \mathbf{k}_n^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\mathbf{k}_p^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \mathbf{k}_n^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \right)^m \right] \hat{c}_p^{(0)}. \quad (6.51)$$

Auch hier ist wieder zwischen matrixbasierten Reihengliedern in $\epsilon^{\bar{\Lambda}_p}$ und den aufwendiger zu extrahierenden Reihengliedern im skalaren Parameter ϵ zu unterscheiden. Weiterhin liegt, wie schon am einführenden Beispiel der Hohlraumkugel gesehen, eine Reihendarstellung vor, deren erstes Glied gerade dem Wert ohne Innenrand entspricht.

Äquivalent dazu lässt sich der Spezialfall mit nun spannungsfreiem oder eingespanntem Außenrand ($\hat{c}_p^{(0)} = \mathbf{0}$), diskutieren. In diesem Fall wird am Außenrand keine Arbeit verrichtet und die erste Zeile in Gleichung (6.45) ist null. Weiterhin ist nun die Symmetrie der modalen Steifigkeitsmatrix des positiven Spektrums $\mathbf{K}_n^c = \Phi_n^{uT} \Phi_n^q$ auszunutzen. So gelangt man zu einer der Gleichung (6.47) sehr ähnlichen Form, nur mit umgekehrten Vorzeichen und vertauschten Indizes $(\cdot)_n$ und $(\cdot)_p$. Da bei Berücksichtigung der Randbedingungen auch wiederum eine Umkehr des Vorzeichens der Energieinteraktionsmatrix beim Ersetzen des Klammerausdrucks auftritt, hat die vollständige Reihenentwicklung des Gesamtpotentials in diesem Fall die gleiche Form wie Gleichung (6.51), mit letztlich nur noch vertauschten Indizes $(\cdot)_n$ und $(\cdot)_p$. Durch Superposition lässt sich schließlich die Reihenentwicklung des Gesamtpotentials für den allgemeineren Fall $\hat{c}_p^{(0)} \neq \mathbf{0}$ und $\hat{c}_n^{(0)} \neq \mathbf{0}$ angeben:

$$\begin{aligned} \Pi = & {}_0\Pi_p - \hat{c}_p^{(0)T} \mathcal{W} \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \mathbf{k}_n^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\mathbf{k}_p^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \mathbf{k}_n^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \right)^m \right] \hat{c}_p^{(0)} \\ & + {}_0\Pi_n - \hat{c}_n^{(0)T} \mathcal{W} \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \mathbf{k}_p^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\mathbf{k}_n^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \mathbf{k}_p^* \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \right)^m \right] \hat{c}_n^{(0)}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Mit dieser asymptotischen Reihenentwicklung liegt eine im Kopplungsparameter ϵ analytische Formel für das Gesamtpotential vor, die sowohl für die 3D- als auch die 2D-Formulierung der SBFEM gilt.

Anmerkungen zur Auswertung der asymptotischen Reihenentwicklung für das Gesamtpotential

Es wird betrachtet, welcher Aufwand zur Bestimmung der Reihenentwicklung für das Gesamtpotential zu betreiben ist. Um die Reihenentwicklung vollständig bestimmen zu können,

ist zunächst das Randwertproblem separat an Außen- und Innenrand zu lösen, wobei jeweils in erster Näherung davon ausgegangen wird, dass der jeweils andere Rand nicht existiert. So werden die modalen Wichtungsfaktoren $\hat{\mathbf{c}}_p^{(0)}$, $\hat{\mathbf{c}}_n^{(0)}$ des positiven bzw. negativen Spektrums bestimmt. Die Energieinteraktionsmatrix \mathbf{W} folgt einfach aus der Lösung des Eigenwertproblems. Schließlich bleiben noch die Transfermatrizen \mathbf{k}_n^* , \mathbf{k}_p^* zu berechnen. Im Falle eines unbelasteten oder eingespannten Randes ($\hat{\mathbf{c}}_p^{(0)} = \mathbf{0}$ oder $\hat{\mathbf{c}}_n^{(0)} = \mathbf{0}$) und gleichzeitig ausschließlicher Berücksichtigung des ersten Entwicklungsterms ($m=0$), ist auch schon die Berechnung nur einer der beiden Transfermatrizen ausreichend. Bei der Auswertung der Reihenentwicklung ist weiterhin günstig, dass die Skalierungsmatrix ϵ^{Λ_p} diagonal und die Energieinteraktionsmatrix \mathbf{W} blockdiagonal sind.

Weiterhin ist es fraglich, ob die Transfermatrizen überhaupt vollständig bestimmt werden müssen, oder ob bereits die Berücksichtigung nur einiger weniger Deformations- und Lastmoden, d.h. die Bestimmung nur weniger Spalten bzw. Zeilen, ausreichend ist. Denn das Abklingverhalten der Deformations- und Lastmoden ist bekanntlich in der Art eines Potenzgesetzes von ihren Abklingexponenten abhängig und geht über die Skalierungsmatrix ϵ^{Λ_p} im Kopplungsparameter ϵ in die Reihenentwicklungen ein – in höheren Gliedern auch in noch höheren Potenzen. Offensichtlich sind also nicht alle in einem Glied iI_p der matrixbasierten Reihendarstellung vertretenen Deformations- und Lastmoden gleichberechtigt. Dies ist besonders deutlich in einer indexbasierten Darstellung der Reihenentwicklung sichtbar – hier am Beispiel des unbelasteten oder eingespannten Innenrandes ($\hat{\mathbf{c}}_n^{(0)} = \mathbf{0}$) und unter Berücksichtigung nur der ersten drei Reihenglieder der matrixbasierten Reihendarstellung $0I_p, 1I_p, 2I_p$:

$$\begin{aligned} \Pi = & 0I_p - \sum_{k=1}^{n_{n1}^\lambda} \sum_{l=1}^{n_{p1}^\lambda} \left(\hat{c}_{p,k}^{(0)} \hat{c}_{p,l}^{(0)} \epsilon^{\bar{\lambda}_{p,k} + \bar{\lambda}_{p,l}} k_{n,kl}^* \mathcal{W}_k \right) \\ & - \sum_{k=1}^{n_{n2}^\lambda} \sum_{l=1}^{n_{p2}^\lambda} \sum_{m=1}^{n_{n2}^\lambda} \sum_{s=1}^{n_{p2}^\lambda} \left(\hat{c}_{p,k}^{(0)} \hat{c}_{p,s}^{(0)} \epsilon^{\bar{\lambda}_{p,k} + \bar{\lambda}_{p,l} + \bar{\lambda}_{p,m} + \bar{\lambda}_{p,s}} k_{n,kl}^* k_{p,lm}^* k_{n,ms}^* \mathcal{W}_k \right) - \dots \end{aligned} \quad (6.53)$$

Hierbei ist mit n_{pi}^λ , n_{ni}^λ die jeweilige Anzahl der im Reihenglied iI_p berücksichtigten Deformationsmoden des positiven und negativen Spektrums bezeichnet.

Die Anzahl der berücksichtigten Deformationsmoden in den einzelnen Reihengliedern iI_p der matrixbasierten Reihendarstellung flexibel anzupassen, ist sinnvoll. Ähnlich wie am Beispiel des kugelsymmetrischen Hohlkugelproblems gesehen, können ab einem bestimmten Wert des Exponenten in $\epsilon^{\bar{\lambda}_{p,k} + \bar{\lambda}_{p,l}}$ die Reihenglieder höherer Ordnung (z. B. $2I_p$ mit dem enthaltenen Faktor $\epsilon^{\bar{\lambda}_{p,k} + \bar{\lambda}_{p,l} + \bar{\lambda}_{p,m} + \bar{\lambda}_{p,s}}$) Beiträge von ähnlicher Ordnung in ϵ liefern. In Kapitel 6.1 war dieser Effekt bei der Berechnung des inneren Potentials auf seine Eigenschaft als Produkt von Spannungen und Verzerrungen zurückzuführen, die beide durch die iterative, asymptotische Lösung des Randwertproblems als Reihen vorlagen. Hier sind Spannungen und Verzerrungen nicht nur aufgrund der iterativen Lösung als Reihendarstellung gegeben, sondern zusätzlich aufgrund der Berücksichtigung einer Vielzahl von Deformationsmoden. Daher sind bei der Qualitätsbewertung der erhaltenen asymptotischen Reihendarstellungen für das Gesamtpotential nicht nur die Anzahl der berücksichtigten Gleichgewichtssiterationen, also die Anzahl der Reihenglieder iI_p (in ϵ^{Λ_p}), sondern auch die Anzahl der berücksichtigten Deformationsmoden entscheidend. Wie in Abbildung 6.5 am Beispiel der Hohlkugel unter Innendruck gesehen, sind Reihen, die nur Glieder (im skalaren Parameter ϵ) mit vollständig bestimmten Koeffizienten enthalten, überlegen und daher vorzuziehen, was hier über variable

Anzahlen zu berücksichtigender Deformationsmoden umzusetzen ist.¹⁸ Reihenglieder ${}_i\Pi_p$ der matrixbasierten Reihendarstellung (in ϵ^{Λ_p}), die auf Glieder im skalaren Parameter ϵ mit vollständig bestimmten Koeffizienten reduziert sind, werden im Rahmen dieser Arbeit als reduzierte Reihenglieder ${}_i\Pi_p^{\text{red}}$ bezeichnet.

Im Folgenden sei weiterhin der Spezialfall mit $\hat{\mathbf{c}}_n^{(0)} = \mathbf{0}$ betrachtet. Unter Berücksichtigung nur der ersten beiden matrixbasierten Reihenglieder ${}_0\Pi_p, {}_1\Pi_p$ erscheinen i.A. zunächst nur Summanden mit

$$\bar{\lambda}_{p,k} + \bar{\lambda}_{p,l} < 4\bar{\lambda}_{p,1} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_{p,k} + \lambda_{p,l} < 4\lambda_{p,1} + 1 \quad (6.54)$$

nicht mehr durch Hinzunahme weiterer matrixbasierter Reihenglieder veränderlich. Wenn Starrkörperverschiebungen mit Abklingexponent $\lambda_{p,1} = 0$ den kleinsten Abklingexponenten im positiven Spektrum stellen und in der Lösung enthalten sind, würde das eine sehr starke Einschränkung bedeuten: nämlich vor allem auf Deformationsmoden mit Abklingexponenten $-0,5 < \lambda_p < 0,5$ und damit auf nur die Starrkörperverschiebungen sowie Deformationsmoden mit starken Spannungssingularitäten. Auch wenn die Einschränkung auf möglichst wenige Deformations- und Lastmoden bezüglich der Berechnungseffizienz wünschenswert ist, ließe diese kaum noch eine qualitativ sinnvolle Reihenentwicklung zu.

Einschränkung (6.54) kann merklich abgemildert werden, wenn keine Starrkörperverschiebungen auftreten oder diese keine Rolle spielen:

$$\bar{\lambda}_{p,k} + \bar{\lambda}_{p,l} < 4 \min\{\bar{\lambda}_p | \bar{\lambda}_p \neq 0\} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_{p,k} + \lambda_{p,l} < 4 \min\{\lambda_p | \lambda_p \neq 0\} + 1. \quad (6.55)$$

Im Falle reiner Spannungsrandbedingungen am Außenrand treten im elastostatischen Fall¹⁹ keine Starrkörperverschiebungen auf²⁰. Doch auch bei reinen Verschiebungsrandbedingungen am Außenrand bei gleichzeitig spannungsfreiem Innenrand darf die Überlagerung einer Starrkörperverschiebung nicht zu einer Änderung des Gesamtpotentials führen. Da hier im zweiten matrixbasierten Reihenglied ${}_1\Pi_p$ weder die den Starrkörperverschiebungen zugehörigen modalen Wichtungsfaktoren noch die zugehörigen Einträge der Energieinteraktionsmatrix \mathcal{W} oder der Skalierungsmatrix ϵ^{Λ_p} null werden, muss die Unabhängigkeit des Gesamtpotentials von den Starrkörperverschiebungen durch die Struktur der Transfermatrix \mathbf{k}_n^* gewährleistet sein (vgl. Gl. (6.51)). Hier lautet die Transfermatrix $\mathbf{k}_n^* = (\Phi_n^q)^{-1} \Phi_p^q$, worin die zu den Starrkörperverschiebungen gehörigen Lastmoden Nullvektoren/-spalten in der Matrix Φ_p^q bilden. Damit werden auch die ersten Spalten von \mathbf{k}_n^* Nullspalten.²¹ Für eine Unabhängigkeit des Gesamtpotentials von den Starrkörperverschiebungen müssen allerdings auch die entsprechenden Zeilen der Transfermatrix \mathbf{k}_n^* Nullzeilen sein. Dies impliziert im Umkehrschluss, dass die Einzelkraftlösungen mit $\lambda_j = -1$ nicht an der Abbildung der Lastmoden des positiven Spektrums durch die Lastmoden des negativen Spektrums beteiligt sein können.

Die mögliche Anzahl an Reihengliedern in ϵ mit vollständig bestimmten Koeffizienten lässt sich aktiv erweitern, indem höhere matrixbasierte Glieder ${}_i\Pi_p$ berücksichtigt werden. Die zu ${}_0\Pi_p$

¹⁸ Dies ist in matrixbasierten Reihendarstellungen schwerer umzusetzen als in indexbasierten. Andererseits sind matrixbasierte Berechnungen in MATLAB[®] deutlich schneller als auf Schleifen basierende.

¹⁹ Der Körper befindet sich im Gleichgewicht, d. h. die aus den Spannungsrandbedingungen resultierende äußere Kraft ist identisch Null.

²⁰ Bei einer Modellierung mit Hilfe der SBFEM ist hier trotzdem eine statisch bestimmte Lagerung notwendig, damit die Randsteifigkeitsmatrix des Problems regulär ist. Diese ist gegebenenfalls geeignet zu wählen, damit die Starrkörpermoden tatsächlich nicht angesprochen werden.

²¹ Sind die positiven Lastmoden Nullvektoren, dann werden sie durch eine einfache Nullwichtung aller negativen Lastmoden abgebildet.

und ${}_1I_p$ zusätzliche Berücksichtigung von ${}_2I_p$ führt für den Spezialfall eines spannungsfreien Innenrandes auf die weiter abgeschwächten Einschränkungen²²

$$\lambda_{p,k} + \lambda_{p,l} < 6 \min\{\lambda_p | \lambda_p \neq 0\} + 2 \quad \text{in } {}_1I_p \text{ und} \quad (6.56)$$

$$\lambda_{p,k} + \lambda_{p,l} + \lambda_{p,m} + \lambda_{p,s} < 6 \min\{\lambda_p | \lambda_p \neq 0\} + 1 \quad \text{in } {}_2I_p. \quad (6.57)$$

Die Anzahl an zu verwendenden Deformationsmoden im matrixbasierten Reihenglied ${}_1I_p$ wird also merklich ausgeweitet (vgl. Gl. (6.55)), während die Einschränkung für das höhere matrixbasierte Reihenglied ${}_2I_p$ aufgrund der höheren Anzahl an Summanden linksseitig in der Ungleichung vergleichsweise streng ist. Bei zusätzlicher Berücksichtigung von ${}_3I_p$ folgen die Einschränkungen:

$$\lambda_{p,k} + \lambda_{p,l} < 8 \min\{\lambda_p | \lambda_p \neq 0\} + 3 \quad \text{in } {}_1I_p \text{ und} \quad (6.58)$$

$$\lambda_{p,k} + \lambda_{p,l} + \lambda_{p,m} + \lambda_{p,s} < 8 \min\{\lambda_p | \lambda_p \neq 0\} + 2 \quad \text{in } {}_2I_p \text{ und} \quad (6.59)$$

$$\lambda_{p,k} + \lambda_{p,l} + \lambda_{p,m} + \lambda_{p,s} + \lambda_{p,r} + \lambda_{p,t} < 8 \min\{\lambda_p | \lambda_p \neq 0\} + 1 \quad \text{in } {}_3I_p. \quad (6.60)$$

Bei diesen Betrachtungen ist stets im Blick zu behalten, dass nicht nur die Skalierungsmatrix ϵ^{Λ_p} die Bedeutung der Beiträge der einzelnen Deformationsmoden zum Gesamtpotential steuert, sondern auch die weiteren Faktoren in den matrixbasierten Reihengliedern ${}_iI_p$ eine Rolle spielen. In jedem Fall lässt sich die Anzahl der zu berücksichtigenden Summanden in der Reihenentwicklung (6.53) durch solche Betrachtungen grundsätzlich reduzieren, sodass eine explizit von ϵ abhängige Formel für das Gesamtpotential erhalten werden kann, die gegebenenfalls sogar in indexbasierter Darstellung sehr überschaubar bleibt.

Die hier gezeigte modale Formulierung der asymptotischen Reihenentwicklung für Zwei-Rand-Probleme der SBFEM hat den Vorteil der Anschaulichkeit und ist der Darstellung des einfachen kugelsymmetrischen Beispiels einer Hohlraumkugel unter Außendruck sehr ähnlich. Sie beschränkt sich jedoch in ihrer bisher gezeigten Form auf Geometrien, für die der Innenrand durch reine Skalierung des Außenrandes abgebildet werden kann. Auch die Berücksichtigung von gemischten Randbedingungen, also Verschiebungs- und Spannungsrandbedingungen an *einem* Rand, ist mit ihr nicht ohne Weiteres möglich. Entsprechend sind Problemstellungen, in denen mehrere, zunächst getrennt modellierte Gebiete zu koppeln sind, nicht ohne Zusatzaufwand mit der modalen Formulierung zu behandeln. Eine *verschiebungsbasierte* Formulierung ist hierfür besser geeignet und Gegenstand des Folgeteilkapitels.

6.2.2 Verschiebungsbasierte Formulierung für Problemstellungen mit Gebietszerlegung und gemischten Randbedingungen

Die Differenz der Gesamtpotentiale einer Struktursituation mit und ohne einen zweiten Rand ergibt sich durch Herausstreichen des entsprechenden jeweils ersten Reihenglieds ${}_0I_p$ bzw. ${}_0I_n$ der matrixbasierten Reihendarstellungen und damit besonders einfach. Dies kann sich für die Betrachtung geschädigter Struktursituationen und die Berechnung zugehöriger Energiefreisetzungsraten zunutze gemacht werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass zunächst ein ungeschädigter Vollkörper, der nur einen Außenrand besitzt, vorliegt. Tritt Schädigung ein, wird angenommen, dass sie im Körperinneren einen Innenrand schafft (z. B. einen Riss), der typischerweise unbelastet ist, und das ursprüngliche Randwertproblem

²² Im 2D-Fall bzw. unter Verwendung des symmetrischen Spektrums fallen die ganzzahligen Summanden am Ende jeweils weg.

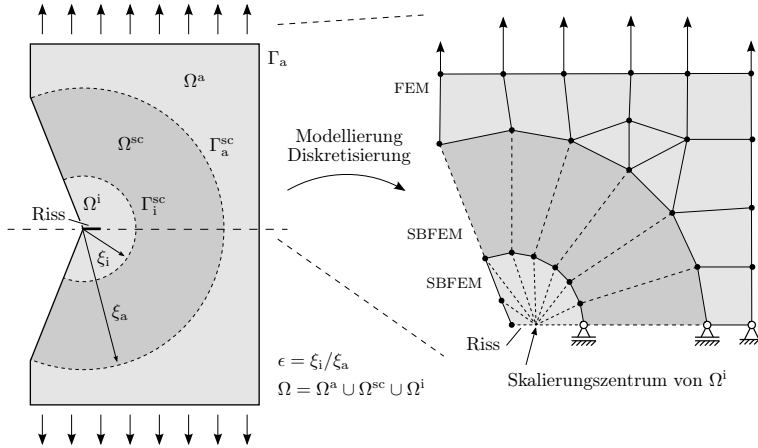


Abbildung 6.6: Spitzkerbe mit Anriss unter Zugbelastung als einfaches, zweidimensionales Beispiel für ein im Rahmen der SBFEM mit asymptotischer Methodik betrachtbares Problem mit Gebietszerlegung (d. h. mit gekoppelten Teilgebieten).

stört. Dieser Innenrand hat i. A. eine andere Form als der Außenrand. Dem kann Rechnung getragen werden, indem in den durch Einführung eines Innenrandes entstandenen Hohlraum im SBFEM-Modell die dort tatsächlich durch Schädigung auftretende Defektgeometrie separat modelliert und schließlich mit dem SBFEM-Modell gekoppelt wird (Abb. 6.6). Genauso können auch Gebiete außerhalb des skalierbaren Gebiets separat modelliert und dann mit diesem gekoppelt werden. Dazu ist eine verschiebungsbasierte Formulierung zu verwenden. Am Beispiel einer solchen Struktursituation, die durch eine Schädigung in Form eines Anrisses gestört ist, sei im Folgenden die verschiebungsbasierte Formulierung betrachtet (vgl. 2D-Beispiel²³ in Abb. 6.6).

Es werden zwei zueinander skalierbare, virtuelle Ränder im zu betrachtenden Gebiet Ω festgelegt, die das Skalierungsgebiet Ω^{sc} einschließen: ein Außenrand Γ_a^{sc} nahe des eigentlichen Außenrandes Γ_a und ein Innenrand Γ_i^{sc} nahe der Störung (bzw. Anriss). Dadurch wird das gesamte gestörte Gebiet Ω in die drei Teilgebiete Ω^a (äußeres Gebiet), Ω^i (inneres Gebiet) und das schon erwähnte Skalierungsgebiet Ω^{sc} zerlegt. Folglich liegt eine Problemstellung mit Gebietszerlegung vor. Die Skalierungsbedingung für die Ränder des Skalierungsgebiets Γ_a^{sc} und Γ_i^{sc} beinhaltet dabei ausdrücklich die vollständige Trennung der Teilgebiete Ω^a und Ω^i durch Ω^{sc} . Das Skalierungsgebiet ist mit einer SBFEM-Formulierung für zwei skalierte, diskretisierte Ränder zu modellieren. Das äußere und das innere Gebiet Ω^a, Ω^i können z. B. nach der üblichen Methodik der Standard-FEM behandelt oder auch mittels einer SBFEM-Formulierung modelliert werden. Soll einer der beiden Ränder $\Gamma_a^{sc}, \Gamma_i^{sc}$ des Skalierungsgebiets Ω^{sc} skaliert werden, sind die angrenzenden Gebiete (Ω^a oder Ω^i) entsprechend bezüglich des Skalierungszentrums des Skalierungsgebiet Ω^{sc} mitzuskalieren. Da eine Skalierung des inneren Gebiets Ω^i

²³ Das 2D-Beispiel dient insbesondere der anschaulichen Darstellung der prinzipiellen Vorgehensweise. Die angegebenen Beziehungen und Gleichungen gelten jedoch in erster Linie für den 3D-Fall und wären zur Betrachtung zweidimensionaler Problemstellungen geeignet anzupassen.

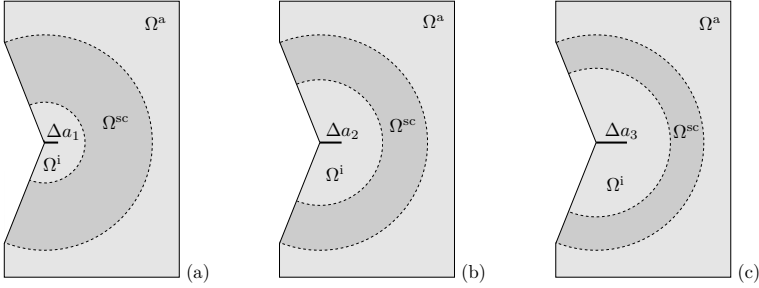


Abbildung 6.7: Berücksichtigung verschiedener Rissgrößen $\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3$ durch Skalierung des inneren Gebiets Ω^i bzw. des Innenrandes Γ_1^{sc} des Skalierungsgebiets Ω^{sc} ($\Delta a \propto \epsilon \propto \xi_i$).

automatisch auch eine Skalierung der Rissgröße beinhaltet, können durch eine Skalierung von Γ_1^{sc} (über ξ_i) verschiedene Rissgrößen berücksichtigt werden (vgl. Abb. 6.7).

Im nächsten Schritt soll die schwache, diskretisierte Form des Kräftegleichgewichts zunächst nur für das Skalierungsgebiet aufgestellt werden. Dazu sind in die Gleichungen (6.34, 6.35) die Rekursionsformeln für die Kinematik (6.32, 6.33) einzusetzen

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_a^T \sqrt{\xi_a} \left(\mathbf{\Phi}_p^q (\mathbf{\Phi}_p^u)^{-1} \left(\hat{\mathbf{u}}_a \sqrt{\xi_a} - \mathbf{\Phi}_n^u \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_n \right) + \mathbf{\Phi}_n^q \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_n \right) = \delta \hat{\mathbf{u}}_a^T \left(\xi_a^2 \mathbf{p}_a \right), \quad (6.61)$$

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_i^T \sqrt{\xi_i} \left(-\mathbf{\Phi}_n^q (\mathbf{\Phi}_n^u)^{-1} \left(\hat{\mathbf{u}}_i \sqrt{\xi_i} - \mathbf{\Phi}_p^u \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_p \right) - \mathbf{\Phi}_p^q \epsilon^{\bar{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_p \right) = \delta \hat{\mathbf{u}}_i^T \left(-\xi_i^2 \mathbf{p}_i \right). \quad (6.62)$$

Die noch enthaltenen modalen Terme, also die Terme der nach außen abklingenden Deformationsmoden im Außenrandgleichgewicht und die Terme der nach innen abklingenden Deformationsmoden im Innenrandgleichgewicht, werden auf die rechte Seite gebracht und so im Weiteren zunächst nur noch als Lastterme berücksichtigt. Dies entspricht wie im vorherigen Kapitel letztendlich einer Umformulierung des gesamten Randwertproblems zu zwei formal entkoppelten Randwertproblemen und stellt einen entscheidenden Schritt in der asymptotischen Formulierung dar. Werden die übrigen Wichtungsfaktoren $\hat{\mathbf{c}}_p$ und $\hat{\mathbf{c}}_n$ rekursiv weiter durch die Kinematikrekursionsformeln (6.32, 6.33) ersetzt, ergeben sich folgende rein in den Verschiebungen formulierte Rekursionsformeln, in denen nun auch gemischte Randbedingungen an einem diskretisierten Rand berücksichtigt werden können.

$$\begin{aligned} & \delta \hat{\mathbf{u}}_a^T \xi_a \left[\mathbf{\Phi}_p^q (\mathbf{\Phi}_p^u)^{-1} \right] \hat{\mathbf{u}}_a^{(i+1)} \\ &= \delta \hat{\mathbf{u}}_a^T \xi_a \left[\xi_a \mathbf{p}_a - \underbrace{\left(\mathbf{\Phi}_n^q - \mathbf{\Phi}_p^q (\mathbf{\Phi}_p^u)^{-1} \mathbf{\Phi}_n^u \right) \epsilon^{-\Lambda_n} \left(\hat{\mathbf{u}}_i^{(i)} - \mathbf{\Phi}_p^u \epsilon^{\Lambda_p} (\mathbf{\Phi}_p^u)^{-1} \hat{\mathbf{u}}_a^{(i-1)} + \dots \right)}_{\epsilon^{\Lambda_p} \hat{\mathbf{c}}_n^{(i)} / \sqrt{\xi_a}} \right] \end{aligned} \quad (6.63)$$

$$\begin{aligned} & \delta \hat{\mathbf{u}}_i^T \xi_i \left[-\mathbf{\Phi}_n^q (\mathbf{\Phi}_n^u)^{-1} \right] \hat{\mathbf{u}}_i^{(i+1)} \\ &= \delta \hat{\mathbf{u}}_i^T \xi_i \left[-\xi_i \mathbf{p}_i + \underbrace{\left(\mathbf{\Phi}_p^q - \mathbf{\Phi}_n^q (\mathbf{\Phi}_n^u)^{-1} \mathbf{\Phi}_p^u \right) \epsilon^{\Lambda_p} \left(\hat{\mathbf{u}}_a^{(i)} - \mathbf{\Phi}_n^u \epsilon^{-\Lambda_n} (\mathbf{\Phi}_n^u)^{-1} \hat{\mathbf{u}}_i^{(i-1)} + \dots \right)}_{\epsilon^{\Lambda_p} \hat{\mathbf{c}}_p^{(i)} / \sqrt{\xi_i}} \right] \end{aligned} \quad (6.64)$$

Die Transformationen der Skalierungsmatrizen²⁴ von $\epsilon^{\bar{\Lambda}_p}$ nach ϵ^{Λ_p} bzw. $\epsilon^{-\Lambda_n}$ ergibt sich durch Ausklammern der Wurzelausdrücke aus der Kinematikrekursion.

²⁴ mit $\bar{\Lambda}_p = \Lambda_p + 1/2 \mathbf{I} = -\Lambda_n - 1/2 \mathbf{I}$

In diese verschiebungsbasierten Rekursionsformeln für das Skalierungsgebiet Ω^{sc} können zur Kopplung der drei Gebiete Ω^i , Ω^a und Ω^{sc} auch die entsprechenden Steifigkeitsmatrizen des inneren und des äußeren Gebiets hineinassembliert werden. Dazu sind zunächst zwei Transformationen \mathbf{T}_a und \mathbf{T}_i zu definieren, die die Knotenverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_a$ und $\hat{\mathbf{u}}_i$ an den Rändern Γ_a^{sc} und Γ_i^{sc} in den Raum der Knotenverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}}$ des äußeren Gebiets Ω^a bzw. $\hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}}$ des inneren Gebiets Ω^i überführen.

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}} = \mathbf{T}_a \hat{\mathbf{u}}_a = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_a \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{\dim(\hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}})} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}} = \mathbf{T}_i \hat{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{\dim(\hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}})} \quad (6.65)$$

Umgekehrt können die Verschiebungen an den Rändern des Skalierungsgebiets mit Hilfe der transponierten Transformationsmatrizen aus den Verschiebungen des äußeren bzw. inneren Gebiets extrahiert werden.

$$\hat{\mathbf{u}}_a = \mathbf{T}_a^T \hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}} \quad \text{bzw.} \quad \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{T}_i^T \hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}} \quad (6.66)$$

Weiterhin sei die Verschiebungssteifigkeitsmatrix der positiven Deformationsmoden mit $\mathbf{K}_p = \Phi_p^q (\Phi_p^u)^{-1}$ und die der negativen Deformationsmoden mit $\mathbf{K}_n = -\Phi_n^q (\Phi_n^u)^{-1}$ bezeichnet. Dann folgt nach Kopplung des äußeren Gebiets Ω^a (Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_a) mit dem Skalierungsgebiet Ω^{sc} die Rekursionsformel (6.67) und nach Kopplung des inneren Gebiets Ω^i (Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_i) mit dem Skalierungsgebiet Ω^{sc} die Rekursionsformel (6.68).

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}}^T \left[\overbrace{\xi_a \mathbf{T}_a \mathbf{K}_p \mathbf{T}_a^T + \mathbf{K}_a}^{\mathbf{K}_{\text{ag}}} \right] \hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}}^{(i+1)} = \delta \hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}}^T \left[\mathbf{p}_{\text{ag}} - \xi_a \mathbf{T}_a (\Phi_n^q - \mathbf{K}_p \Phi_n^u) \underbrace{\epsilon^{-\Lambda_n} (\Phi_n^u)^{-1} \left(\mathbf{T}_i^T \hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}}^{(i)} - \Phi_p^u \epsilon^{\Lambda_p} (\Phi_p^u)^{-1} \mathbf{T}_a^T \hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}}^{(i-1)} + \dots \right)}_{\epsilon^{\Lambda_p} \hat{\mathbf{c}}_n^{(i)} / \sqrt{\xi_a}} \right] \quad (6.67)$$

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}}^T \left[\overbrace{\xi_i \mathbf{T}_i \mathbf{K}_n \mathbf{T}_i^T + \mathbf{K}_i}^{\xi_i \mathbf{K}_{\text{ig}}} \right] \hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}}^{(i+1)} = \delta \hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}}^T \left[\xi_i \mathbf{T}_i (\Phi_p^q + \mathbf{K}_n \Phi_p^u) \underbrace{\epsilon^{\Lambda_p} (\Phi_p^u)^{-1} \left(\mathbf{T}_a^T \hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}}^{(i)} - \Phi_n^u \epsilon^{-\Lambda_n} (\Phi_n^u)^{-1} \mathbf{T}_i^T \hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}}^{(i-1)} + \dots \right)}_{\epsilon^{\Lambda_p} \hat{\mathbf{c}}_p^{(i)} / \sqrt{\xi_i}} \right] \quad (6.68)$$

Hier ist \mathbf{p}_{ag} der Knotenlastvektor, der sich aus den Spannungsrandbedingungen am tatsächlichen Außenrand $\Gamma_{\text{a}\sigma}$ des Gesamtgebiets ergeben hat, während für die Teile des tatsächlichen Innenrands $\Gamma_{i\sigma}$, wo Spannungsrandbedingungen gegeben sind, Spannungsfreiheit angenommen wurde ($\mathbf{p}_{\text{ig}} = \mathbf{0}$).

Damit die Skalierbarkeit insbesondere des inneren Problems weiterhin gegeben bleibt, ist es unbedingt notwendig, dass auch alle Verschiebungsrandbedingungen des inneren Problems skalierbar bleiben. Gegeben wäre dies z. B. für Nullverschiebungsrandbedingungen entlang von Skalierungsstrahlen des Skalierungsgebiets oder eben für einen spannungsfreien Rand. Wichtig für die Betrachtung von Anrissen im inneren Gebiet ist, dass die Rissgeometrie ebenfalls skalierbar zum Skalierungszentrum des Skalierungsgebiets ist. Das ist in jedem Fall für solche Rissgeometrien erfüllt, deren Rissflanken vollständig auf Skalierungsstrahlen des Skalierungsgebiets Ω^{sc} liegen.

Die beiden resultierenden Gleichungen sind für hinreichend kleine $\epsilon = \xi_i / \xi_a$ nur schwach gekoppelt und somit in erster Näherung als zwei formal getrennte mechanische Probleme formulierbar:

- Das *äußere Randwertproblem* (oder kurz *äußeres Problem*) ist durch Gl. (6.67) gegeben und beschreibt das endliche Gebiet ohne Störung im Inneren. Auch die Randbedingungen am Außenrand entsprechen denen des ungestörten Problems. Der Einfluss der Störung ist vollständig in die Randbedingungen am virtuellen Rand Γ_a^{sc} zwischen Skalierungsgebiet Ω^{sc} und äußerem Gebiet Ω^a übergegangen. Hier geht zum einen ein Term ein $(\Phi_n^q \epsilon^{\bar{A}_p} \hat{c}_n^{(i)} \sqrt{\xi_a})$, der die Lasten abbildet, die an Γ_a^{sc} aufgrund der von innen nach außen abklingenden Deformationsmoden resultieren würden. Zum anderen geht ein Term ein $(\mathbf{K}_p \Phi_n^u \epsilon^{\bar{A}_p} \hat{c}_n^{(i)} \sqrt{\xi_a})$, der aus den Verschiebungen dieser Deformationsmoden an Γ_a^{sc} und den Kräften, die diese in einem endlichen Skalierungsgebiet ohne innere Berandung dort hervorrufen würden, resultiert.²⁵
- Das *innere Randwertproblem* (oder kurz *inneres Problem*) ist durch Gl. (6.68) gegeben und beschreibt ein formal unendlich ausgedehntes Gebiet mit einer Störung im Inneren. Dabei ist der Innenrand als spannungsfrei angenommen. Hier ist nun der Einfluss des Außenrandes vollständig in Randbedingungen am virtuellen Rand zwischen Skalierungsgebiet und nun innerem Gebiet übergegangen. Ähnlich wie beim äußeren Problem finden dabei Terme Berücksichtigung $(\Phi_p^q \epsilon^{\bar{A}_p} \hat{c}_p^{(i)} \sqrt{\xi_i})$, die zum einen aus inneren Kräften der von außen nach innen abklingenden Deformationsmoden am Rand Γ_i^{sc} und zum anderen $(\mathbf{K}_n \Phi_p^u \epsilon^{\bar{A}_p} \hat{c}_p^{(i)} \sqrt{\xi_i})$ aus den sich ergebenden Lasten der zugehörigen Verschiebungen in einem Skalierungsgebiet ohne Außenrand resultieren würden.

In diesem verschiebungsbasierten Iterationsschema für eine Problemstellung mit Gebietszerlegung können ebenfalls gemischte Randbedingungen für den Außenrand, d.h. abschnittsweise Spannungs- oder Verschiebungsrandbedingungen, berücksichtigt werden.

Zur besser nachvollziehbaren Darstellung der Implementierung soll beispielhaft das Iterationsverfahren der zusammengesetzten asymptotischen Reihen für reine Spannungsrandbedingungen am Außenrand Γ_a betrachtet werden: In der 0-ten Iteration liegt das ungestörte Gebiet vor ($\epsilon = 0$). Während das innere Problem

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}}^{(0)} = \mathbf{0} \quad \text{und damit} \quad \hat{\mathbf{c}}_n^{(0)} = (\Phi_n^u)^{-1} \mathbf{T}_i^T \hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}}^{(0)} \sqrt{\xi_i} = \mathbf{0} \quad (6.69)$$

ergibt (vgl. Gln. (6.33, 6.66)), liefert das äußere Problem $\hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}}^{(0)}$ aus

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}}^T \mathbf{K}_{\text{ag}} \hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}}^{(0)} = \delta \hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}}^T \mathbf{p}_{\text{ag}}. \quad (6.70)$$

Aus den Randverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}}^{(0)}$ können wieder aus Gleichungen (6.32, 6.66) die modalen Wichtungsfaktoren des positiven Spektrums im Skalierungsgebiet Ω^{sc} bestimmt werden:

$$\hat{\mathbf{c}}_p^{(0)} = (\Phi_p^u)^{-1} \mathbf{T}_a^T \hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}}^{(0)} \sqrt{\xi_a}. \quad (6.71)$$

Die erste Iteration des äußeren Problems führt auf die gleichen Ergebnisse wie die Berechnung für das ungestörte äußere Problem $\hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}}^{(1)} = \hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}}^{(0)}$. Die erste Iteration des inneren Problems ergibt für die Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}}^{(1)}$ bzw. die Verschiebungskorrektur $\Delta \hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}}^{(1)} = \hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}}^{(1)} - \hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}}^{(0)} = \hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}}^{(1)}$ folgende Gleichung:

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}}^T \xi_i \mathbf{K}_{\text{ig}} \Delta \hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}}^{(1)} = \delta \hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}}^T \xi_i \mathbf{T}_i (\Phi_p^q + \mathbf{K}_n \Phi_p^u) \epsilon^{\bar{A}_p} \hat{\mathbf{c}}_p^{(0)} / \sqrt{\xi_i}. \quad (6.72)$$

²⁵ Zur Begründung sei nochmals darauf hingewiesen, dass $\hat{\mathbf{u}}_{\text{ag}}$ und $\hat{\mathbf{u}}_{\text{ig}}$ jeweils die Gesamtverschiebungen des schwach gekoppelten Problems enthalten. In der ursprünglichen Form des schwachen Gleichgewichts im Skalierungsgebiet Ω^{sc} lag aber noch eine modale Trennung der inneren Kräfte vor. Der Anteil der Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_a$ am Rand Γ_a^{sc} , der aus den negativen Deformationsmoden resultiert, ist also im äußeren Problem wieder herauszurechnen.

Alternativ kann auch ein verallgemeinertes inneres Ersatzproblem bezogen auf die einzelnen positiven Deformationsmoden gelöst werden. Dazu werden an einem virtuellen Rand $\xi_i = 1$ zum einen immer nur die aus *einem* positiven Deformationsmodus $\Phi_{p,j}^u$ resultierenden Lasten $\Phi_{p,j}^q$ aufgebracht. Weiterhin sollen diese Lasten sowohl beliebig bezüglich der Wichtung $\hat{c}_{p,j}^{(0)}$ des gerade betrachteten positiven Deformationsmodus als auch unskaliert ($\epsilon^{\lambda p,j} = 1$) vorliegen:

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_{ig}^T \xi_i \left(\mathbf{K}_{ig} \hat{\mathbf{u}}_{ig}^* - \mathbf{T}_i \left(\Phi_p^q + \mathbf{K}_n \Phi_p^u \right) \right) \epsilon^{\bar{\Lambda} p} \hat{c}_p^{(0)} / \sqrt{\xi_i} = \mathbf{0}. \quad (6.73)$$

Die resultierende Matrix $\hat{\mathbf{u}}_{ig}^*$ enthält dann spaltenweise die resultierenden Verschiebungen des inneren Problems für jeweils nur einen aktiven positiven Deformationsmodus mit Wichtungsfaktor eins und gleichzeitig unskalierten zugehörigen Lasten. Daraus können dann die modalen Wichtungsfaktoren $\hat{c}_n^{(1)}$ der negativen Deformationsmoden bzw. ihre Korrektur $\Delta \hat{c}_n^{(1)} = \hat{c}_n^{(1)} - \hat{c}_n^{(0)} = \hat{c}_n^{(1)}$ im Skalierungsgebiet Ω^{sc} bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{c}_n^{(1)} &= (\Phi_n^u)^{-1} \left(\mathbf{T}_i^T \Delta \hat{\mathbf{u}}_{ig}^{(1)} \sqrt{\xi_i} - \Phi_p^u \epsilon^{\bar{\Lambda} p} \hat{c}_p^{(0)} \right) \\ &= (\Phi_n^u)^{-1} \left(\mathbf{T}_i^T \hat{\mathbf{u}}_{ig}^* - \Phi_p^u \right) \epsilon^{\bar{\Lambda} p} \hat{c}_p^{(0)} = (-\mathbf{k}_n^*) \epsilon^{\bar{\Lambda} p} \hat{c}_p^{(0)}. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Hier wird deutlich, dass, wie schon bei der modalen Formulierung für ein einfaches SBFEM-Gebiet, die Wichtungsfaktoren $\hat{c}_n^{(1)}$ der negativen Deformationsmoden (bzw. deren Korrektur $\Delta \hat{c}_n^{(1)}$) wieder auf das Produkt der skalierten Wichtungsfaktoren $\epsilon^{\bar{\Lambda} p} \hat{c}_p^{(0)}$ der positiven Deformationsmoden und einer Transfermatrix \mathbf{k}_n^* zurückgeführt werden können.²⁶

Es erscheint nun naheliegend, dass die weitere Betrachtung des Gleichgewichts am Außenrand zu einem ähnlichen Zusammenhang für eine Transfermatrix \mathbf{k}_p^* führen wird. Die Lösung von Gleichung (6.67) ergibt im nächsten Iterationsschritt für die Korrektur der Außenrandverschiebungen $\Delta \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(2)} = \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(2)} - \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(0)}$:

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_{ag}^T \mathbf{K}_{ag} \Delta \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(2)} = \delta \hat{\mathbf{u}}_{ag}^T \left(-\xi_a \mathbf{T}_a \left(\Phi_n^q - \mathbf{K}_p \Phi_n^u \right) \epsilon^{\bar{\Lambda} p} \Delta \hat{c}_n^{(1)} / \sqrt{\xi_a} \right). \quad (6.75)$$

Auch hier kann ein verallgemeinertes, nun äußeres Ersatzproblem bezogen auf die Deformationsmoden des negativen Spektrums formuliert werden, das für die Matrix $\hat{\mathbf{u}}_{ag}^*$ zu lösen ist:

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_{ag}^T \left(\mathbf{K}_{ag} \hat{\mathbf{u}}_{ag}^* + \xi_a \mathbf{T}_a \left(\Phi_n^q - \mathbf{K}_p \Phi_n^u \right) \right) \epsilon^{\bar{\Lambda} p} (-\mathbf{k}_n^*) \epsilon^{\bar{\Lambda} p} \hat{c}_p^{(0)} / \sqrt{\xi_a} = \mathbf{0}. \quad (6.76)$$

Da hier nur eine Verschiebungsdifferenz $\Delta \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(2)}$ zur ungestörten Verschiebungslösung $\hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(0)}$ berechnet wird, sind alle gestellten Verschiebungsrandbedingungen innerhalb dieses verallgemeinerten äußeren Problems Null-Verschiebungsrandbedingungen, sodass deren Einarbeitung sich hier besonders einfach darstellt. Die Korrektur $\Delta \hat{c}_p^{(2)} = \hat{c}_p^{(2)} - \hat{c}_p^{(0)}$ der Wichtungsfaktoren der positiven Deformationsmoden berechnet sich damit zu

$$\begin{aligned} \Delta \hat{c}_p^{(2)} &= (\Phi_p^u)^{-1} \left(\mathbf{T}_a^T \left(\hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(2)} - \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(0)} \right) \sqrt{\xi_a} - \Phi_n^u \epsilon^{\bar{\Lambda} p} \hat{c}_n^{(1)} \right) \\ &= -(\Phi_p^u)^{-1} \left(\mathbf{T}_a^T \hat{\mathbf{u}}_{ag}^* - \Phi_n^u \right) \epsilon^{\bar{\Lambda} p} \mathbf{k}_n^* \epsilon^{\bar{\Lambda} p} \hat{c}_p^{(0)} = \mathbf{k}_p^* \epsilon^{\bar{\Lambda} p} \mathbf{k}_n^* \epsilon^{\bar{\Lambda} p} \hat{c}_p^{(0)}, \end{aligned} \quad (6.77)$$

²⁶ Allerdings stellt sich \mathbf{k}_n^* hier etwas komplexer dar und ist in zwei anstatt nur einem Berechnungsschritt zu bestimmen. Es kann beispielsweise wie folgt in den weniger allgemeinen Fall der Lösung eines einfachen SBFEM-Gebiets mit spannungsfreiem Innenrand überführt werden: Mit den Transformationsmatrizen $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_a = \mathbf{I}$ und der assemblierten Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{ig} = \mathbf{K}_n = -\Phi_n^q (\Phi_n^u)^{-1}$ des inneren Problems wird $\hat{\mathbf{u}}_{ig}^* = \hat{\mathbf{u}}_i^* = \Phi_p^u - \Phi_n^q (\Phi_n^u)^{-1} \Phi_p^q$, sodass sich die Transfermatrix in diesem Spezialfall tatsächlich zu $\mathbf{k}_n^* = (\Phi_n^q)^{-1} \Phi_p^q$ vereinfacht (vgl. Gl. (6.42)).

wo schließlich die Transfermatrix \mathbf{k}_p^* definiert werden kann.²⁷ Damit gelten die Rekursionsformeln (6.43, 6.44) für die modalen Wichtungsfaktoren im skalierten Gebiet auch in der allgemeineren verschiebungsbasierten Formulierung, allerdings mit auch allgemeiner definierten Transfermatrizen

$$\mathbf{k}_n^* = (\Phi_n^u)^{-1} (\Phi_p^u - \mathbf{T}_i^T \hat{\mathbf{u}}_{ig}^*) \quad , \quad \mathbf{k}_p^* = (\Phi_p^u)^{-1} (\Phi_n^u - \mathbf{T}_a^T \hat{\mathbf{u}}_{ag}^*) \quad , \quad (6.78)$$

für deren Auswertung zunächst die Verschiebungsmatrizen $\hat{\mathbf{u}}_{ig}^*$, $\hat{\mathbf{u}}_{ag}^*$ aus den verallgemeinerten Ersatzproblemen (6.73, 6.76) zu bestimmen sind.

Das Gesamtpotential im Zwei-Rand-Problem mit spannungsfreiem Innenrand lautet

$$\begin{aligned} II &= II^i + II^a \\ &= \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(0)} + \Delta \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(2)} + \Delta \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(3)} + \dots]^T [\mathbf{K}_{ag} (\hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(0)} + \Delta \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(2)} + \Delta \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(3)} + \dots) - 2\mathbf{P}_{ag}^*] \\ &\quad + \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(0)} + \Delta \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(2)} + \Delta \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(3)} + \dots]^T [\sqrt{\xi_a} \mathbf{T}_a (\Phi_n^q - \mathbf{K}_p \Phi_n^u) \epsilon^{\hat{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_n] \quad . \end{aligned} \quad (6.79)$$

Ausmultiplizieren und Ausnutzen der Symmetrie der Bilinearform

$$\hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(0)T} \mathbf{K}_{ag} \Delta \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(i)} = \Delta \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(i)T} \mathbf{K}_{ag} \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(0)}$$

führen mit Gleichungen (6.71, 6.49) auf folgende Vereinfachung, wobei der simpleren Darstellung halber höhere Glieder der matrixbasierten Reihen vernachlässigt sind:

$$\begin{aligned} II &= \overbrace{\frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(0)T} \mathbf{K}_{ag} \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(0)} - \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(0)T} \mathbf{P}_{ag}^*}^{{}_0II_p} + \overbrace{\left[\Delta \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(2)} + \Delta \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(3)} + \dots \right]^T [\mathbf{K}_{ag} \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(0)} - \mathbf{P}_{ag}^*]}^{=0} \\ &\quad - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}_{ag}^{(0)T} \sqrt{\xi_a} \mathbf{T}_a (\Phi_n^q - \mathbf{K}_p \Phi_n^u) \epsilon^{\hat{\Lambda}_p} \mathbf{k}_n^* \epsilon^{\hat{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_p^{(0)} + \dots \quad , \end{aligned} \quad (6.80)$$

$$= {}_0II_p - \hat{\mathbf{c}}_p^{(0)T} \mathcal{W} \epsilon^{\hat{\Lambda}_p} \mathbf{k}_n^* \epsilon^{\hat{\Lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_p^{(0)} + \dots \quad . \quad (6.81)$$

Der zweite Summand in Gleichung (6.80) ist stets identisch null, da einerseits dort, wo Spannungsrandbedingungen vorgeschrieben sind, der rechte, Gleichgewicht fordernde Faktor zu null wird, während andererseits dort, wo Verschiebungsrandbedingungen vorgeschrieben sind, die Verschiebungskorrekturen identisch null werden und damit der linke Faktor insgesamt zu null wird. So gelangt man für die allgemeinere, verschiebungsbasierte Formulierung für Problemstellungen mit Gebietszerlegung zu einer Reihenentwicklung gleicher Form (6.51) wie diejenige der modenbasierten Formulierung. Das mag zunächst überraschend erscheinen, doch letztendlich erfolgt der gesamte, auf die Schädigung zurückzuführende Energietransport durch das Skalierungsgebiet Ω^{sc} und muss sich demzufolge auch in den sein Verhalten steuernden Variablen widerspiegeln.

²⁷ Diese lässt sich genauso wie \mathbf{k}_n^* auf den Spezialfall eines einfachen SBFEM-Gebiets zurückführen: Für den Fall reiner Spannungsrandbedingungen am Außenrand wird mit der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{ag} = \mathbf{K}_p = \Phi_p^q (\Phi_p^u)^{-1}$ zunächst die verallgemeinerte Verschiebungsmatrix zu $\hat{\mathbf{u}}_{ag}^* = \Phi_n^u - \Phi_p^u (\Phi_p^q)^{-1} \Phi_n^q$ und damit die Transfermatrix zu $\mathbf{k}_p^* = (\Phi_p^q)^{-1} \Phi_n^q$ berechnet (vgl. Gl. (6.42)). Im Falle reiner Verschiebungsrandbedingungen ergibt sich für die verallgemeinerte Verschiebungsmatrix hingegen einfach $\hat{\mathbf{u}}_{ag}^* = \mathbf{0}$ und somit die Transfermatrix zu $\mathbf{k}_p^* = (\Phi_p^u)^{-1} \Phi_n^u$ (vgl. Gl. (6.41)).

6.3 Extraktion von Energiefreisetzungsraten

Schließlich bleiben aus diesen Reihenentwicklungen versagensrelevante Größen, wie die inkrementelle und differentielle Energiefreisetzungsraten $\bar{\mathcal{G}}, \mathcal{G}$, zu extrahieren. Dazu ist die Potentialdifferenz $\Delta\Pi = \Pi - {}_0\Pi_p$ zwischen geschädigter und ungeschädigter Struktur unter gegebener Last pro neu hinzugewonnener Rissfläche ΔA auszuwerten (bzw. der Grenzwert für $\Delta A \rightarrow 0$, siehe auch Kap. 2.2). Dies ist ausgehend von den gefundenen Reihenentwicklungen sehr einfach zu bewerkstelligen. Denn unter den eingeführten Annahmen muss das innere Gebiet Ω^i , das den Riss enthält, gerade mit dem Kopplungs-/Störungsparameter ϵ skalieren:

$$\text{im 2D-Fall: } \Delta A \propto \epsilon \quad \longrightarrow \quad \Delta A = \Delta A|_{\epsilon=1} \epsilon = \Delta A^* \epsilon \quad \text{und} \quad (6.82)$$

$$\text{im 3D-Fall: } \Delta A \propto \epsilon^2 \quad \longrightarrow \quad \Delta A = \Delta A|_{\epsilon=1} \epsilon^2 = \Delta A^* \epsilon^2. \quad (6.83)$$

Damit sind auch die resultierenden Reihendarstellungen der inkrementellen und differentiellen Energiefreisetzungsraten analytisch im Störungsparameter ϵ darstellbar.

$$\bar{\mathcal{G}} = -\frac{\Delta\Pi(\epsilon)}{\Delta A(\epsilon)}, \quad \mathcal{G} = -\frac{\partial\Pi(\epsilon)}{\partial A(\epsilon)} = -\frac{\partial\Pi(\epsilon)}{\partial\epsilon} \frac{\partial\epsilon}{\partial A} \quad (6.84)$$

Im Falle unbelasteter Rissure und unter Berücksichtigung nur des führenden Terms ergibt sich die sehr kompakte matrixbasierte Darstellung für den 3D-Fall:²⁸

$$\bar{\mathcal{G}} = \hat{\mathbf{c}}_p^{(0)T} \mathcal{W} \epsilon^{\bar{\lambda}_p} \mathbf{k}_n^* \epsilon^{\bar{\lambda}_p} \hat{\mathbf{c}}_p^{(0)} / (\Delta A^* \epsilon^2) + \dots, \quad (6.85)$$

$$\mathcal{G} = \hat{\mathbf{c}}_p^{(0)T} \mathcal{W} \left(\bar{\lambda}_p \epsilon^{\bar{\lambda}_p - 1} \mathbf{k}_n^* \epsilon^{\bar{\lambda}_p} + \epsilon^{\bar{\lambda}_p} \mathbf{k}_n^* \bar{\lambda}_p \epsilon^{\bar{\lambda}_p - 1} \right) \hat{\mathbf{c}}_p^{(0)} / (2\Delta A^* \epsilon) + \dots. \quad (6.86)$$

Die entsprechende indexbasierte Darstellung lautet:

$$\bar{\mathcal{G}} = \sum_{k=1}^{n_{n1}^{\lambda}} \sum_{l=1}^{n_{p1}^{\lambda}} \left(\hat{c}_{p,k}^{(0)} \hat{c}_{p,l}^{(0)} \epsilon^{\bar{\lambda}_{p,k} + \bar{\lambda}_{p,l} - 2} k_{n,kl}^* \mathcal{W}_k \right) / \Delta A^* + \dots, \quad (6.87)$$

$$\mathcal{G} = \sum_{k=1}^{n_{n1}^{\lambda}} \sum_{l=1}^{n_{p1}^{\lambda}} \left(\hat{c}_{p,k}^{(0)} \hat{c}_{p,l}^{(0)} (\bar{\lambda}_{p,k} + \bar{\lambda}_{p,l}) \epsilon^{\bar{\lambda}_{p,k} + \bar{\lambda}_{p,l} - 2} k_{n,kl}^* \mathcal{W}_k \right) / (2\Delta A^*) + \dots. \quad (6.88)$$

Aus diesen Darstellungen ist nun auch für den 3D-Fall leicht ersichtlich, dass starke Spannungssingularitäten ($\lambda_p < 1/2$, im 3D-Fall $\bar{\lambda}_p = \lambda_p + 1/2$) zu unbeschränkten und schwache Spannungssingularitäten ($1/2 < \lambda_p < 1$) zu nullwertigen differentiellen Energiefreisetzungsraten \mathcal{G} führen (vgl. Kap. 2.2.3, Gln. (2.110 – 2.113)).

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass diese asymptotischen Reihen i. A. vor allem für Anrisse, die klein gegenüber den Außenrandabmessungen sind ($\epsilon \ll 1$), gute Näherungen darstellen und dabei unter Berücksichtigung nur weniger Entwicklungsterme sehr effizient berechnet und ausgewertet werden können. Der Gültigkeitsbereich der asymptotischen Reihen kann durch Berücksichtigung weiterer Reihenglieder im skalaren Kopplungsparameter ϵ (mit vollständig bestimmten Koeffizienten) merklich ausgeweitet werden²⁹, wodurch aber der Auswertungsaufwand ansteigt. Ein konkretes Rechenbeispiel wird im Folgekapitel zu sehen sein.

²⁸ Anmerkung: Da die Rissgröße ΔA proportional mit dem Kopplungsparameter ϵ skaliert (Beziehungen (6.82, 6.83)), können die Reihendarstellungen äquivalent auch in ΔA anstatt ϵ angegeben werden.

²⁹ bis nahe an $\epsilon = 1$

Kapitel 7

Bewertung von 3D-Spannungssingularitäten mittels eines gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums

Nachdem in Kapitel 5 ein verbesserter Zugang zur Lösung von Randwertproblemen der linearen Elastizitätstheorie mit 3D-Spannungssingularitäten bereitgestellt und in Kapitel 6 ein effizienter Berechnungsweg für Näherungslösungen benachbarter, durch einen skalierbaren Defekt gestörter Konfigurationen aufgezeigt wurde, sollen diese Ansätze nun zu einem Bewertungskonzept im Rahmen der Bruchmechanik finiter Risse zusammengeführt werden.¹ Dabei kommt allein die angereicherte Formulierung der SBFEM zum Einsatz. Primäres Ziel dieses Kapitels ist es, exemplarisch eine Anwendung zu demonstrieren.² Die Übertragung des Konzeptes auf eine breite Palette von Anwendungsbeispielen bleibt anderen Arbeiten vorbehalten.

7.1 Doppelrissituation (ZFR-ZFR) in einem Faserverbundlaminat

Es wird die Struktursituation mit Defektinteraktion ZFR-ZFR aus Kapitel 4, die die Interaktion zweier Zwischenfaserrisse in einem Faserverbundlaminat beinhaltet, wieder aufgegriffen. Dabei wird sich auf die Betrachtung eines $[0^\circ/90^\circ]$ -T800/Epoxid-Laminats³ mit senkrechten ZFR beschränkt ($\vartheta = \beta_1 = \beta_2 = 90^\circ$, Abb. 4.8a, 4.10 und 5.6). Zunächst wird eine Spannungsanalyse für die kritischen Deformationsmoden mit 3D-Spannungssingularitäten durchgeführt und die sich dabei einstellenden Materialanstregungen berechnet. Im Anschluss wird ein gekoppeltes Spannungs- und Energiekriterium im Rahmen der Bruchmechanik finiter Risse auf zwei einfache biaxiale Lastfälle angewandt. Dazu wird zunächst wieder je eine Spannungsanalyse durchgeführt und anhand geeigneter Versagenskriterien überbeanspruchte Gebiete identifiziert (Spannungskriterium). Anschließend werden inkrementelle Energiefreisetzungsraten für eine Reihe benachbarter Konfigurationen, die einen Sekundärriss enthalten, bereitgestellt, um energetisch zulässige Risse identifizieren zu können (Energiekriterium). Schließlich erfolgt die Bestimmung kritischer Versagensparameter anhand der Forderung, dass sowohl Spannungs- als auch Energiekriterium gleichzeitig erfüllt seien.

Wie in Kapitel 5.2 wird ein würfelförmiges Gebiet mit Kantenlänge 2 mm um den Defektinteraktionspunkt betrachtet und es kommt eine angereicherte Formulierung der SBFEM (enrSBFEM) mit einer uniformen Oberflächendiskretisierung zum Einsatz (vgl. Abb. 5.6).

¹ Im Zusammenhang mit der SBFEM wurde die Bruchmechanik finiter Risse das erste und, nach Wissen des Autors, bisher einzige Mal von Sun et al. (2015) angewendet. Deren Arbeit beschränkte sich auf zweidimensionale Struktursituationen und verwendete das Risschließintegral (2.105) zur Bestimmung inkrementeller Energiefreisetzungsraten \bar{G} .

² Die hier dargestellten Ergebnisse wurden größtenteils im Rahmen des DFG-Folge-Projektes BE 1090/35-2 erarbeitet sowie teilweise in Hell et al. (2017) publiziert.

³ Die entsprechenden Materialdaten sind in Tabelle A.1 zu finden.

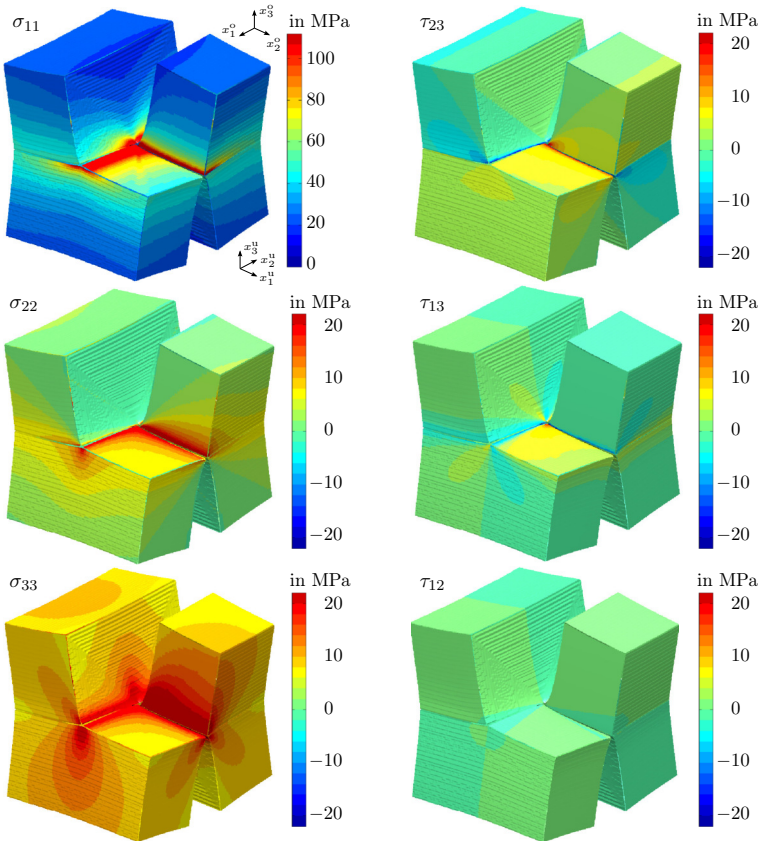


Abbildung 7.1: Schnittbild der geglätteten Spannungsverteilung (SPR) einer SBFE-Analyse mit Anreicherung für reinen Deformationsmodus col bei $n_e = 16$ Elementen mit bilinearem Ansatz entlang jeder Würfelkante. Spannungen sind im Material-Koordinatensystem mit 1-Richtung in Faserrichtung angegeben (x_1^o, x_2^o, x_3^o -KOS in oberer und x_1^u, x_2^u, x_3^u -KOS in unterer Laminatschicht).

Spannungen werden stets mit der in Kapitel 5.3 dargestellten Variante der Superconvergent Patch Recovery (SPR) geglättet.

7.1.1 Spannungen und Materialanstrengung der Deformationsmoden mit 3D-Spannungssingularitäten

Wie in Kapitel 4.2.2 dargestellt, liefert die betrachtete Konfiguration sechs Deformationsmoden mit 3D-Spannungssingularitäten am Interaktionspunkt. Die zugehörigen Singularitätsexponenten der 3D- sowie auch 2D-Spannungssingularitäten sind in Abbildung 4.10 angegeben. Hierzu sei nochmals erwähnt, dass 2D-Deformationsmodus ZFR-III schon zu supersingulären

Spannungen führt, während ZFR-I nur eine schwache Spannungssingularität zuzuordnen ist. Unter den 3D-Deformationsmoden liefert nur ct1 eine starke 3D-Spannungssingularität. Die übrigen fünf Deformationsmoden führen auf schwache 3D-Spannungssingularitäten, die mitunter auch noch schwächer sind als diejenige des 2D-Deformationsmodus ZFR-I.

Exemplarisch sind in Abbildung 7.1 die geglätteten Spannungen des 3D-Deformationsmodus col im Material-Koordinatensystem gezeigt. Für die Berechnung wurde eine uniforme Oberflächenvernetzung mit $n_e = 16$ Elementen entlang jeder Würfelkante verwendet. Bezüglich der Darstellung ist zu beachten, dass die Deformationsmoden beliebig skalierbar sind und sich die Aussagekraft der Spannungsverteilung daher rein auf die relative Größe der Spannungskomponenten im Vergleich zueinander beschränkt. Erwartungsgemäß sind die Spannungen in Faserrichtung erheblich größer, weshalb die Farbskala für die Spannungen σ_{11} , zwecks aussagekräftigerer Darstellung, angepasst ist. Ansonsten dominieren die Spannungen σ_{33} , während Schubspannungen eine untergeordnete Rolle spielen. Schließlich ist der erstaunlich glatte Verlauf der Spannungen auf der Oberfläche um die 2D-Singularitäten herum zu erkennen, der im Wesentlichen auf die Anreicherung zurückzuführen ist.

Entscheidender als die Spannungen sind die daraus abzuleitenden lokalen Materialanstregungen \mathcal{E} (vgl. Kap. 2.2.1). In Abbildung 7.2 sind daher nur diese auch für alle sechs 3D-Deformationsmoden mit 3D-Singularitäten dargestellt. Zur Ermittlung der lokalen Materialanstregungen ist ein Versagenskriterium zu wählen, das dem transversal-isotropen Materialverhalten der Faserkunststoffverbunde Rechnung trägt. Das Versagensmoduskonzept nach Cuntze hat sich in der Versagensbewertung von Laminaten bewährt (vgl. World-Wide-Failure-Exercise (Hinton et al., 2004, Kaddour u. Hinton, 2013)) und tritt gleichzeitig durch seine vergleichsweise simple Umsetzung hervor, weshalb ihm an dieser Stelle der Vorzug vor anderen Versagenskriterien (z. B. dem Wirkebenenkriterium von Puck (1996), Kap. 2.2.1) gegeben wird.

Außer den Materialanstregungen innerhalb der einzelnen Laminatlagen kann auch die Delaminationsneigung, also eine Art ‘‘Grenzflächenanstregung’’, sehr von Interesse sein. Zwar beansprucht das Versagensmoduskonzept nach Cuntze (genauso wie das Wirkebenenkriterium nach Puck) seine Anwendbarkeit auch in der Grenzfläche zwischen zwei Laminatlagen, allerdings sind die so berechneten Grenzflächenanstregungen abhängig davon, in welcher Lage sie berechnet werden: Denn in der Grenzfläche müssen nur die interlaminaren Spannungen stetig sein. Puck gibt an, dass dann einfach die Überschneidung der verschiedenen vorhergesagten Versagensflächen aus den beiden anliegenden Laminatschichten als resultierende Versagensfläche angesehen werden könne.

Für die hier durchgeführten Berechnungen sei aber ein direkterer Zugang gewählt: Es wird ein von Pucks Wirkebenenkriterium abgeleitetes, einfaches, quadratisches Delaminationskriterium verwendet, das nur von den interlaminaren Spannungen abhängt und einen Abminderungsfaktor f_{red} für die Festigkeit in der Grenzfläche vorsieht:

$$\mathcal{E}_{\text{del}} = \frac{1}{f_{\text{red}}} \left(\sqrt{\frac{\tau_{23}^2 + \tau_{13}^2}{R_{\perp\parallel}^2} + \left(\frac{1}{R_{\perp}^t} - \frac{p_{\perp\parallel}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2} \sigma_{33}^2 + \frac{p_{\perp\parallel} \sigma_{33}}{R_{\perp\parallel}} \right), \quad \sigma_{33} \geq 0, \quad (7.1)$$

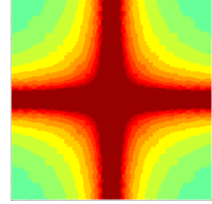
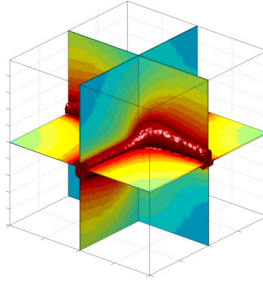
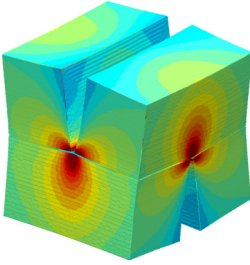
$$\mathcal{E}_{\text{del}} = \frac{1}{f_{\text{red}}} \left(\sqrt{\frac{\tau_{23}^2 + \tau_{13}^2}{R_{\perp\parallel}^2} + \left(\frac{p_{\perp\parallel}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2} \sigma_{33}^2 + \frac{p_{\perp\parallel} \sigma_{33}}{R_{\perp\parallel}} \right), \quad \sigma_{33} < 0. \quad (7.2)$$

Laut Puck (1996) liegen die Grenzflächen-Festigkeiten etwas unter den Festigkeitswerten für Zwischenfaserbruch der Einzelschichten. Da die Festigkeiten der Grenzflächen i. A. schwierig

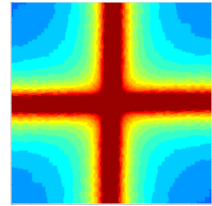
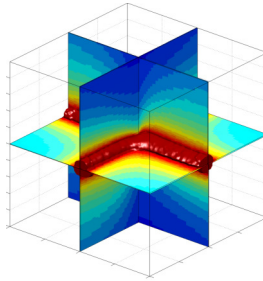
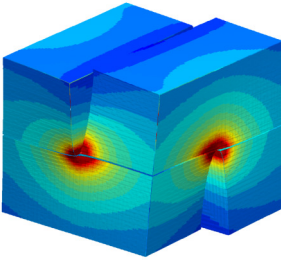
Materialanstrengung nach Cuntze ε_{res}
 (FMC, Gl.n. (2.72, 2.73))

 Grenzflächen-
 Anstrengung ε_{del}
 (Gl.n. (7.1, 7.2))

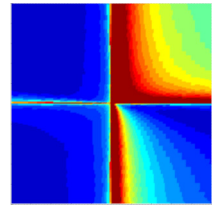
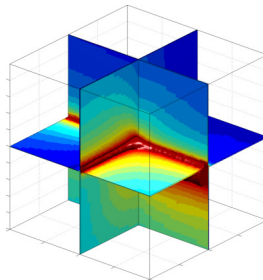
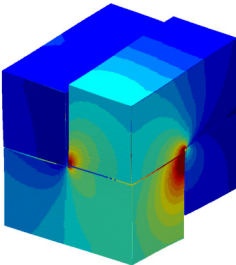
co1



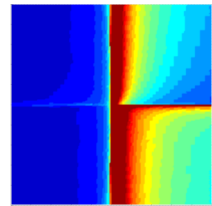
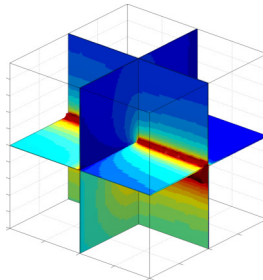
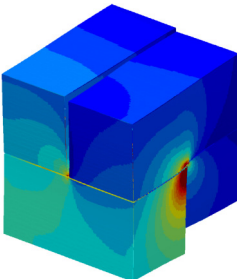
ct1



cs1



cs2



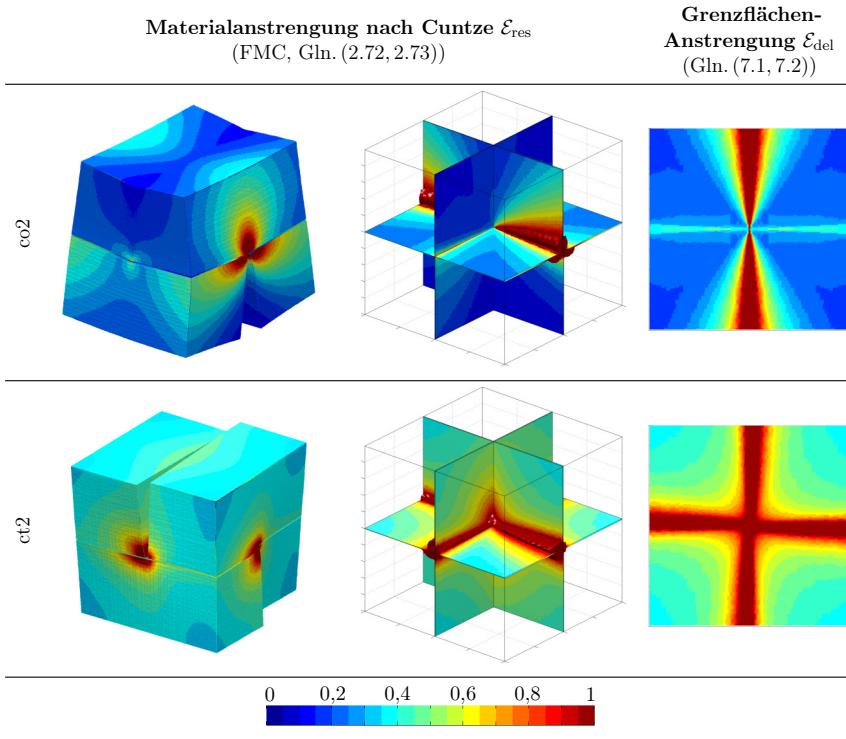


Abbildung 7.2: Lokale Materialanstrengung aus geglätteter Spannungsverteilung (SPR) für die sechs Deformationsmoden mit $0 < \lambda < 1$. Ergebnisse aus einer SBFE-Analyse mit Anreicherung bei $n_e = 16$ Elementen entlang jeder Würfelkante. Linke Spalte: Vollwürfel; mittlere Spalte: Schnitte in den Mittelebenen; rechte Spalte: Grenzflächenebene. (Die Skalierung der zugrundeliegenden Spannungen und Deformationen ist für jeden Deformationsmodus auf Basis einer möglichst anschaulichen Darstellung der Anstrengungsverteilung gewählt.)

zu beschaffen und oft nicht gegeben sind, schlägt Puck einen simplen Abschlag von etwa 10 % bis 20 % vor. Dieser Empfehlung wird hier gefolgt und der Abminderungsfaktor $f_{red} = 0,8$ gewählt.

Abbildung 7.2 zeigt die Verteilung der lokalen Materialanstrengung nach dem Versagensmoduskonzept von Cuntze (Gln. (2.72, 2.73)) sowie der lokalen Grenzflächenanstrengung nach den Gleichungen (7.1, 7.2).⁴ Die jeweils erste Darstellung der Materialanstrengungsverteilung nach Cuntze illustriert anhand des verformten Modells vor allem die lokale Anstrengung auf den Oberflächen, während die jeweils zweite Darstellung den Fokus auf die Verteilung im Inneren legt. In letzterer sind überbeanspruchte Bereiche besonders durch rote Isoflächen hervorgehoben. Dabei ist auch hier wieder zu beachten, dass die Deformationsmoden zunächst beliebig skalierbar sind und die gegebenen Abbildungen daher vor allem eine Aussage über die

⁴ Die eingehenden Materialdaten sind in Tabelle A.1 gegeben.

relative Größe der Anstrengungswerte liefern. Die letztendlich gewählte Skalierung orientiert sich allein an einer günstigen Darstellung der Ergebnisse.

Die lokale Materialanstrengung nach Cuntze ist bei einer reinen Anregung des Deformationsmodus $co1$ vollständig vom Versagensteilkriterium für Matrixzugversagen IFF1 (Gl. 2.72) dominiert.⁵ Entsprechend ist ihre Darstellung derjenigen der Spannungsverteilung von σ_{33} in Abbildung 7.1 sehr ähnlich. Dennoch wird eine Unstetigkeit an der Grenzfläche zwischen den Laminatlagen deutlich sichtbar. In jedem Fall suggeriert die Bedeutung der Spannungs Komponente σ_{33} eine starke Delaminationsneigung, was auch der lokalen Grenzflächenanstrengung zu entnehmen ist.

Weiterhin sind die 2D-Spannungssingularitäten gut dort zu erkennen, wo die ZFR jeweils auf die Oberfläche des betrachteten Gebiets treffen. Hier ist jeweils ein reiner 2D-Deformationsmodus ZFR-I angesprochen und damit eine schwächere als die vorliegende 3D-Singularität (vgl. Abb. 4.10). Die daher zu erwartende Dominanz der 3D-Singularität nahe des Interaktionspunktes wird bestätigt, wenn auch weniger deutlich als vermutet. Umgekehrt ist für die Deformationsmoden $co2$ und $ct2$ die Dominanz der hier jeweils stärkeren 2D-Spannungssingularität erkennbar. Die Verteilungen der lokalen Anstrengung bei den Deformationsmoden $cs1$ und $cs2$ legen ebenfalls keine Dominanz der 3D-Singularität nahe, was in Anbetracht ihrer Singularitätsexponenten, die fast identisch mit denen des hauptsächlich angesprochenen 2D-Deformationsmodus ZFR-II sind (vgl. Abb. 4.10), zu erwarten war. Eher unerwartet erscheint hingegen die nur schwach erscheinende Dominanz der 3D-Spannungssingularität bei Deformationsmodus $ct1$.

Die betrachteten lokalen Anstrengungen implizieren also häufig keine oder zumindest keine klare Dominanz der 3D-Singularität – insbesondere dann, wenn die angesprochene 2D-Spannungssingularität stärker als die angesprochene 3D-Singularität ist. In diesen Fällen wäre also zwingend auch eine gesonderte Analyse der einzelnen ZFR mit ihren singulären 2D-Feldern notwendig. Dies wurde bisher im Rahmen der Bruchmechanik finiter Risse nicht in der Literatur behandelt, und soll hier, da in dieser Arbeit der Fokus auf der Analyse von 3D-Spannungssingularitäten liegt, ebenfalls für mögliche Folgearbeiten aufgespart sein. Einen Deformationsmodus mit vergleichsweise deutlicher Dominanz der 3D-Spannungssingularität stellt der symmetrische Deformationsmodus $co1$ dar. Er wird, wie in Kapitel 4.2.3 gesehen (z. B. Tab. 4.3), besonders stark und dazu weitgehend allein durch biaxiale Lasten in der Laminebene angeregt. Daher sollen solche Struktur- und Lastsituationen im Folgenden Gegenstand der Betrachtungen sein.

7.1.2 Versagensbewertung nach gekoppeltem Spannungs- und Energiekriterium für Randwertprobleme biaxialer Zugbelastung

Es werden zwei simple Randwertprobleme mit Randbedingungen am diskretisierten Rand gelöst, die den Deformationsmodus $co1$ ansprechen (Abb. 7.3): Am betrachteten Würfelgebiet mit Kantenlänge 2 mm werden

- im biaxialen Lastfall *SRB* Spannungsrandbedingungen auf der diskretisierten Würfeloberfläche in Form einer Oberflächen-Normalspannung von $t^* = 1$ MPa und
- im biaxialen Lastfall *URB* Verschiebungsrandbedingungen auf der diskretisierten Würfeloberfläche in Form einer Einheitsnormalverschiebung $u^* = 0,0001$ mm

⁵ Folglich spielt die Wahl der Kurvenparameter $b_{\perp\parallel}$ und b_{\perp} hier keine Rolle.

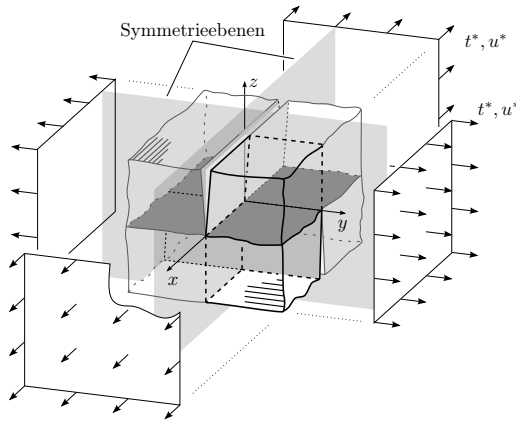


Abbildung 7.3: Skizze des biaxialen Randwertproblems mit Symmetrieebenen.

aufgebracht. Dabei erfolgt eine Vernachlässigung von Eigenspannungen, die aufgrund chemischen Schrumpfens oder einer von der Raumtemperatur verschiedenen Aushärtetemperatur entstanden sein könnten. Dem liegt die Annahme zugrunde, dass die Standzeit hinreichend lang gewesen sei, um die Eigenspannungen abzubauen.⁶ Grundsätzlich können Eigenspannungen aber, wie in Kapitel 4.1.4 und von Hell u. Becker (2015c) dargestellt, berücksichtigt werden. Die beiden Lastfälle SRB und URB bilden in gewisser Näherung die biaxiale Zugbelastung in einem viel größeren, flächigen Laminat ab. Abhängig davon, welcher Laminatlagenaufbau betrachtet wird, ist dabei Lastfall SRB oder Lastfall URB von höherer Relevanz.⁷

Aufgrund der Doppelsymmetrie der Randwertprobleme war es ausreichend, jeweils nur ein Viertel des Laminatwürfels zu modellieren (Abb. 7.4 a). Zur Gewährleistung einer Lagerung, die alle Starrkörperbewegungen unterbindet⁸, ist neben der Implementierung der Symmetrierandbedingungen jeweils am Knoten bei $x = y = 1 \text{ mm}$ die Verschiebung u_z in vertikaler Richtung gesperrt. Es werden vier weitgehend uniforme Oberflächennetze mit linearen Ansatzfunktionen und $n_e = 12, 18, 24, 30$ Elementen über der Höhe des Viertelmodells berücksichtigt. Die Gesamtformänderungsenergie konvergiert Dank der Anreicherung stets etwa quadratisch und gleichmäßig.

Material- und Grenzflächenanstrengung

Es ist zunächst die Struktursituation vor einem Sekundärversagen zu betrachten (Abb. 7.4 a). Die Auswertung der Spannungen führt auf die in Abbildung 7.5 dargestellten lokalen Material- und Grenzflächenanstrengungen $\mathcal{E}_{\text{res}}, \mathcal{E}_{\text{del}}$. Dabei sind die Anstrengungen für mit einem

⁶ vgl. Schürmann (2007)

⁷ Für ein zweilagiges $[0^\circ/90^\circ]$ -Laminat mit Biege-Dehn-Kopplung und deutlichen Biegedeformationen ($\lambda = 2$) wäre Lastfall SRB, für ein symmetrisches $[0^\circ/90^\circ]_s$ -Laminat (kaum Biegedeformationen) wohl eher Lastfall URB relevanter.

⁸ Nur dann ist die berechnete Randsteifigkeitsmatrix des Randwertproblems positiv definit und die Lösung eindeutig.

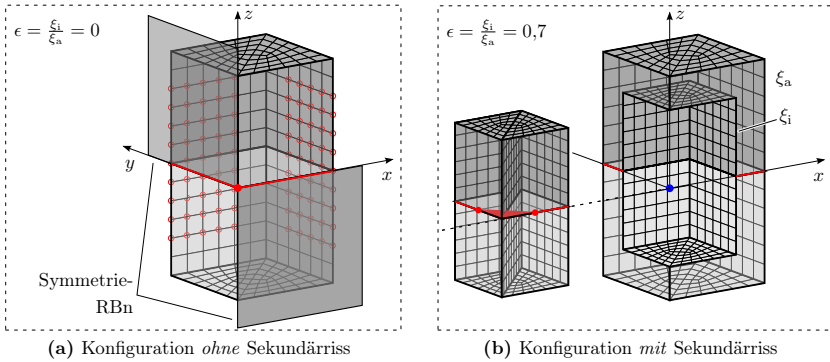


Abbildung 7.4: Viertelmodell mit SBFE-Diskretisierung ($n_e = 12$). Rote Kreise markieren angeereicherte Knoten. Punkte mit 3D-Spannungssingularitäten sind durch rote runde Marker gekennzeichnet und stellen gleichzeitig ein Skalierungszentrum dar. Rote Linien markieren Liniensingularitäten mit zweidimensionalem Abklingverhalten.

Lastfaktor P multiplizierte Lasten angegeben⁹. Ähnlich wie in Abbildung 7.2 sind die Materialanstressungen nach Cuntze \mathcal{E}_{res} am deformierten Viertelmodell sowie am undeformierten, offenen Viertelmodell gezeigt. Dabei ist die Materialanstressung wieder vom Versagensteilkriterium für Matrixzugversagen IFF1 (Gl. 2.72) dominiert.¹⁰ Für Lastfall SRB wird die aufgrund der ZFR exzentrische Lasteinwirkung besonders bemerkbar und äußert sich durch deutliche Biegedeformationen.¹¹ Dies zeigt sich andeutungsweise auch in der zugehörigen Grenzflächenanstressung. Die Biegedeformationen (insbesondere durch Deformationsmoden mit $\lambda = 2$ abgebildet) fehlen bei Lastfall URB weitgehend, was ebenfalls zu einer schwächeren Ansprache von Deformationsmodus `co1` führt. Stattdessen dominieren hier Deformationsmoden mit homogenen Dehnungen ($\lambda = 1$).

Dieser Sachverhalt ist auch Abbildung 7.6 zu entnehmen, in der die Grenzflächen-Anstressungen \mathcal{E}_{del} für die Berücksichtigung unterschiedlicher Anzahlen von Deformationsmoden über der Grenzflächendiagonalen dargestellt sind. Die Berücksichtigung allein der ersten neun Deformationsmoden bis einschließlich der Biegemoden mit $\lambda_p = 2$ (anstatt aller 1911 Deformationsmoden des positiven Spektrums der Diskretisierung $n_e = 18$) ergibt in beiden betrachteten Lastfällen bereits über einen sehr großen Bereich der Grenzflächendiagonalen kaum Abweichungen von denjenigen Anstressungen \mathcal{E}_{del} , für die alle Deformationsmoden herangezogen wurden. Dies gilt umso mehr, je näher an der 3D-Singularität ausgewertet wird. Die Berücksichtigung Biegung abbildender Deformationsmoden ($\lambda_p = 2$) ist, wie bereits erwähnt, besonders im Lastfall SRB wichtig. Im Lastfall URB reicht hingegen schon die Berücksichtigung der Deformationsmoden bis zu jenen mit homogenen Verzerrungen ($\lambda_p = 1$). In jedem Fall wird klar, dass die ausschließliche Betrachtung der Deformationsmoden mit einer 3D-

⁹ Das heißt, $t^* = 10$ MPa bei SRB und $u^* = 0,004$ mm bei URB. Alternativ ist es auch möglich, die Anstressungen der ursprünglichen Lastfälle ($t^* = 1$ MPa bei SRB und $u^* = 0,0001$ mm bei URB) mit dem Lastfaktor P zu multiplizieren, da die Anstressungen linear in den Spannungen sind.

¹⁰ Folglich spielen die Kurvenparameter $b_{\perp||}$ und b_{\perp} hier weiterhin keine wesentliche Rolle.

¹¹ vgl. auch Kap. 4.2.3, biaxialer Lastfall im asymmetrischen $[90^\circ/0^\circ]$ -Laminat, Tab. 4.3

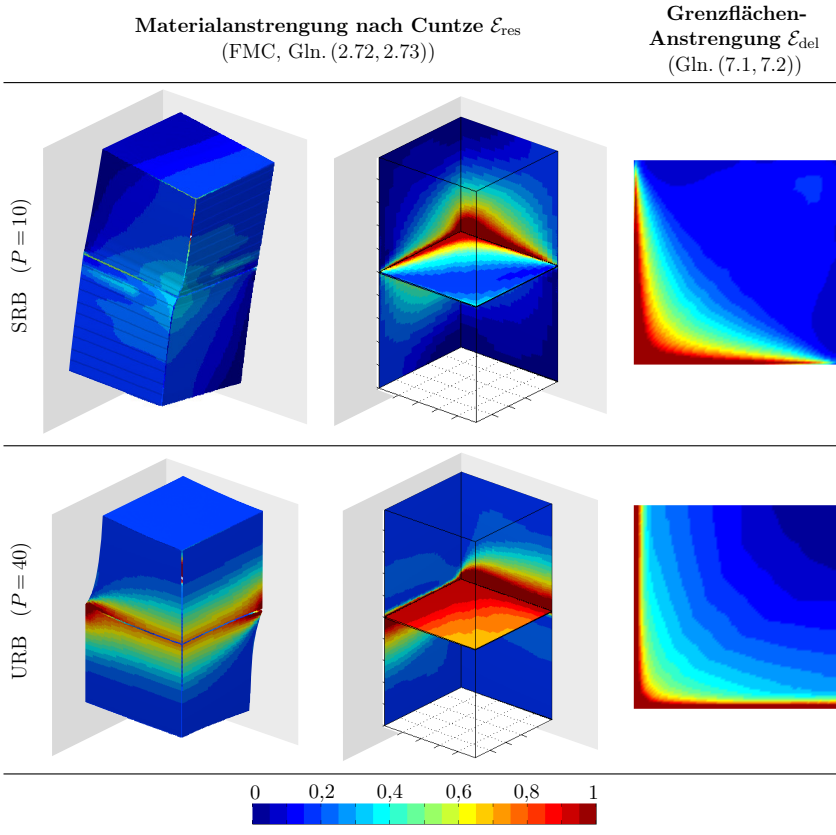


Abbildung 7.5: Lokale Materialanstrengung aus geglätteter Spannungsverteilung (SPR) einer SBFE-Analyse mit Anreicherung bei $n_e = 18$ Elementen über der Höhe des Viertelmodells. Für die Darstellungen sind die in die Anstrengung eingehenden Spannungen aus der RWP-Lösung mit einem Lastfaktor P multipliziert.

Spannungssingularität schon bei vergleichsweise kurzen Risslängen zu beträchtlichen Fehlern führen kann.

Es sei angemerkt, dass der Biegeanteil in Lastfall SRB auf ein Ansprechen der Eckensingularität an der Bimaterialecke bei $x = y = 1 \text{ mm}$ führt. Diese Bimaterialecke liegt zwar auf der diskretisierten Oberfläche des SBFE-Modells und wird auch nicht durch eine Anreicherung abgedeckt. Allerdings ist diese Singularität im Vergleich sehr schwach und führt daher nur zu einer kleinen Einschränkung in der Konvergenz des zugehörigen RWP (Verschiebungen, Formänderungsenergie).¹² In Lastfall URB spielt die Eckensingularität keine Rolle, da hier

¹² Generell werden dadurch nur die Konvergenzeigenschaften derjenigen Deformationsmoden, bei denen die Eckensingularität auch angesprochen wird, und in der Folge auch nur derjenigen RWP eingeschränkt, bei denen wiederum diese Deformationsmoden einen Anteil haben.

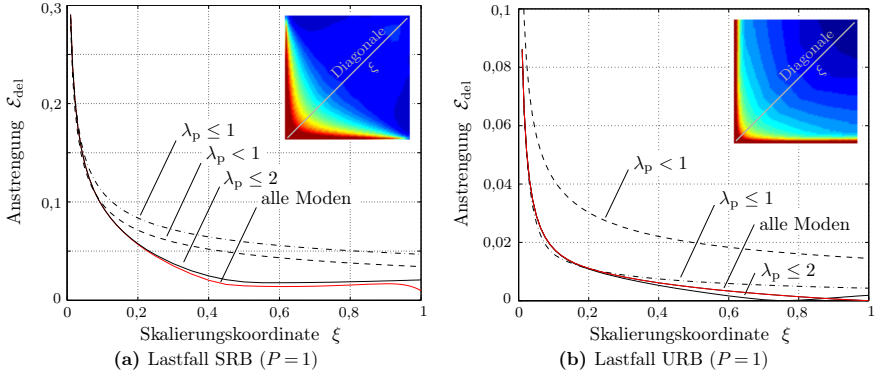


Abbildung 7.6: Beitrag der Deformationsmoden zur Spannungslösung/Grenzflächen-Anstrengung über Grenzflächendiagonale aus SBFE-Analyse mit Anreicherung und $n_e = 18$ Elementen über der Höhe des Viertelmodells. (Anmerkung: Dieses Modell liefert 1911 Deformationsmoden, wovon nur drei einen Abklingexponenten $\lambda_p < 1$, vier $\lambda_p \leq 1$ und neun $\lambda_p \leq 2$ besitzen.)

durch die Verschiebungsrandbedingungen lokal ein homogener Verzerrungszustand an der Bimaterialecke herbeigeführt wird.

Ein Vergleich der Grenzflächenanstrengung \mathcal{E}_{del} für die vier betrachteten Diskretisierungen ergibt speziell nahe der 3D-Spannungssingularität am Rissinteraktionspunkt (bei $\xi = 0$) nur geringe Abweichungen voneinander. Beispielsweise betragen diese auf der Grenzflächendiagonalen für Lastfall URB bis $\xi \approx 0,8$

$$\left| \frac{\mathcal{E}_{\text{del}}(n_e = 12)}{\mathcal{E}_{\text{del}}(n_e = 30)} - 1 \right| \leq 6,2\% \quad \text{und} \quad \left| \frac{\mathcal{E}_{\text{del}}(n_e = 18)}{\mathcal{E}_{\text{del}}(n_e = 30)} - 1 \right| \leq 1,7\% .$$

Für Lastfall SRB betragen die Abweichungen bis $\xi \approx 0,35$

$$\left| \frac{\mathcal{E}_{\text{del}}(n_e = 12)}{\mathcal{E}_{\text{del}}(n_e = 30)} - 1 \right| \approx 3\% \quad \text{und} \quad \left| \frac{\mathcal{E}_{\text{del}}(n_e = 18)}{\mathcal{E}_{\text{del}}(n_e = 30)} - 1 \right| \approx 1\% .$$

Danach steigen sie aufgrund von durch die Eckensingularität bei $\xi = 1$ induzierten Ungenauigkeiten merklich an. Dieser Einfluss der Eckensingularität tritt aber nur so deutlich zu Tage, weil die entsprechende Bimaterialecke gerade Bestandteil des Skalierungsstrahls ist, der die betrachtete Grenzflächendiagonale bildet.

Schließlich ist festzuhalten, dass die Grenzflächenanstrengung \mathcal{E}_{del} eine weiterhin geltende Dominanz der 3D-Effekte am Rissinteraktionspunkt nahelegt und dabei symmetrisch bezüglich der Grenzflächendiagonalen ist.¹³ Dabei bilden die Isolinien gleicher Grenzflächenanstrengung in beiden Lastfällen konkave Formen (bezüglich höher beanspruchter Teilgebiete) aus.

¹³ Die im Lastfall URB nicht unerheblichen Unterschiede zwischen der Grenzflächenanstrengung \mathcal{E}_{del} und der Materialanstrengung \mathcal{E}_{res} nahe der Grenzfläche kommen dadurch zustande, dass letztere auch die Spannungs Komponente σ_{22} im jeweiligen Materialkoordinatensystem mit berücksichtigt und diese Spannungs Komponente hier einen wesentlichen Beitrag leistet.

Potentielle Sekundärrisse und Energiefreisetzungsraten

Nach dem gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium (Kap. 2.2.4), kommen für eine mögliche Sekundärrissbildung alle denkbaren Rissgeometrien innerhalb des durch ein Spannungskriterium identifizierten überbeanspruchten Bereichs infrage. Gerade in 3D-Problemstellungen führt dies jedoch zu einer kaum überschaubaren Anzahl potentieller Sekundärrisse, sodass es unerlässlich wird, diese Anzahl durch zusätzliche Annahmen zu verringern. Damit stellt eine angemessene Reduktion der möglichen Rissgeometrien den Knackpunkt einer effektiven Anwendung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums auf 3D-Spannungssingularitäten dar.

Die Ausbildung von Sekundärrissen ausgehend von der größten Spannungskonzentration (bzw. stärksten Spannungssingularität) sowie deren Ebenbleiben sind typische Annahmen, die in zurückliegenden Betrachtungen von 2D-Problemen gute Ergebnisse erbrachten (z. B. Leguillon (2002), Leguillon u. Martin (2012), Hell u. Becker (2014)) und auch für 3D-Probleme schon Anwendung fanden (Leguillon, 2014, Mittelman u. Yosibash, 2014, 2015). Weiterhin sollen hochfeste Teilstrukturen (z. B. Fasern) nicht von einem Sekundärriss durchtrennt werden. Schließlich sei von der Bildung zunächst nur eines Sekundärrisses ausgegangen. Unter diesen Annahmen sowie aufgrund der Symmetrie des biaxialen Lastfalls erscheinen insbesondere ebene, symmetrische Grenzflächen-Risse, die vom Interaktionspunkt der aufeinander treffenden ZFR sowie von deren Rissfronten ausgehen, wahrscheinlich. Doch auch mit diesen Einschränkungen bleibt neben der Rissgröße vor allem die Rissform bzw. im Besonderen die Form der Rissfront zu bestimmen.

Allein die Bestimmung der Geometrie von Rissfronten in dreidimensionalen Strukturen stellt ein eigenes Forschungsgebiet dar und ist keinesfalls trivial. Bei von Ecken ausgehenden ebenen Rissen wird grundsätzlich zwischen dreiecksförmigen, konkaven und konvexen Rissformen (mit geraden, zum Eckpunkt hin und vom Eckpunkt weg gekrümmten Rissfronten) unterschieden (vgl. auch Kap. 3.1.4 und 3.2). Einschlägige wissenschaftliche Arbeiten beschäftigen sich mit der Rissbildung an Siliziumchips der Elektronikindustrie, ausgehend von der Bimaterialecke zwischen Silizium und Kunstharz-Klebstoff (z. B. Nied (2003), Herr u. Nied (2005), Ayhan et al. (2007), Koguchi et al. (2015)). Hier werden häufig dreiecksähnliche Rissformen beobachtet, die sich unter zyklischer Belastung einstellen.¹⁴ Auch die Arbeiten zur rechnerischen Bestimmung von SIFs entlang der Rissfronten solcher Risse¹⁵ zeigen Energiefreisetzungsraten auf, die dort, wo die Grenzflächenrissfront auf einen freien Rand trifft, für Dreiecksrisse gegen Null und für konvexe Rissformen gegen Unendlich tendieren (Herr u. Nied, 2005, Ayhan et al., 2007, Koguchi et al., 2015). Basierend auf der Annahme, dass sich entlang einer Rissfront eine konstante Energiefreisetzungsraten einstellt, weisen diese Arbeiten letztendlich auf dreiecksähnliche Rissgeometrien, mit Tendenz zu konvexen Rissformen, hin.

Dies steht im Kontrast zu den nach der Grenzflächenanstrengung \mathcal{E}_{del} auch möglichen konkaven Rissformen. Die der aktuellen Problemstellung am nächsten kommenden Untersuchungen stammen von Leguillon (2014). Er zeigte durch FE-Analysen für die Bimaterialbalkenversuche von Labossiere u. Dunn (2001), dass Eckenrisse mit Dreiecksform bei gleicher Rissausdehnung auf der Winkelhalbierenden d (vgl. Abb. 3.2) höhere inkrementelle Energiefreisetzungsraten \mathcal{G} liefern als solche mit nur abschnittsweise gerader Rissfront. Dies erscheint zunächst unerwartet,

¹⁴ Eindrucksvolle Aufnahmen von teilweise delaminierten Siliziumchips nach verschiedenen thermischen Zyklenzahlen sind beispielsweise den Arbeiten von Herr u. Nied (2005) und auch Nied (2003) zu entnehmen.

¹⁵ unter Zugbelastung senkrecht zu den Rissflächen

da nicht die volle, nach dem Spannungskriterium mögliche Energiefreisetzung ausgeschöpft wird. Gleichzeitig besitzt die Rissform mit abschnittsweise gerader Rissfront die doppelte Rissfläche des Dreiecksrisses und dieser Effekt überwiegt offenbar.

Letztendlich scheint die Dreiecksrissform eine vertretbare Annahme für eine erste Abschätzung der tatsächlichen Energiefreisetzungsraten zu sein. Entsprechend wird, unter weiterer Annahme der Dominanz der 3D-Spannungssingularität, im Folgenden von der Dreiecksrissform und damit geraden Rissfronten ausgegangen. Zusammen mit der Symmetrie der Lastfälle führt dies zu einer Festlegung der Sekundärrissgeometrie auf ein gleichschenkliges Dreieck und schließlich die Reduktion der freien Rissparameter auf nur noch die Rissgröße ΔA .

Die gewählte Dreiecksrissform erfüllt die Skalierungsbedingung des Kapitels 6 zur Betrachtung skalierbarer Zwei-Rand-Probleme im Rahmen der SBFEM. Entsprechend sind zur effizienten Berechnung der inkrementellen Energiefreisetzungsraten \bar{G} solcher zum Ursprung der 3D-Spannungssingularität skalierbarer Sekundärrisse die beiden dort dargestellten Ansätze möglich:

- *Skalierbares Zwei-Rand-Problem (S2RP)*: Wie in Abbildung 7.4 b dargestellt, wird zusätzlich zum bisher ausschließlich behandelten Außenrand bei $\xi_a = 1$ im Viertelmodell ein gegenüber dem Außenrand skalierter Innenrand bei ξ_i eingeführt. In den entstandenen Innenraum, der den zu betrachtenden Sekundärriss enthalten soll, wird eine weitere SBFEM-Modellierung hineinassembliert.¹⁶ Da dieses innere SBFEM-Modell skalierbar ist, können diverse Ausdehnungen der Sekundärrissgeometrie betrachtet werden, ohne dass für jede ein neues Modell erstellt und eine neue Rand-Steifigkeitsmatrix berechnet werden müssen. Sie werden nur einmal erstellt und können dann über den Skalierungsparameter $\epsilon = \xi_i/\xi_a$ mit geringem Aufwand variiert werden. Im Grenzfall $\epsilon = 1$ verschwindet das äußere Modell und das innere Modell nimmt vollständig den Raum ein, den in der Berechnung vor Sekundärrissbildung noch das äußere Modell ohne Innenrand inne hatte. Es ist zu beachten, dass für sehr kleine Skalierungen des inneren Modells die Genauigkeitsgrenze bei der Lösung des resultierenden linearen Gleichungssystems erreicht werden und der Einfluss des inneren Modells in den Größenbereich der numerischen Fehler kommen kann.
- *Asymptotische Näherungslösung*: Diese Problematik besteht beim asymptotischen Lösungsansatz nicht. Den Ausgangspunkt bildet auch hier das skalierbare Zwei-Rand-Problem, wobei unter der Annahme, dass beide Ränder hinreichend weit voneinander entfernt sind (kleine ϵ), die Lösung für das Gesamtpotential günstig in einer asymptotischen Reihe entwickelt wird (Kap. 6.2).

Die Modellierung des inneren Gebiets erfolgt jeweils ähnlich wie in Hell u. Becker (2016c) vorgestellt: Die Rissfront des Sekundärrisses verläuft in der Grenzfläche diagonal von einem ZFR zum anderen, und zwar in der Art, dass seine Fläche gerade $1/8$ der Grenzfläche des inneren Modells belegt (Abb. 7.4 b und 7.9 b). Dort, wo die Rissfront des Sekundärrisses auf die Rissfront der ZFR im inneren Modell trifft, entsteht lokal eine neue 3D-Struktursituation. Deshalb wird an dieser Stelle wieder jeweils ein Skalierungszentrum platziert, was in der Zerlegung des inneren Gebiets in zwei prismatisch dreiecksförmige Teilgebiete resultiert. Die nötige Anreicherung für den Sekundärriss in der Grenzfläche stammt, wie in Kapitel

¹⁶ Bei der Modellierung des inneren Gebiets ist auf eine gegenüber dem äußeren Gebiet konforme Randdiskretisierung zu achten. Dabei ist das innere Modell prinzipiell nicht auf eine SRFEM-Modellierung angewiesen – beispielsweise sind auch eine reine FEM-Modellierung oder eine Mischung aus FEM und SRFEM denkbar.

Tabelle 7.1: Abklingexponenten $\lambda_{p,j}$ des positiven Spektrums für 3D-Deformationsmoden am Interaktionspunkt Sekundärriss/ZFR bei der Diskretisierung $n_e = 30$. Zum Vergleich auch Abklingexponenten der Deformationsmoden der interagierenden 2D-Situationen ZFR und Sekundärriss (DEL).

Def.-Mod.	dreidimensionale Struktursituation							
	(1/2)	(3)	(4)	(5)	(6/7)	(8)	(9)	(10/11)
Abkl.-Exp. $\lambda_{p,j}$	0,0	0,560	0,708	0,923	1,0	1,435	1,566	1,633 \pm 0,309i
	zweidimensionale Struktursituationen							
	ZFR ($\beta = \theta_1 = 90^\circ, \theta_2 = 0^\circ$)			DEL ($\theta_1 = -45^\circ, \theta_2 = 45^\circ$)				
Def.-Mod.	III	II	I		(3)	(1/2)		
Abkl.-Exp. $\lambda_{p,j}$	0,468	0,517	0,650		0,500	0,500 \pm 0,00018i		

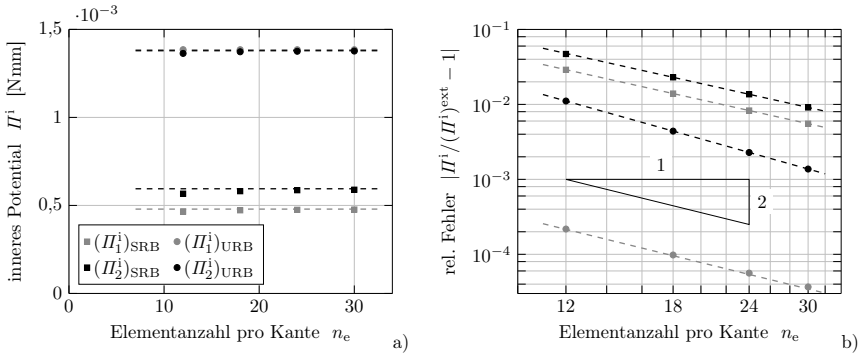


Abbildung 7.7: Konvergenz des inneren Potentials für die Lastfälle SRB und URB, ohne ($\epsilon = 0$, indiziert mit $(\cdot)_1$) und mit Sekundärriss ($\epsilon = 1$, indiziert mit $(\cdot)_2$). Gestrichelte Linien stellen (a) die mit einer Richardson-Extrapolation bestimmten Werte $(\Pi^i)^{\text{ext}}$ bzw. (b) Näherungsfunktionen der Form $Cn_e^{-m_{\text{II}}}$ an die letzten zwei Datenpunkte dar.

5.1.6 für die ZFR-Situation skizziert, aus einer separaten 2D-SBFEM-Analyse mit einer Superconvergent-Patch-Recovery für die Ableitungen der Winkelfunktionen.¹⁷ Die Abklingexponenten einiger Deformationsmoden der 3D-Struktursituation sowie diejenigen der dort interagierenden Liniensingularitäten sind in Tabelle 7.1 angegeben.¹⁸

Die Berechnung der Potentiale Π^i , Π^a ist für die Bestimmung der inkrementellen Energiefreisetzungsraten \bar{G} notwendig, welche wiederum für die Auswertung des Energiekriteriums benötigt werden. Die Abbildungen 7.7 a und b zeigen nach dem Vorbild der Darstellungen aus Kapitel 5.2.2 die Konvergenz des inneren Potentials Π^i der Struktursituation mit Sekundärriss (Index $(\cdot)_2$) am Beispiel der Risskalierung mit $\epsilon = 1$. Es sind die Ergebnisse für beide Lastfälle SRB und URB sowie zum Vergleich auch jeweils die Ergebnisse für die Struktursituation ohne

¹⁷ Anmerkung: Der Einfachheit halber und gerechtfertigt durch den sehr kleinen imaginären Anteil in den 2D-Abklingexponenten des komplex konjugierten Deformationsmoduspaares werden diese Deformationsmoden bei der Anreicherung als zwei getrennte, reelle Deformationsmoden behandelt.

¹⁸ Es zeigt sich, dass keine starken 3D-Spannungssingularitäten auftreten. Alle Abklingexponenten bis $\lambda = 0$ (Starrkörperverschiebungen) sind $\lambda > 1/2$. Dies unterstützt die These, dass konvexe Rissformen hier energetisch günstiger sind als konkave.

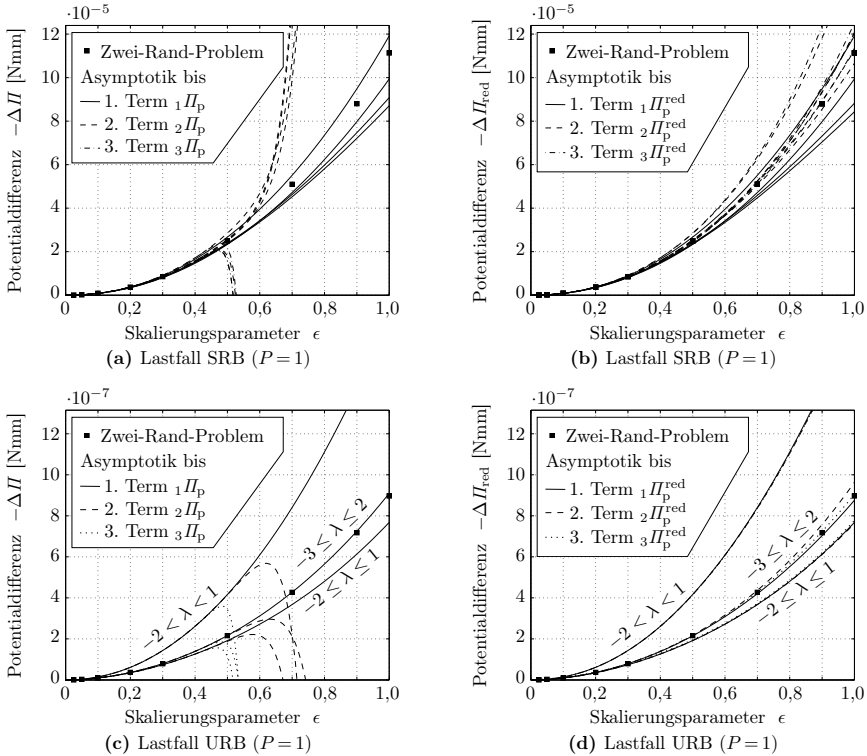


Abbildung 7.8: Vergleich der SBFEM-Lösung des skalierbaren Zwei-Rand-Problems und der asymptotischen Näherungslösung anhand der negativen Differenz des Gesamtpotentials $-\Delta\Pi$ zwischen der Struktursituation mit und ohne Sekundärriss. Am Beispiel der uniformen Diskretisierung mit $n_e = 24$ Elementen über der Modellhöhe sind die Lastfälle SRB und URB betrachtet. Einfluss der Anzahl der berücksichtigten Deformationsmoden und der berücksichtigten Glieder/Entwicklungsterme der matrixbasierten Reihendarstellung auf die Genauigkeit der asymptotischen Näherungslösung: Vergleich zwischen reduzierten Gliedern $i\Pi_p^{\text{red}}$ der matrixbasierten Reihendarstellung (b,c), die auf Glieder in ϵ mit vollständig bestimmten Koeffizienten beschränkt sind (Einschränkungen (6.55–6.60)), und nicht reduzierten Reihengliedern $i\Pi_p$ (a,c).

Sekundärriss (Index $(\cdot)_1$) dargestellt. Die Referenzwerte $(\Pi^i)^{\text{ext}}$ zur Berechnung des relativen Fehlers sind mittels einer Richardson-Extrapolation (vgl. Kap 5.2, Gl. (5.32)) bestimmt. Die Konvergenz ist dank der geeigneten Anreicherung des Verschiebungsansatzes auch für die Struktursituation mit Sekundärriss stets ungefähr quadratisch. Die Fehler sind generell klein (Abb. 7.7 a), besonders im Lastfall URB. Es fällt auf, dass die Differenz $\Delta\Pi^i$ des inneren Potentials zwischen der Struktursituation mit und ohne Sekundärriss im Lastfall URB ebenfalls sehr klein ist, während gleichzeitig die relativen Fehler in den Struktursituationen mit und ohne Sekundärriss sehr unterschiedlich groß, gar von unterschiedlicher Größenordnung, sind. Hierauf wird später noch zurückgekommen.

Die Abbildungen 7.8 a–d zeigen am Beispiel der Diskretisierung $n_e = 24$ die negative Differenz des Gesamtpotentials

$$-\Delta \Pi = \Pi_1 - \Pi_2$$

in Abhängigkeit vom Skalierungsparameter ϵ . Im Bereich $\epsilon \in [0, 1]$ ist punktweise das vollständige Zwei-Rand-Problem mit skaliertem inneren Gebiet mittels der angereicherten SBFEM-Formulierung ausgewertet (schwarze Quadrate bei $\epsilon = 0,025, 0,05, 0,1, 0,2, 0,3, 0,5, 0,7, 0,9, 1,0$). Diesen Ergebnissen sind die Kurvenzüge der in ϵ expliziten asymptotischen Näherungsformeln (6.80, 6.51, 6.53) gegenüber gestellt. Für sie sind jeweils nur wenige Deformationsmoden mit einem maximalen Abdeckungsbereich in den Abklingexponenten von $-3 \leq \lambda \leq 2$ berücksichtigt. Weiterhin sind die asymptotischen Näherungen

$$-\Delta \Pi = -_1\Pi_p - {}_2\Pi_p - {}_3\Pi_p + \dots$$

jeweils bis zum 1., 2. und 3. Reihenglied ${}_1\Pi_p, {}_2\Pi_p, {}_3\Pi_p$ in ϵ^{λ_p} dargestellt, wobei für Abbildungen 7.8 b und d eine Reduktion der Glieder innerhalb der matrixbasierten Reihendarstellung nach den Einschränkungen (6.55–6.60) vorgenommen ist.¹⁹ Es zeigt sich, wie schon in Kapitel 6.1 am Beispiel der Hohlkugel unter Außendruck beobachtet (Abb. 6.5), wie die fehlenden Einschränkungen (6.55–6.60) zu einem instabilen Verhalten der asymptotischen Reihe, hier ab einer Berücksichtigung des zweiten Glieds ${}_2\Pi_p$ der matrixbasierten Reihendarstellung, führen. Generell sind aber vergleichsweise kleine Abweichungen zu beobachten, d. h. zum Teil sogar für große ϵ und mitunter schon unter Berücksichtigung nur des ersten Reihenglieds ${}_1\Pi_p$. Weiterhin zeigt sich, dass die Mitnahme nur der Deformationsmoden mit $-2 < \lambda < 1$ (im positiven Spektrum nur 3D-Singularitäten), wie schon bei den Grenzflächenanstressungen (Abb. 7.6) besonders im Lastfall URB, nicht ausreicht. Anders als noch bei den Grenzflächenanstressungen \mathcal{E}_{del} ist hier sogar eine Berücksichtigung bis hin zu den Biegedeformationsmoden (und ihren Gegenstücken im negativen Eigenwertspektrum) $-3 \leq \lambda \leq 2$ zu empfehlen. Insgesamt zeigt sich die asymptotische Näherungslösung in den betrachteten Fällen weniger sensitiv gegenüber der Berücksichtigung weiterer Reihenglieder ${}_i\Pi_p$, sofern sie durch die Einschränkungen (6.55–6.60) reduziert sind (${}_i\Pi_p^{\text{red}}$). Sie können zwar zu einer merklichen Erweiterung des Geltungsbereichs der asymptotischen Reihe beitragen, ausschlaggebend ist jedoch in erster Linie die Berücksichtigung hinreichend vieler Deformationsmoden.

Die Abbildungen 7.9 a und b zeigen schließlich die inkrementellen Energiefreisetzungsraten \mathcal{G} in Abhängigkeit vom Skalierungsparameter ϵ . Die Abbildung 7.9 b enthält weiterhin eine Darstellung der Sekundärrissgeometrie innerhalb der Grenzfläche für $\epsilon = 1$. Die Energiefreisetzungsraten sind über Gleichung (2.116) und mit Hilfe der Größe des Sekundärrisses ΔA direkt aus den Abbildungen 7.8 a–d ableitbar, wobei die Größe des Sekundärrisses ΔA quadratisch mit dem Skalierungsparameter ϵ zusammenhängt:

$$\Delta A = (\epsilon^2/8) \text{ mm}^2. \quad (7.3)$$

Im Bereich $\epsilon \in [0, 1]$ sind entsprechend wieder punktweise die Lösungen für vollständige inverse skalierbare Zwei-Rand-Probleme dargestellt. Zusätzlich sind die Ergebnisse für $\epsilon = 1$ mit einer detaillierten FEM-Rechnung (120 quadratische Elemente über Modellhöhe, uniforme Diskretisierung) verifiziert.

¹⁹ Zur Erinnerung: Die matrixbasierte Reihendarstellung (6.51) des Gesamtpotentials enthält die Glieder ${}_i\Pi_p$ in ϵ^{λ_p} , aber ${}_i\Pi_p$ selbst enthält durch die Berücksichtigung diverser Deformationsmoden auch Glieder verschiedener Ordnung in ϵ .

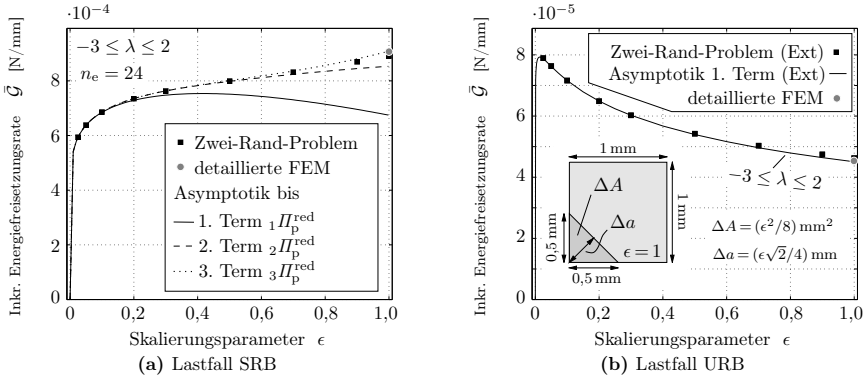


Abbildung 7.9: Inkrementelle Energiefreisetzungsraten \bar{G} für gleichschenklige dreieckige Sekundärrissgeometrien der Größe $\Delta A \in [0, 1/8]\text{ mm}^2$ in der Grenzfläche zwischen den Laminatlagen bei Lastparameter $P = 1$. Vergleich der vollständigen Lösung des skalierbaren Zwei-Rand-Problems mit derjenigen aus effizienter asymptotischer Reihenentwicklung sowie aufwendiger, detaillierter FE-Analyse. In (b) Verwendung der extrapolierten Werte (EXT) einer Richardson-Extrapolation.

Bei der SBFEM-Methodik können prinzipbedingt keine gänzlich identischen Diskretisierungen für die Konfiguration mit und ohne Sekundärriss verwendet werden. Anders als bei einer FEM, sind damit die Fehler aus beiden Rechnungen nicht immer von ähnlicher Größenordnung und gleichen sich dadurch auch nicht mehr automatisch weitgehend aus. Besonders wenn die Potentialdifferenz zwischen den beiden Konfigurationen von gleicher Größenordnung wie der jeweilige Fehler im Gesamtpotential ist, kann es zu merklichen Ungenauigkeiten bei der Bestimmung der inkrementellen Energiefreisetzungsraten kommen. Im von homogenen Dehnungen dominierten Lastfall URB macht sich dies bemerkbar. Hier ist zwar der relative Fehler in beiden berechneten Konfigurationen jeweils sehr klein bzw. klein

$$n_e = 24: \quad |II_1^i / (II_1^i)^{\text{ext}} - 1| \approx 0,005\% \quad , \quad \epsilon = 1: \quad |II_2^i / (II_2^i)^{\text{ext}} - 1| \approx 0,6\% \quad ,$$

liegt aber in der Größenordnung der Potentialdifferenz ($|\Delta II^i / (II_0^i)^{\text{ext}}| \approx 0,005\%$). Dank des gutmütigen Konvergenzverhaltens der angereicherten SBFEM sind mit Hilfe einer Richardson-Extrapolation jedoch auch hier sehr brauchbare Ergebnisse zu erzielen (Abb. 7.9 b). Im Lastfall SRB ist dieser Zusatzaufwand nicht notwendig (Abb. 7.9 a), da hier die Fehler der Konfigurationen mit und ohne Sekundärriss von kleinerer Größenordnung als die Potentialdifferenz selbst sind (vgl. Abb. 7.7).

Die durchgezogenen Linien in den Abbildungen 7.9 a und b stellen schließlich die jeweiligen Ergebnisse aus der in ϵ expliziten asymptotischen Reihe (6.85, 6.87) dar. Dabei sind jeweils nur wenige Deformationsmoden, nämlich die mit $-3 \leq \lambda \leq 2$, nötig, um die Ergebnisse des skalierbaren Zwei-Rand-Problems abzubilden. Im Lastfall URB wird auch für die asymptotische Näherungslösung eine Richardson-Extrapolation verwendet, um gute Ergebnisse insbesondere für die Transfermatrix \mathbf{k}_n^* zu erhalten. Dann reicht hier schon die Berücksichtigung des ersten reduzierten Glieds ${}_1I_p^{\text{red}}$ der Asymptotik, um die Lösungen des skalierten Zwei-Rand-Problems sogar bis einschließlich $\epsilon = 1$ abbilden zu können! Unter Berücksichtigung der ersten drei reduzierten Glieder (bis einschließlich ${}_3I_p^{\text{red}}$) gelingt dies auch im Lastfall SRB. Damit hat

sich die asymptotische Näherungslösung (zumindest für die betrachteten Lastfälle) entgegen der anfänglichen Erwartung als weit über die Grenzen sehr kurzer Sekundärrisse hinaus brauchbar erwiesen.

Bestimmung von kritischer Rissgröße A_f und kritischer Last t_f^* bzw. u_f^*

Nun, da sowohl die Grenzflächenanstressungen \mathcal{E}_{del} als auch die inkrementellen Energiefreisetzungsraten $\bar{\mathcal{G}}$ bekannt sind, kann eine Bewertung der Struktur- und Lastsituationen aus Abbildung 7.3 nach dem gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium (2.118) erfolgen. Die Festlegung der Rissgeometrie auf gleichschenklige Dreiecksrisse führt zusammen mit der Bedingung, dass an jedem Punkt der potentiellen Sekundärrisse das Spannungskriterium erfüllt sein muss, dazu, dass es für die Auswertung des Spannungsteilkriteriums ausreichend ist, die Grenzflächenanstressungen \mathcal{E}_{del} entlang der Grenzflächendiagonale zu betrachten (Abb. 7.6). Weiterhin sind dadurch nur noch der Lastparameter P sowie die Größe ΔA bzw. seine Diagonalausdehnung Δa (Abb. 7.9) des Sekundärrisses als freie Variablen geblieben. Im vorliegenden Fall linearer Elastizität mit kleinen Deformationen und einer zu bewertenden schwachen Spannungssingularität lässt sich das im Allgemeinen zu lösende Optimierungsproblem (2.123) auf die zwei in Kapitel 2.2.4 dargestellten Fälle reduzieren. (vgl. auch Abb. 2.10): den Fall einer „global positiven“ (A) und den Fall der „global negativen“ (B) Struktur- und Lastsituation.

Für den Lastfall SRB wurde eine monoton über der Grenzflächendiagonale fallende Anstrengung \mathcal{E}_{del} (Abb. 7.6 a) und eine mit zunehmender Größe ΔA des Dreiecksrisses monoton steigende inkrementelle Energiefreisetzungsrates $\bar{\mathcal{G}}$ (Abb. 7.9 a) gefunden. Damit liegt hier Fall A mit einer lokal wie global „positiven“ Struktur- und Lastsituation vor und die kritische Sekundärrissgröße A_f kann direkt aus Gleichung (2.125) bestimmt werden. Weiteres Einsetzen, z. B. in das reine Energiekriterium (2.115), ergibt mit den Materialdaten aus Tabelle A.1 die Versagensparameter kritische Last t_f^* und Sekundärrissgröße A_f

$$(t_f^*)^{\text{SRB}} = t_f^* P_f^{\text{SRB}} = 13,066 \text{ N/mm}^2 \quad \text{und} \quad (7.4)$$

$$A_f^{\text{SRB}} = 0,0389 \text{ mm}^2 \quad \text{bzw.} \quad (7.5)$$

$$a_f^{\text{SRB}} = \sqrt{A_f^{\text{SRB}}} = 0,197 \text{ mm} \quad \text{mit} \quad (7.6)$$

$$\epsilon_f^{\text{SRB}} = \sqrt{8A_f^{\text{SRB}}/\text{mm}^2} = 0,558 \quad \text{und} \quad (7.7)$$

$$\xi_f^{\text{SRB}} = \epsilon_f^{\text{SRB}}/4 = 0,139. \quad (7.8)$$

Für Lastfall URB sind die gefundenen inkrementellen Energiefreisetzungsraten $\bar{\mathcal{G}}$ nicht im gesamten betrachteten Wertebereich monoton steigend, sondern weisen ein Maximum bei $\epsilon \approx 0,014$ auf. Damit liegt hier Fall B mit einer lokal „positiven“ aber global „negativen“ Struktur- und Lastsituation vor. Da die Suche nach einer Lösung für Gleichung (2.125) im Wertebereich vor $\bar{\mathcal{G}}_{\text{max}}$ erfolglos bleibt, ist die kritische Sekundärrissgröße automatisch auf diejenige mit maximaler inkrementeller Energiefreisetzungsrates $\bar{\mathcal{G}}_{\text{max}}$ festgelegt

$$A_f^{\text{URB}} = \Delta A(\epsilon = 0,014) = 0,245 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2 \quad \text{bzw.} \quad (7.9)$$

$$a_f^{\text{URB}} = \sqrt{A_f^{\text{URB}}} = 0,00495 \text{ mm} \quad \text{mit} \quad (7.10)$$

$$\epsilon_f^{\text{URB}} = 0,014 \quad \text{und} \quad (7.11)$$

$$\xi_f^{\text{URB}} = \epsilon_f^{\text{URB}}/4 = 0,0035 \quad (7.12)$$

und das Problem reduziert sich auf ein energetisch dominiertes. Die Auswertung des reinen Energiekriteriums für A_f^{URB} ergibt dann den kritischen Lastfaktor P_f^{URB} :

$$(u^*)_f^{\text{URB}} = u^* P_f^{\text{URB}} = 0,0042 \text{ mm} . \quad (7.13)$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass bei solch kleinen Sekundärrissen eine Richardson-Extrapolation der asymptotischen Reihenentwicklung von $\bar{\mathcal{G}}(\Delta A)$ nicht unbedingt nötig gewesen wäre. Hier hätte auch eine Analyse mit $n_e = 24$ einen sinnvollen kritischen Lastfaktor P_f^{URB} ergeben.²⁰

$$(u^*)_f^{\text{URB}} = 0,00414 \text{ mm} .$$

Abschließend soll eine Aussage zur Stabilität des Rissfortschritts in den beiden Lastfällen SRB und URB erfolgen. Die inkrementelle Energiefreisetzungsrates $\bar{\mathcal{G}}$ stellt einen Durchschnittswert der differentiellen Energiefreisetzungsrates \mathcal{G} dar, weshalb an einem Maximum $\bar{\mathcal{G}}_{\text{max}}$ von $\bar{\mathcal{G}}$ gilt, dass beide wertgleich sind ($\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$) und \mathcal{G} fallend ist (vgl. Gl. (2.117)). Wenn also im Lastfall URB derjenige potentielle Sekundärriss, für den die inkrementelle Energiefreisetzungsrates maximal wird, entsteht, dann ist für diesen mit einem stabilen Risswachstum zu rechnen.²¹ Folglich wird dieser Riss nur unter einer weiteren Erhöhung der Belastung wachsen und kann nicht unmittelbar zu katastrophalem Versagen führen.

Im Lastfall SRB liegt hingegen eine mit zunehmender Rissgröße monoton wachsende Energiefreisetzungsrates vor, sodass alle potentiellen Sekundärrisse instabil sind. Die Struktur tendiert in diesem Lastfall also zum Totalversagen.

7.1.3 Fazit

In diesem Kapitel wurde die Verwendbarkeit der entwickelten, hocheffizienten Berechnungsmethoden für die Versagensbewertung von 3D-Spannungssingularitäten mittels eines gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums im Rahmen der Bruchmechanik finiter Risse aufgezeigt. Die Validierung wie auch die Verifizierung anhand einer Reihe weiterer Beispiele steht jedoch noch aus. Für eine erste Validierung bieten sich die Versuche von Labossiere u. Dunn (2001) an, auch wenn deren einfache Struktur- und Lastsituation das volle Potential der vorgestellten Methodik nicht ausschöpfen würde.

Die gegebene Implementierung ist bislang auf gleichschenklige, ebene Dreiecksgeometrien der Sekundärrisse beschränkt, kann aber entsprechend erweitert werden. In einem ersten Schritt sollten flexiblere Dreiecksgeometrien Berücksichtigung finden. Anschließend wären auch Rissfronten, die nur noch abschnittsweise gerade sind, zu betrachten. Dabei ist darauf zu achten, dass bei der weiteren Verwendung einer SBFEM-Modellierung für das innere, den Sekundärriss enthaltende Gebiet die Vorteile der Methodik nicht durch eine zu kleinteilige Zerlegung des inneren Gebiets leiden. Mit dieser Erweiterung könnten verschiedene Rissgeometrien eingehend auf ihre energetische Vorteilhaftigkeit und Neigung untersucht werden.

²⁰ relative Abweichung $|(u^*)_f^{\text{URB}}(n_e = 24)/(u^*)_f^{\text{URB}}(\text{ext}) - 1| \approx 1,5\%$

²¹ zumal an den Defekt-Interaktionspunkten der betrachteten Sekundärrisse mit gleichschenkliger Dreiecksform nur schwache 3D-Spannungssingularitäten vorliegen (Tab. 7.1)

Bezüglich einer letztendlich vollständigen Bewertung einer Struktur mit Linien- (2D) und Punktsingularitäten (3D) wäre auch eine detaillierte Untersuchung der Liniensingularitäten und damit eine Betrachtung von 2D-Modellen notwendig. Dann könnte ein umfassender Vergleich der Ergebnisse aus 2D- sowie 3D-Betrachtung und schließlich eine abschließende Versagensvorhersage durchgeführt werden.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

8.1 Zusammenfassung

Im Fokus der vorliegenden Arbeit stand die Analyse und Bewertung spröder Strukturen mit 3D-Spannungssingularitäten, also Punktsingularitäten in den Spannungen, die in allen drei Raumrichtungen auf eine charakteristische Art und Weise abklingen. Sie kommen dann zustande, wenn Liniensingularitäten aufeinander treffen oder sie Diskontinuitäten in der Stetigkeit oder Glattheit ihrer Linie singularer Spannungen aufweisen. Die Analyse von 3D-Spannungssingularitäten stellt eine besondere Herausforderung dar, da analytische Methoden hier nur in den seltensten Fällen zu einem Ergebnis führen und rein numerische Methoden zum einen wenig Einblick in die Mechanik solcher spezieller Struktursituationen erlauben und zum anderen durch gewisse numerische Defizite sehr aufwendig sind. Daher wurde die semi-analytische Skalierte Rand-Finite-Elemente-Methode (SBFEM) genutzt, die einerseits den geforderten Zugang zu einem tieferen mechanischen Verständnis der 3D-Spannungssingularitäten gestattet und andererseits eine Abmilderung der numerischen Defizite einer klassischen FEM bietet.

Die strukturmechanische Interaktion vor allem rissartiger Defekte in Faserverbund-Laminaten wurde mit Hilfe der SBFEM detailliert untersucht. Es wurden diverse geometrische Konfigurationen sowie Materialvariationen betrachtet und hierfür die Deformationsmoden sowie ihre zugehörigen Abklingexponenten λ (bzw. Spannungssingularitätsexponenten $\sigma \propto 1/(r^{1-\lambda})$, wenn $\lambda < 1$) bestimmt. Eine erste Einordnung der Kritikalität solcher Struktursituationen war anhand der Spannungssingularitätsexponenten möglich. Dabei ergab sich für eine Vielzahl von Fällen, dass auch starke Spannungssingularitäten ($\lambda < 0,5$) angeregt werden können, d.h. solche mit nicht nur theoretisch unendlich hohen Spannungen $\sigma \rightarrow \infty$, sondern auch theoretisch unendlich großen Energiefreisetzungsraten $\mathcal{G} \rightarrow \infty$. Als besonders kritisch erwiesen sich Rissinteraktionen mit kleinen Winkeln zwischen den Rissfronten. Weiterhin wurden für eine Auswahl von Risskonfigurationen diverse Lastfälle untersucht und die resultierenden generalisierten Spannungsintensitätsfaktoren (GSIF) bestimmt. Dazu wurden die entwickelten SBFEM-Modelle mit dem kommerziellen Finite-Elemente-Programm ABAQUS[®] über eine Schnittstelle für Super-Elemente gekoppelt, um so effizient auch größere Laminatstrukturen zu berücksichtigen. Im Falle, dass nur ein Deformationsmodus angesprochen wurde und entweder GSIFs oder Spannungssingularitätsexponenten identisch waren, war schließlich ein tatsächlicher Vergleich der Kritikalität zweier Struktur- und Lastsituationen möglich. Dieser Spezialfall trat jedoch nur in Ausnahmefällen auf, sodass im Normalfall ein allgemeinerer Zugang, wie das Bewertungskonzept des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums im Rahmen der Bruchmechanik finiter Risse, notwendig war.

Das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium postuliert eine Rissentstehung bzw. einen Rissfortschritt, sobald ein solcher innerhalb eines überbeanspruchten Gebiets energetisch

zulässig wird. Dies erfordert grundsätzlich neben der Analyse der Struktursituation vor Rissentstehung/-fortschritt auch die Analyse aller potentiellen Struktursituationen nach Rissentstehung/-fortschritt (mit unterschiedlichen Rissgrößen, -formen, -orientierungen, und -lagen) und somit entsprechend effiziente Lösungsmethoden.

Es wurde eine angereicherte Formulierung der SBFEM, die enrSBFEM, zur effizienten Spannungsanalyse vorgeschlagen und implementiert. Sie kommt mit nur einem zusätzlichen Freiheitsgrad pro Deformationsmodus einer Liniensingularität, mit dem angereichert wird, aus. In ausführlichen Konvergenzanalysen wurde dargelegt, dass die Anreicherung der SBFEM die Konvergenz- und Genauigkeitsproblematik der numerischen Methoden bezüglich aller auftretenden Spannungssingularitäten löst. Die Anreicherungsfunktionen für den Separationsansatz der Verschiebungen wurden dazu aus effizienten 2D-SBFEM-Analysen unter Annahmen eines generalisierten ebenen Verzerrungszustands (GEVZ) nach Pipes u. Pagano (1970) bezogen und die notwendige Glattheit ihrer Ableitungen mit Hilfe einer Superconvergent Patch Recovery (SPR) nach Zienkiewicz u. Zhu (1992) sichergestellt. Für die nun möglichen, vergleichsweise groben Diskretisierungen der 3D-Probleme wurde eine der enrSBFEM angepasste Spannungsglättung, auf Basis ebenfalls einer SPR, entwickelt. Dabei wurden kontinuierliche und diskontinuierliche Anteile des Spannungsfeldes getrennt, nur der diskontinuierliche Anteil geglättet und die beiden Anteile schließlich wieder zusammengesetzt. Die Wirksamkeit dieser Glättungsprozedur wurde anhand einschlägiger Beispiele demonstriert. Somit war mit der enrSBFEM ein hochgradig effizientes Werkzeug zur Analyse von 3D-Struktursituationen mit Punkt- und Liniensingularitäten zur Verfügung gestellt.

Zur effizienten Bereitstellung inkrementeller Energiefreisetzungsraten für Struktursituationen mit 3D-Spannungssingularitäten und davon ausgehenden möglichen Folgerisskonfigurationen wurde eine asymptotische Lösungsprozedur entwickelt, die auf eine iterative Lösung eines Zweirand-Problems der SBFEM (mit diskretisiertem Innen- und Außenrand) zurückzuführen ist. Dazu wurde die Systematik zunächst anhand des einfachen rotationssymmetrischen Beispiels einer Hohlkugel unter Außendruck dargestellt und im Anschluss verallgemeinert. Sie nutzt das mitunter sehr schnelle Abklingen der durch Randbedingungen an einem Rand angeregten Deformationsmoden zum jeweils anderen Rand hin aus. Daraus ergab sich eine (matrixbasierte) Reihendarstellung für die Problemgrößen (Verschiebungen, Formänderungsenergie, etc.), die explizit vom Größenverhältnis von Innen- zu Außenrandabmessung abhängt. Zur vollständigen Bestimmung dieser waren für jeden dominanten Deformationsmodus zwei Randwertprobleme an jeweils nur einem der beiden Ränder (Außen- und Innenrand) zu lösen. Bei der Betrachtung von Folgerisskonfigurationen war es wichtig zu beachten, dass Innen- und Außenrand innerhalb einer SBFEM-Formulierung ähnlich sein, d.h., durch eine Skalierung den jeweils anderen abbilden können müssen. Da der Außenrand i. A. keine rissähnliche Geometrie besitzt, war an den Innenrand ein inneres Modell anzuschließen, das den Folgeriss (Sekundärriss) enthielt und genauso skalierbar war, wie der Innenrand.

Der damit zur Verfügung gestellte Rahmen zur detaillierten Spannungsanalyse und Berechnung von Energiefreisetzungsraten wurde schließlich auf das Beispiel zweier, in einem Faserverbund-Laminat aufeinander treffender Zwischenfaserrisse unter biaxialer ebener Belastung angewandt. Zur Berechnung der Materialanstrengung der Laminatschichten wurde das Cuntze'sche Versagensmoduskonzept und für die Grenzflächen-Anstrengung ein vom Puck'schen Wirkebenenkriterium abgeleitetes quadratisches Spannungskriterium verwendet. Für die Folgerisskonfigurationen wurde von ebenen, vergleichsweise kurzen, dreiecksförmigen Sekundärrissen in der Grenzfläche ausgegangen. Die Dreiecksform war einerseits einfach zu modellieren und stellte andererseits einen Kompromiss zwischen vom Spannungskriterium

erlaubter konkaver (sternähnlicher) Rissformen und energetisch günstigerer konvexer (ellipsenähnlicher) Rissformen dar. Die zugehörigen asymptotischen Näherungslösungen für die inkrementellen Energiefreisetzungsraten wurden einer Konvergenzanalyse unterzogen und durch vollständige Lösungen des Zwei-Rand-Problems mittels der enrSBFEM sowie durch aufwendige und detaillierte Analysen mittels der klassischen FEM verifiziert. Schließlich wurde das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium ausgewertet und dadurch kritische Lasten sowie kritische Rissgrößen bestimmt. Damit war die Anwendbarkeit der entwickelten, effizienten Berechnungsmethoden für die Versagensbewertung von 3D-Spannungssingularitäten mittels eines gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums im Rahmen der Bruchmechanik finiter Risse aufgezeigt.

8.2 Ausblick

Die in dieser Arbeit vorgeschlagene angereicherte Formulierung der SBFEM kann an vielen Stellen ausgeweitet und weiterentwickelt werden. Aufbauend auf der bereits implementierten Spannungsglättung, könnte mit vergleichsweise geringem Aufwand ein „a posteriori“-Fehlerschätzer bereitgestellt werden. Mit diesem wäre schon vor einer aufwendigen Konvergenzanalyse eine Aussage bezüglich der Lösungsqualität möglich. Ein solcher Fehlerschätzer wäre auch für eine möglicherweise wünschenswerte adaptive Diskretisierung nutzbar. Weiterhin ist ein Vorteil der enrSBFEM, dass die GSIFs der im Modell enthaltenen Liniensingularitäten unmittelbar Teil der Randwertproblemlösung sind. Ihre Qualität ist in detaillierten Studien zu untersuchen. Schließlich könnten, aufgrund ihrer Effizienz und Genauigkeit, Programme zur vollautomatisierten 3D-Rissfortschrittsanalyse auf Basis der enrSBFEM entwickelt werden. Solche Programme existieren bisher nur für den weitaus simpleren 2D-Fall (Dai et al., 2015). Auch die Kopplung der enrSBFEM mit einer XFEM-Formulierung wäre möglich.

Gegenstand künftiger Arbeiten zur Versagensbewertung an 3D-Spannungssingularitäten könnte die Betrachtung weiterer Struktursituationen und Lastfälle sowie eine Validierung anhand experimenteller Daten sein. Dabei wäre eine ausführliche Untersuchung des Gültigkeitsbereichs der asymptotischen Näherungslösung bezüglich möglicher Sekundärrissgrößen wünschenswert. Ansonsten ist der zur Verfügung gestellte theoretische und praktische Rahmen auf jegliche Eckeneffekte an Multimaterialfügetionen (z. B. Laminateneckeneffekt, Elektronik-Chips, etc.) sowie natürlich weitere Defektinteraktionen in Laminaten (ZFR-DEL, ZFR-Rand, DEL-Rand) anwendbar. Sollte sich das Konzept dabei bewähren, wäre in einem weitergehenden Schritt eine Einbettung in kommerzielle Finite-Elemente-Programme und dabei eine weitestgehende Prozess-Automatisierung wünschenswert, um das Anwendungsspektrum sowie den Kreis potentieller Anwender zu erweitern.

Schließlich sind für eine vollständige Versagensbewertung von Strukturen nicht nur 3D-Singularitäten zu berücksichtigen. Je nach Struktur- und Lastsituation können (und sind es häufig auch) die Liniensingularitäten versagenskritisch sein. Die in Kapitel 6 vorgestellte asymptotische Lösungsprozedur zur Bestimmung von Energiefreisetzungsraten ist weitgehend analog auf zweidimensionale SBFEM-Modelle übertragbar. Dabei ist zu erwarten, dass sich eine Implementierung dort simpler als im hier betrachteten 3D-Fall darstellen würde. Ergänzt durch eine effiziente 2D-SBFEM-Spannungsanalyse könnte ein vergleichbares Bewertungskonzept auch für den 2D-Fall erstellt werden. Im Zusammenschluss mit dem in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Konzept für den 3D-Fall könnte so ein integriertes,

vielseitiges Bewertungskonzept für jegliche Arten von Spannungssingularitäten in spröden Strukturen entstehen.

Anhang A

Materialdaten

In Tabelle A.1 sind typische Materialdaten zweier endlosfaserverstärkter Kunststoffe angegeben.

Tabelle A.1: Materialdaten der UD-Schicht eines T800/Epoxid-Verbundes (kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff, CFK, Hebel (2010)) und eines typischen glasfaserverstärkten Kunststoffes (GFK, Schürmann (2007)) im Materialkoordinatensystem, 1-Richtung $\hat{=}$ Faserrichtung.

Werkstoffdaten		CFK	GFK
Elastizitätsmodul in Faserrichtung	E_{\parallel}	135 000 MPa	45 160 MPa
Elastizitätsmodul quer zu Faserrichtung	E_{\perp}	9400 MPa	14 700 MPa
Schubmodul in Ebene parallel zu Faserrichtung	$G_{\perp\parallel}$	4850 MPa	5300 MPa
Schubmodul in Ebene senkrecht zu Faserrichtung	$G_{\perp\perp}$	3240 MPa	5325 MPa
Querkontraktionszahl in Ebene parallel zu Faserrichtung	$\nu_{\parallel\perp}$	0,35	0,30
Querkontraktionszahl in Ebene senkrecht zu Faserrichtung	$\nu_{\perp\perp}$	0,45	0,38
Zugfestigkeit in Faserrichtung	R_{\parallel}^t	2800 MPa	–
Druckfestigkeit in Faserrichtung	R_{\parallel}^c	2800 MPa	–
Zugfestigkeit quer zu Faserrichtung	R_{\perp}^t	55 MPa	–
Druckfestigkeit quer zu Faserrichtung	R_{\perp}^c	170 MPa	–
Schubfestigkeit	$R_{\perp\parallel}$	90 MPa	–
Neigungsmaß	$p_{\perp\parallel}$	0,1	–
Kurvenparameter	$b_{\perp\parallel}$	0,1	–
Kurvenparameter	$b_{\perp\perp}$	1,0	–
Bruchzähigkeit der Laminatgrenzfläche	G_c	0,14 N/mm	–

Literaturverzeichnis

- [Agathos et al. 2017] AGATHOS, K. ; VENTURA, G. ; CHATZI, E. ; BORDAS, S. P. A.: Stable 3D XFEM/vector-level sets for non-planar 3D crack propagation and comparison of enrichment schemes. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2017)
- [Akin 1976] AKIN, J. E.: The generation of elements with singularities. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 10 (1976), Nr. 6, S. 1249–1259
- [Aksentian 1967] AKSENTIAN, O. K.: Singularities of the stress-strain state of a plate in the neighborhood of an edge. In: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 31 (1967), Nr. 1, S. 193–202
- [Anderson u. Anderson 2005] ANDERSON, T. L. ; ANDERSON, T.: *Fracture mechanics: fundamentals and applications*. CRC press, 2005
- [Apel 1999] APEL, T.: *Anisotropic Finite Elements: Local Estimates and Applications*. Vieweg+Teubner, 1999 (Advances in Numerical Mathematics)
- [Apel et al. 2008] APEL, T. ; LEGUILLON, D. ; PESTER, C. ; YOSIBASH, Z.: Edge singularities and structure of the 3-D Williams expansion. In: *Comptes Rendus Mécanique* 336 (2008), Nr. 8, S. 629–635
- [Apel et al. 2002a] APEL, T. ; MEHRMANN, V. ; WATKINS, D.: Structured eigenvalue methods for the computation of corner singularities in 3D anisotropic elastic structures. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191 (2002), Nr. 39–40, S. 4459–4473
- [Apel et al. 2002b] APEL, T. ; SÄNDIG, A.-M. ; SOLOV'EV, S. I.: Computation of 3D vertex singularities for linear elasticity: Error estimates for a finite element method on graded meshes. In: *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 36 (2002), Nr. 6, S. 1043–1070
- [Apel et al. 1996] APEL, T. ; SÄNDIG, A.-M. ; WHITEMAN, J. R.: Graded mesh refinement and error estimates for finite element solutions of elliptic boundary value problems in non-smooth domains. In: *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 19 (1996), Nr. 1, S. 63–85
- [Arnoldi 1951] ARNOLDI, W. E.: The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 9 (1951), Nr. 1, S. 17–29
- [Artel u. Becker 2005] ARTEL, J. ; BECKER, W.: Coupled and uncoupled analyses of piezoelectric free-edge effect in laminated plates. In: *Composite Structures* 69 (2005), Nr. 3, S. 329–335
- [Artel 2007] ARTEL, J.: Eine Erweiterung der Rand-Finite-Elemente-Methode und deren Anwendung auf Randeﬀekte in ebenen Laminaten. In: *Forschungsberichte des Instituts für Mechanik der Technischen Universität Darmstadt* Bd. 17. Studienbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, Germany, 2007

- [Artel u. Becker 2006] ARTEL, J. ; BECKER, W.: On kinematic coupling equations within the scaled boundary finite-element method. In: *Archive of Applied Mechanics* 76 (2006), Nr. 11-12, S. 617–633
- [Atluri u. Kathiresan 1979] ATLURI, S. N. ; KATHIRESAN, K.: 3D analyses of surface flaws in thick-walled reactor pressure-vessels using displacement-hybrid finite element method. In: *Nuclear Engineering and Design* 51 (1979), Nr. 2, S. 163–176
- [Attaporn u. Koguchi 2009] ATTAPORN, W. ; KOGUCHI, H.: Intensity of stress singularity at a vertex and along the free edges of the interface in 3D-dissimilar material joints using 3D-enriched FEM. In: *Computer Modeling in Engineering and Sciences (CMES)* 39 (2009), Nr. 3, S. 237–262
- [Ayhan et al. 2007] AYHAN, A. O. ; KAYA, A. C. ; NIED, H. F.: Analysis of three-dimensional interface cracks using enriched finite elements. In: *International Journal of Fracture* 142 (2007), Nr. 3, S. 255–276
- [Barroso et al. 2012] BARROSO, A. ; GRACIANI, E. ; MANTIĆ, V. ; PARÍS, F.: A least squares procedure for the evaluation of multiple generalized stress intensity factors at 2D multimaterial corners by BEM. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 36 (2012), Nr. 3, S. 458–470
- [Barsoum 1976] BARSOUM, R. S.: On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 10 (1976), Nr. 1, S. 25–37
- [Barsoum 1977] BARSOUM, R. S.: Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 11 (1977), Nr. 1, S. 85–98
- [Barsoum 1988a] BARSOUM, R. S.: Application of the finite element iterative method to the eigenvalue problem of a crack between dissimilar media. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26 (1988), Nr. 3, S. 541–554
- [Barsoum 1988b] BARSOUM, R. S.: Theoretical basis of the finite element iterative method for the eigenvalue problem in stationary cracks. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26 (1988), Nr. 3, S. 531–539
- [Barsoum u. Chen 1991] BARSOUM, R. S. ; CHEN, T.-K.: Three-dimensional surface singularity of an interface crack. In: *International Journal of Fracture* 50 (1991), Nr. 3, S. 221–237
- [Bathe 2004] BATHE, K.-J.: *Finite-Element-Procedures*. 2. Auflage. K.J. Bathe, Watertown, MA, USA, 2004
- [Bažant u. Planas 1997] BAŽANT, Z. P. ; PLANAS, J.: *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. CRC press, 1997
- [Bažant 1974] BAŽANT, Z. P.: Three-dimensional harmonic functions near termination or intersection of gradient singularity lines: A general numerical method. In: *International Journal of Engineering Science* 12 (1974), Nr. 3, S. 221–243
- [Bažant u. Estensoro 1979] BAŽANT, Z. P. ; ESTENSORO, L. F.: Surface singularity and crack propagation. In: *International Journal of Solids and Structures* 15 (1979), Nr. 5, S. 405–426

- [Bažant u. Estensoro 1980] BAŽANT, Z. P. ; ESTENSORO, L. F.: Addendum to the paper: surface singularity and crack propagation. In: *International Journal of Solids and Structures* 16 (1980), Nr. 5, S. 479–481
- [Becker u. Gross 2002] BECKER, W. ; GROSS, D.: *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. Springer, 2002
- [Behnke et al. 2014] BEHNKE, R. ; MUNDIL, M. ; BIRK, C. ; KALISKE, M.: A physically and geometrically nonlinear scaled-boundary-based finite element formulation for fracture in elastomers. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 99 (2014), Nr. 13, S. 966–999
- [Belgeli 2016] BELGELI, C.: *Untersuchung von einschnittigen Überlappungsfügungen mit Hilfe eines SBFEM-Superelements in ABAQUS*. TU Darmstadt, Bachelorthesis, 2016
- [Benthem 1977] BENTHEM, J.: State of stress at the vertex of a quarter-infinite crack in a half-space. In: *International Journal of Solids and Structures* 13 (1977), Nr. 5, S. 479–492
- [Benthem 1980] BENTHEM, J.: The quarter-infinite crack in a half space; alternative and additional solutions. In: *International Journal of Solids and Structures* 16 (1980), Nr. 2, S. 119–130
- [Benzley 1974] BENZLEY, S. E.: Representation of singularities with isoparametric finite elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 8 (1974), Nr. 3, S. 537–545
- [Berthelot 2003] BERTHELOT, J.-M.: Transverse cracking and delamination in cross-ply glass-fiber and carbon-fiber reinforced plastic laminates: Static and fatigue loading. In: *Applied Mechanics Reviews* 56 (2003), Nr. 1, S. 111–147
- [Birk u. Song 2009] BIRK, C. ; SONG, C.: A continued-fraction approach for transient diffusion in unbounded medium. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2009), Nr. 33–36, S. 2576–2590
- [Blackburn u. Hellen 1977] BLACKBURN, W. S. ; HELLEN, T. K.: Calculation of stress intensity factors in three dimensions by finite element methods. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 11 (1977), Nr. 2, S. 211–229
- [Blum 1988] BLUM, H.: Numerical Treatment of Corner and Crack Singularities. In: STEIN, E. (Hrsg.) ; WENDLAND, W. (Hrsg.): *Finite Element and Boundary Element Techniques from Mathematical and Engineering Point of View* Bd. 301. Springer, 1988, S. 171–212
- [Bogdanor u. Oskay 2017a] BOGDANOR, M. J. ; OSKAY, C.: Prediction of progressive damage and strength of IM7/977-3 composites using the Eigendeformation-based homogenization approach: Static loading. In: *Journal of Composite Materials* 51 (2017), Nr. 10, S. 1455–1472
- [Bogdanor u. Oskay 2017b] BOGDANOR, M. J. ; OSKAY, C.: Prediction of progressive fatigue damage and failure behavior of IM7/977-3 composites using the reduced-order multiple space-time homogenization approach. In: *Journal of Composite Materials* 51 (2017), Nr. 15, S. 2101–2117
- [Bogdanor et al. 2015] BOGDANOR, M. J. ; OSKAY, C. ; CLAY, S. B.: Multiscale modeling of failure in composites under model parameter uncertainty. In: *Computational Mechanics* 56 (2015), Nr. 3, S. 389–404

- [Bogy 1972] BOGY, D. B.: The plane solution for anisotropic elastic wedges under normal and shear loading. In: *Journal of Applied Mechanics* 39 (1972), Nr. 4, S. 1103–1109
- [Bourdin et al. 2000] BOURDIN, B. ; FRANCFORT, G. ; MARIGO, J.-J.: Numerical experiments in revisited brittle fracture. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (2000), Nr. 4, S. 797–826
- [Bourdin et al. 2008] BOURDIN, B. ; FRANCFORT, G. A. ; MARIGO, J.-J.: The Variational Approach to Fracture. In: *Journal of Elasticity* 91 (2008), Nr. 1, S. 5–148
- [Bremm 2017] BREMM, S.: *Untersuchung der Konvergenzeigenschaften der Skalierten Rand-Finite-Elemente-Methode*. TU Darmstadt, Masterthesis, 2017
- [Brod 2015] BROD, M.: *Vergleich von FEM und SBFEM zur Untersuchung von Doppelpressituationen in Faser-Verbund-Laminaten*. TU Darmstadt, Masterthesis, 2015
- [Buchholz et al. 2004] BUCHHOLZ, F.-G. ; CHERGUI, A. ; RICHARD, H.: Fracture analyses and experimental results of crack growth under general mixed mode loading conditions. In: *Engineering Fracture Mechanics* 71 (2004), Nr. 4–6, S. 455–468
- [Chen u. Sih 1981] CHEN, E. P. ; SIH, G. C.: Cracks in composite materials. In: SIH, G. C. (Hrsg.): *Mechanics of fracture* Bd. 6. Martinus Nijhoff, 1981
- [Chen 1985] CHEN, E.: Finite element analysis of a bimaterial interface crack. In: *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 3 (1985), Nr. 3, S. 257–262
- [Chen et al. 2013] CHEN, S. ; LI, Q. ; LIU, Y. ; XUE, Z.: Mode III 2-D fracture analysis by the scaled boundary finite element method. In: *Acta Mechanica Solida Sinica* 26 (2013), Nr. 6, S. 619–628
- [Chidgzev et al. 2008] CHIDGZEY, S. ; TREVELYAN, J. ; DEEKS, A.: Coupling of the boundary element method and the scaled boundary finite element method for computations in fracture mechanics. In: *Computers & Structures* 86 (2008), S. 1198–1203
- [Chidgzev u. Deeks 2005] CHIDGZEY, S. R. ; DEEKS, A. J.: Determination of coefficients of crack tip asymptotic fields using the scaled boundary finite element method. In: *Engineering Fracture Mechanics* 72 (2005), S. 2019–2036
- [Clay u. Engelstad 2016] CLAY, S. ; ENGELSTAD, S.: Observations and Lessons Learned from Composite Progressive Damage Analysis Benchmarking Exercise. In: DAVIDSON, B. D. (Hrsg.) ; RATCLIFFE, J. G. (Hrsg.) ; CZABAJ, M. W. (Hrsg.): *Proceedings of the American Society for Composites: Thirty-First Technical Conference on Composite Materials*, 2016
- [Cornetti et al. 2006] CORNETTI, P. ; PUGNO, N. ; CARPINTERI, A. ; TAYLOR, D.: Finite fracture mechanics: a coupled stress and energy failure criterion. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), Nr. 14, S. 2021–2033
- [Costabel et al. 2004] COSTABEL, M. ; DAUGE, M. ; YOSIBASH, Z.: A quasi-dual function method for extracting edge stress intensity functions. In: *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 35 (2004), Nr. 5, S. 1177–1202
- [Cottrell et al. 2009] COTTRELL, J. A. ; HUGHES, T. J. ; BAZILEVS, Y.: *Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA*. 1. Auflage. Wiley, 2009

- [Crossman et al. 1983] CROSSMAN, F. W. ; WARREN, W. J. ; WANG, A. S. D.: Influence of ply thickness on damage accumulation and final fracture (in laminates). In: *Advances in Aerospace Structures, Materials and Dynamics* (1983), S. 215–226
- [Crouch et al. 2013] CROUCH, R. D. ; CLAY, S. B. ; OSKAY, C.: Experimental and computational investigation of progressive damage accumulation in CFRP composites. In: *Composites Part B: Engineering* 48 (2013), Nr. Supplement C, S. 59–67
- [Cuntze 2012] CUNTZE, R.: The predictive capability of failure mode concept-based strength conditions for laminates composed of unidirectional laminae under static triaxial stress states. In: *Journal of Composite Materials* 46 (2012), Nr. 19-20, S. 2563–2594
- [Cuntze 2006] CUNTZE, R. G.: Efficient 3D and 2D failure conditions for UD laminae and their application within the verification of the laminate design. In: *Composites Science and Technology* 66 (2006), Nr. 7, S. 1081–1096
- [Cuntze 2004] CUNTZE, R.: The predictive capability of failure mode concept-based strength criteria for multi-directional laminates—part B. In: *Composites Science and Technology* 64 (2004), Nr. 3, S. 487–516
- [Cuntze u. Freund 2004] CUNTZE, R. ; FREUND, A.: The predictive capability of failure mode concept-based strength criteria for multidirectional laminates. In: *Composites Science and Technology* 64 (2004), Nr. 3, S. 343–377
- [Dai et al. 2015] DAI, S. ; AUGARDE, C. ; DU, C. ; CHEN, D.: A fully automatic polygon scaled boundary finite element method for modelling crack propagation. In: *Engineering Fracture Mechanics* 133 (2015), S. 163–178
- [Dasgupta 1982] DASGUPTA, G.: A finite element formulation for unbounded homogeneous continua. In: *Journal of Applied Mechanics* 49 (1982), Nr. 1, S. 136–140
- [Deeks u. Wolf 2002a] DEEKS, A. J. ; WOLF, J. P.: A virtual work derivation of the scaled boundary finite-element method for elastostatics. In: *Computational Mechanics* 28 (2002), Nr. 6, S. 489–504
- [Deeks u. Cheng 2003] DEEKS, A. J. ; CHENG, L.: Potential flow around obstacles using the scaled boundary finite-element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 41 (2003), Nr. 7, S. 721–741
- [Deeks u. Wolf 2002b] DEEKS, A. J. ; WOLF, J. P.: An h-hierarchical adaptive procedure for the scaled boundary finite-element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 54 (2002), S. 585–605
- [Dimitrov 2004] DIMITROV, A.: On singularities in the solution of three-dimensional Stokes flow and incompressible elasticity problems with corners. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 60 (2004), Nr. 4, S. 773–801
- [Dimitrov et al. 2001] DIMITROV, A. ; ANDRĂ, H. ; SCHNACK, E.: Efficient computation of order and mode of corner singularities in 3D-elasticity. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 52 (2001), Nr. 8, S. 805–827
- [Dimitrov et al. 2002] DIMITROV, A. ; ANDRĂ, H. ; SCHNACK, E.: Singularities near three-dimensional corners in composite laminates. In: *International Journal of Fracture* 115 (2002), Nr. 4, S. 361–375

- [Dimitrov u. Schnack 2002] DIMITROV, A. ; SCHNACK, E.: Asymptotical expansion in non-Lipschitzian domains – a numerical approach. In: *Numerical Linear Algebra with Applications* 9 (2002), Nr. 6-7, S. 467–492
- [Duarte et al. 2000] DUARTE, C. ; BABUŠKA, I. ; ODEN, J.: Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. In: *Computers & Structures* 77 (2000), Nr. 2, S. 215–232
- [Eshelby et al. 1953] ESHELBY, J. ; READ, W. ; SHOCKLEY, W.: Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory. In: *Acta Metallurgica* 1 (1953), Nr. 3, S. 251–259
- [Felger u. Becker 2017] FELGER, J. ; BECKER, W.: A complex potential method for the asymptotic solution of wedge problems using first-order shear deformation plate theory. In: *European Journal of Mechanics– A/Solids* 61 (2017), S. 383–392
- [Fleming et al. 1997] FLEMING, M. ; CHU, Y. ; MORAN, B. ; BELYTSCHKO, T. ; LU, Y. ; GU, L.: Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40 (1997), Nr. 8, S. 1483–1504
- [Forman et al. 1967] FORMAN, R. G. ; KEARNEY, V. E. ; ENGLE, R. M.: Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures. In: *Journal of Basic Engineering* 89 (1967), Nr. 3, S. 459–463
- [Francfort u. Marigo 1998] FRANCFORT, G. ; MARIGO, J.-J.: Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46 (1998), Nr. 8, S. 1319–1342
- [Fries u. Belytschko 2010] FRIES, T.-P. ; BELYTSCHKO, T.: The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 84 (2010), Nr. 3, S. 253–304
- [García et al. 2016] GARCÍA, I. ; CARTER, B. ; INGRAFFEA, A. ; MANTIČ, V.: A numerical study of transverse cracking in cross-ply laminates by 3D finite fracture mechanics. In: *Composites Part B: Engineering* 95 (2016), S. 475–487
- [García et al. 2014] GARCÍA, I. ; MANTIČ, V. ; BLÁZQUEZ, A. ; PARÍS, F.: Transverse crack onset and growth in cross-ply $[0/90]_s$ laminates under tension. Application of a coupled stress and energy criterion. In: *International Journal of Solids and Structures* (2014)
- [Gaul u. Fiedler 2013] GAUL, L. ; FIEDLER, C.: *Methode der Randelemente in Statik und Dynamik*. 2. Auflage. Springer, 2013
- [Ghahremani u. Shih 1992] GHAHREMANI, F. ; SHIH, C.: Corner singularities of three-dimensional planar interface cracks. In: *Journal of Applied Mechanics* 59 (1992), Nr. 1, S. 61–68
- [Ghahremani 1991] GHAHREMANI, F.: A numerical variational method for extracting 3D singularities. In: *International Journal of Solids and Structures* 27 (1991), Nr. 11, S. 1371–1386
- [Gifford u. Hilton 1978] GIFFORD, L. N. J. ; HILTON, P. D.: Stress intensity factors by enriched finite elements. In: *Engineering Fracture Mechanics* 10 (1978), Nr. 3, S. 485–496

- [Glushkov et al. 1999] GLUSHKOV, E. ; GLUSHKOVA, N. ; LAPINA, O.: 3-D elastic stress singularity at polyhedral corner points. In: *International Journal of Solids and Structures* 36 (1999), Nr. 8, S. 1105–1128
- [Golub u. Van Loan 1996] GOLUB, G. H. ; VAN LOAN, C. F.: *Matrix computations*. 3. Auflage. John Hopkins University Press, 1996
- [Goswami u. Becker 2012] GOSWAMI, S. ; BECKER, W.: Computation of 3-D stress singularities for multiple cracks and crack intersections by the scaled boundary finite element method. In: *International Journal of Fracture* 175 (2012), Nr. 1, S. 13–25
- [Griffin 1988] GRIFFIN, O. H.: Three Dimensional Thermal Stresses in Angle-Ply Composite Laminates. In: *Journal of Composite Materials* 22 (1988), Nr. 1, S. 53–70
- [Griffin u. Roberts 1983] GRIFFIN, O. H. ; ROBERTS, J. C.: Numerical/Experimental Correlation of Three-Dimensional Thermal Stress Distributions in Graphite/Epoxy Laminates. In: *Journal of Composite Materials* 17 (1983), Nr. 6, S. 539–548
- [Grisvard 1985] GRISVARD, P.: *Monographs and studies in mathematics*. Bd. 24: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1985
- [Gross u. Seelig 2016] GROSS, D. ; SEELIG, T.: *Bruchmechanik: Mit einer Einführung in die Mikromechanik*. 6. Auflage. Springer, 2016
- [Gu u. Belytschko 1994] GU, L. ; BELYTSCHKO, T.: A numerical study of stress singularities in a two-material wedge. In: *International Journal of Solids and Structures* 31 (1994), Nr. 6, S. 865–889
- [Hallett et al. 2008] HALLETT, S. R. ; JIANG, W.-G. ; KHAN, B. ; WISNOM, M. R.: Modelling the interaction between matrix cracks and delamination damage in scaled quasi-isotropic specimens. In: *Composites Science and Technology* 68 (2008), Nr. 1, S. 80–89
- [Hashin 1985] HASHIN, Z.: Analysis of cracked laminates: a variational approach. In: *Mechanics of Materials* 4 (1985), Nr. 2, S. 121–136
- [Hashin 1986] HASHIN, Z.: Analysis of stiffness reduction of cracked cross-ply laminates. In: *Engineering Fracture Mechanics* 25 (1986), Nr. 5, S. 771–778
- [Hashin 1996] HASHIN, Z.: Finite thermoelastic fracture criterion with application to laminate cracking analysis. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44 (1996), Nr. 7, S. 1129–1145
- [He et al. 2014] HE, Y. ; YANG, H. ; DEEKS, A. J.: Use of Fourier shape functions in the scaled boundary method. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 41 (2014), Nr. 0, S. 152–159
- [Hebel 2010] HEBEL, J.: Modellierung spröder Rissbildung an Spannungskonzentrationen mit der Bruchmechanik finiter Risse. In: *Forschungsberichte des Instituts für Mechanik der Technischen Universität Darmstadt* Bd. 22. Studienbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, Germany, 2010

- [Hell u. Becker 2016a] HELL, S. ; BECKER, W.: The use of enriched base functions in the three-dimensional Scaled Boundary Finite Element Method. In: PAPADRAKAKIS, M. (Hrsg.) ; PAPADOPOULOS, V. (Hrsg.) ; STEFANOPOULOS, G. (Hrsg.) ; PLEVRIS, V. (Hrsg.): *Proceedings of the 7th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2016)*, 2016
- [Hell et al. 2017] HELL, S. ; FELGER, J. ; BECKER, W.: Analysis of 3D Crack Configurations in Cross-Ply Laminates by means of Finite Fracture Mechanics and the Enriched SBFEM. In: *Proceedings of ICF14, 14th International Conference on Fracture, Rhodes, Greece, 2017*
- [Hell et al. 2014] HELL, S. ; WEISSGRAEBER, P. ; FELGER, J. ; BECKER, W.: A coupled stress and energy criterion for the assessment of crack initiation in single lap joints: A numerical approach. In: *Engineering Fracture Mechanics* 117 (2014), S. 112–126
- [Hell u. Becker 2013] HELL, S. ; BECKER, W.: Hypersingularities in Three-Dimensional Crack Configurations in Composite Laminates. In: *Key Engineering Materials* 577-578 (2013), S. 209–212
- [Hell u. Becker 2014] HELL, S. ; BECKER, W.: Hypersingularities in three-dimensional crack configurations in composite laminates. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics PAMM* 14 (2014), Nr. 1, S. 157–158
- [Hell u. Becker 2015a] HELL, S. ; BECKER, W.: Analysis of three-dimensional crack configurations in composite laminates using the scaled boundary finite element method. In: *Proceedings of the 8th International Congress of Croatian Society of Mechanics* (2015)
- [Hell u. Becker 2015b] HELL, S. ; BECKER, W.: Scaled Boundary Finite Element Analysis of three-dimensional crack configurations in laminate structures. In: *Proceedings of the International Conference on Computational Methods (ICCM) 2* (2015), S. 837–846
- [Hell u. Becker 2015c] HELL, S. ; BECKER, W.: The scaled boundary finite element method for the analysis of 3D crack interaction. In: *Journal of Computational Science* 9 (2015), S. 76–81
- [Hell u. Becker 2016b] HELL, S. ; BECKER, W.: Determination of singularity exponents in 3D elasticity problems using enriched base functions in the Scaled Boundary Finite Element Method. In: *PAMM* 16 (2016), Nr. 1, S. 137–138
- [Hell u. Becker 2016c] HELL, S. ; BECKER, W.: Energy release rates at two perpendicularly meeting cracks by use of the Scaled Boundary Finite Element Method. In: *Procedia Structural Integrity* 2 (2016), S. 2471–2478
- [Henshell u. Shaw 1975] HENSHELL, R. D. ; SHAW, K. G.: Crack tip finite elements are unnecessary. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 9 (1975), Nr. 3, S. 495–507
- [Herr u. Nied 2005] HERR, A. ; NIED, H.: Numerical simulation of 3-D mixed-mode crack propagation on bimaterial interfaces. In: *Proceedings of ICF11, 11th International Conference on Fracture, Turin, Italy, 2005*, S. 20–25
- [Heyder et al. 2005] HEYDER, M. ; KOLK, K. ; KUHN, G.: Numerical and experimental investigations of the influence of corner singularities on 3D fatigue crack propagation. In: *Engineering Fracture Mechanics* 72 (2005), Nr. 13, S. 2095–2105

- [Heyder u. Kuhn 2006] HEYDER, M. ; KUHN, G.: 3D fatigue crack propagation: Experimental studies. In: *International Journal of Fatigue* 28 (2006), Nr. 5-6, S. 627-634
- [Hinch 1991] HINCH, E. J.: *Perturbation methods*. Cambridge University Press, 1991
- [Hinton et al. 2004] HINTON, M. J. (Hrsg.) ; KADDOUR, A. S. (Hrsg.) ; SODEN, P. D. (Hrsg.): *Failure Criteria in Fibre-Reinforced-Polymer Composites*. Elsevier, 2004
- [Hofacker u. Miehe 2013] HOFACKER, M. ; MIEHE, C.: A phase field model of dynamic fracture: Robust field updates for the analysis of complex crack patterns. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 93 (2013), Nr. 3, S. 276-301
- [Im 1990] IM, S.: Asymptotic stress field around a crack normal to the ply-interface of an anisotropic composite laminate. In: *International Journal of Solids and Structures* 26 (1990), Nr. 1, S. 111-127
- [Islam u. Koguchi 2010] ISLAM, M. S. ; KOGUCHI, H.: Characteristics of Singular Stress Distribution at a Vertex in Transversely Isotropic Piezoelectric Dissimilar Material Joints. In: *Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering* 4 (2010), Nr. 7, S. 1011-1026
- [Johnson u. McLay 1968] JOHNSON, M. W. Jr. ; MCLAY, R. W.: Convergence of the Finite Element Method in the Theory of Elasticity. In: *Journal of Applied Mechanics* 35 (1968), Nr. 2, S. 274-278
- [Jung 2017] JUNG, J. D.: Skalierte Rand-Finite-Elemente-Methode für beliebig profilierte Laminat-Leichtbau-Balken. In: *Forschungsberichte des Instituts für Mechanik der Technischen Universität Darmstadt* Bd. 43. Studienbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, Germany, 2017
- [Jung u. Becker 2014] JUNG, J. D. ; BECKER, W.: SBFEM elements for thin-walled composite beams with arbitrary layup. In: *PAMM* 14 (2014), Nr. 1, S. 267-268
- [Kaddour u. Hinton 2013] KADDOUR, A. ; HINTON, M.: Maturity of 3D failure criteria for fibre-reinforced composites: Comparison between theories and experiments: Part B of WWFE-II. In: *Journal of Composite Materials* 47 (2013), Nr. 6-7, S. 925-966
- [Kanninen u. Popelar 1985] KANNINEN, M. F. ; POPELAR, C. H.: *Oxford Engineering Science Series*. Bd. 15: *Advanced Fracture Mechanics*. 1. Auflage. Oxford University Press, 1985
- [Kassir u. Sih 1975] KASSIR, M. K. ; SIH, G. C.: Three-dimensional crack problems. In: SIH, G. C. (Hrsg.): *Mechanics of fracture* Bd. 2. Noordhoff International, 1975
- [Kaya u. Nied 1993] KAYA, A. C. ; NIED, H. F.: Interface fracture analysis of bonded ceramic layers using enriched finite elements. In: KOKINI, K. (Hrsg.): *Proceedings of the Symposium on Ceramic Coatings* Bd. 44, 1993 (ASME MD), S. 47-71
- [Khaji u. Khodakarami 2012] KHAJI, N. ; KHODAKARAMI, M.: A semi-analytical method with a system of decoupled ordinary differential equations for three-dimensional elastostatic problems. In: *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012), Nr. 18, S. 2528-2546
- [Khodakarami u. Khaji 2011] KHODAKARAMI, M. ; KHAJI, N.: Analysis of elastostatic problems using a semi-analytical method with diagonal coefficient matrices. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 35 (2011), Nr. 12, S. 1288-1296

- [Kim et al. 2001] KIM, Y. J. ; KIM, H.-G. ; IM, S.: Mode decomposition of three-dimensional mixed-mode cracks via two-state integrals. In: *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), Nr. 36, S. 6405–6426
- [Kimura u. Koguchi 2015] KIMURA, N. ; KOGUCHI, H.: Evaluation of the strength of Interface for multi-layered materials in photonic devices. In: *ASME 2015 International Technical Conference and Exhibition on Packaging and Integration of Electronic and Photonic Microsystems (InterPACK2015)* American Society of Mechanical Engineers, 2015
- [Klingbeil 1966] KLINGBEIL, D.: *Tensorrechnung für Ingenieure*. Bibliographische Institut AG, 1966
- [Klinkel et al. 2015] KLINKEL, S. ; CHEN, L. ; DORNISCH, W.: A NURBS based hybrid collocation–Galerkin method for the analysis of boundary represented solids. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 284 (2015), S. 689–711. – Isogeometric Analysis Special Issue
- [Koguchi u. Taniguchi 2009] KOGUCHI, H. ; TANIGUCHI, T.: The Intensity of Singularity of Residual Thermal Stresses at A Vertex in Three-Dimensional Bonded Structures. In: *Proceedings of ICF12, 12th International Conference on Fracture, Ottawa, Canada, 2009*
- [Koguchi 1997] KOGUCHI, H.: Stress singularity analysis in three-dimensional bonded structure. In: *International Journal of Solids and Structures* 34 (1997), Nr. 4, S. 461–480
- [Koguchi u. da Costa 2010] KOGUCHI, H. ; COSTA, J. A.: Analysis of the stress singularity field at a vertex in 3D-bonded structures having a slanted side surface. In: *International Journal of Solids and Structures* 47 (2010), Nr. 22–23, S. 3131–3140
- [Koguchi u. Hoshi 2012] KOGUCHI, H. ; HOSHI, K.: Evaluation of Joining Strength of Silicon-Resin Interface at a Vertex in a Three-Dimensional Joint Structure. In: *Journal of Electronic Packaging* 134 (2012), Nr. 2, S. 020902
- [Koguchi u. Muramoto 2000] KOGUCHI, H. ; MURAMOTO, T.: The order of stress singularity near the vertex in three-dimensional joints. In: *International Journal of Solids and Structures* 37 (2000), Nr. 35, S. 4737–4762
- [Koguchi et al. 2015] KOGUCHI, H. ; YOKOYAMA, K. ; LUANGARPA, C.: Variation of stress intensity factor along a small interface crack front in singular stress fields. In: *International Journal of Solids and Structures* 71 (2015), S. 156–168
- [Kolk u. Kuhn 2006] KOLK, K. ; KUHN, G.: The advanced simulation of fatigue crack growth in complex 3D structures. In: *Archive of Applied Mechanics* 76 (2006), Nr. 11, S. 699–709
- [Kondrat'ev 1967] KONDRAT'EV, V. A.: Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. In: *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva* 16 (1967), S. 209–292
- [Korepanova et al. 2013] KOREPANOVA, T. ; MATVEENKO, V. ; SEVODINA, N.: Numerical analysis of stress singularity at singular points of three-dimensional elastic bodies. In: *Acta Mechanica* 224 (2013), Nr. 9, S. 2045–2063
- [Kuhn 2013] KUHN, C.: *Numerical and Analytical Investigation of a Phase Field Model for Fracture*, Technische Universität Kaiserslautern, Diss., 2013

- [Kuna 2008] KUNA, M.: *Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen: Finite Elemente in der Bruchmechanik*. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2008
- [Kuna u. Zwicke 1990] KUNA, M. ; ZWICKE, M.: A mixed hybrid finite element for three-dimensional elastic crack analysis. In: *International Journal of Fracture* 45 (1990), Nr. 1, S. 65–79
- [Laborde et al. 2005] LABORDE, P. ; POMMIER, J. ; RENARD, Y. ; SALAÜN, M.: High order extended finite element method for cracked domains. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 64 (2005), Nr. 3, S. pp. 354–381
- [Labossiere u. Dunn 2001] LABOSSIÈRE, P. E. W. ; DUNN, M. L.: Fracture initiation at three-dimensional bimaterial interface corners. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 49 (2001), Nr. 3, S. 609–634
- [Lancaster 2005] LANCASTER, J. F.: *Engineering Catastrophes: Causes and Effects of Major Accidents*. 3. Auflage. Woodhead, 2005
- [Lee u. Im 2003] LEE, Y. ; IM, S.: On the computation of the near-tip stress intensities for three-dimensional wedges via two-state M-integral. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 51 (2003), Nr. 5, S. 825–850
- [Lee et al. 2006] LEE, Y. ; JEON, I. ; IM, S.: The stress intensities of three-dimensional corner singularities in a laminated composite. In: *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006), Nr. 9, S. 2710–2722
- [Leguillon 1989] LEGUILLON, D.: Calcul du taux de restitution de l'énergie au voisinage d'une singularité. In: *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'univers, Sciences de la Terre* 309 (1989), Nr. 10, S. 945–950
- [Leguillon 2014] LEGUILLON, D.: An attempt to extend the 2D coupled criterion for crack nucleation in brittle materials to the 3D case. In: *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 74 (2014), Nr. Supplement C, S. 7–17
- [Leguillon u. Sanchez-Palencia 1999] LEGUILLON, D. ; SANCHEZ-PALENCIA, E.: On 3D cracks intersecting a free surface in laminated composites. In: *International Journal of Fracture* 99 (1999), Nr. 1-2, S. 25–40
- [Leguillon 2002] LEGUILLON, D.: Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch. In: *European Journal of Mechanics-A/Solids* 21 (2002), Nr. 1, S. 61–72
- [Leguillon u. Martin 2012] LEGUILLON, D. ; MARTIN, E.: Crack nucleation at stress concentration points in composite materials—Application to the crack deflection by an interface. In: MANTIČ, V. (Hrsg.): *Mathematical Methods and Models in Composites* Bd. 5. Imperial College Press, 2012, S. 401–424
- [Leguillon u. Martin 2013] LEGUILLON, D. ; MARTIN, E.: The strengthening effect caused by an elastic contrast—part I: the bimaterial case. In: *International Journal of Fracture* 179 (2013), Nr. 1-2, S. 157–167
- [Leguillon u. Sanchez-Palencia 1987] LEGUILLON, D. ; SANCHEZ-PALENCIA, E.: *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*. John Wiley & Sons, 1987

- [Lehmann et al. 2006] LEHMANN, L. ; LANGER, S. ; CLASEN, D.: Scaled Boundary Finite Element Method for Acoustics. In: *Journal of Computational Acoustics* 14 (2006), Nr. 4, S. 489–506
- [Lekhnitskiĭ 1963] LEKHNITSKIĬ, S. G. ; BRANDSTATTER, J. J. (Hrsg.): *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. Holden-day, 1963
- [Lemaitre u. Chaboche 1994] LEMAITRE, J. ; CHABOCHE, J.-L.: *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, 1994
- [Li et al. 2015] LI, C. ; OOI, E. T. ; SONG, C. ; NATARAJAN, S.: SBFEM for fracture analysis of piezoelectric composites under thermal load. In: *International Journal of Solids and Structures* 52 (2015), S. 114–129
- [Li u. Zhang 2006] LI, J. ; ZHANG, X.: A criterion study for non-singular stress concentrations in brittle or quasi-brittle materials. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), Nr. 4, S. 505–523
- [Liechti et al. 1992] LIECHTI, K. ; CHAI, Y.-S. ; LIANG, Y.-M.: Three-dimensional effects in interfacial crack propagation. In: *Experimental Mechanics* 32 (1992), Nr. 3, S. 218–224
- [Lin et al. 2014] LIN, G. ; ZHANG, Y. ; HU, Z. ; ZHONG, H.: Scaled boundary isogeometric analysis for 2D elastostatics. In: *Science China Physics, Mechanics and Astronomy* 57 (2014), Nr. 2, S. 286–300
- [Liu et al. 2010] LIU, J. ; LIN, G. ; WANG, F. ; LI, J.: The scaled boundary finite element method applied to electromagnetic field problems. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 10 (2010), Nr. 1, S. 012245
- [Luangarpa u. Koguchi 2014] LUANGARPA, C. ; KOGUCHI, H.: Analysis of a three-dimensional dissimilar material joint with one real singularity using a conservative integral. In: *International Journal of Solids and Structures* 51 (2014), Nr. 15–16, S. 2908–2919
- [Luangarpa u. Koguchi 2016a] LUANGARPA, C. ; KOGUCHI, H.: Analysis of Singular Stress Fields at 3D Piezoelectric Bonded Joints Using a Conservative Integral. In: *ASME 2016 International Mechanical Engineering Congress and Exposition* American Society of Mechanical Engineers, 2016
- [Luangarpa u. Koguchi 2016b] LUANGARPA, C. ; KOGUCHI, H.: Analysis of singular stresses at a vertex and along a singular line in three-dimensional bonded joints using a conservative integral. In: *European Journal of Mechanics– A/Solids* 60 (2016), S. 208–216
- [Man et al. 2012] MAN, H. ; SONG, C. ; GAO, W. ; TIN-LOI, F.: A unified 3D-based technique for plate bending analysis using scaled boundary finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 91 (2012), Nr. 5, S. 491–515
- [MATLAB 2014] MATLAB: *Version 8.3.0 (R2014a)*. Natick, Massachusetts : The MathWorks Inc., 2014
- [Maugin 1992] MAUGIN, G. A.: *The thermomechanics of plasticity and fracture*. Cambridge University Press, 1992

- [Mayland 2012] MAYLAND, W.: Untersuchungen zu Spannungssingularitätsordnungen in linear-elastischen und piezoelektrischen Multimaterialkonfigurationen mit der Rand-Finite-Elemente-Methode. In: *Forschungsberichte des Instituts für Mechanik der Technischen Universität Darmstadt* Bd. 25. Studienbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, Germany, 2012
- [Meda et al. 1998] MEDA, G. ; MESSNER, T. ; SINCLAIR, G. ; SOLECKI, J.: Path-independent H-integrals for three-dimensional fracture mechanics. In: *International Journal of Fracture* 94 (1998), Nr. 3, S. 217–234
- [van der Meer et al. 2011] MEER, F. P. d. ; SLUYS, L. J. ; HALLETT, S. R. ; WISNOM, M. R.: Computational modeling of complex failure mechanisms in laminates. In: *Journal of Composite Materials* 46 (2011), Nr. 5, S. 603–623
- [Melenk u. Babuška 1996] MELENK, J. ; BABUŠKA, I.: The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139 (1996), Nr. 1–4, S. 289–314
- [Mesgarnejad et al. 2015] MESGARNEJAD, A. ; BOURDIN, B. ; KHONSARI, M.: Validation simulations for the variational approach to fracture. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 290 (2015), S. 420–437
- [Mittelmann u. Yosibash 2014] MITTELMAN, B. ; YOSIBASH, Z.: Asymptotic analysis of the potential energy difference because of a crack at a V-notch edge in a 3D domain. In: *Engineering Fracture Mechanics* 131 (2014), S. 232–256
- [Mittelmann u. Yosibash 2015] MITTELMAN, B. ; YOSIBASH, Z.: Energy release rate cannot predict crack initiation orientation in domains with a sharp V-notch under mode III loading. In: *Engineering Fracture Mechanics* 141 (2015), S. 230–241
- [Mittelstedt u. Becker 2005a] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: Semi-analytical computation of 3D stress singularities in linear elasticity. In: *Communications in Numerical Methods in Engineering* 21 (2005), Nr. 5, S. 247–257
- [Mittelstedt u. Becker 2016] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: *Strukturmechanik ebener Laminate*. 1. Auflage. Franziska-Braun-Straße 7, 64287 Darmstadt : Studienbereich Mechanik, TU Darmstadt, 2016
- [Mittelstedt u. Becker 2005b] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: Asymptotic analysis of stress singularities in composite laminates by the boundary finite element method. In: *Composite Structures* 71 (2005), Nr. 2, S. 210–219
- [Mittelstedt u. Becker 2006] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: Efficient computation of order and mode of three-dimensional stress singularities in linear elasticity by the boundary finite element method. In: *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006), Nr. 10, S. 2868–2903
- [Mittelstedt u. Becker 2007] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: Free-Edge Effects in Composite Laminates. In: *Applied Mechanics Reviews* 60 (2007), Nr. 5, S. 217–245
- [Mohammadi 2012] MOHAMMADI, S.: *XFEM fracture analyses of composites*. John Wiley & Sons, 2012
- [Moler u. Van Loan 1978] MOLER, C. ; VAN LOAN, C.: Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix. In: *SIAM Review* 20 (1978), Nr. 4, S. 801–836

- [Moler u. Van Loan 2003] MOLER, C. ; VAN LOAN, C.: Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. In: *SIAM Review* 45 (2003), Nr. 1, S. 3–49
- [Moler 2004] MOLER, C. B.: *Numerical computing with MATLAB*. SIAM – Society of Industrial and Applied Mathematics, 2004
- [Morrison u. Lewis 1976] MORRISON, J. A. ; LEWIS, J. A.: Charge Singularity at the Corner of a Flat Plate. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 31 (1976), Nr. 2, S. 233–250
- [Movchan u. Willis 2000] MOVCHAN, N. ; WILLIS, J.: Surface-breaking crack in an elastic half-space. In: *Journal of Engineering Mathematics* 37 (2000), Nr. 1-3, S. 143–154
- [Muskhelishvili 1977] MUSKHELISHVILI, N.: *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. 4. Auflage. Noordhoff International, 1977
- [Nagai et al. 2012] NAGAI, M. ; IKEDA, T. ; MIYAZAKI, N.: Stress intensity factor analysis of a three-dimensional interface crack between dissimilar anisotropic materials under thermal stress. In: *Engineering Fracture Mechanics* 91 (2012), S. 14–36
- [Nairn u. Hu 1992a] NAIRN, J. A. ; HU, S.: The formation and effect of outer-ply microcracks in cross-ply laminates: a variational approach. In: *Engineering Fracture Mechanics* 2 (1992), S. 203–221
- [Nairn u. Hu 1992b] NAIRN, J. A. ; HU, S.: The initiation and growth of delaminations induced by matrix microcracks in laminated composites. In: *International Journal of Fracture* 57 (1992), S. 1–24
- [Nakamura 1991] NAKAMURA, T.: Three-Dimensional Stress Fields of Elastic Interface Cracks. In: *Journal of Applied Mechanics* 58 (1991), Nr. 4, S. 939–946
- [Natarajan u. Song 2013] NATARAJAN, S. ; SONG, C.: Representation of singular fields without asymptotic enrichment in the extended finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 96 (2013), Nr. 13, S. 813–841
- [Natarajan et al. 2014] NATARAJAN, S. ; SONG, C. ; BELOUETTAR, S.: Numerical evaluation of stress intensity factors and T-stress for interfacial cracks and cracks terminating at the interface without asymptotic enrichment. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 279 (2014), S. 86–112
- [Natarajan et al. 2015] NATARAJAN, S. ; WANG, J. ; SONG, C. ; BIRK, C.: Isogeometric analysis enhanced by the scaled boundary finite element method. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 283 (2015), S. 733–762
- [Neuber 1937] NEUBER, H.: *Kerbspannungslehre – Grundlagen für genaue Spannungsrechnung*. Springer, 1937
- [Neuber 2001] NEUBER, H.: *Kerbspannungslehre – Theorie der Spannungskonzentration, genaue Berechnung der Festigkeit*. 4. Auflage. Springer, 2001 (Klassiker der Technik)
- [Nied 2003] NIED, H. F.: Mechanics of interface with applications in electronic packaging. In: *IEEE Transactions on Device and Materials Reliability* 3 (2003), Nr. 4, S. 129–143

- [Nomura et al. 2010] NOMURA, Y. ; IKEDA, T. ; MIYAZAKI, N.: Stress intensity factor analysis of a three-dimensional interfacial corner between anisotropic bimetals under thermal stress. In: *International Journal of Solids and Structures* 47 (2010), Nr. 14–15, S. 1775–1784
- [Oden u. Brauchli 1971] ODEN, J. T. ; BRAUCHLI, H. J.: On the calculation of consistent stress distributions in finite element approximations. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 3 (1971), Nr. 3, S. 317–325
- [Oganesyan u. Rukhovets 1979] OGANESYAN, L. ; RUKHOVETS, L.: Variational-difference methods for the solution of elliptic equations. In: *Izd. Akad. Nauk Armyanskoi SSR, Jerevan* (1979)
- [Ooi et al. 2015a] OOI, E. T. ; NATARAJAN, S. ; SONG, C. ; TIN-LOI, F.: Crack propagation modelling in functionally graded materials using scaled boundary polygons. In: *International Journal of Fracture* 192 (2015), Nr. 1, S. 87–105
- [Ooi et al. 2014] OOI, E. T. ; SONG, C. ; TIN-LOI, F.: A scaled boundary polygon formulation for elasto-plastic analyses. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 268 (2014), Nr. 0, S. 905–937
- [Ooi et al. 2015b] OOI, E. ; MAN, H. ; NATARAJAN, S. ; SONG, C.: Adaptation of quadtree meshes in the scaled boundary finite element method for crack propagation modelling. In: *Engineering Fracture Mechanics* 144 (2015), S. 101–117
- [Pageau u. Biggers 1995] PAGEAU, S. S. ; BIGGERS, S. B.: Finite element evaluation of free-edge singular stress fields in anisotropic materials. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 38 (1995), Nr. 13, S. 2225–2239
- [Pageau u. Biggers 1996] PAGEAU, S. S. ; BIGGERS, S. B.: A finite element approach to three-dimensional singular stress states in anisotropic multi-material wedges and junctions. In: *International Journal of Solids and Structures* 33 (1996), Nr. 1, S. 33–47
- [Pageau u. Biggers 1997] PAGEAU, S. S. ; BIGGERS, S. B.: Enrichment of finite elements with numerical solutions for singular stress fields. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40 (1997), Nr. 14, S. 2693–2713
- [Parihar u. Keer 1978] PARIHAR, K. ; KEER, L.: Stress singularity at the corner of a wedge-shaped crack or inclusion. In: *Journal of Applied Mechanics* 45 (1978), Nr. 4, S. 791–796
- [Pian 1995] PIAN, T. H.: State-of-the-art development of hybrid/mixed finite element method. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 21 (1995), Nr. 1–2, S. 5–20. – Mixed and Hybrid Finite Element Methods Part I
- [Picu u. Gupta 1997] PICU, C. R. ; GUPTA, V.: Three-dimensional stress singularities at the tip of a grain triple junction line intersecting the free surface. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 45 (1997), Nr. 9, S. 1495–1520
- [Piltner 1982] PILTNER, R.: Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen. In: *Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum* 32 (1982)

- [Pipes u. Pagano 1970] PIPES, R. B. ; PAGANO, N.: Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension. In: *Journal of Composite Materials* 4 (1970), Nr. 4, S. 538–548
- [Prukvilailert u. Koguchi 2005] PRUKVILAILERT, M. ; KOGUCHI, H.: Stress singularity analysis around the singular point on the stress singularity line in three-dimensional joints. In: *International Journal of Solids and Structures* 42 (2005), Nr. 11–12, S. 3059–3074
- [Puck u. Schürmann 2002] PUCK, A. ; SCHÜRMAN, H.: Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. In: *Composites Science and Technology* 62 (2002), Nr. 12–13, S. 1633–1662
- [Puck 1996] PUCK, A.: *Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten: Modelle für die Praxis*. Carl Hanser, München, Wien, 1996
- [Qin 2005] QIN, Q.-H.: Trefftz finite element method and its applications. In: *Applied Mechanics Reviews* 58 (2005), Nr. 5, S. 316–337
- [Rank u. Babuška 1987] RANK, E. ; BABUŠKA, I.: An expert system for the optimal mesh design in the hp-version of the finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24 (1987), Nr. 11, S. 2087–2106
- [Richardson 1911] RICHARDSON, L. F.: The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 210 (1911), Nr. 459–470, S. 307–357
- [Richardson u. Gaunt 1927] RICHARDSON, L. F. ; GAUNT, J. A.: The Deferred Approach to the Limit. Part I. Single Lattice. Part II. Interpenetrating Lattices. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 226 (1927), Nr. 636–646, S. 299–361
- [Rosendahl et al. 2017] ROSENDAHL, P. ; WEISSGRAEBER, P. ; STEIN, N. ; BECKER, W.: Asymmetric crack onset at open-holes under tensile and in-plane bending loading. In: *International Journal of Solids and Structures* 113 (2017), Nr. Supplement C, S. 10–23
- [Rubtsov 2006] RUBTSOV, Y. K.: Scaled-boundary method in electroelasticity of thin plates. In: *International Applied Mechanics* 42 (2006), Nr. 7, S. 832–841
- [Rubtsov u. Borisov 2007] RUBTSOV, Y. K. ; BORISOV, E.: Numerical-analytical solution of plane problems in thermoelasticity. In: *International Applied Mechanics* 43 (2007), Nr. 12, S. 1406–1410
- [Ródenas et al. 2008] RÓDENAS, J. J. ; GONZÁLEZ-ESTRADA, O. A. ; TARANCÓN, J. E. ; FUENMAYOR, F. J.: A recovery-type error estimator for the extended finite element method based on singular+smooth stress field splitting. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 76 (2008), Nr. 4, S. 545–571
- [Saputra et al. 2017] SAPUTRA, A. ; TALEBI, H. ; TRAN, D. ; BIRK, C. ; SONG, C.: Automatic image-based stress analysis by the scaled boundary finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 109 (2017), Nr. 5, S. 697–738. – nme.5304

- [Saputra et al. 2015] SAPUTRA, A. A. ; BIRK, C. ; SONG, C.: Computation of three-dimensional fracture parameters at interface cracks and notches by the scaled boundary finite element method. In: *Engineering Fracture Mechanics* 148 (2015), S. 213–242
- [Sator 2010] SATOR, C.: Asymptotische Nahfeldanalysen ebener Multi-Materialverbindungsstellen mit der Methode komplexer Potentiale. In: *Forschungsberichte des Instituts für Mechanik der Technischen Universität Darmstadt* Bd. 21. Studienbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, Deutschland, 2010
- [Savruk u. Shkarayev 2001] SAVRUK, M. ; SHKARAYEV, S.: Stress singularities for three-dimensional corners using the boundary integral equation method. In: *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 36 (2001), Nr. 3, S. 263–275
- [Scheffler et al. 2016] SCHEFFLER, S. ; DEAN, A. ; ROLFES, R.: Prediction of strength and global failure behavior of complex joint configurations in composites. In: *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS), Crete Island, Greece, 2016*
- [Schmitz et al. 1993] SCHMITZ, H. ; VOLK, K. ; WENDLAND, W.: Three-dimensional singularities of elastic fields near vertices. In: *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 9 (1993), Nr. 3, S. 323–337
- [Schnack et al. 2005] SCHNACK, E. ; DIMITROV, A. ; LANGHOFF, T.-A. ; TSOTSOVA, R.: Re-entrant corner problems for isotropic materials and layered composites. In: *PAMM* 5 (2005), Nr. 1, S. 363–364
- [Schnack u. Kolk 2008] SCHNACK, E. ; KOLK, A. K. . K .and Dimitrov D. K .and Dimitrov: 3D Crack Growth by Considering Re-Entrant Corners. In: *ICCES: International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences* Bd. 8, 2008, S. 107–114
- [Schürmann 2007] SCHÜRMAN, H.: *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. 2. Auflage. Springer, 2007
- [Shih u. Asaro 1988] SHIH, C. ; ASARO, R.: Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: part I—small scale yielding. In: *Journal of Applied Mechanics* 55 (1988), Nr. 2, S. 299–316
- [Sih et al. 1965] SIH, G. C. ; PARÍS, P. C. ; IRWIN, G. R.: On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. In: *International Journal of Fracture Mechanics* 1 (1965), Nr. 3, S. 189–203
- [Sih 1973] SIH, G. C.: Methods of analysis and solutions of crack problems: Recent developments in fracture mechanics Theory and methods of solving crack problems. In: *Mechanics of Fracture* Bd. 1. Noordhoff International, 1973
- [Simon et al. 2017] SIMON, J.-W. ; HÖWER, D. ; STIER, B. ; REESE, S. ; FISH, J.: A regularized orthotropic continuum damage model for layered composites: intralaminar damage progression and delamination. In: *Computational Mechanics* (2017)
- [Sinclair 2004a] SINCLAIR, G. B.: Stress singularities in classical elasticity—I: Removal, interpretation, and analysis. In: *Applied Mechanics Reviews* 57 (2004), Nr. 4, S. 251–298
- [Sinclair 2004b] SINCLAIR, G. B.: Stress singularities in classical elasticity—II: Asymptotic identification. In: *Applied Mechanics Reviews* 57 (2004), Nr. 5, S. 385–439

- [Somaratna u. Ting 1986] SOMARATNA, N. ; TING, T.: Three-dimensional stress singularities in anisotropic materials and composites. In: *International Journal of Engineering Science* 24 (1986), Nr. 7, S. 1115–1134
- [Song u. Wolf 1995] SONG, C. ; WOLF, J.: Consistent Infinitesimal Finite-Element-Cell Method: Out-of-Plane Motion. In: *Journal of Engineering Mechanics* 121 (1995), Nr. 5, S. 613–619
- [Song 2004] SONG, C.: A matrix function solution for the scaled boundary finite-element equation in statics. In: *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering* 193 (2004), S. 2325–2356
- [Song 2006] SONG, C.: Analysis of singular stress fields at multi-material corners under thermal loading. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 65 (2006), Nr. 5, S. 620–652
- [Song et al. 2017] SONG, C. ; OOI, E. T. ; NATARAJAN, S.: A review of the scaled boundary finite element method for two-dimensional linear elastic fracture mechanics. In: *Engineering Fracture Mechanics* (2017)
- [Song u. Wolf 1997] SONG, C. ; WOLF, J. P.: The scaled boundary finite-element method—alias consistent infinitesimal finite-element cell method—for elastodynamics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 147 (1997), Nr. 3–4, S. 329–355
- [Stein 1989] STEIN, E. (Hrsg.): *Nichtlineare Berechnungen im konstruktiven Ingenieurbau*. Springer, 1989
- [Stein et al. 2017] STEIN, N. ; DÖLLING, S. ; CHALKIADAKI, K. ; BECKER, W. ; WEISSGRAEBER, P.: Enhanced XFEM for crack deflection in multi-material joints. In: *International Journal of Fracture* 207 (2017), Nr. 2, S. 193–210
- [Strang u. Fix 1973] STRANG, G. ; FIX, G. J.: *An analysis of the finite element method*. Bd. 212. Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1973
- [Stroh 1958] STROH, A. N.: Dislocations and Cracks in Anisotropic Elasticity. In: *Philosophical Magazine* 3 (1958), Nr. 30, S. 625–646
- [Sukumar et al. 2003] SUKUMAR, N. ; CHOPP, D. ; MORAN, B.: Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation. In: *Engineering Fracture Mechanics* 70 (2003), Nr. 1, S. 29–48
- [Sun et al. 2015] SUN, Z. ; OOI, E. T. ; SONG, C.: Finite fracture mechanics analysis using the scaled boundary finite element method. In: *Engineering Fracture Mechanics* 134 (2015), Nr. 0, S. 330–353
- [Tada et al. 2000] TADA, H. ; PARIS, P. C. ; IRWIN, G. R.: *The stress analysis of cracks handbook*. 3. Auflage. American Society of Mechanical Engineers (ASME), 2000
- [Talebi et al. 2016] TALEBI, H. ; SAPUTRA, A. ; SONG, C.: Stress analysis of 3D complex geometries using the scaled boundary polyhedral finite elements. In: *Computational Mechanics* (2016), S. 1–19
- [Talmon l'Armée et al. 2017] TALMON L'ARMÉE, A. ; HELL, S. ; ROSENDAHL, P. ; FELGER, J. ; BECKER, W.: Nonlinear crack opening integral: Mode mixity for infinite cracks. In: *Engineering Fracture Mechanics* (2017)

- [Tanné et al. 2017] TANNÉ, E. ; BOURDIN, B. ; LI, T. ; MARIGO, C. ; MAURINI, C.: Crack initiation in variational phase field models of fracture. In: *Proceedings of ICF14, 14th International Conference on Fracture, Rhodes, Greece, 2017*
- [Taylor 2007] TAYLOR, D.: *The Theory of Critical Distances: A New Perspective in Fracture Mechanics*. 1. Auflage. Elsevier, 2007
- [Thompson u. Little 1970] THOMPSON, T. R. ; LITTLE, R. W.: End effects in a truncated semi-infinite cone. In: *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 23 (1970), Nr. 2, S. 185–196
- [Ting u. Chou 1981] TING, T. ; CHOU, S.: Edge singularities in anisotropic composites. In: *International Journal of Solids and Structures* 17 (1981), Nr. 11, S. 1057–1068
- [Ting u. Hoang 1984] TING, T. ; HOANG, P.: Singularities at the tip of a crack normal to the interface of an anisotropic layered composite. In: *International Journal of Solids and Structures* 20 (1984), Nr. 5, S. 439–454
- [Tong et al. 1973] TONG, P. ; PIAN, T. H. H. ; LASRY, S. J.: A hybrid-element approach to crack problems in plane elasticity. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 7 (1973), Nr. 3, S. 297–308
- [Tong u. Pian 1973] TONG, P. ; PIAN, T. H.: On the convergence of the finite element method for problems with singularity. In: *International Journal of Solids and Structures* 9 (1973), Nr. 3, S. 313–321
- [Trefftz 1926] TREFFTZ, E.: Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. In: *Verh. Kongr. techn. Mech., Zürich* (1926), S. 131–137
- [Ventura et al. 2009] VENTURA, G. ; GRACIE, R. ; BELYTSCHKO, T.: Fast integration and weight function blending in the extended finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 77 (2009), Nr. 1, S. 1–29
- [Vu u. Deeks 2006] VU, T. H. ; DEEKS, A. J.: Use of higher-order shape functions in the scaled boundary finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 65 (2006), S. 47–70
- [Vu u. Deeks 2008] VU, T. H. ; DEEKS, A. J.: A p-hierarchical adaptive procedure for the scaled boundary finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 73 (2008), S. 47–70
- [Walters et al. 2005] WALTERS, M. C. ; PAULINO, G. H. ; DODDS, R. H.: Interaction integral procedures for 3-D curved cracks including surface tractions. In: *Engineering Fracture Mechanics* 72 (2005), Nr. 11, S. 1635–1663
- [Wang et al. 1985] WANG, A. ; KISHORE, N. ; LI, C.: Crack development in graphite—epoxy cross-ply laminates under uniaxial tension. In: *Composites Science and Technology* 24 (1985), Nr. 1, S. 1–31
- [Weißgraeber et al. 2016] WEISSGRAEBER, P. ; HELL, S. ; BECKER, W.: Crack nucleation in negative geometries. In: *Engineering Fracture Mechanics* 168 (2016), Nr. Part B, S. 93–104

- [Weißgraeber 2014] WEISSGRAEBER, P.: Neue Ansätze zur Analyse der Lastübertragung und Initiierung finiter Risse in Klebverbindungen. In: *Forschungsberichte des Instituts für Mechanik der Technischen Universität Darmstadt* Bd. 33. Studienbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, Germany, 2014
- [Weißgraeber et al. 2015] WEISSGRAEBER, P. ; LEGUILLON, D. ; BECKER, W.: A review of Finite Fracture Mechanics: crack initiation at singular and non-singular stress raisers. In: *Archive of Applied Mechanics* (2015), S. 1–27
- [Williams 1952] WILLIAMS, M. L.: Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions. In: *Journal of Applied Mechanics* 19 (1952), Nr. 4, S. 526–528
- [Wolf 2003] WOLF, J. P.: *The scaled boundary finite element method*. John Wiley & Sons, 2003
- [Wolf u. Song 1996] WOLF, J. P. ; SONG, C.: *Finite-element modelling of unbounded media*. Wiley, 1996
- [Wolf u. Song 2000] WOLF, J. P. ; SONG, C.: The scaled boundary finite-element method – a primer: derivations. In: *Computers & Structures* 78 (2000), Nr. 1–3, S. 191–210
- [Wriggers 2001] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer, 2001
- [Wrobel u. Aliabadi 2002] WRABEL, L. C. ; ALIABADI, M. H.: *The Boundary Element Method*. John Wiley & Sons, 2002
- [Yamada u. Okumura 1981] YAMADA, Y. ; OKUMURA, H.: Analysis of local stress in composite materials by the 3D finite element. In: *Proceedings of Japan-US Conference on Composite Materials*, 1981, S. 55–84
- [Yamamoto u. Sumi 1978] YAMAMOTO, Y. ; SUMI, Y.: Stress intensity factors for three-dimensional cracks. In: *International Journal of Fracture* 14 (1978), Nr. 1, S. 17–38
- [Yang u. Deeks 2007] YANG, Z. J. ; DEEKS, A. J.: Fully-automatic modelling of cohesive crack growth using a finite element–scaled boundary finite element coupled method. In: *Engineering Fracture Mechanics* 74 (2007), S. 2547–2573
- [Yang 2006] YANG, Z.: Fully automatic modelling of mixed-mode crack propagation using scaled boundary finite element method. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), Nr. 12, S. 1711–1731
- [Yosibash 2012] YOSIBASH, Z.: *Singularities in Elliptic Boundary Value Problems and Elasticity and Their Connection with Failure Initiation*. Springer, 2012
- [Yosibash et al. 2008] YOSIBASH, Z. ; OMER, N. ; DAUGE, M.: Edge stress intensity functions in 3-D anisotropic composites. In: *Composites Science and Technology* 68 (2008), Nr. 5, S. 1216–1224
- [Yosibash u. Shannon 2014] YOSIBASH, Z. ; SHANNON, S.: Computing edge stress intensity functions (ESIFs) along circular 3-D edges. In: *Engineering Fracture Mechanics* 117 (2014), S. 127–151
- [Yosibash u. Szabó 1995] YOSIBASH, Z. ; SZABÓ, B.: Numerical analysis of singularities in two-dimensions part 1: Computation of eigenpairs. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 38 (1995), Nr. 12, S. 2055–2082

- [Ziegler 1977] ZIEGLER, H. ; LAUWERIER, H. A. (Hrsg.) ; KOITER, W. T. (Hrsg.): *Applied Mathematics and Mechanics*. Bd. 21: *An introduction to thermomechanics*. North-Holland, 1977
- [Zienkiewicz u. Zhu 1992] ZIENKIEWICZ, O. C. ; ZHU, J. Z.: The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 33 (1992), Nr. 7, S. 1331–1364
- [Zienkiewicz et al. 2013] ZIENKIEWICZ, O. ; TAYLOR, R. ; ZHU, J.: *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. 7. Auflage. Butterworth-Heinemann, 2013

Insgesamt 284 Referenzen.