Apunts de Matemàtiques Empresarials III

Gonzalo Rodríguez Pérez

Índex

Capítol 1

Programació no lineal

En els darrers cinquanta anys, l'augment de l'escala i la complexitat de les organitzacions humanes ha portat com a conseqüència un augment en el nombre i la dificultat dels problemes derivats de la seva direcció i estratègia. Amb l'objectiu d'ajudar a la resolució d' aquests problemes, apareix al final de la Segona Guerra Mundial l'anomenada *recerca operacional i* la *programació matemàtica* n'és un dels seus instruments fonamentals. En concret, la programació matemàtica té a veure amb aquelles situacions (processos industrials, tàctiques i estratègies militars, assumptes econòmics, etc.) en què cal optimitzar (maximitzar o minimitzar) certes quantitats subjectes a diferentes restriccions. Pensem, per exemple, en un empresari que vol maximitzar el seu benefici; és obvi que en la recerca d'aquest benefici òptim haurà de tenir en compte com a restriccions la quantitat de maquinària que cal emprar, el nombre de treballadors o el capital monetari que cal invertir entre d'altres. En el camp econòmic i empresarial, és un lloc comú afirmar que l'optimització permet assignar de manera eficient recursos escasos entre activitats alternatives. Doncs bé, quan aquesta assignació la du a terme un únic subjecte decisori i els recursos són limitats ens trobem enfront de l'optimització restringida o condicionada; si, a més, no estem obligats a emprar totes les disponibilitats associades als recursos, l'optimització ho serà restringida per desigualtats. Aquest fet reflecteix acuradament moltes de les circumstàncies sota les quals es desenvolupa l'activitat econòmica. Històricament, la programació no lineal no s'inicia com a disciplina matemàtica fins el 1951 amb els treballs de H. W. Kuhn i A. W. Tucker, encara que el premi Nobel H. Markowitz donà a conèixer una mica abans el seu model de selecció d'inversions que passa per la resolució d'un programa no lineal. En aquest primer capítol estudiem els programes d'optimització restringida per desigualtats no lineals i destaquem, sobre tot, les condicions necessàries de Kuhn-Tucker i la seva aplicació com a mètode de resolució efectiu per a programes convexos. Començarem amb un exemple senzill de programa no lineal.

Exemple 1 *Un empresari produeix i ven dos productes, A i B. El procés productiu preveu tres fases de manera que una unitat de A necessita un temps de permanència en cadascuna d'élles de 3, 6 i 5 hores, respectivament, mentre que una unitat de B necessita 6, 4 i 5 hores. Si les disponibilitats horàries màximes de les tres fases són, en aquest ordre, de 54, 48 i 50 hores, plantegeu el programa d'optimització que ens determina la producció de A i B que maximitza els ingressos generats per la seva venda, suposant que els seus preus de venda unitaris són*

$$p_1 = 25 - 0.5x_1 \quad i \quad p_2 = 30 - 0.2x_2,$$

en què x_1 és el nombre d'unitats produïdes i venudes de A, i x_2 el de B.

És evident que, sota aquestes hipòtesis, la funció d'ingressos totals que cal maximitzar és

$$z = f(x_1, x_2) = p_1x_1 + p_2x_2 = 25x_1 + 30x_2 - 0.5x_1^2 - 0.2x_2^2.$$

Segons l'enunciat, les quantitats que cal produir estan subjectes a tres restriccions temporals. Notem que el temps per unitat emprat en aquests processos no depèn del nombre d'unitats produïdes. Com que

$$3x_1 + 6x_1$$

és el temps que la primera fase necessita per a manipular x_1 unitats de A i x_2 unitats de B, la primera d'aquestes restriccions s'expressa formalment a partir de la desigualtat

$$3x_1 + 6x_2 \leq 54,$$

ja que 54 hores és el temps màxim disponible per a aquesta fase. De manera anàloga, les altres dues desigualtats que afecten el temps emprat per la segona i la tercera fases serien

$$6x_1 + 4x_2 \leq 48 \quad \text{i} \quad 5x_1 + 5x_2 \leq 50.$$

Així doncs, la solució del problema passa per determinar l'òptim (màxim)

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

de la funció d'ingressos totals $f(x_1, x_2)$ que satisfà les cinc desigualtats

$$3x_1 + 6x_2 \leq 54, \quad 6x_1 + 4x_2 \leq 48, \quad 5x_1 + 5x_2 \leq 50, \quad x_1 \geq 0 \quad \text{i} \quad x_2 \geq 0.$$

El que cal, en definitiva, és resoldre el programa canònic d'optimització restringida per desigualtats

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 30x_1 + 20x_2 - 0.5x_1^2 - 0.2x_2^2 \\ \text{sota} & 3x_1 + 6x_2 \leq 54 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ & 5x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}.$$

Notem que aquest programa no és lineal ja que la funció d'ingressos totals no ho és.

En general, doncs, un **programa canònic d'òptims restringits per desigualtats** és un problema d'optimització de la forma

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = f(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{sota} & g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \ldots, x_n) \leq b_m \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}\right\} \text{ o } \left.\begin{array}{ll} \min & z = f(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{sota} & g_1(x_1, \ldots, x_n) \geq b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \ldots, x_n) \geq b_m \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}\right\},$$

on la funció escalar

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

és la *funció objectiu*, les n variables $x_1, \ldots, x_n$ són les *variables instrumentals*, les m funcions escalars

$$g_1, \ldots, g_m : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

són les *funcions de restricció* i les m constants $b_1, \ldots, b_m$ són les *constants de restricció* del programa. És evident que tot programa canònic es pot expressar de manera abreujada en la forma

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = f(x) \\ \text{sota} & g(x) \leq b \\ & x \geq 0_n \end{array}\right\} \text{ o } \left.\begin{array}{ll} \min & z = f(x) \\ \text{sota} & g(x) \geq b \\ & x \geq 0_n \end{array}\right\},$$

en què

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad 0_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

El programa d'òptims restringits per desigualtats de l'exemple anterior és canònic ja que es tracta d'un programa de màxim, amb tres restriccions de menor o igual i dues variables instrumentals x_1 i x_2 positives. En aquest cas, la funció objectiu del programa és

$$z = f(x) = f(x_1, x_2) = 30x_1 + 20x_2 - 0.5x_1^2 - 0.2x_2^2$$

la funció vectorial de restricció i el vector de restricció són

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 6x_2 \\ 6x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 5x_2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 48 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Notem que hi han dos tipus de restricció en un programa canònic: les m restriccions de caràcter instrumental i les n restriccions de positivitat de les variables instrumentals. L'important en la formulació canònica és el sentit de les desigualtats instrumentals: de menor o igual per a un programa de màxim, i de més gran o igual per a un de mínim. En general, però, no tots els programes són canònics. Tanmateix, tot programa no canònic es pot transformar en canònic seguint una sèrie de passos. Vegem-ne un exemple.

Exemple 2 *Suposem que, per raons d'eficiència empresarial, el temps disponible per a la tercera fase en la producció de A i de B s'ha d'esgotar. Sota aquesta nova hipòtesi determineu el nou programa canònic que maximitza els ingressos totals generats per la seva venda.*

En aquest cas el nou programa que optimitza els ingressos seria

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 30x_1 + 20x_2 - 0.5x_1^2 - 0.2x_2^2 \\ \text{sota} & 3x_1 + 6x_2 \leq 54 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ & 5x_1 + 5x_2 = 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}.$$

Com podem veure, aquest programa no és canònic ja que la tercera restricció és una igualtat. Si volem obtenir un programa canònic equivalent a aquest hem de substituir la igualtat per les dues desigualtats associades. Fent-ho així ens queda

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 30x_1 + 20x_2 - 0.5x_1^2 - 0.2x_2^2 \\ \text{sota} & 3x_1 + 6x_2 \leq 54 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ & 5x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ & 5x_1 + 5x_2 \geq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

i si canviem el sentit de la quarta desigualtat s'obté, al final, el programa canònic

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 30x_1 + 20x_2 - 0.5x_1^2 - 0.2x_2^2 \\ \text{sota} & 3x_1 + 6x_2 \leq 54 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ & 5x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ & -5x_1 - 5x_2 \leq -50 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}.$$

Des d'ara emprarem el qualificatiu de *programa* per referir-nos a un programa d'òptims restringits per desigualtats sigui o no canònic; si cal fer la distinció, ho indicarem explícitament. L'objectiu que ens proposem és resoldre una bona part d' aquests programes, és a dir, trobar els òptims (màxims o mínims) de la funció objectiu que estan sotmesos a les restriccions de desigualtat associades. Iniciarem l'estudi recordant un parell de resultats clàssics sobre l'existència i la qualificació dels òptims de les funcions escalars.

Teorema 3 (Weierstrass) *Tota funció escalar contínua definida sobre un compacte (tancat i acotat) de $\mathbb{R}^n$ admet màxims i mínims globals.*

Teorema 4 (Local-global) *Si una funció escalar $f(x)$ és convexa (còncava) sobre un subconjunt S de $\mathbb{R}^n$ convex aleshores tot mínim (màxim) de $f(x)$ sobre S és global, i si $f(x)$ és estrictament convexa (còncava) el mínim (màxim) és únic. A més, el conjunt format pels mínims (màxims) de $f(x)$ és convex.*

Enfront d'un programa cal tenir en compte en primer lloc el conjunt de punts determinat precisament per les restriccions de desigualtat associades. Anomenem **conjunt factible** d'un programa el conjunt format pels punts del domini de la funció objectiu que satisfan les desigualtats associades. Els elements del conjunt factible s'anomenen *punts factibles* del programa. Si un programa té punts factibles s'anomena *programa factible* i, en cas contrari, *infactible.* En el nostre cas, el conjunt factible associat al programa de l'exemple introductori és el recinte de $\mathbb{R}^2$ definit per

$$\left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{ll} 3x_1 + 6x_2 \leq 54, & 6x_1 + 4x_2 \leq 48, \\ 5x_1 + 5x_2 \leq 50, & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Així doncs, els òptims d'un programa restringit per desigualtats són, en particular, punts factibles. Això ens diu que, en general, aquests òptims no coincideixen amb els òptims lliures que la funció objectiu pugui tenir. Arribats a aquest punt és necessari fer la distinció següent en la definició d'òptim d'un programa. En general, un **òptim finit** o **acotat** d'un programa

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = f(x) \\ \text{sota} & g(x) \leq b \\ & x \geq 0_n \end{array}\right\} \text{ o } \left.\begin{array}{ll} \min & z = f(x) \\ \text{sota} & g(x) \geq b \\ & x \geq 0_n \end{array}\right\}$$

és un punt factible

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

que optimitza localment o globalment la funció objectiu sobre el conjunt factible associat. En aquest cas, el valor que pren la funció objectiu en x_0, és a dir,

$$z_0 = f(x_0) = f\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right),$$

és el *valor òptim* del programa en x_0. Així mateix, diem que l'òptim finit x_0 *satura* la restricció i-èsima del programa quan

$$g_i\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) = b_i.$$

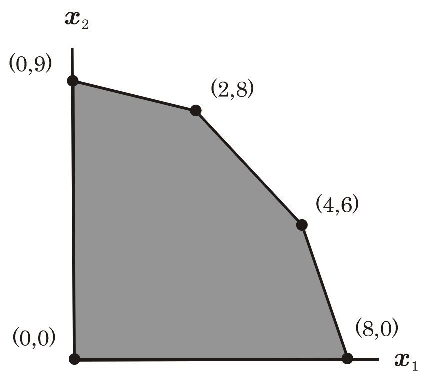
Per contra, si la funció objectiu s'optimitza indefinidament sobre el conjunt factible diem que el programa té un **òptim infinit** o **no acotat**. En aquest cas el valor òptim és infinit.

Exemple 5 *Determineu gràficament el conjunt factible associat al programa*

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 30x_1 + 20x_2 - 0.5x_1^2 - 0.2x_2^2 \\ \textit{sota} & 3x_1 + 6x_2 \leq 54 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ & 5x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

i proveu, al mateix temps, que té un únic màxim global.

Com que el conjunt factible associat a aquest programa és un subconjunt de $\mathbb{R}^2$ podem representar-lo gràficament. En aquest cas tenim



Deduïm, per tant, que el programa és factible. Una simple inspecció visual ens permet afirmar que aquest conjunt és compacte i convex. Així doncs, aplicant el teorema de Weierstrass, tenim que aquest programa té màxim global ja que la funció d'ingressos totals a maximitzar,

$$z = f(x_1, x_2) = 30x_1 + 20x_2 - 0.5x_1^2 - 0.2x_2^2,$$

és contínua. Com que, en particular, aquesta funció és estrictament còncava[1] deduïm (aplicant el teorema local-global) que aquest màxim global és únic.

Hem raonat que el programa de l'exemple econòmic inicial és factible i té un únic òptim finit global, però no sabem quin és. Val a dir que les matemàtiques ens proporcionen mètodes formals de resolució que ens ajuden a determinar, de manera pràcticament mecànica, els òptims d'una gran majoria de programes. L'associat a les condicions necessàries de Kuhn-Tucker que estudiem a continuació n'és un.

Les condicions de Kuhn-Tucker

El mètode de resolució de programes relacionat amb les condicions necessàries de Kuhn-Tucker requereix, entre d'altres, que les funcions objectiu i de restriccions siguin de tipus $\mathbf{C}^2$ sobre el seu domini de definició, és a dir, que admetin funcions derivades parcials segones contínues.[2] Aquestes condicions són similars a l'anul·lació del vector gradient de la funció de Lagrange per a òptims restringits per igualtats.

Teorema 6 (Kuhn-Tucker) *Si el punt*

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

és un òptim d'un programa canònic de màxim

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = f(x_1, \ldots, x_n) \\ \textit{sota} & g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \ldots, x_n) \leq b_m \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}\right\}$$

[1] Ho provem més endavant.

[2] En general, una funció escalar és de tipus $\mathbf{C}^k$ si totes les seves funcions derivades parcials d'ordre k són contínues.

amb funció objectiu f i funcions de restricció $g_1, \ldots, g_m$ de tipus $\mathbf{C}^2$ sobre un domini obert de $\mathbb{R}^n$, existeix necessàriament un vector

$$\lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 \\ \vdots \\ \lambda_m^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

de manera que[3]

1. $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \cdot \left(\dfrac{\partial g_i(x_0)}{\partial x_j} \right) \leq 0$, *per a tot* $j = 1, \ldots, n$.
2. $\left(\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \cdot \left(\dfrac{\partial g_i(x_0)}{\partial x_j} \right) \right) x_j^0 = 0$, *per a tot* $j = 1, \ldots, n$.
3. $g_i(x_0) \leq b_i$, *per a tot* $i = 1, \ldots, m$.
4. $x_j^0 \geq 0$, *per a tot* $j = 1, \ldots, n$.
5. $(g_i(x_0) - b_i)\, \lambda_i^0 = 0$, *per a tot* $i = 1, \ldots, m$.
6. $\lambda_i^0 \geq 0$, *per a tot* $i = 1, \ldots, m$.

El vector

$$\lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 \\ \vdots \\ \lambda_m^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

és el vector dels *multiplicadors de Kuhn-Tucker* $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$ associats a l'òptim x_0. Notem, per exemple, que la tercera i la quarta condicions ens diuen que l'òptim x_0 és un punt factible del programa de màxim. Malauradament, aquestes condicions són, en general, necessàries però no pas suficients; en altres paraules, que poden haver-hi punts que les satisfacin sense ser òptims (poden donar-se molts exemples en aquest sentit). Com a cas il·lustratiu trobarem les sis condicions de Kuhn-Tucker del programa de l'exemple 1.

Exemple 7 *Determineu les condicions de Kuhn-Tucker associades al programa*

$$\left. \begin{array}{ll} \max & z = 30x_1 + 20x_2 - 0.5x_1^2 - 0.2x_2^2 \\ \textit{sota} & 3x_1 + 6x_2 \leq 54 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ & 5x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

[3] Si el programa canònic fos de mínim, tindríem el mateix canviant el sentit de les desigualtats que apareixen en la primera i la tercera de les condicions del teorema.

Com que el gradient de la funció objectiu és

$$\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) = (30 - x_1, 20 - 0.4x_2)$$

i la matriu jacobiana de les restriccions és

$$Jg = \begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \\ \nabla g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix},$$

deduïm que les sis condicions de Kuhn-Tucker expressades per a un punt qualsevol (x_1, x_2), amb multiplicadors λ_1, λ_2 i λ_3 associats, són

1. $$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \cdot \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_1} \right) = (30 - x_1) - (3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 5\lambda_3) \leq 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \cdot \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_2} \right) = (20 - 0.4x_2) - (6\lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3) \leq 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \cdot \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_1} \right) \right) x_1 = \\ = (30 - x_1 - 3\lambda_1 - 6\lambda_2 - 5\lambda_3) \cdot x_1 = 0 \\ \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \cdot \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_2} \right) \right) x_2 = \\ = (20 - 0.4x_2 - 6\lambda_1 - 4\lambda_2 - 5\lambda_3) \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 54 \\ 6x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ 5x_1 + 5x_2 \leq 50 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} (3x_1 + 6x_2 - 54) \cdot \lambda_1 = 0 \\ (6x_1 + 4x_2 - 48) \cdot \lambda_2 = 0 \\ (5x_1 + 5x_2 - 50) \cdot \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_3 \geq 0 \end{cases}.$$

L'estudi de les condicions suficients d'optimalitat restringida per desigualtats és força complicat i no el farem. El que sí que veurem, però, és el cas de la programació convexa en què les condicions necessàries de Kuhn-Tucker són també suficients. L'interès per aquests tipus de programes rau en les seves aplicacions econòmiques.

Programació convexa

Sota certes hipòtesis de convexitat, les sis condicions necessàries de Kuhn-Tucker ens determinen tots els òptims dels programes. Donarem, en primer lloc, la definició de programa convex i enunciarem, tot seguit, el teorema fonamental de la programació convexa.[4] Diem que un programa de mínim (màxim) és **convex** si les funcions de restricció són convexes i, a més, la funció objectiu és convexa (còncava) o estrictament convexa (estrictament còncava) sobre el conjunt factible associat. El programa de l'exemple 1,

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 30x_1 + 20x_2 - 0.5x_1^2 - 0.2x_2^2 \\ \text{sota} & 3x_1 + 6x_2 \leq 54 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ & 5x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\},$$

és un programa convex ja que les tres funcions de restricció, per ser formes lineals, són convexes,[5] i la funció objectiu

$$z = 30x_1 + 20x_2 - 0.5x_1^2 - 0.2x_2^2$$

és estrictament còncava ja que les matrius hessianes que hi té associades són iguals a la matriu

$$Hz\,(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{pmatrix}$$

que és definida negativa.[6]

Teorema 8 (Programació convexa) *Tot punt que satisfà les sis condicions de Kuhn-Tucker associades a un programa canònic convex, amb funció objectiu i funcions de restricció de tipus* $\mathbf{C}^2$ *sobre un domini obert i convex, és un òptim global del programa.*

[4] Demostrem aquest teorema en l'apèndix A.

[5] Les formes lineals són, alhora, funcions còncaves i convexes.

[6] Vegeu el teorema de caracterització de les funcions escalars convexes i/o còncaves que enunciem en l'apèndix A.

Exemple 9 *Trobeu l'òptim del programa*

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 30x_1 + 20x_2 - 0.5x_1^2 - 0.2x_2^2 \\ \textit{sota} & 3x_1 + 6x_2 \leq 54 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ & 5x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

aplicant el teorema anterior.

Com que el programa és convex, tot punt que satisfaci les sis condicions de Kuhn-Tucker serà automàticament un màxim global. Recordem que, per a un punt (x_1, x_2) qualsevol amb multiplicadors λ_1, λ_2 i λ_3 associats, aquestes condicions eren

1. $\left\{\begin{array}{l} 30 - x_1 - 3\lambda_1 - 6\lambda_2 - 5\lambda_3 \leq 0 \\ 20 - 0.4x_2 - 6\lambda_1 - 4\lambda_2 - 5\lambda_3 \leq 0 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} (30 - x_1 - 3\lambda_1 - 6\lambda_2 - 5\lambda_3)\, x_1 = 0 \\ (20 - 0.4x_2 - 6\lambda_1 - 4\lambda_2 - 5\lambda_3)\, x_2 = 0 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} 3x_1 + 6x_2 \leq 54 \\ 6x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ 5x_1 + 5x_2 \leq 50 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array}\right.$

5. $\left\{\begin{array}{l} (3x_1 + 6x_2 - 54)\, \lambda_1 = 0 \\ (6x_1 + 4x_2 - 48)\, \lambda_2 = 0 \\ (5x_1 + 5x_2 - 50)\, \lambda_3 = 0 \end{array}\right.$

6. $\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_3 \geq 0 \end{array}\right. .$

Una manera d'abordar el problema és veure, per exemple, si existeix algun punt (x_1, x_2) que les satisfà amb els tres multiplicadors de Kuhn-Tucker associats diferents de zero. Així doncs, si

$$(a) \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$$

deduïm, per la condició (5), el sistema d'equacions lineals

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1 + 6x_2 = 54 \\ 6x_1 + 4x_2 = 48 \\ 5x_1 + 5x_2 = 50 \end{array}\right.$$

que és incompatible. Per tant, un dels multiplicadors de Kuhn-Tucker, com a mínim, ha de ser necessàriament zero. Suposem, per exemple, que

$$(b) \quad \lambda_1 = 0 \quad \text{i} \quad \lambda_2, \lambda_3 \neq 0.$$

En aquest cas, i de nou per la condició (5), s'obté el sistema de Cramer

$$\left\{ \begin{array}{l} 6x_1 + 4x_2 = 48 \\ 5x_1 + 5x_2 = 50 \end{array} \right. , \quad \text{amb solució} \quad x_1 = 4 \quad \text{i} \quad x_2 = 6.$$

Finalment, tenint en compte que els valors de les variables instrumentals obtinguts són diferents de zero, s'arriba, aplicant la condició (2), al sistema de Cramer

$$\left. \begin{array}{l} 6\lambda_2 + 5\lambda_3 = 26 \\ 4\lambda_2 + 5\lambda_3 = 17.6 \end{array} \right\}, \quad \text{amb solució} \quad \lambda_2 = 4.2 \quad \text{i} \quad \lambda_3 = 0.16.$$

Es pot comprovar fàcilment que el punt

$$\left(x_1^0, x_2^0\right) = (4, 6),$$

amb el vector de multiplicadors de Kuhn-Tucker associat

$$\left(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0\right) = (0, 4.2, 0.16)$$

satisfà les sis condicions anteriors. Conseqüentment, $(4, 6)$ és l'únic màxim global del programa. Així doncs, cal produir i vendre 4 unitats de A i 6 unitats de B per maximitzar els ingressos totals. El valor òptim d' aquests ingressos serà de

$$z_0 = z\,(4, 6) = 224.8 \text{ u. m.}$$

En particular, i com que

$$3x_1^0 + 6x_2^0 = 48 < 54, \quad 6x_1^0 + 4x_2^0 = 48 \quad \text{i} \quad 5x_1^0 + 5x_2^0 = 50,$$

deduïm que, produint al nivell òptim, resten sis hores sense utilitzar en la primera fase i que s'esgota el temps disponible per les altres dues, és a dir, que l'òptim satura les restriccions associades a la segona i tercera fases.

Una aplicació important de la programació convexa la trobem en la resolució dels programes quadràtics. Aquests programes solen aparèixer en molts models d'optimització econòmica. Diem que un programa és **quadràtic** si les funcions de restricció són formes lineals i la funció objectiu s'obté com a suma d'una forma quadràtica i una forma lineal, és a dir, si és de la forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i.$$

Com podem comprovar, el programa convex que acabem de resoldre és quadràtic ja que les tres restriccions instrumentals són formes lineals i la funció objectiu s'obté com a suma de la forma lineal

$$f_1(x_1, x_2) = 30x_1 + 20x_2$$

i la forma quadràtica

$$f_2(x_1, x_2) = -0.5x_1^2 - 0.2x_2^2.$$

El teorema següent ens diu quan un programa quadràtic és convex.

Teorema 10 (Programació quadràtica) *Si*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

és la matriu associada a la forma quadràtica que apareix en la funció objectiu d'un programa quadràtic de màxim (mínim) aleshores aquest programa és convex si, i només si, la matriu A és definida o semi-definida negativa (positiva).

Fixem-nos que la convexitat d'un programa quadràtic depèn tan sols del signe de la forma quadràtica que hi apareix. Vegem-ne una aplicació econòmica.

El model de selecció d'inversions de Markowitz

Suposem que volem invertir un cert capital monetari en la compra de n títols que cotitzen en Borsa sota la hipòtesi que la rendibilitat anual del títol i-èsim ve estimada per una variable aleatòria R_i coneguda. En conseqüència, si x_i indica el tant per cent del capital destinat a la compra dels títols i-èsims, la rendibilitat total de la inversió vindrà donada per la variable aleatòria

$$R = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot R_i.$$

Per tant, podem considerar com la rendibilitat total de la cartera l'esperança de R,

$$E(R) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i,$$

on a_i denota l'esperança de R_i,

$$a_i = E(R_i),$$

i com a risc associat la variància

$$Var(R) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i x_j,$$

on a_{ij} representa la covariància de R_i i de R_j,

$$a_{ij} = Cov(R_i, R_j) = E(R_i \cdot R_j) - E(R_i) \cdot E(R_j).$$

El model de selecció d'inversions de Markowitz donat pel programa de mínim

$$\left.\begin{array}{ll} \min & \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i x_j \\ \text{sota} & \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i \geq E_0 \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & x_1, ..., x_n \geq 0 \end{array}\right\}$$

ens determina els tants per cent de la cartera destinats a la compra dels n títols que fan mínim el risc de la inversió de manera que la rendibilitat esperada sigui superior o igual a un cert valor prefixat E_0. Pot provar-se que el programa quadràtic canònic equivalent

$$\left.\begin{array}{ll} \min & \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i x_j \\ \text{sota} & \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i \geq E_0 \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i \geq 1 \\ & \sum_{i=1}^{n} -x_i \geq -1 \\ & x_1, ..., x_n \geq 0 \end{array}\right\}$$

és sempre convex. Així doncs, tot punt que satisfaci les sis condicions de Kuhn-Tucker associades és un òptim global del programa.

Exemple 11 *Suposem que tenim una cartera de renda variable de dos títols amb una rendibilitat mitjana anual respectiva del 18 % i del 14*

%, i amb un risc esperat del 0.16 % i del 0.04 %. Si la covariància dels dos títols és del -0.048 *%, determineu els tants per cent a invertir en cada títol si es vol minimitzar el risc de la inversió amb una rendibilitat mínima del 15 %*

Com que la matriu de variancies i covariàncies dels dos títols és

$$\begin{pmatrix} 0.0016 & -0.00048 \\ -0.00048 & 0.0004 \end{pmatrix}$$

el risc esperat de la cartera serà

$$\begin{aligned} V &= (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 0.0016 & -0.00048 \\ -0.00048 & 0.0004 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= 0.0016x_1^2 + 0.0004x_2^2 - 0.00096x_1x_2. \end{aligned}$$

Per tant, el programa canònic associat al model de selecció d'inversions de Markowitz que cal resoldre és

$$\left.\begin{array}{ll} \min & V = 0.0016x_1^2 + 0.0004x_2^2 - 0.00096x_1x_2 \\ \text{sota} & 0.18x_1 + 0.14x_2 \geq 0.15 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & -x_1 - x_2 \geq -1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

on les variables instrumentals indiquen els tants per cent de la cartera que cal invertir en cada títol. Aquest programa quadràtic és convex ja que la forma quadràtica V és definida positiva. Per tant, tot punt que satisfaci les condicions de Kuhn-Tucker serà l'òptim global que busquem. Com que el gradient de V és

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) = (0.0032x_1 - 0.00096x_2, 0.0008x_2 - 0.00096x_1)$$

i la matriu jacobiana de les restriccions és

$$Jg = \begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.18 & 0.14 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

deduïm que les sis condicions de Kuhn-Tucker per a un punt (x_1, x_2) qualsevol, amb multiplicadors λ_1 i λ_2 associats, són

1. $$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \cdot \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_1} \right) = \\ = 0.0032x_1 - 0.00096x_2 - 0.18\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \geq 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_2} - \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \cdot \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_2} \right) = \\ = -0.00096x_1 + 0.0008x_2 - 0.14\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial V}{\partial x_1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \cdot \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_1} \right) \right) x_1 = \\ = (0.0032x_1 - 0.00096x_2 - 0.18\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) \cdot x_1 = 0 \\ \left(\dfrac{\partial V}{\partial x_2} - \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \cdot \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_2} \right) \right) x_2 = \\ = (-0.00096x_1 + 0.0008x_2 - 0.14\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 0.18x_1 + 0.14x_2 \geq 0.15 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ -x_1 - x_2 \geq -1 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} (0.18x_1 + 0.14x_2 - 0.15) \cdot \lambda_1 = 0 \\ (x_1 + x_2 - 1) \cdot \lambda_2 = 0 \\ (-x_1 - x_2 + 1) \cdot \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_3 \geq 0 \end{cases} .$$

Veurem que existeix un punt que satisfà aquestes sis condicions amb multiplicadors de Kuhn-Tucker associats

$$\lambda_1 = \lambda_3 = 0 \quad \text{i} \quad \lambda_2 \neq 0.$$

D'entrada, i per la segona desigualtat de la condició (5), tenim que

$$x_1 + x_2 = 1.$$

En aquest punt cal obrir una discussió paral·lela respecte els valors de x_1 i de x_2. Si

$$(a) \quad x_1 = 0$$

aleshores, per la igualtat anterior,

$$x_2 = 1$$

que no satisfà la segona desigualtat de la condició (3) , ja que

$$0.18x_1 + 0.14x_2 = 0.14 < 0.15.$$

En canvi, si

$$(b) \quad x_2 = 0$$

aleshores

$$x_1 = 1$$

d'on, aplicant la primera de les igualtats de la condició (2) , deduïm que

$$\lambda_2 = 0.0032.$$

Tanmateix, aquests valors de x_1, x_2, λ_1, λ_2 i λ_3 no satisfan la segona de les desigualtats de la condició (1) ja que

$$-0.00096x_1 + 0.0008x_2 - 0.14\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = -0.00416 \ngeq 0.$$

Finalment, si

$$(c) \quad x_1, x_2 \neq 0$$

tindríem, per la condició (2) de nou, les equacions lineals

$$\begin{cases} -0.00096x_1 + 0.0008x_2 - \lambda_2 = 0 \\ \ \ 0.0032x_1 - 0.00096x_2 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

que, juntament amb l'equació inicial

$$x_1 + x_2 = 1$$

formen un sistema de Cramer amb solució

$$x_1 = \frac{11}{37}, \quad x_2 = \frac{26}{37} \quad \text{i} \quad \lambda_2 = \frac{32}{115625}.$$

És trivial comprovar que aquests valors, amb λ_1 i λ_3 iguals a zero, satisfan les sis condicions de Kuhn-Tucker. En altres paraules, l'òptim del programa és el punt

$$(x_1^0, x_2^0) = \left(\frac{11}{37}, \frac{26}{37}\right), \quad \text{amb} \quad \left(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0\right) = \left(0, \frac{32}{115625}, 0\right).$$

Així doncs, cal invertir un

$$x_1^0 = \frac{11}{37} = 29.73\ \%$$

de la cartera en títols del primer tipus i un

$$x_2^0 = \frac{26}{37} = 70.27\ \%$$

en el segon, amb un risc mínim esperat del

$$V_0 = 0.0138\ \%.$$

En aquest cas, la rendibilitat òptima esperada de la cartera serà superior al 15 % prefixat ja que

$$0.18x_1^0 + 0.14x_2^0 = 15.2\ \%.$$

Interpretació econòmica dels multiplicadors de Kuhn-Tucker

És evident que l'òptim i el valor òptim de la funció objectiu d'un programa depèn, en darrera instància, de les constants de restricció. La interpretació econòmica dels multiplicadors de Kuhn-Tucker ens diu que les variacions que es produeixen en el valor òptim de la funció objectiu són gairebé proporcionals a les variacions de les constants de restricció, actuant els multiplicadors de Kuhn-Tucker com a constants de proporcionalitat. En altres paraules, i donat un programa canònic que satisfà les hipòtesis del teorema de Kuhn-Tucker, es pot demostrar que si la i-èsima constant de restricció b_i varia lleugerament, la variació $\triangle z_0$ que es produeix en el valor òptim de la funció objectiu és aproximadament igual al producte

$$\triangle z_0 \simeq \lambda_i^0 \cdot \triangle b_i$$

on $\triangle b_i$ és l'increment que experimenta b_i i λ_i^0 és l'i-èsim multiplicador de Kuhn-Tucker associat a l'òptim. Veurem quines conseqüències econòmiques poden desprendre's d'aquest fet. Per assentar idees suposem que tenim un programa canònic de màxim associat a un procés productiu de n bens econòmics a partir de m recursos productius de manera que la variable x_j denota la quantitat produïda del bé j-èsim, la constant b_i és la disponibilitat màxima del recurs i-èsim i la funció objectiu $f(x_1, \ldots, x_n)$ és la utilitat generada al nivell de producció $x_1, \ldots, x_n$. Suposem, per un altre cantó, que el nivell òptim de producció ve donat pel punt

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

amb una utilitat òptima igual a

$$z_0 = f(x_0) = f\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$$

i amb vector de multiplicadors de Kuhn-Tucker associat

$$\lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 \\ \vdots \\ \lambda_m^0 \end{pmatrix}.$$

Si, en primer lloc, al nivell òptim de producció el i-èsim recurs s'esgota,[7] és a dir, si

$$(a) \quad g_i\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) = b_i,$$

[7]En altres paraules, que l'òptim x_0 satura la restricció i-èsima.

volem saber si ens interessa augmentar la disponibilitat màxima d'aquest recurs. Com veurem, la resposta depèn de la relació entre el seu preu de mercat unitari p_i i el i-èsim multiplicador de Kuhn-Tucker λ_i^0. En efecte, ja que el cost de $\triangle b_i$ unitats és

$$c = p_i \cdot \triangle b_i$$

deduïm, aplicant la quasigualtat de més amunt, que l'increment net en la utilitat òptima seria aproximadament igual a

$$\triangle_{\text{net}} z_0 = \triangle z_0 - c \simeq \left(\lambda_i^0 \cdot \triangle b_i\right) - (p_i \cdot \triangle b_i) = \left(\lambda_i^0 - p_i\right) \cdot \triangle b_i$$

Per tant, sempre que el preu unitari de mercat p_i sigui inferior a λ_i^0 interessarà augmentar la disponibilitat i-èsima. Per un altre cantó, si el recurs i-èsim no s'esgota, és a dir, si

$$(b) \quad g_i\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) < b_i,$$

llavors λ_i^0 seria zero (és una conseqüència de la cinquena condició de Kuhn-Tucker) i, per l'anterior, l'increment en el valor òptim de la utilitat serà aproximadament zero. En aquest cas, qualsevol increment $\triangle b_i$ en la disponibilitat del recurs i-èsim podria produir un decrement net en la utilitat òptima. En conseqüència, i des d'una perspectiva econòmica, els multiplicadors de Kuhn-Tucker són preus unitaris teòrics (anomenats *preus ombra*) que ens valoren els recursos en l'àmbit de producció òptim ja que ens permeten decidir si val la pena augmentar-ne o no les seves disponibilitats màximes. Per exemple, ja sabem que el programa de l'exemple 1,

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 30x_1 + 20x_2 - 0.5x_1^2 - 0.2x_2^2 \\ \text{sota} & 3x_1 + 6x_2 \leq 54 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ & 5x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\},$$

té un màxim global únic en el punt

$$\left(x_1^0, x_2^0\right) = (4, 6)$$

amb multiplicadors de Kuhn-Tucker associats (preus ombra)

$$\lambda_1^0 = 0, \quad \lambda_2^0 = 4.2 \quad \text{i} \quad \lambda_3^0 = 0.16$$

i amb un valor òptim de la funció d'ingressos totals igual a

$$z_0 = z\,(4, 6) = 224.8 \text{ u. m.}$$

En conseqüència, si volem augmentar el valor òptim dels ingressos deduïm que no estaríem disposats a pagar res per a disposar de més temps per a la primera fase mentre que arribaríem a pagar, com a màxim, 4.2 i 0.16 u. m. per a disposar, respectivament, d'una hora més per la segona i tercera fases. Els increments que experimentarien els ingressos totals enfront de possibles increments en les disponibilitats horàries d' aquests fases serien aproximadament iguals a

$$\triangle z_0 \simeq \lambda_2^0 \cdot \triangle b_2 = 4.2 \cdot \triangle b_2$$

on $\triangle b_2$ denota l'increment en el temps dedicat a la segona fase i

$$\triangle z_0 \simeq \lambda_3^0 \cdot \triangle b_2 = 0.16 \cdot \triangle b_3$$

on $\triangle b_3$ denota l'increment en el temps emprat en la tercera. Cal tenir present sempre que els preus ombra són preus de valoració aproximats ja que depenen, en darrera instància, de la magnitud de l'increment del recurs. Per exemple, els increments reals i estimats del valor òptim dels ingressos totals en funció de cinc possibles variacions en la disponibilitat horària de la segona fase serien

b_2	$\triangle b_2$	$\triangle z_0$ estimat	$\triangle z_0$ real	Error
48	0	$4.2 \cdot 0 = 0$	0	0
48.1	0.1	$4.2 \cdot 0.1 = 0.42$	0.42	0
48.2	0.2	$4.2 \cdot 0.2 = 0.84$	0.83	0.01
48.5	0.5	$4.2 \cdot 0.5 = 2.10$	2.06	0.04
49	1.0	$4.2 \cdot 1.0 = 4.20$	4.02	0.18

Notem que, a mesura que l'increment del recurs augmenta, també ho fa l'error comès en prendre l'increment estimat en lloc del real.

Exercicis

1. Sigui x_0 un òptim de

$$\left.\begin{array}{rr} \max & z = f(x) \\ \text{sota} & g(x) \leq b \\ & x \geq 0_n \end{array}\right\}.$$

   Aleshores x_0 és un òptim de

$$\left.\begin{array}{rr} \max & z = f(x) \\ \text{sota} & g(x) \leq b \\ & h(x) \leq c \\ & x \geq 0_n \end{array}\right\}$$

si, i només si, x_0 és un punt factible d'aquest programa. Passa el mateix amb un programa canònic de mínim? Raoneu la resposta.

2. Proveu que tot punt factible associat a un programa canònic de màxim que satisfà les hipòtesis del teorema de Kuhn-Tucker i que, a més, sigui òptim lliure de la funció objectiu és un màxim del programa canònic amb multiplicadors de Kuhn-Tucker iguals a zero. Comproveu que l'origen de coordenades és un òptim del programa
$$\left.\begin{array}{ll} \max & z=(x-1)^2-y \\ \text{sota} & x+y\leq 1 \\ & x,y\geq 0 \end{array}\right\},$$
amb un multiplicador de Kuhn-Tucker associat igual a zero i que, en canvi, no és un òptim lliure de la funció objectiu (això prova que el recíproc[8] de l'anterior no sempre és cert).

3. Sigui $U:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una funció d'utilitat còncava associada a la compra de n bens econòmics amb uns preus de venda unitaris $p_1,...,p_n$. Si el nivell de renda monetària disponible és de M u. m.,

   (a) Formuleu el programa d'optimització que li permet al consumidor optimitzar-ne la seva utilitat. És convex aquest programa? Raoneu la resposta.

   (b) Si $U(x_1,\ldots,x_n)$ és de tipus $\mathbf{C}^2$, determineu les condicions de Kuhn-Tucker del programa anterior tot provant que si
   $$x_0=\begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$
   és un òptim amb un multiplicador de Kuhn-Tucker associat diferent de zero llavors
   $$p_1x_1^0+\cdots+p_nx_n^0=M,$$
   és a dir, que la renda monetària disponible s'esgota en l'òptim. Pot existir un òptim amb tots els multiplicadors de Kuhn-Tucker nuls? Raoneu la resposta.

   (c) Proveu que si $n=2$ i $U(x_1,x_2)$ es la funció de Cobb-Douglas
   $$U(x_1,x_2)=x_1^a\cdot x_2^{1-a},\quad \text{amb}\quad 0<a<1\quad \text{i}\quad A>0,$$

[8] El recíproc d'una implicació de la forma $A\rightarrow B$ és $B\rightarrow A$.

l'òptim del programa és

$$\left(x_1^0, x_2^0\right) = \left(\frac{aM}{p_1}, \frac{(1-a)M}{p_2}\right).$$

4. Donat el model de selecció d'inversions per a dos títols

$$\left.\begin{array}{ll} \min & V(R_1)\,x_1^2 + V(R_2)\,x_2^2 + 2Cov\,(R_1,R_2)\,x_1x_2 \\ \text{sota} & E(R_1)\,x_1 + E(R_2)\,x_2 \geq E_0 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

amb E_0 tant per cent fixat,

(a) Proveu que es tracta d'un programa convex tenint en compte que
$$-1 \leq \frac{Cov\,(R_1,R_2)}{+\sqrt{V(R_1)\cdot V(R_2)}} \leq 1.$$

(b) Podem dir el mateix del model alternatiu

$$\left.\begin{array}{ll} \max & E(R_1)\,x_1 + E(R_2)\,x_2 \\ \text{sota} & V(R_1)\,x_1^2 + V(R_2)\,x_2^2 + 2Cov\,(R_1,R_2)\,x_1x_2 \leq V_0 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\},$$

on V_0 és un tant per cent fixat? Raoneu la resposta.

(c) Proveu que si en el model de minim inicial tenim que

$$Cov\,(R_1,R_2) = 0$$

aleshores, com a conseqüència de les condicions de Kuhn-Tucker associades,

$$E_0 = E(R_1)\,x_1^0 + E(R_2)\,x_2^0$$

en què (x_1^0, x_2^0) és l'òptim del programa. En altres paraules, que si els dos títols de la cartera d'inversions són independents, la rendibilitat òptima de la cartera és la mínima possible.

5. Donat el programa no lineal canònic

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \\ \text{sota} & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\},$$

(a) Proveu que es tracta d'un programa quadràtic no convex amb òptim finit global.

(b) Troveu-ne l'òptim global analitzant les condicions de Kuhn-Tucker. És únic aquest òptim? Existeix algún òptim finit local i no global? Existeix algun punt factible que satisfagi les condicions de Kuhn-Tucker sense ser òptim? Raoneu les respostes.

6. Una empresa que es dedica a la producció i distribució d'aparells electrònics ha signat un contracte per a subministrar un mínim de 50 unitats d'un determinat aparell A al mes, durant els pròxims 3 mesos, a una firma industrialconeguda . Hom sap que el cost mensual de producció de q unitats és proporcional al quadrat d'unitats produïdes en la forma $C(q) = 0.25 \cdot q^2$ i que el cost unitari d'emmagatzematge és de 20 u. m. al mes. Aleshores, si no existeixen estocs de A al inici del primer mes,

   (a) Formuleu el programa matemàtic que determina la política òptima de producció i emmagatzematge que li permet a l'empresa fer front al contracte de subministrament de A.

   (b) Estudieu les condicions de Kuhn-Tucker associades i determineu la producció òptima de A tot provant que, en el nivell de producció òptim, la comanda especificada en el contracte se satisfà sense generar excedents mensuals.

   (c) Si per condicionants del mercat l'empresa hagués de subministrar durant l'últim mes una unitat de més de A, analitzeu l'efecte que produiria aquest increment en la producció sobre el valor dels costos totals anteriors (cal aplicar la interpretació econòmica dels multiplicadors de Kuhn-Tucker per a un programa canònic de mínim).

7. Hom sap que els preus de venda unitaris de 3 articles de consum alimentari que el mercat ofereix habitualment són $p_1 = 401$ u. m., $p_2 = 200$ u. m. i $p_3 = 90$ u. m. si es venen 10 kg del primer, 15 kg del segon i 1 kg del tercer. La pròpia evolució del mercat fa que, per cada 250 gr venuts de més de cadascun d'ells, p_1 disminueixi en 2 u. m., p_2 en 5 u. m. i p_3 en 8 u. m. Si els costos unitaris de transport del magatzem al mercat dels esmentats articles són, respectivament, de 340 u. m., 156 u. m. i 28 u. m.,

   (a) Plantegeu el programa matemàtic que ens permet maximitzar la utilitat (benefici) de la venda dels tres articles sabent que la despesa total destinada al transport no pot ultrapassar les 4380 u. m.

(b) Resoleu el programa anterior tot determinant el benefici òptim. Proveu que la despesa òptima del transport és exactament igual a 4378.975 u. m. i que qualsevol quantitat monetària de més destinada a aquest capítol no modifica el valor òptim del programa.

(c) Si la despesa monetària destinada a cobrir el cost total de transport no pot superar les 4283 u. m., determineu el nou òptim, com també el nou benefici òptim associat.

(d) Si en les hipòtesis de l'apartat anterior poguèssim destinar 50 u. m. més per a cobrir el cost total de transport dels tres articles, estimeu l'increment que es produiria en el benefici òptim associat a la seva venda.

8. L'empresa X fabrica i ven tres productes P_1, P_2 i P_3 amb uns costos unitaris de producció de 17, 23 i 11 u. m. Pel que fa a les vendes, se sap que la funció de demanda de P_1 és bàsicament lineal i pren la forma

$$p_1 = p_1(q_1) = a - b \cdot q_1, \quad \text{amb} \quad a, b \geq 0,$$

en què p_1 denota el seu preu de venda unitari i q_1 la quantitat venuda. Els paràmetres a i b són, en principi, desconeguts encara que la informació de què disposa X relacionada amb vendes precedents ens diu, per una banda, que $p_1(1) \leq 50$ i, per l'altra, que es coneixen els valors de p_1 per a quatre valors concrets de q_1 donats per la taula

q_1	10	18	35	50
p_1	49	48	46	45

.

En aquestes condicions,

(a) Determineu el programa de mínims quadràtics que ens permet trobar els valors d'a i b tenint en compte que l'expressió que cal minimitzar és

$$\sum_{q_1=10,18,35,50} (p_1 - (a - b \cdot q_1))^2$$

i demostreu que aquest programa és convex.

(b) Determineu les condicions necessàries de Kuhn-Tucker del programa anterior i estudieu-les per al cas en què els multiplicadors associats siguin zero. Amb les dades anteriors, calculeu el valor dels paràmetres a i b.

(c) Suposem ara que les funcions de demanda de P_2 i P_3 són, respectivament,

$$p_2 = 248.5 - 0.25q_2 \quad \text{i} \quad p_3 = 146.3 - 0.19q_3.$$

Amb els valors de a i b obtinguts en l'apartat anterior, determineu les quantitats de P_1, P_2 i P_3 que maximitzen l'ingrés obtingut per la seva venda si, com a màxim, el cost de producció és de 20000 u. m. i tot el que es produeix es ven.

(d) Proveu que, en aquest cas, no estaríem disposats a pagar res per augmentar la despesa monetària destinada a la producció de P_1, P_2 i P_3.

9. Una empresa necessita un mínim de 6 milions d'euros per dur a terme un nou projecte d'inversió i tres bancs, B_1, B_2 i B_3, s'han oferit a finançar-la. Encara que cadascun d' aquests bancs ha estipulat que el nominal del prèstec més el interessos siguin liquidats en sis anys, les cèdules de liquidació varien d'un banc a l'altres segons la taula

Tant per cent sobre el nominal a pagar						
	any1	any2	any3	any4	any5	any6
Banc1	0	0	30	40	50	55
Banc2	5	15	25	35	40	45
Banc3	45	40	0	35	15	15

Si el dessitg de l'empresa és no pagar més de 4 milions d'euros d'interessos i el risc de la inversió ve mesurat per la forma quadràtica

$$\sigma^2 = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 0.04868 & 0.03021 & -0.0209 \\ 0.03021 & 0.01979 & -0.01146 \\ -0.0209 & -0.01146 & 0.02285 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

en què x_i denota la quantitat en milions d'euros que aporta el banc B_i al projecte,[9]

(a) Formuleu el programa que ens dóna les quantitats monetàries a demanar a cadascun dels tres bancs. És convex aquest programa? Raoneu la resposta.

(b) Trobeu l'òptim del programa anterior tot indicant el nominal total del prèstec que l'empresa ha de rebre per part dels tres

[9] L'empresa considera avantajós que el pagament anual als tres bancs sigui, any rere any, lo més semblant possible i aquesta forma quadràtica ens mesura la dispersió d'aquets pagaments.

bancs. Quin és l'interès total que ha de pagar l'empresa al llarg dels sis anys?[10]

10. Una botiga de formatges té 20 kg d'una mescla de fruites d'estació i 60 kg d'un formatge car amb els quals es confeccionen dos tipus de formatge per a untar, fi i normal, que són molt populars durant les festes de Nadal. Cada quilogram de formatge fi es composa de 0.2 kg de mescla de fruites i de 0.8 kg de formatge car, mentre que un quilogram de formatge per untar normal es composa de 0.2 kg de mescla de fruites, de 0.3 kg de formatge car i de 0.5 kg de formatge de farcit del qual es disposa en abundància. Si a causa de les polítiques de preus emprades per la botiga en campanyes precedents, hom sap que la demanda en quilograms per a cada tipus de formatge per untar depèn del seu preu de venda en u. m. segons les funcions de demanda

$$d_1 = 190 - 25p_1 \quad \text{i} \quad d_2 = 250 - 50p_2,$$

   (a) Formuleu el programa que maximitza els ingressos obtinguts per la venda dels dos formatges per untar tenint en compte de que es vol vendre tota la producció, i proveu que es tracta d'un programa quadràtic no convex.

   (b) Comproveu que l'origen de coordenades satisfà les condicions de Kuhn-Tucker associades al programa anterior i que, en canvi, no és un òptim.

   (c) Resoleu el programa anterior en el cas de que la demanda i la oferta d'ambdós formatges per a untar siguin iguals tot provant que, en l'òptim, s'esgota la mescla de fruites però no així el formatge car. Comproveu que l'òptim obtingut satisfà també les condicions de Kuhn-Tucker associades al programa del primer apartat.[11]

---

[10] Per simplificar, cal considerar l'interès total com la suma aritmètica dels interessos anuals.

[11] Pot demostrar-se que aquest punt és l'òptim d'aquest programa.

Capítol 2

Programació lineal

El mètode de resolució per a programes convexos relacionat amb les condicions de Kuhn-Tucker és adient també per al cas en què el programa sigui lineal. Tanmateix, però, existeix un mètode algebraic de resolució adaptable a processos informàtics, anomenat *algorisme del símplex*, que es mostra més eficaç a l'hora de resoldre aquests programes. A més, amb vista a les aplicacions econòmiques, aquest algorisme ens proporciona la informació necessària per a analitzar el comportament dels òptims enfront de possibles variacions en l'estructura del programa lineal (és el que s'anomena *anàlisi de sensibilitat*). Val a dir que l'algorisme del símplex és una de les contribucions més importants de les matemàtiques en l'àmbit de les tècniques de gestió. Històricament, l'algorisme del símplex va ser ideat per G. B. Dantzig (1947) per optimitzar la logística dels subministraments aeris durant el bloqueig soviètic de Berlín,[1] encara que el matemàtic i premi Nobel rus L. Kantorovitch ja aplicava quelcom de semblant a l'inici dels anys trenta del segle XX en l'anàlisi dels plans quinquennals de la Unió Soviètica. Com a trets característics d'aquest capítol cal destacar una breu introducció als fonaments matemàtics de l'algorisme del símplex i la seva implementació com a eina de resolució dels programes lineals, com també l'estudi en detall de la *programació lineal dual* i de l'anàlisi de sensibilitat. Per començar, hom diu que un programa canònic d'òptims restringits per desigualtats és **lineal** si la funció objectiu i les funcions de restricció són formes lineals, és a dir, si és de la

[1] Tanmateix, els fonaments matemàtics de l'algorisme del Símplex no van ser publicats fins el 1951.

forma

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z=\sum_{j=1}^{n} c_j\cdot x_j \\ \text{sota} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\cdot x_j \le b_1 \\ & \vdots \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\cdot x_j \le b_m \\ & x_1,\dots,x_n \ge 0 \end{array}\right\}, \text{ o bé } \quad \left.\begin{array}{ll} \min & z=\sum_{j=1}^{n} c_j\cdot x_j \\ \text{sota} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\cdot x_j \ge b_1 \\ & \vdots \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\cdot x_j \ge b_m \\ & x_1,\dots,x_n \ge 0 \end{array}\right\}.$$

Exemple 12 *Suposem que en l'exemple 1 del capítol anterior els preus de venda unitaris són constants i iguals a*

$$p_1 = 30 \text{ u. m.} \quad i \quad p_2 = 20 \text{ u. m.}$$

Sota aquesta hipòtesi, determineu el nou programa que maximitza els ingressos totals de la venda de A i B.

Ara, la funció objectiu d'ingressos totals és

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 = 30x_1 + 20x_2$$

Així doncs, i atès que les restriccions de caràcter instrumental no varien, el nou programa que ens permet trobar els ingressos totals màxims generats per la venda de A i B és

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 30x_1 + 20x_2 \\ \text{sota} & 3x_1 + 6x_2 \le 54 \\ & 6x_1 + 4x_2 \le 48 \\ & 5x_1 + 5x_2 \le 50 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}\right\}.$$

Aquest programa és lineal ja que la funció objectiu i les tres funcions de restricció són formes lineals.

Fixem-nos que tot programa lineal canònic es pot escriure matricialment en la forma

$$\left.\begin{array}{lr} \max & z = c^t\cdot x \\ \text{sota} & A\cdot x \le b \\ & x \ge 0 \end{array}\right\} \quad \text{o} \quad \left.\begin{array}{lr} \min & z = c^t\cdot x \\ \text{sota} & A\cdot x \ge b \\ & x \ge 0 \end{array}\right\},$$

en què

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

és el vector de les variables instrumentals,

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

és el vector de coeficients de la funció objectiu,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m\times n}$$

és la matriu de restricció i

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

és el vector de les constants de restricció. Aquesta és l'anomenada *formulació matricial canònica* d'un programa lineal. Notem, per exemple, que el vector de coeficients de la funció objectiu, la matriu de coeficients de restricció i el vector de les constants de restricció de la formulació canònica matricial del programa anterior són

$$c = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} 54 \\ 48 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

En primer lloc, enunciarem el teorema fonamental de la programació lineal que relaciona els òptims finits d'un programa lineal amb un tipus especial de punts factibles anomenats *vèrtexs*.[2] Des d'un punt de vista informal, els vèrtexs del conjunt factible d'un programa lineal són els punts factibles que saturen almenys n de les $m+n$ restriccions de desigualtat associades (m restriccions instrumentals i n restriccions de signe)[3].Com apuntem en el teorema fonamental, si un programa lineal té òptim finit almenys un dels vèrtexs del conjunt factible és òptim.

Exemple 13 *Comproveu que els vèrtexs del conjunt factible del programa lineal anterior són* $(0,0)$, $(0,9)$, $(2,8)$, $(4,6)$ *i* $(8,0)$.

En aquest cas tenim que

$$n = 2 \quad \text{i} \quad m = 3$$

[2]Demostrem aquest teorema en l'apèndix B.

[3]Aquestes n restriccions saturades han de formar un sistema d'equacions lineals compatible i determinat.

Per tant, els vèrtexs són els punts factibles que saturen, com a mínim, dues de les cinc restriccions del programa. Hom pot comprovar fàcilment que $(0,0)$ satura les dues restriccions de signe, $(0,9)$ satura la primera restricció de signe i la primera restricció instrumental, $(2,8)$ satura la primera i la tercera restriccions instrumentals, $(4,6)$ satura la segona i la tercera restriccions instrumentals i $(8,0)$ satura la tercera restricció instrumental i la segona restricció de signe. Qualsevol altre punt factible no pot ser vèrtex ja que només satura, com a màxim, una de les cinc restriccions posibles.

Teorema 14 (Programació lineal) *Si un programa lineal té òptim finit, un dels vèrtexs del conjunt factible associat és un òptim global i, a més, qualsevol punt que pertanyi al segment que tingui per extrems dos òptims globals també ho és.*

Aplicarem aquest teorema per resoldre el programa anterior.

Exemple 15 *Determineu els òptims de*

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 30x_1 + 20x_2 \\ \textit{sota} & 3x_1 + 6x_2 \leq 54 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ & 5x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}.$$

Com que el conjunt factible associat és compacte (ho hem provat en el capítol anterior), deduïm, aplicant el teorema de Weierstrass, que el programa té òptim finit i global ja que la funció objectiu, per ser lineal, és contínua. En conseqüència, i pel teorema anterior, un dels vèrtexs del conjunt factible és un òptim global. Una simple avaluació del valor de la funció objectiu sobre cadascun dels vèrtexs ens mostra que $(4,6)$ i $(8,0)$ són òptims. Així doncs, hom dedueix que qualsevol punt del segment d'extrems $(4,6)$ i $(8,0)$ és un òptim global amb un valor òptim de la funció objectiu igual a

$$z_0 = 240 \text{ u. m.}$$

En conseqüència, si l'objectiu és resoldre els programes lineals de la manera més senzilla i ràpida possible, el que cal és analitzar el valor de la funció objectiu sobre els vèrtexs del conjunt factible. D'això tracta precisament l'algorisme del símplex. Abans de veure-ho, però, necessitem introduir una nova formulació pels programes lineals. Considerem de nou el programa que acabem de resoldre. És evident que podem substituir les tres restriccions de desigualtat associades per equacions de manera que s'obtingui el programa

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 30x_1 + 20x_2 \\ \text{sota} & 3x_1 + 6x_2 + s_1 = 54 \\ & 6x_1 + 4x_2 + s_2 = 48 \\ & 5x_1 + 5x_2 + s_3 = 50 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

en què les noves variables s_1, s_2 i s_3, que ens mesuren la saturació de les restriccions inicials, són positives (si les desigualtats haguessin estat de més gran o igual, les variables s_i s'hi haurien introduït amb signe menys per respectar la restricció de positivitat). Fixem-nos que aquestes variables no apareixen en la funció objectiu (o, alternativament, apareixen multiplicades per zero); a causa d'això, aquest programa d'òptims restringits per equacions és equivalent a l'anterior ja que genera les mateixes solucions per a les variables instrumentals. De fet, els valors òptims que prenen les variables s_i ens diuen si les restriccions estan saturades en l'òptim del programa lineal inicial i, a més, ens donen el valor de la diferència en el cas que no ho estiguin. Així doncs, i en general, la *formulació matricial estàndard* d'un programa lineal és de la forma

$$\left.\begin{array}{rl} \max\,(\min) & z = c^t \cdot x \\ \text{sota} & A \cdot x = b \\ & x \geq 0 \end{array}\right\}$$

en què

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

amb la matriu de restricció igual a

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \pm 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix},$$

i en què les variables $s_1, \ldots, s_m$ són les *variables de separació* del programa.[4] Fixem-nos que en la formulació matricial estàndard del pro-

[4]Els coeficients ± 1 de la matriu de restricció A són $+1$ si la restricció associada és de menor o igual, i -1 si és de més gran o igual.

grama anterior tenim que

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 54 \\ 48 \\ 50 \end{pmatrix},$$

i

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'algorisme del símplex: fonaments matemàtics

L'algorisme del símplex, que es basa en el fet de que els òptims finits d'un programa lineal es troben en els vèrtexs del conjunt factible, presenta dos trets característics: en primer lloc, que no li cal avaluar el valor de la funció objectiu sobre tots els vèrtexs del conjunt factible sinó sobre aquells que l'optimitzen més ràpidament; i, en segon, que és el propi algorisme el que ens indica explícitament si l'òptim és finit (i en aquest cas ens en dóna el seu valor) o si és infinit. Analitzarem, a continuació, els fonaments matemàtics de l'algorisme del símplex per a un programa lineal matricial estàndard de màxim (a partir d'ara PLM per abreujar) de la forma

$$\left.\begin{array}{rr} \max & z = c^t \cdot x \\ \text{sota} & A \cdot x = b \\ & x \geq 0_n \end{array}\right\}$$

en què les $n-m$ primeres components del vector

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-m} \\ x_{n-m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

són les variables instrumentals i les altres m les de separació. Per tant, les $n-m$ primeres components del vector de coeficients c són els coeficients de la funció objectiu inicial i la resta són zero ja que estan associats amb les m variables de separació que no poden aparèixer. Així doncs, la matriu de restricció de PLM serà de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-m} & \pm 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn-m} & 0 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m \times n}$$

en què les $n-m$ primeres columnes de A estan associades amb les $n-m$ variables instrumentals i les altres m estan associades amb les m variables de separació. Com podem veure, la matriu A és de rang m ja que té per submatriu la matriu

$$B = \begin{pmatrix} \pm 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_m$$

Aquest fet ens permet donar la primera definició: s'anomena *matriu bàsica* de PLM tota submatriu quadrada invertible d'ordre m. Sigui, doncs,

$$B \in \mathbb{M}_m$$

una matriu bàsica de PLM i sigui

$$D \in \mathbb{M}_{m \times n-m}$$

la matriu formada per les columnes de A que no són de B (les columnes de B i D poden estar barrejades en A). Com que cada columna de A està associada a una de les variables de x, les columnes de B, per ser columnes de A, també estaran associades a variables concretes de x. Així doncs, B particiona el vector x de manera que

$$x = \left(\frac{x_B}{x_D} \right) \in \mathbb{R}^n$$

en què

$$x_B \in \mathbb{R}^m \quad \text{i} \quad x_D \in \mathbb{R}^{n-m}$$

són els vectors formats, respectivament, per les variables associades a les columnes de B i D. Anàlogament, B particiona el vector de coeficients de manera que

$$c = \left(\frac{c_B}{c_D} \right) \in \mathbb{R}^n$$

en què

$$c_B \in \mathbb{R}^m \quad \text{i} \quad c_D \in \mathbb{R}^{n-m}$$

són els vectors formats, respectivament, pels coeficients de la funció objectiu associats a x_B i a x_D. Arribats a aquest punt, hom diu que el vector x_B és el vector de les *variables bàsiques* associades a la matriu bàsica B. La noció de solució bàsica factible que donem a continuació desenvolupa un paper fonamental en l'algorisme del símplex. De fet, tota solució bàsica factible està associada a un vèrtex del conjunt factible de PLM. Hom diu que un punt factible x_0 de PLM és una *solució bàsica factible* (SBF, per abreujar) si existeix una matriu bàsica B de PLM de manera que les seves components no bàsiques associades són zero, és a dir, si

$$x_D^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cal fer notar que les components bàsiques d'una SBF x_0 associada a una matriu bàsica B són

$$x_B^0 = B^{-1} \cdot b$$

i que el valor que pren la funció objectiu sobre x_0 és igual a

$$z_0 = c_B^t \cdot B^{-1} \cdot b.$$

No tota matriu bàsica dóna lloc a una SBF. Es pot demostrar que una matriu bàsica B té una, i només una, SBF associada si

$$B^{-1} \cdot b \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'interès per les SBF rau en el fet de que si PLM té òptim finit una d'elles, com a mínim, ho és. Això és el que ens diu el teorema següent.

Teorema 16 (SBF i òptims) *Si PLM té òptim finit, existeix una matriu bàsica de manera que la SBF associada és un òptim.*

Així doncs, el que cal és esbrinar les condicions que fan d'una SBF un òptim de PLM. Per això, ens cal la definició següent: si B és una matriu bàsica de PLM amb una SBF associada x_0, les components del vector

$$c_B^t \cdot Y - c_D^t \in \mathbb{R}^{n-m}$$

on Y és la matriu

$$Y = B^{-1} \cdot D \in \mathbb{M}_{m \times n-m}$$

són els *coeficients de desplaçament*[5] de x_0. Cal fer notar que els coeficients de desplaçament estan associats a les variables no bàsiques de x_0. L'algorisme del símplex es basa en els dos teoremes que enunciem a continuació.

[5] Els oposats als coeficients de desplaçament són els anomenats *costos reduïts.*

Teorema 17 (algorisme del símplex 1) *Una SBF de PLM és un òptim si, i només si, els seus coeficients de desplaçament són positius o zero.*

Per tant, si algun coeficient de desplaçament associat a una SBF és negatiu caldrà cercar una altra ja que no és l'òptim que busquem. En aquest cas, cal recórrer al segon teorema de l'algorisme del símplex.

Teorema 18 (algorisme del símplex 2) *Suposem que el coeficient de desplaçament més petit d'una SBF x_0 de PLM és negatiu i està associat a la variable no bàsica x_i. Aleshores, si alguna de les components de la columna de la matriu Y associada a la variable x_i és estrictament positiva, hi ha una nova SBF que millora el valor de la funció objectiu respecte el de x_0. En cas contrari, és a dir, si totes les components d'aquesta columna són negatives o zero, el programa té òptim infinit.*

La prova d'aquest teorema, que fonamenta el procediment iteratiu de l'algorisme del símplex, segueix el raonament següent. Sigui B la matriu bàsica associada a la SBF x_0 del teorema. Si alguna de les components de la columna de la matriu

$$Y = B^{-1} \cdot D$$

associada a la variable no bàsica x_i, que suposarem que és la r-èsima columna de Y,

$$\begin{pmatrix} y_{1r} \\ \vdots \\ y_{mr} \end{pmatrix}$$

és estrictament positiva, existirà el quocient positiu

$$d = \frac{(x_B^0)_k}{y_{kr}} = \min\left\{ \frac{(x_B^0)_s}{y_{sr}} : y_{sr} > 0 \right\}$$

on $(x_B^0)_s$ denota la component s-èsima del vector x_B^0 de les variables bàsiques de x_0. Fixem-nos que d és el quocient entre les components k-èsimes de x_B^0 i del vector columna r-èsim de Y. Pot demostrar-se que el nou vector

$$\overline{x}_0 = \begin{pmatrix} \overline{x}_B^0 \\ \overline{x}_D^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

definit per

$$\overline{x}_B^0 = x_B^0 - d \cdot \begin{pmatrix} y_{1r} \\ \vdots \\ y_{mr} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad \text{i} \quad \overline{x}_D^0 = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ d \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-m}$$

en què d ocupa el lloc i-èsim en el vector columna $\overline{x}_D^0$, és una nova SBF de PLM que millora el valor de la funció objectiu respecte del de x_0. De fet, el pas de la SBF x_0 a la $\overline{x}_0$ implica un únic canvi en el conjunt de les variables bàsiques de x_0: en concret, x_i és la variable que passa a ser bàsica i x_k és la que deixa de ser-ho. Finalment, si totes les components de la columna r-èsima de la matriu Y fossin negatives o zero, es demostraria que l'òptim de PLM és infinit.

En resum, l'algorisme del símplex preveu tres fases. La primera, anomenada *fase d'iniciació*, parteix d'una SBF associada a una de les matrius bàsiques de PLM. Si tots els seus coeficients de desplaçament són positius, aquesta SBF és l'òptim de PLM. En cas contrari, és a dir, si algun dels coeficients de desplaçament és negatiu passaríem a la segona fase, anomenada *fase d'iteració*, on es determina una nova SBF que millora el valor de la funció objectiu seguint els passos del teorema anterior. Iterant el procés tantes vegades com calgui s'arribaria, o bé a una SBF amb tots els coeficients de desplaçament positius (òptim finit), o bé que l'òptim del programa és infinit. En aquesta nova fase, anomenada *fase de detenció*, l'algorisme s'atura definitivament. En la pràctica, i per a simplificar els càlculs, s'introdueixen en PLM quan calguin les anomenades *variables artificials* amb l'objecte de que, fent les mínimes modificacions possibles, la matriu identitat I_m d'ordre m,

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_m,$$

sigui sempre la matriu bàsica que cal considerar. Val a dir que la condició necessària i suficient perquè I_m, com a matriu bàsica, tingui una SBF associada és que totes les m components del vector b de restricció siguin positives. En l'exemple següent analitzem el mètode tabular de les tres fases de l'algorisme del Simplex per a un PLM concret.[6]

Exemple 19 *Resoleu el programa lineal*

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 3x_1 + 7x_2 \\ \textit{sota} & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

aplicant l'algorisme del símplex.

[6] Per a un programa de mínim aplicaríem el que segueix tot maximitzant la funció objectiu oposada.

És clar que, donades les desigualtats del programa, la formulació estàndard equivalent és

$$\left.\begin{array}{ll}\max & z = 3x_1 + 7x_2 \\ \text{sota} & -x_1 + x_2 - s_1 = 1 \\ & x_1 + s_2 = 2 \\ & x_2 + s_3 = 2 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0\end{array}\right\} .$$

Necessitem introduir una nova variable perquè la matriu identitat I_3 sigui una matriu bàsica del programa. En efecte, el programa lineal estàndard

$$\left.\begin{array}{ll}\max & z = 3x_1 + 7x_2 \\ \text{sota} & -x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 1 \\ & x_1 + s_2 = 2 \\ & x_2 + s_3 = 2 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, a_1 \geq 0\end{array}\right\}$$

es diferencia de l'anterior en la primera equació perquè s'ha introduït la nova variable a_1, i perquè té com a matriu bàsica associada a I_3. Com que la primera restricció d'aquest programa no és igual a la de l'anterior, les solucions d'ambdós programes poden no coincidir si al final el valor òptim de la variable a_1 és estrictament positiu. Per tant, i perquè això no passi, cal ≪penalitzar≫ a_1 introduint-la en la funció objectiu amb un coeficient negatiu $-M$ tant petit com calgui ja que estem maximitzant. Aquest recurs tècnic ens garanteix que al final a_1 s'anul·larà. Per tant, el programa lineal estàndard amb variable artificial a_1 que cal considerar serà, finalment,

$$\left.\begin{array}{ll}\max & z = 3x_1 + 7x_2 - Ma_1 \\ \text{sota} & -x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 1 \\ & x_1 + s_2 = 2 \\ & x_2 + s_3 = 2 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, a_1 \geq 0\end{array}\right\}$$

amb

$$B = I_3$$

com a matriu bàsica que té una SBF associada, ja que

$$B^{-1} \cdot b = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Seguint els fonaments matemàtics de l'algorisme del símplex tenim que a_1, s_2 i s_3 són, en aquest ordre, les variables bàsiques associades a I_3.

La resta, és a dir, x_1, x_2 i s_1 són les variables no bàsiques. Així doncs, la SBF associada a I_3 serà

$$\left(x_1^0, x_2^0, s_1^0, s_2^0, s_3^0, a_1^0\right) = (0,0,0,2,2,1)$$

ja que les variables bàsiques prenen els valors

$$\begin{pmatrix} a_1^0 \\ s_2^0 \\ s_3^0 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot b = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

i les variables no bàsiques són zero. Com que

$$Y = B^{-1} \cdot D = D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

en què D és la submatriu formada per les columnes de A que no són de I_3, els coeficients de desplaçament relatius a les variables no bàsiques d'aquesta SBF són

$$\begin{aligned} c_B^t \cdot D - c_D^t &= (-M,0,0) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - (3,7,0) = \\ &= (M-3, -M-7, M) \end{aligned}$$

ja que

$$c_B = \begin{pmatrix} -M \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad c_D = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

són, respectivament, els vectors de coeficients de la funció objectiu relatius a les variables bàsiques i no bàsiques. Aquests resultats els podem recollir en la *taula inicial* de l'algorisme del símplex

c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	b
$-M$	a_1	-1	**1**	-1	0	0	1	1
0	s_2	1	0	0	1	0	0	2
0	s_3	0	1	0	0	1	0	2
		$M-3$	$-M-7$	M	0	0	0	$-M$

Fixem-nos bé que aquests coeficients de desplaçament (que es troben en l'última fila de la taula) els podem calcular directament sobre les columnes de la taula associades a les variables no bàsiques. En efecte, per a x_1, tenim

$$c_B^t \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} - c_1 = (-M,0,0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 = M - 3,$$

per a x_2,

$$c_B^t \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} - c_2 = (-M, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 7 = -M - 7,$$

i per a s_1,

$$c_B^t \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} - c_3 = (-M, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = M.$$

Fent el mateix amb les variables bàsiques a_1, s_2 i s_3 s'obtindria zero com a coeficient de desplaçament associat.[7] En efecte, per a a_1,

$$c_B^t \cdot \begin{pmatrix} a_{16} \\ a_{26} \\ a_{36} \end{pmatrix} - c_6 = (-M, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (-M) = 0,$$

per a s_2,

$$c_B^t \cdot \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} - c_4 = (-M, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0,$$

i per a s_3,

$$c_B^t \cdot \begin{pmatrix} a_{15} \\ a_{25} \\ a_{35} \end{pmatrix} - c_5 = (-M, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 0.$$

Si, finalment, multipliquem el vector de coeficients c_B de les variables bàsiques pel vector columna b de les constants de restricció s'obté, segons el que hem apuntat més amunt, el valor que pren la funció objectiu sobre la SBF, ja que

$$z_0 = c_B^t \cdot B^{-1} \cdot b = c_B^t \cdot b = (-M, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -M.$$

En definitiva (i això val per a qualsevol de les taules associades a l'algorisme del símplex), la primera columna de la taula ens mostra els coeficients de la funció objectiu associats a les variables bàsiques, la segona ens diu quines són i l'última columna ens dóna el valor de les constants de restricció; la resta de columnes són les columnes de la matriu de coeficients associades a totes les variables del programa.

[7] Això passa sempre amb les variables bàsiques.

Fixem-nos que el valor que pren la funció objectiu sobre aquesta SBF s'obté de multiplicar matricialment la primera columna per l'última. Finalment, els coeficients de desplaçament associats a totes les variables, ja siguin bàsiques o no, es troben en l'última fila de la taula i es generen tal com acabem d'explicar. Cal remarcar que les columnes de la taula que estan associades a les variables no bàsiques són, precisament, les columnes de la matriu

$$Y = B^{-1} \cdot D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com que un dels coeficients de desplaçament és negatiu, aquesta SBF no és l'òptim que busquem. En aquest punt, l'algorisme de símplex entra en la fase d'iteració. El que hem de fer és trobar una nova SBF que millori el valor de la funció objectiu seguint els passos indicats en el teorema de l'algorisme del símplex 2. Per això, es considera el valor més petit dels coeficients de desplaçament negatius ja que la variable no bàsica associada passarà a ser bàsica. En aquest cas no hi ha dubte ja que només n'hi ha un de negatiu, $-M - 7$. Per tant, la variable no bàsica associada amb aquest coeficient de desplaçament, x_2, passa a ser bàsica. Cal determinar ara la variable bàsica que deixa de ser-ho i, per això, hem d'identificar el quocient d que apareix en aquest teorema. Amb aquesta finalitat, ens fixem en els valors estrictament positius de la columna de la taula associada a x_2,

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En aquest cas, tenim el primer coeficient,

$$a_{12} = 1,$$

que es troba en la fila de a_1, i el tercer,

$$a_{32} = 1,$$

que està en la de s_3. Això vol dir que una de les dues variables bàsiques, a_1 o s_3, deixarà el seu lloc a x_2 en la columna de les variables bàsiques de la taula. Com que

$$d = \min \left\{ \frac{b_1}{a_{12}}, \frac{b_3}{a_{32}} \right\} = \min \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{1} \right\} = 1 = \frac{b_1}{a_{12}},$$

el quocient associat a a_1 és el més petit i, en aquest cas, és la variable bàsica a_1 la que deixa de ser-ho. L'element en negreta que es troba en la intersecció de la fila de a_1 i la columna de x_2,

$$a_{12} = 1,$$

és l'anomenat *element pivot* de la taula.[8] El fet de que les restriccions del programa estàndard siguin equacions lineals ens permet modificar, de manera convenient, els elements de la taula a l'efecte de que la columna associada a la nova variable bàsica x_2 passi a ser la que tenia associada a_1,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sense que canviïn les columnes associades a les variables que continuen sent bàsiques, s_2 i s_3, i sense modificar tampoc el conjunt factible del programa lineal estàndard; d'aquesta manera, la nova matriu bàsica torna a ser la matriu identitat. Això s'aconsegueix, bàsicament, sumant a una fila de la taula la de l'element pivot multiplicada per un escalar o bé multiplicant la fila de l'element pivot per un número convenient. En el nostre cas, cal que el tercer valor de la columna sobre x_2 de la taula inicial, que és 1, sigui 0 i, per això, a la tercera fila li restem la fila del pivot. Les altres dues files romanen iguals. Així doncs, la nova taula que s'obté és

c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	b
7	x_2	-1	1	-1	0	0	1	1
0	s_2	1	0	0	1	0	0	2
0	s_3	**1**	0	1	0	1	-1	1
		-10	0	-7	0	0	$M+7$	7

i està associada a la nova SBF

$$\left(x_1^0, x_2^0, s_1^0, s_2^0, s_3^0, a_1^0\right) = (0, 1, 0, 2, 1, 0)$$

ja que les components no bàsiques x_1^0, s_1^0 i a_1^0 són zero i les bàsiques x_2^0, s_2^0 i s_3^0 prenen els valors corresponents de l'última columna. Com podem comprovar, la matriu bàsica associada a aquesta SBF és, de nou, la matriu identitat. Seguint un raonament anàleg al dut a terme en la taula inicial tenim que el valor de la funció objectiu sobre aquesta SBF és

$$z_0 = c_B^t \cdot b = (7, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 7$$

i que els coeficients de desplaçament de les noves variables no bàsiques x_1, s_1 i a_1 són, per a x_1,

$$c_B^t \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} - c_1 = (7, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = -10,$$

[8] L'element pivot es troba sempre en la intersecció de la fila de la variable bàsica que deixa de ser bàsica i de la columna de la variable no bàsica que passa a ser bàsica.

per a s_1,

$$c_B^t \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} - c_3 = (7,0,0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = -7,$$

i per a a_1,

$$c_B^t \cdot \begin{pmatrix} a_{16} \\ a_{26} \\ a_{36} \end{pmatrix} - c_6 = (7,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - (-M) = 7 + M.$$

Ja que els coeficients de desplaçament de x_1 i de s_1 són negatius, l'algorisme encara no s'atura. Com que -10 és el coeficient de desplaçament negatiu més petit, la nova variable bàsica serà x_1 ja que és la que hi està associada. Cal determinar, com abans, la variable bàsica que deixa de ser-ho i, per això, ens fixem en els valors estrictament positius de la columna de x_1 en la taula com hem fet anteriorment. En aquest cas tenim el segon i el tercer,

$$a_{21} = a_{31} = 1,$$

que es troben, respectivament, en la fila de s_2 i de s_3. Això vol dir que una d'aquestes variables deixarà el seu lloc a x_1. Com que

$$d = \min\left\{\frac{b_2}{a_{21}}, \frac{b_3}{a_{31}}\right\} = \min\left\{\frac{2}{1}, \frac{1}{1}\right\} = 1 = \frac{b_3}{a_{31}},$$

és la variable bàsica s_3 la que deixa de ser bàsica. L'element en negreta que es troba en la intersecció de la fila de s_3 i la columna de x_1,

$$a_{31} = 1,$$

és l'element pivot de la taula. Com que la nova columna sobre x_1 ha de ser

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cal sumar a la primera fila la de l'element pivot i restar a la segona fila també la del pivot (fixem-nos que és sempre la fila de l'element pivot la que actua). En conseqüència, la tercera taula és

c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	b
7	x_2	0	1	0	0	1	0	2
0	s_2	0	0	-1	1	-1	1	1
3	x_1	1	0	1	0	1	-1	1
		0	0	3	0	10	$M-3$	17

i està associada a la SBF

$$\left(x_1^0, x_2^0, s_1^0, s_2^0, s_3^0, a_1^0\right) = (1, 2, 0, 1, 0, 0).$$

Com que els coeficients de desplaçament de les noves variables no bàsiques s_1, s_3 i a_1 són, per a s_1,

$$c_B^t \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} - c_3 = (7, 0, 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 3,$$

per a s_3,

$$c_B^t \cdot \begin{pmatrix} a_{15} \\ a_{25} \\ a_{35} \end{pmatrix} - c_5 = (7, 0, 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 10,$$

i per a a_1,

$$c_B^t \cdot \begin{pmatrix} a_{16} \\ a_{26} \\ a_{36} \end{pmatrix} - c_6 = (7, 0, 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - (-M) = -3 + M,$$

entrem en la fase de detenció de l'algorisme ja que són tots positius (M pot ser tan gran com vulguem). Hem arribat, doncs, a la *taula final* del programa. Per tant, l'òptim del programa lineal inicial és

$$\left(x_1^0, x_2^0\right) = (1, 2)$$

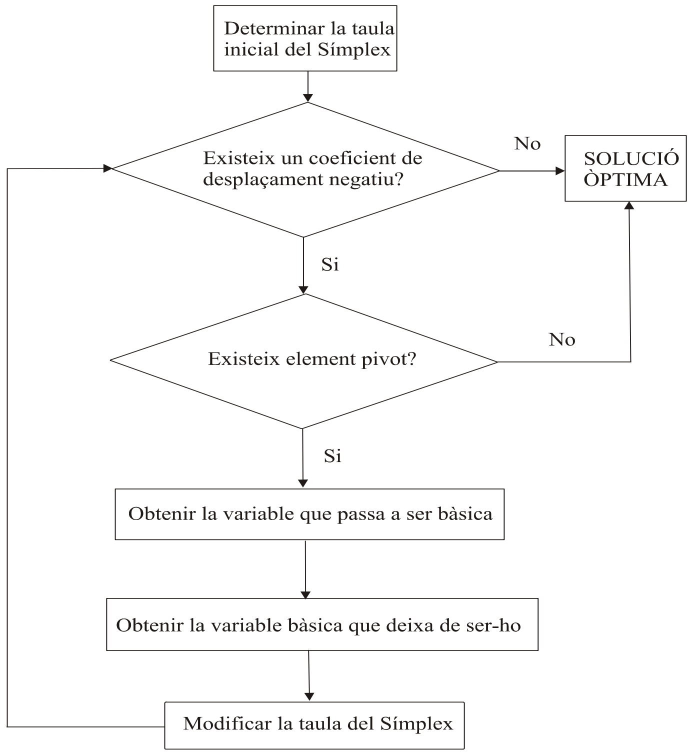
ja que són els valors que prenen les variables instrumentals x_1 i x_2 en la SBF anterior, amb un valor òptim de la funció objectiu igual a

$$z_0 = c_B^t \cdot b = (7, 0, 3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 17.$$

Fixem-nos que els valors òptims de les variables de separació són

$$s_1^0 = 0, \quad s_2^0 = 1 \quad \text{i} \quad s_3^0 = 0.$$

Això ens diu que la segona restricció no està saturada en l'òptim mentre que les altres dues sí. En resum, l'esquema bàsic de l'algorisme del símplex és



D'ara en endavant, cal tenir present les consideracions de caràcter general següents que afecten a les taules l'algorisme del símplex d'un programa lineal de màxim.

Proposició 20 *En general,*

1. *Si en la taula final alguna variable artificial és bàsica, el programa és infactible.*

2. *Si en una taula tenim més d'un coeficient de desplaçament negatiu mínim, podem escollir un qualsevol.*

3. *Si sobre la columna del coeficient de desplaçament negatiu mínim no podem calcular l'element pivot, el programa té òptim infinit.*

4. *Si en una taula hi ha més d'un element pivot, podem escollir-ne un qualsevol.*

5. *Si en la taula final alguna variable no bàsica té coeficient de desplaça- ment zero, el programa té infinits òptims.*

Com a aplicació resoldrem el programa lineal de l'exemple 12

Exemple 21 *Resoleu el programa lineal*

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 30x_1 + 20x_2 \\ \textit{sota} & 3x_1 + 6x_2 \leq 54 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ & 5x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

aplicant l'algorisme del símplex.

Com que les restriccions del programa són de menor o igual, la formulació estàndard associada

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 30x_1 + 20x_2 \\ \text{sota} & 3x_1 + 6x_2 + s_1 = 54 \\ & 6x_1 + 4x_2 + s_2 = 48 \\ & 5x_2 + 5x_2 + s_3 = 50 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

no conté variables artificials. Així doncs, la taula inicial serà

c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
0	s_1	3	6	1	0	0	54
0	s_2	**6**	4	0	1	0	48
0	s_3	5	5	0	0	1	50
		-30	-20	0	0	0	0

ja que les tres variables de separació són bàsiques i els coeficients de desplaçament de x_1 i de x_2 són

$$c_B^t \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} - c_1 = (0,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} - 30 = -30$$

i

$$c_B^t \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} - c_2 = (0,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 20 = -20$$

Com que aquests coeficients són negatius, aquesta taula no és la final i cal passar a la fase d'iteració per determinar la variable no bàsica que passa a ser bàsica i la bàsica que deixa de ser-ho. Ja que el coeficient de desplaçament negatiu més petit és el de la variable no bàsica x_1, aquesta serà la nova variable bàsica. Com ja hem indicat en l'exemple anterior, cal fixar la nostra atenció ara en les components estrictament positives de la columna associada a x_1 que, com veiem, són totes tres.

Això ens diu que, en principi, qualsevol variable de separació pot deixar de ser bàsica. Per veure quina és, considerem el quocient d donat per

$$d = \min\left\{\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}}, \frac{b_3}{a_{31}}\right\} = \min\left\{\frac{54}{3}, \frac{48}{6}, \frac{50}{5}\right\} = \frac{48}{6} = 8 = \frac{b_2}{a_{21}}.$$

Això ens diu que és la variable s_2 que està associada al quocient $\frac{b_2}{a_{21}}$ és la que deixa de ser-ho. L'element en negreta que es troba en la intersecció de la fila de s_2 i la columna de x_1 és l'element pivot de la taula. Així doncs, per què la nova columna de x_1 sigui

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cal dividir la fila del pivot per 6, restar a la primera fila la del pivot dividida per 2 i, finalment, restar a la tercera fila la del pivot multiplicada per $\frac{5}{6}$. D'aquesta manera, les columnes de la matriu identitat associades a les variables bàsiques s_1 i s_3 no canvien i els nous elements de la columna b romanen positius. Amb aquestes operacions, la segona taula queda de la forma

c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
0	s_1	0	4	1	$-1/2$	0	30
30	x_1	1	$2/3$	0	$1/6$	0	8
0	s_3	0	$5/3$	0	$-5/6$	1	10
		0	0	0	5	0	240

ja que els coeficients de desplaçament de les variables no bàsiques x_2 i s_2 són

$$c_B^t \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} - c_2 = (0, 30, 0) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2/3 \\ 5/3 \end{pmatrix} - 20 = 0$$

i

$$c_B^t \cdot \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} - c_4 = (0, 30, 0) \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/6 \\ -5/6 \end{pmatrix} - 0 = 5.$$

Com veiem, es tracta de la taula final. Per tant, l'òptim[9] és

$$\left(x_1^0, x_2^0\right) = (8, 0)$$

amb un valor òptim de la funció objectiu igual a

$$z_0 = c_B^t \cdot b = (0, 30, 0) \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = 240.$$

[9] Segons aquesta solució no hem de produir cap unitat de B.

Com que el coeficient de desplaçament de la variable no bàsica x_2 en l'última taula és zero deduïm, per la proposició anterior, que la solució no és pas única (ja ho sabíem) i com que els valors òptims de les variables de separació són

$$s_1^0 = 30, \quad s_2^0 = 0 \quad \text{i} \quad s_3^0 = 10$$

tenim que, al nivell òptim de producció de 8 unitats de A i cap unitat de B, resten sense utilitzar 30 hores de la primera fase, 10 hores de la tercera i que s'esgota el temps disponible per a la segona. Fixemnos que, en aquest cas, només ha calgut avaluar el valor dels ingressos totals en dos dels cinc vèrtexs del conjunt factible, el $(0, 0)$ i el $(8, 0)$, per arribar a l'òptim.

Models econòmics de la programació lineal

Des d'una perspectiva econòmica, les hipòtesis bàsiques associades a la programació lineal són quatre: *proporcionalitat* (o rendiments a escala constants), *additivitat*, *divisibilitat* i *no negativitat*. Les dues primeres són les responsables que les funcions escalars objectiu i de restricció siguin formes lineals i les altres dues fan referència al fet de que les variables instrumentals poden prendre qualsevol valor real positiu. Vegem algunes de les aplicacions econòmiques més importants de la programació lineal.

Model de planificació de la producció

Cas de màxim

Considerem una empresa que es dedica a la producció de n béns a partir de m recursos productius de manera que la quantitat de recurs i-èsim destinat a la producció del bé j-èsim és proporcional al seu nivell de producció; en altres paraules, que és de la forma

$$a_{ij}x_j$$

en què x_j és la quantitat produïda del bé i a_{ij} és la constant de proporcionalitat (a_{ij} és la quantitat de recurs i-èsim emprat en la producció d'una unitat del bé j-èsim). Si el nivell de recurs i-èsim disponible és b_i i si la utilitat generada per la fabricació d'una unitat del producte j-èsim és constant i igual a c_j, el programa lineal

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{sota} & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}\right\}$$

ens determina el nivell de producció dels n béns econòmics que optimitza la utilitat total sotmesa a les restriccions associades a la disponibilitat màxima dels recursos. L' exemple 12 és un model d'aquest tipus.

Cas de mínim

Considerem una empresa que es dedica a la producció de m béns econòmics a partir de n recursos productius per tal de satisfer una certa demanda del mercat. El procés de producció és tal que les unitats produïdes del bé i-èsim per cada unitat del recurs j-èsim són constants i iguals a a_{ij}. Si la demanda del bé i-èsim és b_i i si el cost unitari del recurs j-èsim és c_j, el programa lineal

$$\left.\begin{array}{ll} \min & z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{sota} & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}\right\}$$

ens determina les n quantitats x_j que cal utilitzar dels recursos productius per satisfer la demanda dels m béns a un cost mínim.

Exemple 22 *Una empresa de publicitat d'abast nacional vol donar a conèixer un producte a tres segments de la població, A, B i C, per mitjà d'anuncis en la ràdio i la televisió. Si el nombre en milions de ciutadans que escolten o veuen un anunci, juntament amb el seu cost unitari en milions d'u. m., venen donats per la taula*

	TV	*Ràdio*
A	6	2
B	3	2
C	1	3
Cost	*1*	*0.5*

es vol determinar el nombre d'anuncis que minimitzen el cost total de la campanya publicitària sabent que, per raons d'estratègia empresarial, un mínim de 24 milions de ciutadans de A, 18 milions de B i 12 milions de C haurien de rebre algun dels missatges publicitaris.

En aquest cas, els recursos productius són els anuncis i les demandes que cal satifer el nombre de ciutadans que, com a mínim, els han de rebre. En conseqüència, si x_1 i x_2 denoten el número d'anuncis de televisió i ràdio que cal emetre, el nombre en milions de ciutadans de A que reben un anunci, ja sigui de televisió o de ràdio, serà igual a

$$6x_1 + 2x_2.$$

Per tant, la primera restricció del programa és

$$6x_1 + 2x_2 \geq 24.$$

Raonant de manera semblant per als altres dos segments poblacionals, hom dedueix que caldrà resoldre el programa lineal

$$\left.\begin{array}{ll} \min & z = x_1 + 0.5x_2 \\ \text{sota} & 6x_1 + 2x_2 \geq 24 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 18 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}.$$

L'òptim d'aquest programa és

$$\left(x_1^0, x_2^0\right) = (2, 6).$$

Per tant, cal emetre 2 anuncis de televisió i 6 de ràdio els quals generaran un cost mínim de

$$z_0 = z\,(2, 6) = 5 \text{ milions d'u. m.}$$

Notem que 8 milions de ciutadans de C de més reben algun dels dos missatges publicitaris.

Model de la dieta

Suposem que es vol elaborar un compost que contingui unes quantitats màximes i mínimes de m elements, cadascun dels quals entra en la composició de n béns econòmics disponibles en el mercat. Suposem, també, que la proporció de l'element i-èsim en una unitat del bé j-èsim és coneguda i val a_{ij}. Aleshores, si la quantitat màxima i mínima de l'element i-èsim en el compost ha de ser, respectivament, de b_i i de d_i, i si el cost unitari del bé j-èsim és constant i igual a c_j, el programa lineal que ens determina les quantitats x_j dels n béns que entren en la composició del compost i que minimitzen el cost total és

$$\left.\begin{array}{ll} \text{min} & z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{sota} & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq d_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq d_m \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}\right\} .$$

Exemple 23 *Suposem que cada unitat dels aliments A, B i C conté bàsicament proteïnes i hidrats de carboni en les unitats*

	Proteïnes	*Hidrats de carboni*
A	12	8
B	6	3
C	9	2

Si diàriament es necessita un mínim de 60 unitats de proteïnes i un màxim de 25 unitats d'hidrats de carboni, determineu la composició de la dieta òptima sabent que el cost unitari de A, B i C és, respectivament, de 40, 20 i 30 u. m.

Si denotem per x_1, x_2 i x_3 al número d'unitats de A, B i C que entren en la dieta diària és evident que el que cal és resoldre el programa lineal

$$\left.\begin{array}{ll} \text{min} & z = 40x_1 + 20x_2 + 30x_3 \\ \text{sota} & 12x_1 + 6x_2 + 9x_3 \geq 60 \\ & 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 25 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

per minimitzar-ne el cost. Aquest programa té per òptim el punt

$$(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \left(\frac{35}{16}, 0, \frac{15}{4}\right).$$

Per tant, la composició òptima de la dieta conté, diàriament, $\frac{35}{16}$ unitats de A, cap unitat de B i $\frac{15}{4}$ unitatsde C amb un cost mínim de

$$z_0 = z\left(\frac{35}{16}, 0, \frac{15}{4}\right) = 200 \text{ u. m.}$$

Cal remarcar que la composició òptima de la dieta no és pas única.

Model del transport

Suposem que tenim m orígens (magatzems, fàbriques,etc), amb unes existències $s_1, \ldots, s_m$ d'un determinat producte, i n destinacions amb unes demandes $d_1, \ldots, d_n$ que cal cobrir. Si el cost unitari de transport del i-èsim origen a la destinació j-èsima és constant i igual a c_{ij}, i si la variable x_{ij} representa la quantitat de bé que cal transportar, el programa lineal que minimitza el cost total del transport del bé és

$$\left.\begin{array}{ll}
\min & z = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{sota} & x_{11} + ... + x_{1n} \leq s_1 \\
 & \vdots \\
 & x_{m1} + ... + x_{mn} \leq s_m \\
 & x_{11} + ... + x_{m1} \geq d_1 \\
 & \vdots \\
 & x_{1n} + ... + x_{mn} \geq d_n \\
 & x_{ij} \geq 0
\end{array}\right\}$$

en què les m primeres restriccions són restriccions de disponibilitat i les altres n són de demanda.

Exemple 24 *Suposem que una empresa disposa de dos magatzems, A_1 i A_2, amb unes existències respectives de 500 i 700 unitats d'un cert producte i de tres punts de venda, V_1, V_2 i V_3, amb unes demandes mínimes de 200, 250 i 200 unitats. Si els costos unitaris de transport, en unitats monetàries, dels magatzems als punts de venda venen donats per la taula*

	V_1	V_2	V_3
A_1	*2*	*3*	*5*
A_2	*4*	*4*	*2*

l'empresa vol saber les unitats del producte que cal transportar per a satisfer la demanda a un cost de transport mínim.

Si la variable x_{ij} indica el número d'unitats que cal transportar de A_i a V_j, el programa lineal que cal resoldre és

$$\left.\begin{array}{ll}
\min & z = 2x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 4x_{21} + 4x_{22} + 2x_{23} \\
\text{sota} & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 500 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 700 \\
 & x_{11} + x_{21} \geq 200 \\
 & x_{12} + x_{22} \geq 250 \\
 & x_{13} + x_{23} \geq 200 \\
 & x_{ij} \geq 0
\end{array}\right\}.$$

Com que l'òptim d'aquest programa és el punt

$$(200, 250, 0, 0, 0, 200),$$

cal transportar 200 unitats de A_1 a V_1, 250 unitats de A_1 a V_2 i 200 unitats de A_2 a V_3 amb un cost de transport mínim de

$$z_0 = 1550 \text{ u. m.}$$

Hom dedueix que les existències de A_1 i de A_2 no s'esgoten i que les demandes de V_1, V_2 i V_3 són satisfetes sense generar excedents.

Model *input-output* de Leontieff

Considerem un sistema productiu interdependent de n béns econòmics en què la quantitat del bé i-èsim que s'utilitza en la producció d'una unitat del bé j-èsim és constant i igual a a_{ij}. En conseqüència, si x_i denota la quantitat que cal fabricar del bé i-èsim, la part destinada a la producció dels n productes (*input*) d'aquest bé serà

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$$

ja que $a_{ij}x_j$ és, precisament, la quantitat del bé i-èsim emprada en la producció total del j-èsim bé. En conseqüència, la quantitat restant de la producció del bé i-èsim, és a dir,

$$x_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n)$$

serà la part destinada a la venda (*output*). Així doncs, si la demanda del bé i-èsim és d_i i si el seu cost unitari de fabricació és constant i igual a c_i, el programa lineal

$$\left.\begin{array}{ll} \min & z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{sota} & x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) \geq d_1 \\ & \vdots \\ & x_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n) \geq d_n \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}\right\}$$

ens determina la producció òptima dels n béns que satisfà la seva demanda sota les restriccions input-output anteriors.

Exemple 25 *El departament de control de qualitat d'una empresa que es dedica a la fabricació de claus i cargols ha determinat que, de mitjana i per cada 1000 claus fabricats, es fan malbé 2 claus i 1 cargol de la producció total mentre que, per cada 100 cargols produïts, es malmeten 2 claus i 2 cargols. Si la demanda de claus i cargols és, respectivament, de 10 i 7 milions d'unitats i si el cost de fabricar un clau i un cargol és de 0.1 i 0.2 u. m., l'empresa vol determinar la producció òptima que satisfà la seva demanda.*

Com que, per cada 1000 claus fabricats es malmeten 2 claus i 1 cargol llavors, per cada clau produït, es malmetran

$$\frac{2}{1000} = 0.002 \text{ claus} \quad \text{i} \quad \frac{1}{1000} = 0.001 \text{ cargols.}$$

En conseqüència, si produïm x_1 unitats de claus, la producció no destinada a demanda serà de $0.002x_1$ claus i $0.001x_1$ cargols. Anàlogament, si per cada 100 cargols fabricats es malmeten 2 claus i 2 cargols, llavors, per cada cargol produït, es faran malbé

$$\frac{2}{100} = 0.02 \text{ claus} \quad \text{i} \quad \frac{2}{100} = 0.02 \text{ cargols.}$$

Per tant, si cal produir x_2 unitats de cargols, la producció de claus i cargols no apta per a satisfer la demanda serà de $0.02x_2$ claus i $0.02x_2$ cargols. En definitiva, la producció output de claus i cargols serà, respectivament, de

$$x_1 - (0.002x_1 + 0.02x_2) \quad \text{i} \quad x_2 - (0.001x_1 + 0.02x_2)$$

i el programa lineal que cal resoldre és

$$\left.\begin{array}{ll} \min & z = 0.1x_1 + 0.2x_2 \\ \text{sota} & x_1 - (0.002x_1 + 0.02x_2) \geq 10000000 \\ & x_2 - (0.001x_1 + 0.02x_2) \geq 7000000 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}.$$

L'òptim d'aquest programa és

$$x_1^0 = 10163391 \text{ claus} \quad \text{i} \quad x_2^0 = 7153228 \text{ cargols,}$$

amb un cost de producció mínim de

$$z_0 = 2446985 \text{ u. m.}$$

Programació lineal dual

Ja hem indicat a l'inici d'aquest capítol que els programes lineals són programes convexos que, entre d'altres, satisfan les hipòtesis del teorema de Kuhn-Tucker. En particular, doncs, tindrem que tot òptim finit d'un programa lineal tindrà associats uns multiplicadors de Kuhn-Tucker (cal recordar que, des d'un punt de vista econòmic, aquests multiplicadors poden interpretar-se com a preus que valoren les restriccions en l'òptim). L'objectiu ara és determinar aquests multiplicadors a l'efecte de completar l'estudi dels programes lineals. La seva determinació ens du, de manera totalment natural, a introduir el concepte de programa lineal dual. L'estreta relació que existeix entre un programa lineal i el seu programa dual associat es posa de manifest en el teorema que enunciem tot seguit.

Teorema 26 *El vector de multiplicadors de Kuhn-Tucker*

$$\lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 \\ \vdots \\ \lambda_m^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \textit{associat a l'òptim} \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

del programa lineal canònic de màxim (mínim)

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = c^t \cdot x \\ \textit{sota} & A \cdot x \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}\right\} \quad \left(\left.\begin{array}{ll} \min & z = c^t \cdot x \\ \textit{sota} & A \cdot x \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}\right\}\right),$$

és l'òptim del programa lineal canònic de mínim (màxim)

$$\left.\begin{array}{ll} \min & z^* = b^t \cdot \lambda \\ \textit{sota} & A^t \cdot \lambda \geq c \\ & \lambda \geq 0 \end{array}\right\} \quad \left(\left.\begin{array}{ll} \max & z^* = b^t \cdot \lambda \\ \textit{sota} & A^t \cdot \lambda \leq b \\ & \lambda \geq 0 \end{array}\right\}\right)$$

en les variables instrumentals $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

A la vista d'aquest resultat podem introduir la definició següent: el **programa lineal dual** associat al **programa lineal primal** de màxim (mínim) canònic

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = c^t \cdot x \\ \text{sota} & A \cdot x \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}\right\} \quad \left(\left.\begin{array}{ll} \min & z = c^t \cdot x \\ \text{sota} & A \cdot x \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}\right\}\right)$$

és el programa lineal de mínim (màxim) canònic

$$\left.\begin{array}{ll} \min & z^* = b^t \cdot y \\ \text{sota} & A^t \cdot y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}\right\} \quad \left(\left.\begin{array}{ll} \max & z^* = b^t \cdot y \\ \text{sota} & A^t \cdot y \leq c \\ & y \geq 0 \end{array}\right\}\right).$$

Cal fer notar que hem d'expressar el primal en forma canònica per obtenir el dual associat i, a més, que el nombre de variables instrumentals del primal (dual) és sempre igual al de restriccions del dual (primal). Per exemple, per escriure el programa dual del programa lineal canònic de màxim de l' exemple 12

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 30x_1 + 20x_2 \\ \text{sota} & 3x_1 + 6x_2 \leq 54 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ & 5x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\},$$

cal tenir en compte que té 2 variables instrumentals, 3 restriccions i la matriu de coeficients de restricció

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Així doncs, el programa lineal dual canònic de mínim serà

$$\left.\begin{array}{ll} \text{min} & z^* = 54y_1 + 48y_2 + 50y_3 \\ \text{sota} & 3y_1 + 6y_2 + 5y_3 \geq 30 \\ & 6y_1 + 4y_2 + 5y_3 \geq 20 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

amb 3 variables instrumentals i 2 restriccions ja que

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Enunciem ara algunes de les propietats més importants que relacionen programes primal i dual.

Proposició 27 *En general,*

1. *El dual d'un programa lineal dual és, precisament, el programa primal inicial.*

2. *Si un programa lineal té òptim finit, el seu dual també i els seus valors òptims coincideixen. Per contra, si un programa lineal té òptim infinit, el dual associat és infactible.*[10]

3. *Si la component j-èsima de l'òptim d'un programa lineal primal és diferent de zero, la j-èsima restricció del programa dual associat està saturada en el seu òptim.*[11]

4. *Si un programa lineal té òptim finit, la component i-èsima de l'òptim del dual és igual al coeficient de desplaçament de la variable de separació i-èsima de la darrera taula del símplex del primal.*

La primera propietat ens diu que els papers del primal i del dual són intercanviables; per tant, les propietats anteriors continuen sent vàlides si canviem primal per dual en l'enunciat. Fixem-nos, a més, que l'última propietat fa possible l'obtenció de la solució del dual a partir de la darrera taula del símplex del primal. Vegem-ne un exemple.

---

[10] Aquesta propietat es coneix amb el nom de *teorema fonamental de la programació lineal dual.*

[11] És l'anomenat *teorema de separació complementària.*

Exemple 28 *Trobeu l'òptim del programa dual associat al programa lineal de l' exemple 12,*

$$\left.\begin{array}{ll} \min & z^* = 54y_1 + 48y_2 + 50y_3 \\ \textit{sota} & 3y_1 + 6y_2 + 5y_3 \geq 30 \\ & 6y_1 + 4y_2 + 5y_3 \geq 20 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}\right\},$$

i interpreteu econòmicament el resultat.

L'òptim d'aquest programa dual, com acabem d'apuntar, es pot obtenir a partir dels coeficients de desplaçament de l'última taula del símplex del primal associat. Aquesta taula, recordem-ho, era

c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
0	s_1	0	4	1	$-1/2$	0	30
30	x_1	1	2/3	0	1/6	0	8
0	s_3	0	5/3	0	$-5/6$	1	10
		0	0	0	5	0	240

Per tant, seguint l'enunciat de la proposició anterior, l'òptim del dual serà

$$\left(y_1^0, y_2^0, y_3^0\right) = (0, 5, 0)$$

ja que els coeficients de desplaçament de les variables s_1, s_2 i s_3 són, respectivament, 0, 5 i 0. Com podem veure, el valor òptim de la funció objectiu és

$$z_0^* = 240$$

que coincideix amb el del primal. Per tant, i donat que les components de l'òptim del dual són els preus ombra associats a l'òptim del primal, deduïm que no estaríem disposats a pagar res per incrementar el temps disponible per a la primera i tercera fases de la producció de A i B mentre que, com a màxim, pagaríem 5 u. m. per disposar d'una hora més en la segona. En aquest cas, l'increment $\triangle z_0$ del valor òptim dels ingressos totals enfront d'un petit increment $\triangle b_2$ del segon recurs seria, aproximadament,

$$\triangle z_0 \simeq y_2^0 \cdot \triangle b_2 = 5 \cdot \triangle b_2 \text{ u. m.}$$

De totes maneres, i com ja vam indicar en el final del primer capítol, cal anar amb compte amb aquesta interpretació ja que els preus ombra depenen, en darrera instància, dels valors de les constants de restricció. En efecte, si la segona constant de restricció fos, per exemple, de

$$b_2 = 61 \text{ hores},$$

els preus ombra serien diferents. En aquest cas, i mantenint les altres dues constants de restricció en el seu valor original, els òptims del primal i del dual serien, respectivament,

$$(x_1^0, x_2^0) = (10, 0) \quad \text{i} \quad (y_1^0, y_2^0, y_3^0) = (0, 0, 6)\,.$$

En aquest nou context no estaríem disposats a pagar res per augmentar el temps de funcionament de les dues primeres fases i, en canvi, pagaríem un preu màxim de 6 u. m. per una hora de més en la tercera. Com veurem, l'anàlisi de sensibilitat de la programació lineal ens permet trobar, entre d'altres, els intervals de variació de les constants de restricció en què els preus ombra es mantenen constants.

Anàlisi de sensibilitat de la programació lineal

Força sovint, els coeficients associats a un programa lineal que modela un determinat fenomen econòmic poden no estar clarament definits o variar al llarg del temps. És evident que, en aquests casos, fóra bo disposar d'algun mecanisme formal que ens permetés veure si el programa lineal continua sent bàsicament el mateix davant d' aquests canvis. Com veurem, l'anàlisi de sensibilitat ens resol aquest problema de manera pràcticament mecànica a partir de les taules inicial i final de l'algorisme del símplex del programa. Comencem assenyalant que, a partir d'ara, anomenarem *estructura bàsica* d'un programa lineal al conjunt format per les variables bàsiques de la darrera taula de l'algorisme del símplex associat. Per exemple, l'estructura bàsica del programa lineal de l' exemple 12 és $\{x_1, s_1, s_3\}$. Un dels objectius de l'anàlisi de sensibilitat és determinar els intervals de variació dels coeficients de la funció objectiu i de la matriu de restricció, així com de les constants de restricció, que deixen invariable l'estructura bàsica associada i, al mateix temps, analitzar el comportament dels òptims del primal i dual dins d' aquests intervals.[12] Partirem de les taules inicial i final d'un programa lineal estàndard de màxim

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = c^t \cdot x \\ \text{sota} & A \cdot x = b \\ & x \geq 0 \end{array}\right\}$$

que té com a matriu bàsica inicial la matriu identitat d'ordre m. Un dels elements claus que cal tenir en compte és la matriu quadrada d'ordre

[12] Per raons de simplicitat deixarem de banda l'anàlisi de sensibilitat dels coeficients de la matriu de restricció.

m

$$P = (p_{st}) \in \mathbb{M}_m$$

formada per les columnes de la taula final corresponents a les variables bàsiques de la taula inicial. Fixem-nos que la matriu corresponent al programa lineal de l' exemple 12 seria

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & -5/6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pel que fa a les variacions dels coeficients de la funció objectiu tenim el resultat següent.

Proposició 29 *Els intervals de variació dels coeficients de la funció objectiu del programa lineal estàndard dins els quals l'estructura bàsica no canvia depenen de si les variables associades a aquests coeficients són bàsiques en la taula final. En general,*

1. *Si la variable x_j associada al coeficient c_j no és bàsica en la taula final, l'interval de variació de c_j s'obté de la desigualtat*

   $$\triangle c_j \leq u_j,$$

   en què u_j és el coeficient de desplaçament de x_j en aquesta taula. En aquest cas, l'òptim x_0 del programa lineal inicial i l'òptim y_0 del programa dual associat no varien.

2. *Si la variable x_j associada al coeficient c_j és bàsica en la taula final i ocupa la fila r-èsima, l'interval de variació de c_j s'obté de les desigualtats*

   $$u_k + a_{rk} \cdot \triangle c_j \geq 0,$$

   una per a cada variable no bàsica x_k de la taula final, en què u_k és el coeficient de desplaçament de x_k i a_{rk} l'element que ocupa la fila r i la columna k d'aquesta taula. En aquest cas, l'òptim x_0 del programa lineal inicial no varia. Tanmateix, l'òptim y_0 del programa dual associat pot fer-ho; en concret, la variació de la component i-èsima y_i^0 de y_0 serà igual a

   $$\triangle y_i^0 = p_{ri} \cdot \triangle c_j$$

   en què $\triangle c_j$ és l'increment que experimenta el coeficient c_j associat a la variable bàsica x_j i on p_{ri} és l'element que ocupa la fila r i la columna i de la matriu P.

Finalment, pel que fa a les variacions de les constants de restricció podem donar el resultat següent.

Proposició 30 *L'interval de variació de la constant de restricció b_i en què l'estructura bàsica del programa no canvia s'obté de la desigualtat matricial*

$$P \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ b_{i-1} \\ b_i + \triangle b_i \\ b_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En aquest cas, l'òptim del programa lineal inicial x_0 pot variar ja que si x_j és bàsica en l'última taula i pren el valor x_j^0 en l'òptim, la variació que experimenta enfront d'una variació $\triangle b_i$ de b_i és igual a

$$\triangle x_j^0 = p_{ri} \cdot \triangle b_i$$

en què p_{ri} és l'element que ocupa la fila r i la columna i de la matriu P, i r és la fila de x_j en la taula final. Contràriament, l'òptim y_0 del programa lineal dual associat no varia.

Exemple 31 *Analitzeu la sensibilitat del programa lineal de l' exemple 12*

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 30x_1 + 20x_2 \\ \textit{sota} & 3x_1 + 6x_2 \leq 54 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ & 5x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}.$$

Per a dur a terme aquesta anàlisi hem de recórrer bàsicament a la taula final de l'algorisme del símplex del programa estàndard associat. Aquesta taula, recordem-ho, era

c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
0	s_1	0	4	1	$-1/2$	0	30
30	x_1	1	$2/3$	0	$1/6$	0	8
0	s_3	0	$5/3$	0	$-5/6$	1	10
		0	0	0	5	0	240

Així doncs, l'estructura bàsica associada és

$$\{x_1, s_1, s_3\}$$

i la matriu la matriu P formada per les columnes de la taula final associades a les variables bàsiques de la taula inicial que, en el nostre cas, són s_1, s_2 i s_3 és

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & -5/6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Començarem determinant els intervals de variació dels dos coeficients de la funció objectiu. Pel que fa al coeficient

$$(a) \quad c_1 = 30$$

i donat que la variable x_1 associada a c_1 és bàsica i que x_2 i s_2 no ho són, l'interval de variació de c_1 s'obté de les dues desigualtats

$$\left.\begin{array}{l} u_2 + a_{22} \cdot \triangle c_1 = 0 + \frac{2}{3} \triangle c_1 \geq 0 \\[2ex] u_4 + a_{24} \cdot \triangle c_1 = 5 + \frac{1}{6} \triangle c_3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

ja que, en aquest cas, x_1 ocupa la segona fila de la taula final i les columnes de x_2 i de s_2 són, respectivament, la segona i la quarta.[13] D'aquestes desigualtats deduïm que

$$0 \leq \triangle c_1$$

d'on

$$30 \leq c_1 < +\infty$$

que és l'interval de variació del coeficient c_1. Així doncs, per a qualsevol preu unitari del primer producte superior o igual a 30 u. m. l'òptim del programa serà sempre

$$x_1^0 = 8 \text{ unitats} \quad \text{i} \quad x_2^0 = 0 \text{ unitats.}$$

En canvi, l'òptim del dual (preus ombra) pot variar. Vegem-ho. Com que

$$r = 2,$$

les variacions de les components de l'òptim del dual seran

$$\left.\begin{array}{l} \triangle y_1^0 = p_{21} \cdot \triangle c_1 = 0 \cdot \triangle c_1 = 0 \\[2ex] \triangle y_2^0 = p_{22} \cdot \triangle c_1 = \frac{1}{6} \triangle c_1 = \frac{\triangle c_1}{6} \\[2ex] \triangle y_3^0 = p_{23} \cdot \triangle c_1 = 0 \cdot \triangle c_1 = 0 \end{array}\right\}.$$

Per tant, l'únic preu ombra que varia és y_2^0. En conseqüència, si el preu del primer producte experimenta un increment positiu de $\triangle c_1$ u. m., el preu ombra associat a la segona fase serà igual a

$$y_2^0 = 5 + \frac{\triangle c_1}{6} \text{ u. m.}$$

i la resta zero,

$$y_1^0 = y_3^0 = 0 \text{ u. m.}$$

[13] Per tant, r és igual a 2 i k pren els valors 2 i 4.

Per exemple, si l'increment en el preu fos de

$$\triangle c_1 = 18 \text{ u. m.},$$

el preu ombra associat a la segona fase seria igual a

$$y_2^0 = 5 + \tfrac{\triangle c_1}{6} = 8 \text{ u. m.}$$

Pel que fa al coeficient

$$(b) \quad c_2 = 20$$

i com que la variable associada x_2 no és bàsica, tenim que

$$\triangle c_2 \leq u_2 = 0$$

d'on

$$-\infty < c_2 \leq 20$$

que és l'interval de variació de c_2. Així doncs, per a qualsevol preu unitari del segon producte inferior o igual a 20 u. m. l'òptim del programa lineal inicial serà sempre

$$x_1^0 = 8 \text{ unitats} \quad \text{i} \quad x_2^0 = 0 \text{ unitats}$$

i el del dual

$$y_1^0 = y_3^0 = 0 \text{ u. m.} \quad \text{i} \quad y_2^0 = 5 \text{ u. m.}$$

Pel que fa a la constant de restricció

$$(c) \quad b_1 = 54,$$

l'interval de variació de b_1 que manté l'estructura bàsica del programa s'obté de la desigualtat matricial

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & -5/6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 54 + \triangle b_1 \\ 48 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 + \triangle b_1 \\ 24 \\ 26 \end{pmatrix}$$

d'on

$$-30 \leq \triangle b_1.$$

Per tant, l'interval de variació de b_1 és

$$24 \leq b_1 < +\infty.$$

En conseqüència, l'òptim del dual associat (preus ombra) no varia si el temps disponible per a la primera fase és superior a 24 hores; en canvi, l'òptim del primal pot fer-ho. En aquest cas, l'única component de l'òptim que pot veure's modificada és la primera ja que x_1 és bàsica i x_2 no. Pel teorema anterior, la variació $\triangle x_1^0$ que pot experimentar davant d'un increment $\triangle b_1$ del temps destinat a la primera fase és igual a

$$\triangle x_1^0 = p_{21} \cdot \triangle b_1 = 0 \cdot \triangle b_1 = 0.$$

Deduïm, per tant, que l'òptim del primal continua sent

$$x_1^0 = 8 \text{ unitats} \quad \text{i} \quad x_2^0 = 0 \text{ unitats.}$$

Pel que fa a la constant de restricció

$$(d) \quad b_2 = 48,$$

l'interval de variació de b_2 s'obté de la desigualtat matricial

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & -5/6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 54 \\ 48 + \triangle b_2 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 - \frac{\triangle b_2}{2} \\ 8 + \frac{\triangle b_2}{6} \\ 10 - \frac{5\triangle b_2}{6} \end{pmatrix}$$

d'on

$$\left.\begin{array}{l} \triangle b_2 \leq 60 \\ \triangle b_2 \geq -48 \\ \triangle b_2 \leq 12 \end{array}\right\},$$

és a dir, que

$$-48 \leq \triangle b_2 \leq 12.$$

Per tant, l'interval de variació de b_2 és

$$0 \leq b_2 \leq 60.$$

Com en el cas precedent, l'òptim del dual associat (preus ombra) no varia si el temps disponible per a la segona fase és menor o igual a 60 hores. Com abans, l'única component de l'òptim del primal que pot variar és la primera, ja que x_1 és bàsica i x_2 no. Per tant, la variació $\triangle x_1^0$ que pot experimentar davant d'un increment $\triangle b_2$ en el temps destinat a la segona fase és igual a

$$\triangle x_1^0 = p_{22} \cdot \triangle b_2 = \tfrac{1}{6} \triangle b_2 = \tfrac{\triangle b_2}{6}.$$

Així doncs, l'òptim del primal serà, en aquest cas,

$$x_1^0 = 8 + \tfrac{\triangle b_2}{6} \text{ unitats} \quad \text{i} \quad x_2^0 = 0 \text{ unitats.}$$

Per exemple, si

$$\triangle b_2 = 6 \text{ hores},$$

els ingressos totals òptims s'obtindrien fabricant 9 unitats del primer producte ja que

$$x_1^0 = 8 + \tfrac{\triangle b_2}{6} = 9 \text{ unitats} \quad \text{i} \quad x_2^0 = 0 \text{ unitats.}$$

Pel que fa a la tercera i última constant de restricció

$$(e) \quad b_3 = 50,$$

l'interval de variació de b_3 s'obté de la desigualtat matricial

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & -5/6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 54 \\ 48 \\ 50 + \triangle b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 8 \\ 10 + \triangle b_3 \end{pmatrix}$$

d'on

$$-10 \leq \triangle b_3.$$

Així doncs, l'interval de b_3 és

$$40 \leq b_3 < +\infty.$$

Hom dedueix, per tant, que l'òptim del dual associat (preus ombra) no varia si el temps disponible per a la tercera fase és més gran o igual que 40 hores. Com abans, l'única component de l'òptim del primal que pot variar és la primera. Per tant, la variació $\triangle x_1^0$ que pot experimentar davant d'un increment $\triangle b_3$ del temps destinat a la tercera fase és igual a

$$\triangle x_1^0 = p_{23} \cdot \triangle b_3 = 0 \cdot \triangle b_3 = 0.$$

En aquest cas, l'òptim del primal també continua sent el mateix,

$$x_1^0 = 8 \text{ unitats} \quad \text{i} \quad x_2^0 = 0 \text{ unitats.}$$

Exercicis

(Per a la resolució efectiva dels programes lineals que apareixen en aquests exercicis és convenient recórrer a l'ajut d'algun programa informàtic adient*)*

1. Si x_0 i x_0^* punts de $\mathbb{R}^n$ són dos òptims globals del programa lineal canònic

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = c^t \cdot x \\ \text{sota} & A \cdot x \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}\right\},$$

proveu que el punt

$$\lambda \cdot x_0 + (1-\lambda) \cdot x_0^* \in \mathbb{R}^n, \quad \text{amb} \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

també ho és. Val el mateix per a un programa lineal canònic de mínim? I si el programa lineal no és canònic? Raoneu les respostes.

2. Donat el programa lineal

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\ \text{sota} & a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n \leq b_m \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}\right\},$$

proveu que el programa que s'obté al afegir-li la restricció lineal

$$x_1 + \ldots + x_n \leq a, \quad \text{amb} \quad a > 0,$$

té el conjunt factible acotat[14] i, en conseqüència, té un òptim finit en un dels seus vèrtexs. Raoneu que passa el mateix amb la restricció

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \leq a, \quad \text{amb} \quad a_1, \ldots, a_n, a > 0.$$

(Conseqüentment, tot programa lineal que tingui una restricció de menor o igual amb tots els coeficients i terme independent estrictament positius té un òptim finit).

3. Donat el programa lineal

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\ \text{sota} & a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n \leq b_m \\ & x_1, \ldots, x_{n-1} \geq 0 \end{array}\right\},$$

en què la variable instrumental x_n no té restricció de signe,

(a) Trobeu el programa canònic equivalent que resulta d'aplicar el canvi de variable

$$x_n = x_n' - x_n'', \quad \text{amb} \quad x_n', x_n'' \geq 0.$$

[14] N'hi ha prou en veure que $x_i \leq a$.

(b) Determineu el programa dual associat a l'anterior i proveu que l'última restricció està sempre saturada.

4. Una agència publicitària que vol fer arribar els seus missatges a dos segments poblacionals mitjançant un programa de televisió, un de ràdio i un reportatge en una revista d'àmbit local, disposa, a tal efecte, d'un pressupost de 300000 euros. Cada programa de televisió té un cost de 50000 euros, un de ràdio 20000 euros i un reportatge de la revista 1000 euros. Per raons contractuals, s'han d'emetre com a mínim tres programes de televisió i s'han de publicar tres reportatges en la revista. Per un altre cantó, les enquestes d'opinió indiquen que un programa de televisió el veuen 450000 individus del primer segment i 50000 del segon, un de ràdio es escoltat per 20000 individus del primer segment i per 80000 del segon mentre que la revista la llegeixen 15000 individus del primer segment i 1000 del segon. En aquestes condicions,

   (a) Plantejeu el programa que optimitza la difusió del missatges publicitaris.
   (b) Resoleu el programa anterior tot indicant el nombre de programes i de reportatges que s'han de dur a terme. És única la solució? Raoneu la resposta.

5. La companyia CUPER, dedicada a l'extracció i la producció de coure, té tres refineries, R_1, R_2 i R_3, que reben material de quatre mines identificades com a M_1, M_2, M_3 i M_4. Les dades de l'oferta màxima diària de les mines, de les capacitats mínimes de processament de les refineries (unitats/dia), així com els costos de transport (u. m./unitat) venen donats per la taula

	R_1	R_2	R_3	Oferta
M_1	3	5	5	400
M_2	5	7	8	500
M_3	2	9	5	200
M_4	10	7	3	700
Capacitat	500	500	800	

Suposeu que el vicepresident d'operacions de CUPER us demana que analitzeu els costos del transport i, en funció dels resultats obtinguts, que determineu la distribució òptima de les matèries primeres. Per això,

   (a) Formuleu i resoleu el programa matemàtic que permet a CUPER optimitzar els costos diaris de transport de les mines. Proveu, al mateix temps, que aquesta distribució òptima s'aconsegueix explotant al màxim l'oferta diària de coure de les mines i a un nivell mínim de processament de les refineries.

(b) És única la solució? Hi ha algún procediment formal que ens permeti trobar una solució alternativa a l'anterior amb les mateixes característiques? Raoneu les respostes.

(c) Si els costos unitaris del transport de la mina M_1 cap a les tres refineries augmentessin en mitjana 0.5 u. m., com afectaria aquest increment a la solució òptima? Raoneu la resposta.

6. Sigui un banc comercial amb el balanç següent

$$\text{Actiu: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Préstecs} \\ \text{Valors} \end{array} \right. \quad \text{i} \quad \text{Passiu: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Dipòsits a la vista} \\ \text{Dipòsits a termini} \\ \text{Comptes de capital} \end{array} \right. .$$

Hom sap que, al llarg d'un determinat període, els fons disponibles són de 100 milions d'u. m. distribuïts de la manera següent: 45 milions d'u. m. en dipòsits a la vista, 45 milions d'u. m. en dipòsits a termini i la resta, 10 milions d'u. m., en comptes de capital. Per un altre cantó, els tants per cent de rendiment sobre els préstecs i els valors en aquest període són: del 10 % pels préstecs, del 5 % per als valors de renda fixa i del 15 %, com a valor estimat, per als valors de renda variable amb un marge d'error del 4 %. Per simplificar suposarem que, dins el període considerat, cap préstec no té venciment i que els valors poden ser liquidats en qualsevol moment sense risc de perdre capital. L'objectiu que ens proposem és el d'escollir la cartera factible d'actius que maximitzi la rendibilitat total tenint, en compte que

- Els actius no poden excedir els fons totals disponibles del passiu.
- A causa que els préstecs no es poden liquidar durant el període esmentat, el banc manté sempre un saldo de valors de renda fixa que és, com a mínim, del 25 % de l'actiu total per fer front a la retirada imprevista de dipòsits.
- Com a conseqüència de la incertesa inherent al mercat borsàtil, el banc considera prudent que els valors de renda variable no ultrapassin la mitja aritmètica de la resta d'actius.

En aquestes condicions,

(a) Plantegeu i resoleu el programa lineal associat a la selecció de la cartera d'actius òptima, tenint en compte que els dipòsits generen unes despeses d'obtenció del 0.1 %.

(b) Fent ús de l'anàlisi de sensibilitat, analitzeu els resultats pel que fa al marge d'error associat a la rendibilitat dels valors de renda variable. I si aquest marge fos del 6 %? Raoneu les respostes.

(c) Suposem que el banc obté 10 milions d'u. m. addicionals en dipòsits a termini. En les condicions del primer apartat, la gerència del banc decideix que la restricció sobre els valors de renda fixa sigui del 20 % respecte l'actiu total. Trobeu la nova cartera d'actius òptima i comenteu-ne els resultats.

7. RISCO és una una societat financera que es dedica, entre d'altres, a gestionar una cartera d'inversió constituïda per tres títols de renda variable T_1, T_2 i T_3, bons a 3 anys i lletres a 1 any. Els preus unitaris actuals en euros de les accions, així com la seva rendibilitat esperada a 1 any, vénen donats per la taula

	preu unitari	rendibilitat	variació
T_1	26.75	17.5 %	±1.5 %
T_2	18.6	17 %	±1 %
T_3	41	12.25 %	±0.5 %

en què les variacions indiquen el marge de fluctuació de la rendibilitat. Per la seva banda, la rendibilitat unitària a un any dels bons i de les lletres és, respectivament, del 5 % i del 3.5 %. Per a aquesta cartera, els gestors de RISCO poden disposar d'un capital de 600.000 euros a repartir entre els valors de renda fixa i renda variable, tenint en compte que, a causa de la incertesa del mercat bursàtil, hom creu convenient que la inversió en renda fixa sigui, com a mínim, una quarta part de la corresponent en renda variable. A més, i per raons de quota de mercat i captació, RISCO considera oportú que el total destinat a lletres no sigui inferior al 30 % del dels Bons. Per una altra banda, la gestió de la cartera provoca una sèrie de despeses de manteniment. Per un cantó, la part de la cartera relativa a renda fixa té un cost afegit anual del 5 % sobre el total invertit en aquesta part i, pel que fa a la part de renda variable, s'especula amb el fet de que el seu manteniment provoca, diàriament, un cost C que pot considerar-se proporcional al nombre de títols segons l'equació teòrica

$$C(n_1, n_2, n_3) = k_1 \cdot n_1 + k_2 \cdot n_2 + k_3 \cdot n_3,$$

en què n_1, n_2 i n_3 són el nombre d'accions de T_1, T_2 i T_3 que conté la cartera, i k_1, k_2 i k_3 són constants de proporcionalitat positives tals que

$$k_1 + k_2 + k_3 \leq 1.$$

En aquestes condicions,

(a) Plantegeu i resoleu el programa que ens permet trobar la distribució òptima de la cartera des del punt de vista de la rendibilitat bruta a 1 any (és a dir, la rendibilitat que no té present les despeses de manteniment) tot imposant, a més, que la inversió en T_3 ha de ser, com a mínim, el 9 % de la de T_1 i que no pot ser mai superior a la de T_2. Raoneu que les variacions en les expectatives de rendibilitat de T_1 i de T_2, però no les de T_3, poden afectar a l'estructura del problema. Depèn bàsicament el programa del total a invertir en la cartera? Trobeu, finalment, el número de títols en renda variable que té la cartera.

(b) Tenint present que s'ha fet una estimació sobre anys anteriors de la relació entre les variables n_1, n_2, n_3 i C, s'ha arribat a la conclusió que k_2 i k_3 són sempre iguals. Per un altre cantó, les dades dels dos anys anteriors són

n_1	n_2	n_3	C
13000	2000	800	4600
14000	3000	900	5175

.

En aquesta situació, plantegeu i resoleu el programa quadràtic que ens permet trobar les constants de proporcionalitat k_1, k_2 i k_3 associades a la funció C, i que es dedueix d'aplicar el mètode de mínims quadràtics sobre la taula anterior.[15] Un cop conegudes aquestes constants, calculeu finalment la rendibilitat neta de la cartera (aquesta s'obté de descomptar de la rendibilitat bruta els costos de manteniment).

8. L'empresa PORTABLE, que es dedica a la fabricació i venda d'ordina- dors portàtils, ha de fer front a una comanda de 10000 unitats que ha signat amb l'empresa de distribució BITSA. La tecnologia involucrada en el procés de fabricació és tal que un 0.7 % de les CPU i un 1.3 % de les pantalles dels ordinadors surten defectuoses. A més, en la secció de muntatge i un cop superats el controls de qualitat de fabricació, un 0.06 % aproximadament

[15] La funció que cal minimitzar és

$$\Delta(k_1, k_2, k_3) = \sum (C - (k_1 n_1 + k_2 n_2 + k_3 n_3))^2 .$$

de les CPU malmeten les pantalles i un 0.08 % de les pantalles produeixen fallades en les CPU la qual cosa implica que aquestes components queden fora de de servei i, per tant, no compten a efectes de la comanda. Per la seva banda, BITSA, que subministra ordinadors portàtils a cinc grans superfícies, disposa de tres magatzems on els diposita temporalment en estoc. En concret, el primer rep 3000 unitats; el segon 5000 unitats, i el tercer, la resta. Si els costos unitaris de fabricació d'una CPU són de 45000 u. m. i el d'una pantalla són de 12000 u. m., i si les demandes de les cinc grans superfícies són, respectivament, de 3500, 2000, 1750, 1200 i 800 ordinadors amb una matriu de costos unitaris de transport en u. m. igual a

$$\begin{pmatrix} 500 & 271 & 327 & 490 & 190 \\ 200 & 302 & 525 & 107 & 112 \\ 650 & 400 & 357 & 490 & 271 \end{pmatrix},$$

(a) Trobeu la quantitat de CPU i de pantalles que cal fabricar per tal de cobrir la demanda de BITSA a cost mínim.

(b) Determineu el preu de venda de cada ordinador a BITSA per què PORTABLE obtingui un marge de benefici del 25 % respecte el cost de producció.

(c) Determineu el número d'ordinadors que cal transportar des dels magatzems fins a cada gran superfície per minimitzar els costos de transport.

(d) Calculeu el preu de venda mínim que BITSA estableix per a cada ordinador de manera que l'operació de compra a PORTABLE i de distribució a les grans superfícies no generi pèrdues.

(e) Tenint en compte que les despeses diàries d'emmagatzematge de cada ordinador són, respectivament, de 33, 59 i 17 u. m. calculeu el cost diari que suposa tenir els ordinadors immobilitzats en el supòsit del tercer apartat.

9. Una empresa ha de prendre una decissió simultània de fabricació o de compra de quatre productes A, B, C i D. Si es fabriquen, els costos unitaris en euros són

A	B	C	D
2.55	2.47	4.40	1.90

i si es compren són

A	B	C	D
3.10	2.60	4.50	2.25

.

Per una altra banda, hom sap que si els productes es fabriquen en les instalacions de l'empresa intervenen 6 màquines, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 i M_6, en la seva elaboració segons un temps en hores i per unitat elaborada donat per la taula

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
A	0.04	0.02	0.02	0.00	0.03	0.06
B	0.00	0.01	0.05	0.15	0.09	0.06
C	0.02	0.06	0.00	0.06	0.20	0.20
D	0.06	0.04	0.15	0.00	0.00	0.05

.

Si cada màquina pot funcionar un màxim de 40 hores i es necessiten un mínim de 150 unitats per a cobrir la demanda de cadascun dels productes,

(a) Trobeu el número d'unitats de A, B, C i D que cal fabricar i comprar per cobrir la demanda a un cost mínim. Quin seria el valor monetari d'aquest cost mínim?

(b) Proveu que l'únic producte que cal comprar és C mentre que la resta s'han de fabricar. Passaria el mateix si el cost unitari de fabricació de C fos de 5 euros? Raoneu la resposta.

(c) Raoneu que la solució del problema seria la mateixa encara que el temps disponible per a les cinc primeres màquines fos superior a les 40 hores.

10. L'empresa CECOSA, participada a parts iguals per la Fábrica Nacional de Moneda y Timbre (FNMT) i per l'empresa alemanya Deutsche Nickel (Eurocoin) fabrica cospells (un cospelll és un disc de metall prepa- rat per rebre l'encunyació en la fabricació de monedes) de diferents tipus destinats a l'encunyació d'euros. En concret, CECOSA fabrica cospells de 1, 2, 5, 10, 20 i 50 cèntims d'euro, i de 1 i 2 euros amb el disc exterior característic. D'altra banda, el control de qualitat està a càrrec d'un laboratori que disposa de sistemes d'inspecció òptica que "veuen" les monedes sobre els cospells i que poden rebutjar les que no satisfan les exigències mínimes. Els estudis fets per aquest laboratori mostren que la fabricació de cadascun dels cospells afecta sensiblement la dels cospells de la mateixa categoria. En concret, i al llarg del procés de galvanització dels cospells de cèntims d'euro, la quantitat de tones malmeses dels cospells de 1, 2, 5, 10, 20 i 50

cèntims d'euro per tona produïda de cadascun d'ells és[16]

	1c	2c	5c	10c	20c	50c
1c	0.007		0.001	0.003		
2c		0.005	0.001			0.001
5c	0.002	0.001	0.008			0.001
10c	0.002		0.001	0.007		0.003
20c	0.004		0.003		0.009	0.002
50c		0.001	0.001		0.002	0.01

.

Anàlogament, i durant el procés de torculació dels cospells de 1 i 2 euros, se'n malmet una certa part de la seva producció. La taula següent ens mostra les tones malmeses d' aquests cospells per tona fabricada de cadascun d'ells

	1e	2e
1e	0.003	0.0009
2e	0.012	0.002

.

Tenint en compte que l'input anual de matèries primeres és de 18000 tones per al primer tipus de bobina d'aliatge i de 12000 tones per al segon, que el cost unitari de producció (per tona) dels cospells (en milers d'euros) és de

1c	2c	5c	10c	20c	50c	1e	2e
4	7	7	9	12	32	60	100

,

i que la demanda anual en tones és de

1c	2c	5c	10c	20c	50c	1e	2e
3000	2000	2000	1500	1200	1000	800	600

,

(a) Trobeu la producció anual en tones dels vuit tipus de cospells que minimitzen el cost total del procés productiu, tenint en compte que els cost dels dos tipus de bobines d'aliatge (un tipus per als cospells de cèntims d'euro i un altre per als de 1 i 2 euros) representa un 60 % del cost total dels cospells fabricats i que, durant el procés de desbobinització, un 35 % del material es malmet.

(b) Raoneu que la producció òptima dels cospells no depèn dels costos unitaris de producció.

(c) Determineu les quantitats de matèries primeres que resten sense utilitzar al nivell òptim de producció.

---

[16] Aquestes taules s'han de llegir seguint l'ordre marcat per les columnes. Per exemple, la producció d'una tona de cospels de 1c fa malbé 0.007 tones de la de 1c, 0.002 tones de la de 5c, 0.002 tones de la de 10c i 0.004 tones de la de 20c.

Capítol 3

Equacions diferencials ordinàries

Una equació diferencial ordinària (a partir d'ara EDO, per abreujar) és un tipus especial d'equació que té per incògnita una funció real de variable real derivable. El tret fonamental de totes aquestes equacions és que caracteritzen aquesta funció incògnita a partir d'algunes de les seves derivades. Una part important dels models dinàmics formals que estudien fenòmens econòmics giren al voltant d'alguna o algunes EDO que relacionen variables econòmiques (renda nacional, producció, massa monetària, inflació, preus, etc); en general, la variable independent d' aquests models sol ser el temps que flueix de manera contínua. Històricament, la teoria d'aquestes equacions apareix a la fi del segle XVII simultàniament amb el càlcul diferencial i integral. L'estudi de les EDO, per exemple, va portar Newton a l'establiment de les lleis dels moviments planetaris descobertes empíricament per Kepler, i a Leverrier per postular l'existència de Neptú (1846). Precisament, una de les primeres EDO va ser

$$\frac{d^2x\,(t)}{dt^2} = g, \quad \text{amb} \quad g = 9.81\ m/seg^2,$$

que relaciona l'espai recorregut $x\,(t)$ per un cos en caiguda lliure amb el temps t transcorregut. Amb posterioritat, i a la fi del segle XIX, els economistes neoclàssics (Marshall, Pareto, Walras, etc.) comencen a incorporar-les a l'estudi dels fenòmens econòmics. En aquest capítol resoldrem analíticament algunes de les més elementals fent veure com se'n poden obtenir les seves solucions a partir de mètodes específics per a cada tipus d'EDO objecte d'estudi. El model financer que tot seguit analitzem ens permetrà endinsar-nos en la seva casuística.

Principi genètic del rèdit de F. Insolera

Segons aquest principi, el ritme de creixement (o taxa de variació instantània) d'un capital monetari C en tot instant t és proporcional a la quantia d'aquest capital en aquest instant segons un *rèdit* o *interès elemental* $\rho(t)$ que depèn funcionalment de t. Es tracta, doncs, de trobar el valor de C en funció d'aquest rèdit. Des d'un punt de vista formal, podem considerar el capital monetari C com a funció real contínua i derivable respecte de la variable temporal t,

$$C = C(t),$$

en què t pot prendre qualsevol valor real positiu.[1] Com veurem, el fet de que $C(t)$ sigui derivable respecte t ens permet resoldre el problema plantejat resolent una EDO. En efecte, com que podem identificar el ritme de creixement instantani de $C(t)$ en t amb la seva derivada ja que

$$C'(t) = \frac{dC(t)}{dt} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle C(t)}{\triangle t} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{C(t + \triangle t) - C(t)}{\triangle t},$$

hom dedueix que

$$\frac{dC(t)}{dt} = \rho(t) \cdot C(t), \quad \text{o equivalentment} \quad dC(t) - C(t) \cdot \rho(t) \cdot dt = 0.$$

Aquesta darrera igualtat, coneguda amb el nom de *principi genètic del rèdit*, és un exemple d'EDO de primer ordre de *variables separables* en què $C(t)$ és la funció real de variable real t derivable. Anem a resoldre-la suposant que el rèdit $\rho(t)$ és constant, és a dir, que no depèn de t. Si

$$\rho(t) = \rho > 0,$$

s'arriba doncs a una EDO del tipus

$$dC(t) - C(t) \cdot \rho \cdot dt = 0$$

amb l'interès instantani ρ com a paràmetre. Si dividim l'expressió anterior per $C(t)$ tenim que

$$\frac{dC(t)}{C(t)} = \rho \cdot dt$$

[1] Fixem-nos que estem considerant el temps com a variable contínua, infinitament divisible.

d'on

$$\int \frac{dC(t)}{C(t)} = \int \rho \cdot dt \quad \text{i} \quad \ln C(t) = \rho \cdot t + K$$

en què K és la constant d'integració i, en conseqüència,

$$C(t) = e^{\ln C(t)} = e^{\rho t + K}.$$

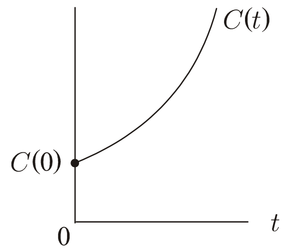
Ja que, en particular,

$$C(0) = e^{\rho \cdot 0 + K} = e^{K}$$

deduïm, finalment, que el capital monetari en t és igual a

$$C(t) = C(0) \cdot e^{\rho t}$$

on $C(0)$ representa el capital inicial. Gràficament,



Com veiem, $C(t)$ creix exponencialment al llarg del temps. En conseqüència, el principi genètic del rèdit és un model dinàmic de creixement exponencial continu del capital monetari. $C(t)$ podria ser, per exemple, el valor en el moment t que tindria un capital invertit en un compte bancari que acumulés els interessos instantàniament. En aquest cas,[2] l'interès efectiu anual I_1 equivalent a l'interès instantani ρ s'obtindria imposant que

$$C(t) = C(0) \cdot (1 + I_1)^t , \quad \text{d'on} \quad I_1 = e^{\rho} - 1.$$

Per exemple, si l'interès instantani fos del 3.75 %, l'interès efectiu anual equivalent seria igual a

$$I_1 = e^{0.0375} - 1 = 0.038212 \simeq 3,82\%$$

Acabem de veure que, en les hipòtesis del principi genètic del rèdit, ha estat necessari resoldre una EDO per determinar el valor del capital monetari $C(t)$. Començarem, doncs, donant la noció formal d'EDO: en general, s'anomena **equació diferencial ordinària d'ordre** n (**EDO d'ordre** n) a tota equació funcional del tipus

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

[2]La unitat de mesura de la variable t és l'any natural.

que relaciona una variable real independent x amb la variable funcional dependent

$$y = y\,(x)$$

i les seves derivades respecte x fins l'ordre n. Si la derivada n-èsima d'y es pot explicitar en l'equació anterior, l'EDO d'ordre n adopta la forma

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

El principi genètic del rèdit, per exemple, és una EDO d'ordre 1 o de primer ordre de la forma

$$C'\,(t) - \rho\,(t) \cdot C\,(t) = 0,$$

en les variables

$$x = t \quad \text{i} \quad y = C\,(t)$$

i que depèn del rèdit instantani $\rho\,(t)$. Davant d'una EDO el que cal és trobar les funcions reals de variable real que la satisfan i que s'anomenen *solucions.* Gairebé sempre, la solució d'una EDO s'obté integrant certes expressions (pensem, per exemple, en el cas anterior) i és per això que, freqüentment, el procés de resolució s'anomena *integració.* Cal tenir present que la metodologia que cal emprar per trobar les solucions depèn del tipus d'EDO objecte d'estudi. Nosaltres, aquí, veurem com es poden integrar algunes de les més importants. Per començar, considerem la definició formal de solució general i de solució particular d'una EDO: s'anomena **solució general** d'una EDO d'ordre n a la funció real de variable real

$$y = \varphi\,(x, C_1, \ldots, C_n)$$

que depèn de n paràmetres $C_1, \ldots,\ C_n$, i que substituïda en l'EDO la satisfà. De vegades, la solució general y ve donada implícitament en la forma

$$\Phi\,(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0.$$

Finalment, qualsevol funció real de variable real que s'obté de les expressions anteriors donant valors concrets als n paràmetres és una **solució particular** de l'EDO en qüestió.[3] Val a dir que per obtenir la solució general d'una EDO d'ordre n cal, en general, integrar n cops al llarg del procés de resolució. Com que cada vegada que integrem apareix una constant d'integració tindrem, al final del procés, els n paràmetres o constants d'integració $C_1, \ldots,\ C_n$. Mentre que, parlant en rigor, les solucions particulars són funcions reals de variable real concretes la solució general representa, precisament, a la classe formada per les solucions particulars. Per exemple, tenint en compte l'expressió del

[3]Pot existir un tercer tipus de solució, anomenada *solució singular*, però nosaltres no la tractarem.

capital monetari $C(t)$ que hem obtingut del principi genètic del rèdit, és evident que la solució general de l'EDO

$$dC(t) = 0.0375 \cdot C(t) \cdot dt$$

és la funció exponencial

$$C(t) = C(0) \cdot e^{0.0375t}$$

ja que la satisfà i, a més, depèn d'un paràmetre, el capital inicial $C(0)$. Així doncs, les solucions particulars d'aquesta EDO s'obtindran fixant el valor monetari d'aquest capital inicial. Per exemple, si la quantia monetària inicial fos de 1000 euros,

$$C(0) = 1000,$$

la solució particular seria

$$C(t) = 1000 \cdot e^{0.0375t}.$$

Notem que aquesta expressió ens permet calcular el capital acumulat en aquest compte al llarg del temps. Per exemple, al cap de cinc mesos s'obtindria un capital igual a

$$C\left(\tfrac{5}{12}\right) = 1000 \cdot e^{0.0375\left(\frac{5}{12}\right)} = 1015.75 \text{ euros.}$$

Resoldrem, en primer lloc, algunes de les EDO de primer ordre més importants.

EDO de primer ordre

Com a conseqüència de la definició anterior, una **EDO de primer ordre** és una equació implícita de la forma

$$F(x, y, y') = 0.$$

Si la derivada y' es pot explicitar, s'obté l'EDO

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \text{o equivalentment} \quad p(x, y) \cdot dx + q(x, y) \cdot dy = 0$$

en què $p(x, y)$ i $q(x, y)$ són funcions escalars. Vegem a continuació com es poden obtenir analíticament les solucions generals d'algunes de les EDO de primer ordre explícites. El punt de partida serà l'expressió anterior,

$$p(x, y) \cdot dx + q(x, y) \cdot dy = 0,$$

que, malauradament, no pot integrar-se directament. La manca d'un mètode general de resolució ens obliga a imposar condicions particulars sobre les funcions $p(x, y)$ i $q(x, y)$ que hi apareixen. El cas més simple de tots és el de les EDO de variables separades.

EDO de variables separades

Una EDO de *variables separades* és una equació del tipus

$$p(x) \cdot dx + q(y) \cdot dy = 0.$$

En aquest cas, i integrant directament, s'obté

$$\int p(x)\, dx + \int q(y)\, dy = 0,$$

i si $P(x)$ i $Q(y)$ són, respectivament, primitives de $p(x)$ i $q(y)$, l'expressió

$$P(x) + Q(y) = C,$$

amb C com a paràmetre, és la solució general implícita de l'EDO. Fixem-nos que aquesta solució general depèn, en darrera instància, de l'existència de les primitives de p i q.[4]

Exemple 32 *Resoleu l'EDO*

$$\frac{dy}{y} + x \cdot dx = 0$$

i determineu la solució particular que satisfà la condició[5]

$$y(0) = 1.$$

Aquesta és una EDO de variables separades on

$$p(x) = x \quad \text{i} \quad q(y) = \frac{1}{y}.$$

Com que

$$\int \frac{dy}{y} = \ln y + C \quad \text{i} \quad \int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} + C,$$

obtenim com a solució general implícita de l'EDO l'expressió

$$\ln y + \frac{x^2}{2} = C,$$

amb C com a paràmetre. En aquest cas, la solució general explícita seria de la forma

$$y = K \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \text{amb} \quad K = e^C.$$

[4] La constant d'integració C de la solució general pot introduir-se un cop resoltes totes les primitives.

[5] Aquesta condició s'anomena *condició inicial* o *de contorn* de la solució particular.

Notem que

$$y\,(0) = K \cdot e^{-\frac{0^2}{2}} = K \cdot 1 = K,$$

i, per tant, que la solució general explícita de l'EDO en funció del paràmetre $y\,(0)$ és

$$y = y\,(0) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Conseqüentment, la solució particular que ens demanen ha de ser la funció

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

La resolució de la major part de les EDO de primer ordre passa per transformar-les en EDO de variables separades equivalents. El tipus següent en ordre de complexitat és el de les EDO de variables separables.

EDO de variables separables

Una EDO de *variables separables* és de la forma

$$(p_1(x) \cdot p_2\,(y)) \cdot dx + (q_1(x) \cdot q_2\,(y)) \cdot dy = 0,$$

amb $p_1\,(x)\,,\, p_2\,(y)\,,\, q_1\,(x)$ i $q_2\,(y)$ com a funcions reals de variable real. Notem que si dividim aquesta expressió per $q_1(x) \cdot p_2\,(y)$ tenim l'EDO de variables separades

$$\left(\frac{p_1(x)}{q_1(x)}\right) dx + \left(\frac{q_2\,(y)}{p_2\,(y)}\right) dy = 0$$

que es pot resoldre, en principi, aplicant el procés anterior. Precisament el principi genètic del rèdit és una EDO d'aquest tipus.

Exemple 33 *Resoleu l'EDO*

$$(\sin x \cdot \cos y)\, dx + (\sin y \cdot \cos x)\, dy = 0$$

i determineu la solució particular amb la condició inicial

$$y\,(0) = 0.$$

Com veiem, es tracta d'una EDO de variables separables amb

$$p_1\,(x) = \sin x, \quad p_2\,(y) = \cos y, \quad q_1\,(x) = \cos x \quad \text{i} \quad q_2\,(y) = \sin y.$$

Si dividim l'EDO per l'expressió $\cos x \cdot \cos y$ s'obté l'EDO de variables separades

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) dx + \left(\frac{\sin y}{\cos y}\right) dy = 0.$$

Com que

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx = -\ln \cos x + C,$$

la solució general implícita de l'EDO serà

$$-\ln \cos x - \ln \cos y = C, \quad \text{o bé} \quad \cos x \cdot \cos y = e^{-C} = K$$

amb K com a paràmetre. Per tant, si

$$y\,(0) = 0$$

hom dedueix que

$$K = \cos 0 \cdot \cos y\,(0) = \cos 0 \cdot \cos 0 = 1$$

i la solució particular implícita associada amb aquesta condició seria

$$\cos x \cdot \cos y = 1.$$

Aplicació econòmica: model lineal de Walras d'evolució temporal dels preus

Es vol analitzar l'evolució temporal del preu p d'un bé econòmic de manera que la seva taxa de variació sigui, en tot instant, proporcional a l'excés de la demanda sobre l'oferta tot suposant que aquesta oferta i demanda depenen linealment de p. Com que aquest preu depèn del temps el podem considerar, com passava amb el principi genètic del rèdit, com a funció real de variable real

$$p = p(t)$$

contínua i derivable respecte de t ja que, com diu implícitament l'enunciat, p varia contínuament en el temps t. Si la demanda i l'oferta del bé depenen linealment de p, també dependran del temps i adoptaran una expressió del tipus

$$D = D(t) = a - b \cdot p(t) \quad \text{i} \quad S = S(t) = c \cdot p(t) - d,$$

amb a, b, c i d constants positives. En aquest context és plausible considerar, com a hipòtesi addicional, que la taxa de variació de $p\,(t)$ (o ritme de creixement) ve determinada per la seva derivada temporal. En conseqüència, i a causa que aquesta taxa és proporcional en tot moment a l'excés (diferència) de la demanda sobre l'oferta existirà una constant positiva k de manera que

$$p'(t) = \frac{dp(t)}{dt} = k \cdot (D(t) - S(t)) = k \cdot ((a + d) - (b + c) \cdot p(t))\,.$$

Com veiem, es tracta de l'EDO de variables separables

$$dp + k \cdot ((b+c) \cdot p - (a+d))\, dt = 0$$

en les variables t i $p(t)$. La resoldrem en funció dels paràmetres a, b, c i d. Si dividim l'EDO per l'expressió

$$(b+c) \cdot p - (a+d)$$

tenim que

$$\frac{dp}{(b+c) \cdot p - (a+d)} = -k \cdot dt$$

d'on, integrant ambdós costats de la igualtat, s'obté la solució general implícita

$$\frac{1}{b+c} \cdot \ln((b+c) \cdot p - (a+d)) = -kt + C$$

amb C com a constant d'integració. D'aquesta igualtat podem aïllar el preu $p(t)$ obtenint-se

$$p(t) = \frac{e^{(b+c)(-kt+C)} + (a+d)}{b+c}$$

Aquesta és la solució general explícita de l'EDO. Com que

$$P_e = \frac{a+d}{b+c}$$

és el preu d'equilibri del bé en el mercat estàtic,[6] deduïm que

$$p(0) = \frac{e^{(b+c)C} + (a+d)}{b+c} = \frac{e^{(b+c)C}}{b+c} + P_e$$

i, per tant, que

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{e^{(b+c)(-kt+C)} + (a+d)}{b+c} = e^{-(b+c)kt}\left(\frac{e^{(b+c)C}}{b+c}\right) + \frac{(a+d)}{b+c} = \\ &= e^{-(b+c)kt}\left(p(0) - P_e\right) + P_e. \end{aligned}$$

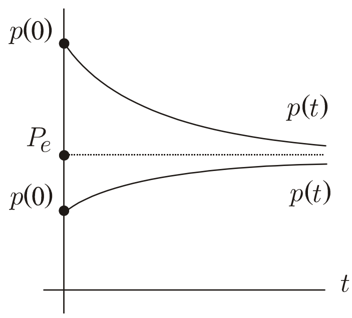
Coneguda l'expressió formal de $p(t)$, en podem estudiar l'evolució temporal analitzant el límit de $p(t)$ en relació amb els paràmetres que la determinen. Així doncs, i donat que per a tot valor positiu de $p(0)$,

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = P_e + (p(0) - P_e)\, e^{-\infty} = P_e + 0 = P_e,$$

deduïm que, a la llarga i independentment dels valors de a, b, c i d i del preu inicial $p(0)$, el preu $p(t)$ del mercat dinàmic tendeix cap al

[6] Aquest preu d'equilibri s'obté igualant la demanda D i l'oferta S suposant que p és constant al llarg del temps.

preu d'equilibri P_e del mercat estàtic. En definitiva, el model lineal de Walras és un model dinàmic de preus estable. Gràficament,



EDO lineals de primer ordre

Tota EDO *lineal de primer ordre* és de la forma

$$y' + p(x) \cdot y = q(x),$$

amb $p(x)$ i $q(x)$ funcions reals de variable real com a coeficients. Si

$$q(x) = 0,$$

l'EDO lineal de primer ordre s'anomena *reduïda* o *homogènia i,* en cas contrari, *completa.* Resoldrem, en primer lloc, la reduïda. Com es pot comprovar, aquesta EDO és l'EDO de variables separables

$$dy + (p(x) \cdot y)\, dx = 0$$

que té per solució general l'expressió

$$y = e^{-\int p(x)dx}.$$

Com veiem, aquesta solució general depèn de la primitiva de la funció $p(x)$. A partir de la solució general de l'EDO lineal homogènia associada, podem obtenir la de la completa introduint, prèviament, el canvi de variable

$$y = u \cdot v$$

on

$$u = u(x) \quad \text{i} \quad v = v(x)$$

són funcions reals de variable real derivables de manera que $u\,(x)$ sigui una solució particular de l'EDO lineal reduïda associada. Vegem-ho. Com que

$$\begin{aligned} q(x) &= y' + p(x) \cdot y = (u' \cdot v + u \cdot v') + p(x) \cdot (u \cdot v) = \\ &= (u' + p(x) \cdot u) \cdot v + (u \cdot v') = 0 \cdot v + (u \cdot v') = \\ &= u \cdot v', \end{aligned}$$

la funció $v\left(x\right)$ s'obtindrà substituint la variable u de l'EDO de variables separables

$$u\cdot\frac{dv}{dx}=u\cdot v'=q(x)$$

pel seu valor calculat prèviament com a solució particular de l'EDO lineal homogènia. Un cop resolta aquesta EDO, la solució general de l'EDO lineal de primer ordre completa és el producte d'$u\left(x\right)$ per $v\left(x\right)$. Tanmateix, aquesta estratègia de resolució depèn, en darrera instància, de l'existència de les primitives que hi apareixen. Un exemple d'EDO lineal de primer ordre que no pot resoldre's per aquest mètode seria

$$y'+x\cdot y=1.$$

Exemple 34 *Resoleu l'EDO*

$$y'=(\tan x)\cdot y+\cos x.$$

Es tracta d'una EDO lineal de primer ordre completa amb coeficients

$$p(x)=-\tan x\quad\text{i}\quad q(x)=\cos x.$$

Així doncs, introduirem el canvi de variable

$$y=u\cdot v$$

de manera que u sigui una solució particular de l'EDO lineal homogènia associada

$$u'-(\tan x)\cdot u=0.$$

Com que la solució general d'aquesta EDO és

$$u=e^{-\int p(x)dx}=e^{\int(\tan x)dx}=e^{-\ln(\cos x)+C}=\frac{1}{\cos x}+C,$$

podem considerar, per exemple, que u és la solució particular

$$u\left(x\right)=\frac{1}{\cos x}.$$

Així doncs,

$$\cos x=q\left(x\right)=u\cdot v'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)\frac{dv}{dx}$$

d'on

$$\frac{dv}{dx}=\cos^2 x\quad\text{i}\quad v\left(x\right)=\int\left(\cos^2 x\right)dx=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

Per tant, la solució general de l'EDO lineal completa serà

$$y=u\left(x\right)\cdot v\left(x\right)=\left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C\right).$$

EDO de Bernouilli

Una EDO de *Bernouilli* és una EDO de la forma

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^{\alpha}$$

amb el paràmetre α diferent de 0 i 1. Per resoldre-la cal, d'entrada, dividir-la per y^{α},

$$\left(y^{-\alpha}\right) \cdot y' + p(x) \cdot \left(y^{1-\alpha}\right) = q(x)$$

i, a continuació, introduir el canvi de variable

$$u = y^{1-\alpha}.$$

D'aquesta igualtat deduïm, derivant, que

$$y' = \left(\frac{y^{\alpha}}{1-\alpha}\right) u'.$$

Així doncs, l'EDO de Bernouilli adopta l'expressió

$$y^{-\alpha} \cdot \left(\left(\frac{y^{\alpha}}{1-\alpha}\right) u'\right) + p(x) \cdot u = q(x),$$

és a dir,

$$u' + ((1-\alpha) \cdot p(x))\, u = ((1-\alpha) \cdot q(x))$$

que, com veiem, és una EDO lineal de primer ordre en les variables x i $u\,(x)$. Òbviament, la solució general de la de Bernouilli s'obtindrà desfent el canvi de variable un cop resolta aquesta EDO lineal.

Exemple 35 *Resoleu l'EDO*

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right) + y^2 + x = 0.$$

Es tracta de l'EDO de Bernouilli

$$y' + y = (-x) \cdot y^{-1}.$$

Així doncs, dividint per y^{-1}, s'obté l'EDO equivalent

$$y \cdot y' + y^2 = -x.$$

Per tant, si fem el canvi de variable

$$u = y^2, \quad \text{amb} \quad y' = \frac{u'}{2y},$$

obtenim l'EDO lineal de primer ordre

$$u' + 2u = -2x, \quad \text{amb solució} \quad u = \frac{1-2x}{2} + C \cdot e^{-2x}.$$

Finalment, desfent el canvi de variable, tenim com a solució general de l'EDO de Bernouilli l'expressió

$$y^2 = \frac{1-2x}{2} + C \cdot e^{-2x}.$$

Aplicació econòmica: la corba logística

Com a aplicació concreta de les EDO de Bernouilli, estudiarem un model important de creixement poblacional. Es vol analitzar l'evolució temporal d'una població sota la hipòtesi de que, en cada instant t, la seva variació augmenta proporcionalment respecte de la seva quantia i disminueix proporcionalment respecte del seu quadrat. Si la variable poblacional P depèn del temps t,

$$P = P(t),$$

podem considerar-la com a funció real contínua i derivable respecte t ja que, com passava en el principi genètic del rèdit, la variable temporal t denota instants de temps, és a dir, és contínua. En aquest contexte té sentit, com abans, que puguem identificar la variació instantània de la població amb la derivada de P. En conseqüència, si aquesta variació augmenta proporcionalment respecte de la seva quantia i disminueix proporcionalment respecte del seu quadrat, tindrem que

$$P'(t) = \frac{dP(t)}{dt} = a \cdot P(t) - b \cdot P^2(t),$$

amb a i b constants positives. Hem obtingut així una EDO de Bernouilli a coeficients constants en les variables t i $P(t)$, i amb

$$\alpha = 2.$$

Estudiarem l'evolució temporal de la població P resolent, prèviament, aquesta EDO. Per determinar-ne la seva solució general cal dividir-la per P^2,

$$\frac{P'}{P^2} - a\left(\frac{1}{P}\right) = -b,$$

i introduir-hi el canvi de variable

$$u = \frac{1}{P}, \quad \text{amb} \quad u' = -\frac{1}{P^2} \cdot P'.$$

D'aquesta manera, s'arriba a l'EDO lineal (o de variables separables)

$$u' + a \cdot u = b, \quad \text{amb solució} \quad u(t) = \frac{b - e^{-a\cdot(t+C)}}{a}.$$

Per tant, desfent el canvi, obtenim l'expressió formal de la població en l'instant t, que és

$$P(t) = \frac{a}{b - e^{-a\cdot(t+C)}}.$$

Ja que la població inicial satisfà la igualtat

$$P(0) = \frac{a}{b - e^{-a\cdot C}}, \quad \text{aleshores} \quad e^{-a\cdot C} = b - \frac{a}{P(0)}$$

i, per tant, que

$$P(t) = \frac{a}{b - \left(b - \dfrac{a}{P(0)}\right) e^{-a \cdot t}} = \frac{\frac{a}{b}}{1 - \left(1 - \dfrac{\frac{a}{b}}{P(0)}\right) e^{-a \cdot t}}.$$

Finalment, si fem

$$k = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{P(0)},$$

s'obté l'expressió formal de $P(t)$,

$$P(t) = \frac{k \cdot P(0)}{1 + (k-1)\, e^{-a \cdot t}},$$

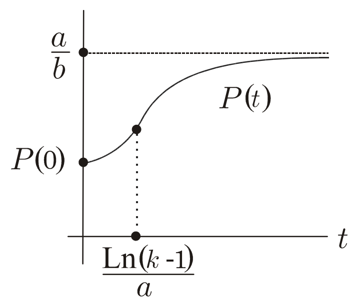
que rep el nom de corba logística. Coneguda la funció poblacional $P(t)$, podem estudiar-ne l'evolució temporal a partir del límit temporal de $P(t)$. Així doncs, i com que

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \frac{k \cdot P(0)}{1 + (k-1)\, e^{-\infty}} = \frac{k \cdot P(0)}{1 + (k-1) \cdot 0} = k \cdot P(0) = \frac{a}{b},$$

deduïm que, a la llarga, la població $p(t)$ s'estabilitza al voltant del valor real positiu $\frac{a}{b}$. Pel cas concret en què

$$k > 2,$$

la representació gràfica de la corba logística seria



D'aquest gràfic deduïm que el creixement de la població, que en les fases inicials és exponencial, es va arralentint de manera progressiva. Precisament el quocient $\frac{a}{b}$ dels paràmetres poblacionals representa la fita superior que la quantia poblacional no pot ultrapassar. A diferència del principi genètic del rèdit, la corba logística és un model dinàmic de creixement assimptòticament estable aplicable, a més, a una gran varietat de situacions (la taxa de creixement d'una empresa, l'increment del tràfic aeri, la construcció d'autopistes, el creixement bacterià en una placa Petri, etc.).

EDO lineals d'ordre superior a coeficients constants

Pel que fa a les EDO d'ordre superior, veurem el cas de l'EDO lineal a d'ordre superior a coeficients constants, el més simple de tots. Una **EDO lineal d'ordre n a coeficients constants** és una equació del tipus
$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = b(x),$$
amb les constants $a_{n-1}, \ldots, a_0$ com a coeficients i amb la funció real de variable real $b(x)$ com a terme independent. Anàlogament al cas de les EDO lineals de primer ordre, si

$$b(x) = 0$$

l'EDO lineal d'ordre n s'anomena *reduïda* o *homogènia* i, en cas contrari, *completa*. Per exemple, l'EDO

$$y^{(3)} + y^{(2)} + y^{(1)} = x^2 + x + 1$$

és lineal de tercer ordre a coeficients constants i terme independent iguals a
$$a_2 = a_1 = 1, \quad a_0 = 0 \quad \text{i} \quad b(x) = x^2 + x + 1.$$
Per a resoldre en general aquest tipus d'EDO haurem d'estudiar primer la lineal reduïda o homogènia.

Resolució de l'EDO lineal d'ordre superior homogènia

D'entrada, cal considerar l'anomenada *equació característica* associada a una EDO lineal d'ordre n a coeficients constants que és l'equació polinòmica de grau n en la variable k,

$$k^n + a_{n-1} \cdot k^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot k + a_0 = 0.$$

Per exemple, és fàcil adonar-se que l'equació característica associada a l'EDO anterior és
$$k^3 + k^2 + k = 0.$$
En qualsevol cas, les arrels d'aquesta equació determinen completament la solució general de l'EDO reduïda. Això és el que ens diu el teorema següent.

Teorema 36 *Donada una EDO lineal d'ordre n a coeficients constants tenim que*

1. *Si* k_0 *és una arrel real simple de l'equació característica, la funció*

$$e^{k_0 x}$$

és una solució particular de l'EDO lineal d'ordre n *reduïda associada.*

2. *Si* k_0 *és una arrel real de multiplicitat* s *de l'equació característica, les* s *funcions*

$$e^{k_0 x}, \quad \left(e^{k_0 x}\right) x, \ldots, \quad \left(e^{k_0 x}\right) x^{s-1}$$

són solucions particulars de l'EDO lineal d'ordre n *reduïda associada.*

3. *Si el número complex*

$$k_0 = \alpha + \beta \cdot i, \quad amb \quad i = \sqrt{-1},$$

és una arrel simple de l'equació característica, les dues funcions reals de variable real

$$e^{\alpha x} \sin(\beta x) \quad i \quad e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

són solucions particulars de l'EDO lineal d'ordre n *reduïda associada.*

4. *Si el número complex*

$$k_0 = \alpha + \beta \cdot i, \quad amb \quad i = \sqrt{-1},$$

és una arrel complexa de multiplicitat s *de l'equació característica, les* $2s$ *funcions reals de variable real*

$$e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad (e^{\alpha x} \sin(\beta x))\, x, \ldots, \quad (e^{\alpha x} \sin(\beta x))\, x^{s-1}$$

i

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad (e^{\alpha x} \cos(\beta x))\, x, \ldots, \quad (e^{\alpha x} \cos(\beta x))\, x^{s-1}$$

són solucions particulars de l'EDO lineal d'ordre n *reduïda associada.*

A més, la solució general de l'EDO lineal d'ordre n *a coeficients constants reduïda és una combinació lineal de les* n *solucions particulars associades a les arrels de la seva equació característica.*

Exemple 37 *Resoleu l'EDO*

$$y^{(3)} + y^{(2)} + y^{(1)} = 0.$$

Fixem-nos que es tracta de l'EDO lineal de tercer ordre a coeficients constants reduïda associada a la de l'exemple anterior. Com que les arrels de la seva equació característica són

$$k_0 = 0, \quad k_1 = -\tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) i \quad \text{i} \quad k_2 = -\tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) i,$$

la solució general serà, pel teorema anterior,

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{0x} + C_2 \left(e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right) + C_3 \left(e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right) = \\ &= C_1 + \left(C_2 \sin\tfrac{\sqrt{3}x}{2} + C_3 \cos\tfrac{\sqrt{3}x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}, \end{aligned}$$

en què C_1, C_2 i C_3 són els seus paràmetres.

Resolució de l'EDO lineal d'ordre superior completa

La resolució d'aquesta EDO se suporta en la solució general de l'EDO lineal d'ordre superior homogènia associada. En efecte, es pot demostrar que la solució general y de l'EDO lineal d'ordre n a coeficients constants completa s'obté sumant a una de les seves solucions particulars, y_p, la solució general y_r de l'EDO lineal homogènia associada. Així doncs, serà de la forma

$$y = y_r + y_p.$$

És evident, per tant, que el que cal ara és determinar tant sols una de les solucions particulars de l'EDO lineal completa i això depèn del tipus de funció $b(x)$. Nosaltres estudiarem només un cas, quan $b(x)$ sigui un polinomi de la forma[7]

$$b(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot x + b_0.$$

La solució particular y_p que determinarem depèn de si l'equació característica associada té, o no, al zero per arrel. Si no ho és, y_p és un polinomi del mateix grau que $b\,(x)$,

$$y_p = \lambda_m \cdot x^m + \lambda_{m-1} \cdot x^{m-1} + \cdots + \lambda_1 \cdot x + \lambda_0,$$

i si ho és, y_p és un polinomi del tipus

$$y_p = \left(\lambda_m \cdot x^m + \lambda_{m-1} \cdot x^{m-1} + \cdots + \lambda_1 \cdot x + \lambda_0\right) \cdot x^s$$

en què s és la multiplicitat del zero com a arrel de l'equació característica. Els coeficients λ_i s'obtenen imposant que y_p és, efectivament, una solució particular de l'EDO lineal completa.

[7] Com que tot número real és, en particular, un polinomi de grau zero aquest tipus inclou també el cas particular en que $b(x)$ sigui constant.

Exemple 38 *Resoleu l'EDO*
$$y^{(3)}+y^{(2)}+y^{(1)}=x^2+x+1.$$

Ja coneixem la solució general de l'homogènia associada que és
$$y_r=C_1+\left(C_2\cdot\sin\tfrac{\sqrt{3}x}{2}+C_3\cdot\cos\tfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}.$$
Com que el zero és arrel simple de l'equació característica, una solució particular de la completa serà de la forma
$$y_p=\left(\lambda_2x^2+\lambda_1x+\lambda_0\right)\cdot x=\lambda_2x^3+\lambda_1x^2+\lambda_0x.$$
Cal determinar-ne els coeficients. Substituint, doncs, les derivades de y_p en l'EDO completa tenim que
$$\begin{aligned}x^2+x+1 &= y_p^{(3)}+y_p^{(2)}+y_p^{(1)}=\\ &= (6\lambda_2)+(6\lambda_2x+2\lambda_1)+\left(3\lambda_2x^2+2\lambda_1x+\lambda_0\right)=\\ &= (3\lambda_2)\,x^2+(6\lambda_2+2\lambda_1)\,x+(6\lambda_2+2\lambda_1+\lambda_0)\,,\end{aligned}$$
d'on, igualant els coeficients d'ambdós polinomis, s'obté el sistema d'equacions lineals
$$\left.\begin{aligned}3\lambda_2=1\\ 6\lambda_2+2\lambda_1=1\\ 6\lambda_2+2\lambda_1+\lambda_0=1\end{aligned}\right\},\quad\text{amb solució}\quad\lambda_2=\tfrac{1}{3},\quad\lambda_1=-\tfrac{1}{2}\quad\text{i}\quad\lambda_0=0.$$
Així doncs, la solució general de l'EDO lineal completa serà
$$y=y_r+y_p=C_1+\left(C_2\cdot\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)+C_3\cdot\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)e^{-\frac{x}{2}}+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right).$$

Aplicació econòmica: model lineal de segon ordre d'evolució temporal del preu d'equilibri

En alguns mercats, l'oferta i la demanda d'un bé es veuen afectades no tan sols per la taxa de variació del seu preu (primera derivada) sino també per la tendència, a la llarga, d'aquesta taxa (segona derivada). En conseqüència, si un analista econòmic vol estudiar l'evolució d'aquest preu cal que conegui les seves primera i segona derivades si aquest preu varia instantàniament. En el model que estudiarem suposarem que l'oferta S i demanda D en un instant t depenen linealment del preu p i de les seves derivades primera i segona de manera que
$$S=S\,(t)=-s_1+s_2\cdot p\,(t)+s_3\cdot p'\,(t)+s_4\cdot p''\,(t)$$
i
$$D=D\,(t)=d_1-d_2\cdot p\,(t)+d_3\cdot p'\,(t)+d_4\cdot p''\,(t)\,,$$
en què les constants s_1, s_2 i d_1, d_2 són positives mentre que s_3, s_4, d_3 i d_4 poden prendre qualsevol valor real.[8] Volem saber per a quins valors

[8]Els valors d'aquests paràmetres dependran de les espectatives dels agents econòmics.

d'aquestes constants el preu d'equilibri p_e, que satisfà l'equació

$$S = D,$$

es estable al llarg del temps. Com que, a partir de l'equació anterior, tenim que

$$(s_4 - d_4) \cdot p_e'' (t) + (s_3 - d_3) \cdot p_e' (t) + (s_2 - d_2) \cdot p_e (t) = s_1 - d_1,$$

s'obté l'EDO lineal de primer ordre a coeficients constants completa

$$p_e'' (t) + \frac{b}{a} \cdot p_e' (t) + \frac{c}{a} \cdot p_e (t) = \frac{d}{a}$$

si

$$s_4 \neq d_4$$

fent

$$a = s_4 - d_4, \quad b = s_3 - d_3, \quad c = s_2 - d_2 \quad \text{i} \quad d = s_1 - d_1.$$

Notem que el preu d'equilibri del mercat estàtic P_e és, precisament,

$$P_e = \frac{d}{a} = \frac{s_1 - d_1}{s_4 - d_4}.$$

Com que el discriminant de l'equació característica associada a l'EDO,

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

és

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

es pot provar que si

$$(a) \quad \Delta > 0$$

la solució general de l'EDO és

$$p_e (t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + P_e,$$

amb

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{i} \quad \lambda_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Per un altre cantó, si

$$(b) \quad \Delta = 0$$

la solució és

$$p_e (t) = (C_1 \cdot + C_2 \cdot t) \, e^{\lambda t} + P_e,$$

amb

$$\lambda = -\frac{b}{2a},$$

i si

$$(c) \quad \Delta < 0$$

llavors la solució general serà

$$p_e(t) = (C_1 \cdot \sin(\beta t) + C_2 \cdot \cos(\beta t))\, e^{\alpha t} + P_e,$$

amb

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{i} \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

L'estabilitat del preu $p_e(t)$ a la llarga depèn, fonamentalment, del signe del quocient α. En efecte, si

$$(i) \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \geq 0$$

hom prova que no existeix el límit de $p_e(t)$ quan t tendeix cap a infinit. En altres paraules, que aquest preu d'equilibri és inestable. En canvi, si

$$(ii) \quad \alpha = -\frac{b}{2a} < 0$$

el límit existeix i val

$$\lim_{t\to+\infty} p_e(t) = P_e$$

quan

$$\Delta \leq 0, \quad \text{o bé quan} \quad \lambda_1, \lambda_2 \leq 0 \quad \text{si} \quad \Delta > 0.$$

A tall d'exemple, si

$$\begin{cases} s_4 = 0.04, & d_4 = 0 \\ s_3 = -0.02 & d_3 = -0.06 \\ s_2 = 0.1 & d_2 = 0.05 \\ s_1 = 5 & d_1 = 3 \end{cases}$$

tindríem que

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{s_3 - d_3}{2(s_4 - d_4)} = -\frac{-0.02 + 0.06}{2(0.04 - 0)} = -0.5 < 0,$$

amb el discriminant de l'equació característica negatiu i gual a

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = (s_3 - d_3)^2 - 4(s_4 - d_4)(s_2 - d_2) = \\ &= 0.04^2 - 4 \cdot 0.04 \cdot 0.05 = -0.0064 < 0 \end{aligned}$$

i amb

$$\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2(s_4 - d_4)} = \frac{\sqrt{0.0064}}{0.08} = 1.$$

Llavors, ja que

$$P_e = \frac{d}{a} = \frac{s_1 - d_1}{s_4 - d_4} = \frac{2}{0.04} = 50,$$

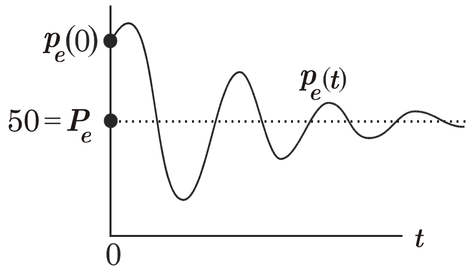
hom dedueix que

$$\begin{aligned} p_e(t) &= (C_1 \cdot \sin(\beta t) + C_2 \cdot \cos(\beta t))\, e^{\alpha t} + P_e = \\ &= (C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t)\, e^{-0.05t} + 50 \end{aligned}$$

i que

$$\lim_{t \to +\infty} p_e(t) = P_e = 50.$$

Gràficament,



Exercicis

1. Resoleu l'EDO
$$x \cdot y'' + y' = x^2$$
aplicant el canvi de variable $y' = t$.

2. Donada l'EDO
$$x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0,$$
proveu que

   (a) La funció $y = x^k$ és solució d'aquesta EDO si i només si $k = -1$.

   (b) La seva solució general és una combinació lineal de les funcions
$$y = x^{-1} \quad \text{i} \quad y = x^{-1} \cdot \ln x.$$

3. Donada l'EDO de Clairaut
$$y = x \cdot y' + f(y'),$$
on f és una funció real de variable real derivable,

(a) Comproveu que la família de rectes

$$y = C \cdot x + f(C)$$

que depèn del paràmetre C, és la seva solució general.

(b) Amb l'anterior, trobeu la solució general de l'EDO

$$y - x \cdot y' = \sqrt{1 + (y')^2}.$$

4. Resoleu l'EDO

$$y'' + ay = 1$$

per a tot $a \geq 0$.

5. Proveu que la corba que, en qualsevol punt, té la pendent de la recta tangent proporcional a la seva abcissa és una paràbola.

6. El mètode de datació amb l'isòtop radiactiu C^{14} del carboni es fonamenta en el fet que la proporció d'aquesta substància en tot organisme viu es manté constant al llarg de la seva vida i, en morir, disminueix al no haber-hi reposició. Si suposem que, en tot instant t, la velocitat de desintegració (la derivada temporal) de C^{14} és proporcional a la quantitat $C^{14}(t)$ present en t amb una taxa de proporcionalitat[9] de $-1.24486 \cdot 10^{-4}$,

(a) Plantegeu i resoleu l'equació diferencial que ens permet conèixer $C^{14}(t)$ a partir de la quantitat inicial $C^{14}(0)$ com a paràmetre.

(b) S'anomena període de *semidesintegració* d'una substància radioactiva al temps que cal esperar per a que aquesta substància es redueixi a la meitat. Amb l'apartat anterior, determineu el període de semidesintegració del C^{14} tot provant que aquest període no depèn de la quantitat inicial de C^{14} i que, a més, no coincideix amb la vida mitjana.

(c) Les restes d'un os trobat al Pirineu només contenen una cinquena part del C^{14} present en els organismes vius. En les hipòtesis anteriors, quina antiguitat té l'os?

7. Suposem que la variable $x = x(t)$ representa l'increment que es produeix en l'instant t d'una població bacteriana en un determinat cultiu biològic. Si s'ha establert experimentalment que aquesta variable poblacional satisfà l'EDO

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k \cdot \frac{dx}{dt} + \epsilon(t)$$

[9] L'invers en valor absolut d'aquesta constant de proporcionalitat s'anomena *vida mitjana* i és igual a 8033 anys.

en què la funció $\epsilon(t)$ mesura l'error observacional en cada instant t,

(a) Trobeu l'expressió de $x(t)$ sabent que $\epsilon(t)$ és proporcional a $x(t)$ amb $-k^2$ com a constant de proporcionalitat i que

$$k = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad x(0) = 0 \quad \text{i} \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{6}}.$$

(b) En les hipòtesis de l'apartat anterior, i considerant que t ve mesurada en hores i x en litres, calculeu el temps que cal esperar perquè la població bacteriana ompli un recipient de 0.75 litres.[10]

8. En un cert mercat de gran abast, la introducció de les eines informàtiques en la seva gestió ha fet que, pràcticament, el preu dels productes que s'ofereixen varriï de manera continua en el temps de manera que la seva taxa de variació satisfà l'equació

$$\frac{dp}{dt} = 0.0025 \cdot (D - S)$$

en què $p(t), D(t)$ i $S(t)$ són, respectivament, el preu, la demanda i l'oferta associats. A la llarga, i en relació amb un producte determinat X que ofereix el mercat, s'ha observat que en tot moment la seva oferta augmenta proporcionalment respecte del seu preu amb una constant de proporcionalitat de 0.7 però disminueix respecte del seu quadrat, amb una constant de proporcionalitat de -0.001, per adaptar-se a l'oferta quan el preu creix més enllà d'un cert límit. De manera anàloga, la seva demanda disminueix proporcionalment respecte del preu, amb una constant de proporcionalitat de -0.3 i, en un intent de consolidar les posicions de compra en un ambient alcista, augmenta proporcionalment respecte del seu quadrat amb una constant de proporcionalitat de 0.009. D'aquesta manera, la demanda i l'oferta de X són funcions quadràtiques de p. En aquestes condicions,

(a) Proveu que, en tot moment, els preus d'equilibri de X són 0 i 100 u. m.

(b) Plantegeu i resoleu l'EDO que ens permet determinar el preu instantani $p(t)$ de X en funció de $p(0)$, i demostreu que si $p(0) = 100$ u. m. llavors $p(t)$ és constant.

[10] Cal tenir en compte que la quantia poblacional bacteriana en un instant qualsevol t_0 s'obté integrant la variable $x\,(t)$ entre 0 i t_0.

9. L'empresa E, que opera en una zona de gran creixement econòmic, fabrica i ven un producte Π en competència desigual amb altres firmes industrials. Segons els estudis realitzats pel seu departament comercial, s'estima que quan es produeix aproximadament entre 2.2 i 3.7 milions d'unitats de Π el benefici marginal que s'obtindria de la venda de tota la producció és gairebé proporcional al cost de producció segons l'equació

$$\frac{dB(q)}{dq} = -0.8C(q)$$

en què $B(q)$ i $C(q)$ són, respectivament, les funcions de benefici i de cost al nivell de producció q. En aquestes condicions,

   (a) Plantegeu l'EDO que satisfà la funció $B(q)$ sabent que, en condicions normals, E força un preu de venda unitari constant igual a $p = 5$ u. m. per a Π en tota la seva zona d'influència.

   (b) Proveu que l'EDO anterior es pot resoldre aplicant el canvi de variable
   $$u = 5q - B$$
   i, en conseqüència, doneu-ne la seva solució general.

   (c) Obteniu de l'apartat anterior l'expressió formal del cost $C(q)$ i del benefici $B(q)$ sabent que
   $$C(3) = \frac{e^{2.4} - 5}{0.8}.$$

   (d) Proveu que el benefici associat a la venda de tota la producció de Π entre 2.2 i 3.7 tones és progressivament decreixent.

10. Isaac Newton va establir en el segle XVII que la variació instantània de la temperatura d'un objecte, a causa de l'intercanvi de calor amb el medi que l'envolta, és proporcional a la diferència de temperatura entre l'objecte i el medi. Si considerem que la temperatura del medi és constant i igual a T_0,

   (a) Trobeu i resoleu l'EDO de primer ordre que ens dóna la temperatura $T(t)$ de l'objecte en l'instant t en funció de la temperatura del medi i de la constant de proporcionalitat k.

   (b) La policia descobreix el cos sense vida del professor de Matemàtiques Empresarials en el seu despatx arran d'una trucada de telèfon. El punt clau per resoldre el suposat crim és la determinació exacta del moment en el qual es va produir.

El forense arriba al migdia, pren la temperatura del cos que és de 35^0C i repeteix la mateixa operació una hora més tard comprovant que ha baixat a 34^0C. Sabent que la temperatura del despatx s'ha mantingut sempre constant i igual a 21^0C i que la víctima tenia en vida una temperatura mitjana de 37^0C, deduïu quan es va produir el crim i qui podria haver estat el presumpte assassí si la policia va rebre la trucada de telèfon des del mateix despatx i a un quart d'ontze del matí. (Les dades del forense ens permeten trobar els valors numèrics del paràmetre de la solució general de l'EDO i de la constant k de proporcionalitat. Un cop coneguts, podrem determinar el moment respecte del mitgdia en el qual es va produir el crim).

Capítol 4

Equacions en diferències finites

Les equacions en diferències finites, equacions que es troben a mig camí entre l'àlgebra i el càlcul diferencial, estudien el comportament de certes funcions reals de variable real de manera semblant a com ho fan les equacions diferencials ordinàries. Mentre que aquestes estan relacionades amb les funcions contínues i derivables, les equacions en diferències finites (a partir d'ara EDF, per abreujar) ho estan amb les funcions discretes i les seves diferències. Històricament, hom pot dir que la teoria de les EDF neix amb l'estudi de les equacions recurrents dut a terme per A. de Moivre, D. Bernouilli i L. Euler, que escriu el primer tractat sobre el tema (1748). La teoria que podem denominar moderna arrenca amb els treballs de l'escola russa (P. Tchebychev (1880) i A. Markov (1910)), i de C. Jordan (1939). Des d'un punt de vista econòmic, és evident que els valors d'algunes de les magnituds econòmiques més importants (renda, consum, estalvi, preus, etc.) solen determinar-se de manera uniformement espaiada en el temps (mensualment, semestralment, anualment, etc.). En conseqüència, i amb l'objecte d'apropar-se a la realitat de la manera més acurada possible, l'economista es veu obligat a estudiar el comportament d'aquestes magnituds per mitjà de certs conjunts discrets (finits o numerables) de valors. Com veurem, les EDF són un instrument fonamental en l'estudi de les relacions que mantenen aquests conjunts discrets. En aquest últim capítol estudiarem tant sols les EDF de tipus lineal; cal remarcar que aquestes són les úniques que es poden resoldre sistemàticament a partir de fórmules precises. Començarem fixant la nostra atenció en la solució general del principi genètic del rèdit constant estudiat unes planes més enrere. Recordem que es tractava de l'EDO de primer ordre de variables separables

$$dC(t) = C(t) \cdot \rho \cdot dt, \quad \text{amb solució} \quad C(t) = C(0) \cdot e^{\rho t}.$$

Tanmateix, la pràctica habitual dels mercats financers no sol tenir en compte l'interès o rèdit instantani ρ en les operacions financeres. En el seu lloc considera, o bé l'interès simple que és un tant de proporcionalitat respecte del capital inicial i del termini de l'operació, o bé l'interès periòdic que s'obté en fraccionar el termini de l'operació en períodes de durada idèntica (mesos, trimestres, semestres, anys, etc.) dins dels quals el preu es va acumulant progressivament. En qualsevol d' aquests dos casos la variable temporal t deixa de ser contínua i passa a prendre valors discrets. Vegem-ne un exemple.

Exemple 39 (Interès compost) *Suposem que dividim l'any natural en períodes amb la mateixa durada. Es tracta de trobar el capital monetari disponible, al final de cadascun dels períodes, en una operació financera de dipòsit en la qual el capital monetari s'incrementa en cada període de manera proporcional al capital disponible en el seu inici i a la seva durada, tot suposant que el tant per cent de proporcionalitat és sempre constant.*

Si denotem per C_r el capital monetari disponible al final del període r-èsim és evident que, des d'un punt de vista matemàtic, l'estem considerant com a funcionalment dependent de la variable

$$r \in \mathbb{N}$$

que enumera els períodes. Així doncs, i segons l'enunciat, l'increment

$$\triangle C_r = C_{r+1} - C_r$$

que experimenta el capital al llarg del període r-èsim serà de la forma

$$\triangle C_r = i \cdot p \cdot C_r$$

en què p és la durada de cada període (mesurada en anys) i en què i és el tant per cent de proporcionalitat constant que no depèn del temps. L'equació que hem obtingut,

$$\triangle C_r - i \cdot p \cdot C_r = 0,$$

és un exemple d'EDF lineal de primer ordre homogènia a coeficients constants en què r és la variable discreta independent i C_r és la variable funcional dependent. La resolució d'aquesta EDF passa per l'anàlisi directa de la seva estructura. Fixem-nos que, en aquest cas,

$$C_{r+1} = C_r + i \cdot p \cdot C_r = C_r \cdot (1 + i \cdot p).$$

Per tant, C_{r+1} és el terme $(r+1)$-èsim d'una progressió geomètrica de primer terme C_0 i de raó $1+i\cdot p$. Per tant, el capital al final del període r depèn funcionalment del capital inicial C_0 en la forma

$$C_r = C_0 \cdot (1+i\cdot p)^r .$$

Aquesta expressió és un cas particular de funció discreta en la variable r que depèn de dos paràmetres, el capital inicial C_0 i l'interès constant i. Com veiem, s'obté la fórmula de l'interès compost a *tant nominal* i i de periodicitat[1] p. Si, per exemple,

$$C_0 = 1000, \quad p = \tfrac{1}{3} \quad \text{i} \quad i = 0.03,$$

C_r seria el capital acumulat al final del període r-èsim en un depòsit bancari que dóna un interès nominal del 3 % anual pagable quadrimestralment i amb una imposició inicial de 1000 euros. És a dir, que

$$C_r = 1000 \cdot \left(1 + 0.03 \cdot \tfrac{1}{3}\right)^r = 1000 \cdot (1.01)^r .$$

Aquest capital, al cap de 2 anys, seria igual a[2]

$$C_6 = 1000 \cdot (1.01)^6 = 1061.52 \text{ euros.}$$

Funcions discretes i operadors discrets

El primer que hem de fer és clarificar els conceptes que hem introduït informalment en l'exemple anterior. El punt de partida és la definició formal de funció discreta. A tal fi, cal tenir present la noció de conjunt infinit numerable[3]: diem que una funció real de variable real del tipus

$$\begin{array}{rrcl} f: & A \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & k \in A & \longmapsto & y_k = f(k) \end{array}$$

és una **funció discreta** si el seu domini de definició A és un conjunt finit o infinit numerable. Per exemple, el capital monetari de l'interès compost de l'exemple anterior,

$$C_r = 1000 \cdot (1.01)^r ,$$

[1] El producte $i \cdot p$ és el *tant efectiu*.

[2] En 2 anys tenim 6 quadrimestres

[3] Un conjunt infinit és numerable si es pot posar en correspondència bijectiva amb el conjunt dels números naturals.

és una funció discreta. En aquest cas la variable discreta independent i la variable discreta dependent són, respectivament,

$$k = r \in A \subseteq \mathbb{N} \quad \text{i} \quad y_k = C_r = 1000 \cdot 1.01^r,$$

i el domini seria

$$A = \{0, 1, , \ldots, n\}$$

si el termini de l'operació financera de dipòsit fos de n anys, o bé

$$A = \mathbb{N}$$

si C_r fos, per exemple, el terme r-èsim d'una renda monetària perpètua. Per raons de caràcter pràctic, considerarem que el domini de definició de les funcions discretes és el conjunt $\mathbb{N}$ dels números naturals.[4] Sobre les funcions discretes poden actuar uns operadors funcionals anomenats operadors discrets. En concret, els operadors discrets **identitat** I, **següent** E i **diferència** $\triangle$ sobre una funció discreta y_k vénen definits per les igualtats

$$Iy_k = y_k, \quad Ey_k = y_{k+1} \quad \text{i} \quad \triangle y_k = y_{k+1} - y_k.$$

De fet és precisament l'operador diferència el tret característic de les EDF ja que desenvolupa el mateix paper que la derivada en les EDO. Juntament amb aquests operadors tenim els operadors discrets successius o d'ordre superior: els operadors discrets **identitat** I, **següent** E i **diferència** $\triangle$ **d'ordre** n venen definits de manera recurrent per les igualtats

$$I^n = I \circ I^{n-1}, \quad E^n = E \circ E^{n-1} \quad \text{i} \quad \triangle^n = \triangle \circ \triangle^{n-1}$$

per a tot número natural n més gran que zero i on, per conveni,

$$I^0 = E^0 = \triangle^0 = I.$$

Tots aquests operadors transformen funcions discretes en funcions discretes. Vegem-ne un exemple.

Exemple 40 *Calculeu els següents i les diferències successives del capital monetari*

$$C_r = 1000 \cdot (1.01)^r .$$

Com que

$$EC_r = C_{r+1},$$

[4]Per tant les funcions discretes que considerarem seran les successions de números reals.

tenim que el següent de segon ordre és

$$E^2C_r = E\left(EC_r\right) = E\left(C_{r+1}\right) = C_{r+2}.$$

Anàlogament, el següent de tercer ordre seria

$$E^3C_r = E\left(E^2C_r\right) = E\left(C_{r+2}\right) = C_{r+3}$$

i així successivament. Per tant, el següent d'ordre n del capital monetari r-èsim C_r és capital monetari $(r+n)$-èsim i val

$$E^nC_r = C_{r+n} = 1000 \cdot (1.01)^{r+n}.$$

Tanmateix, el càlcul de les diferències d'ordre n és més complicat. Donat que la primera diferència del capital monetari de l'interès compost és

$$\begin{aligned} \triangle C_r &= C_{r+1} - C_r = \left(1000 \cdot (1.01)^{r+1}\right) - \left(1000 \cdot (1.01)^{r}\right) = \\ &= 1000 \cdot (1.01)^r \cdot (1.01 - 1) = C_r \cdot 0.01, \end{aligned}$$

deduïm que la segona diferència serà

$$\begin{aligned} \triangle^2 C_r &= \triangle(\triangle C_r) = \triangle\left(0.01 \cdot C_r\right) = \left(0.01 \cdot C_{r+1}\right) - \left(0.01 \cdot C_r\right) = \\ &= 0.01 \cdot \triangle C_r = 0.01 \cdot \left(0.01 \cdot C_r\right) = (0.01)^2 \cdot C_r. \end{aligned}$$

De manera semblant, la diferència de tercer ordre serà igual a

$$\begin{aligned} \triangle^3 C_r &= \triangle(\triangle^2 C_r) = \triangle\left((0.01)^2 \cdot C_r\right) = \\ &= \left((0.01)^2 \cdot C_{r+1}\right) - \left((0.01)^2 \cdot C_r\right) = \\ &= (0.01)^2 \cdot \triangle C_r = (0.01)^2 \cdot \left(0.01 \cdot C_r\right) = (0.01)^3 \cdot C_r \end{aligned}$$

i així successivament. En conseqüència, les diferències d'ordre superior adopten l'expressió

$$\triangle^n C_r = (0.01)^n \cdot C_r = 1000 \cdot (1.01)^r \cdot (0.01)^n.$$

Destaquem, en el resultat següent, algunes de les propietats més importants d' aquests operadors.

Proposició 41 *En general,*

1. *Els operadors discrets identitat, següent i diferència satisfan la igualtat*
$$\triangle = E - I.$$

2. *Per a tota funció discreta y_k i per a tot ordre n tenim que*
$$E^n y_k = y_{k+n} \quad i \quad \triangle^n y_k = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \cdot y_{k+n-i}.$$

3. *Els operadors següent i diferència són operadors lineals, és a dir, que per a tota parella de funcions discretes u_k i v_k, i tota parella λ i μ de números reals tenim que*

$$\Theta(\lambda \cdot u_k + \mu \cdot v_k) = \lambda \cdot \Theta u_k + \mu \cdot \Theta v_k,$$

en què Θ és o bé l'operador discret identitat I, o bé l'operador següent E o bé l'operador diferència $\triangle$.

4. *Els operadors discrets identitat I i següent E satisfan, respecte del producte de funcions discretes, la igualtat*

$$\Theta(u_k \cdot v_k) = \Theta u_k \cdot \Theta v_k$$

mentre que l'operador diferència satisfà que

$$\triangle(u_k \cdot v_k) = \triangle u_k \cdot E v_k + u_k \cdot \triangle v_k = (\triangle u_k) \cdot v_k + E u_k \cdot \triangle v_k.$$

Cal remarcar que la fórmula de la diferència del producte de funcions discretes és similar a la de la derivada del producte de funcions reals de variable real.

Exemple 42 *Trobeu la diferència d'ordre n del capital monetari*

$$C_r = 1000 \cdot (1.01)^r$$

aplicant la fórmula

$$\triangle^n y_k = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \cdot y_{k+n-i}.$$

Amb aquesta fórmula i la del binomi de Newton tenim que

$$\begin{aligned}
\triangle^n C_r &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot C_{r+n-i} = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot 1000 \cdot (1.01)^{r+n-i} = \\
&= 1000 \cdot (1.01)^r \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot (1.01)^{n-i} \right) = \\
&= 1000 \cdot (1.01)^r \cdot ((-1) + 1.01)^n = \\
&= 1000 \cdot (1.01)^r \cdot (0.01)^n .
\end{aligned}$$

Equacions en diferències finites

Estem ja en condicions d'introduir la noció matemàtica d'equació en diferèn- cies finites. La definició és estructuralment idèntica a la d'EDO si substituïm el concepte de funció derivable pel de funció discreta i el de derivada pel de diferència: una **equació en diferències finites d'ordre** n (**EDF d'ordre** n) és una equació funcional de la forma

$$F\left(k, y_k, \triangle y_k, ..., \triangle^n y_k\right) = 0$$

que relaciona la variable discreta k, que denota els nombres naturals, amb una funció discreta y_k i les seves diferències successives fins a l'ordre n. Si la diferència n-èsima d'y_k es pot explicitar a partir de la resta, l'EDF d'ordre n adopta la forma

$$\triangle^n y_k = f\left(k, y_k, \triangle y_k, ..., \triangle^{n-1} y_k\right)$$

És evident, a partir de la proposició anterior, que tota EDF d'ordre n es pot expressar alternativament com una *equació recurrent* d'ordre n del tipus

$$G(k, y_k, y_{k+1}, ..., y_{k+n}) = 0 \quad \text{o} \quad y_{k+n} = g\left(k, y_k, y_{k+1}, ..., y_{k+n-1}\right)$$

si apliquem la fórmula

$$\triangle^n y_k = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \cdot y_{k+n-i}.$$

Per exemple, és fàcil adonar-se que l'EDF

$$\triangle C_r - 0.01 \cdot C_r = 0$$

és una EDF de primer ordre, amb r com a variable discreta independent i C_r com a variable discreta dependent, ja que depèn tant sols de la primera diferència de C_r. Com que

$$0 = \triangle C_r - 0.01 \cdot C_r = (C_{r+1} - C_r) - 0.01 \cdot C_r = C_{r+1} - 1.01 \cdot C_r,$$

deduïm que l'equació recurrent de primer ordre equivalent seria, doncs,

$$C_{r+1} = 1.01 \cdot C_r.$$

En general, totes les equacions recurrents d'ordre n posen de manifest la regla de formació del terme y_k en funció dels n anteriors. En el cas precedent, l'equació recurrent ens diu que el capital monetari disponible al final d'un període s'obté multiplicant per la constant 1.01 el capital disponible al final del període anterior. Un dels objectius de la teoria de les EDF és determinar, quan això sigui possible, les funcions discretes que mostren el comportament variacional que expressen les dites EDF. Aquestes funcions discretes són les seves solucions. S'anomena **solució general explícita** d'una EDF d'ordre n a tota funció discreta de la forma

$$y_k = \varphi(k, C_1, \ldots, C_n)$$

que depèn d'n paràmetres $C_1, \ldots,$ C_n i que, substituïda en l'EDF, la satisfà. Qualsevol funció discreta y_k que s'obté de l'anterior donant valors concrets a aquests paràmetres és una **solució particular** de l'EDF.[5] Com podem veure la solució general d'una EDF és, en sentit estricte, una funció discreta indeterminada. Com en el cas de les EDO, la solució general d'una EDF representa el conjunt format per les seves solucions particulars. Per exemple, la solució general de l'EDF

$$\triangle C_r - 0.01 \cdot C_r = 0$$

és la funció discreta

$$C_r = C_0 \cdot (1.01)^r$$

ja que la satisfà i, a més, depèn del capital inicial C_0 com a paràmetre. Precisament les solucions particulars de l'EDF s'obtenen fixant aquest valor monetari inicial. Una possible solució particular seria el capital monetari

$$C_r = 1000 \cdot (1.01)^r, \quad \text{on} \quad C_0 = 1000 \text{ euros.}$$

En general, i a diferència del que passava amb les EDO, les úniques EDF que poden ser resoltes de manera efectiva són les de tipus lineal. Un exemple senzill d'EDF que no té una solució general expressable analíticament és

$$y_{k+1} = 4y_k\,(1 - y_k)\,.$$

Comencem, doncs, resolent el cas general de l'EDF lineal de primer ordre.

EDF lineals de primer ordre

Una **EDF lineal de primer ordre** és una EDF del tipus

$$\triangle y_k + p_k \cdot y_k = q_k,$$

amb p_k i q_k funcions discretes com a coeficients. Si, per a tot k,

$$q_k = 0,$$

[5] Aquests valors s'anomenen *condicions inicials* o *de contorn*.

l'EDF lineal s'anomena *reduïda* o *homogènia* i, en cas contrari, *completa*. Per exemple, l'EDF

$$\triangle y_k - k \cdot y_k = (k+1)!$$

és lineal de primer ordre amb coeficients

$$p_k = -k \quad \text{i} \quad q_k = (k+1)!.$$

Demostrarem tot seguit que qualsevol EDF lineal de primer ordre admet solució general i, a més, en donarem explícitament l'expressió formal en funció dels coeficients p_k i q_k. A tal fi, resoldrem en primer lloc l'EDF homogènia associada. El procés és semblant al dut a terme en el cas de l'EDO lineal de primer ordre.

Resolució de l'EDF lineal de primer ordre homogènia

Es tracta de trobar la solució general de l'EDF

$$\triangle y_k + p_k \cdot y_k = 0.$$

Com que

$$0 = \triangle y_k + p_k \cdot y_k = (y_{k+1} - y_k) + p_k \cdot y_k = y_{k+1} - (1 - p_k)\, y_k,$$

s'obté, com a equació recurrent associada, l'expressió

$$y_{k+1} = (1 - p_k)\, y_k.$$

Així doncs,

$$\begin{aligned} y_k &= (1-p_{k-1})\, y_{k-1} = (1-p_{k-1})\,((1-p_{k-2})\, y_{k-2}) = \\ &= (1-p_{k-1})\,(1-p_{k-2})\,((1-p_{k-3})\, y_{k-3}) = \ldots \end{aligned}$$

En definitiva, la funció discreta

$$y_k = (1-p_{k-1})\,(1-p_{k-2})\cdots(1-p_0)\, y_0 = \prod_{s=0}^{k-1} (1-p_s)\, y_0$$

és la solució general de l'EDF lineal de primer ordre homogènia amb paràmetre y_0.

Resolució de l'EDF lineal de primer ordre completa

Per a resoldre la completa cal introduir el canvi de variable

$$y_k = u_k \cdot v_k,$$

en què u_k és la solució general de l'homogènia associada, és a dir, que

$$\triangle u_k + p_k \cdot u_k = 0.$$

Caldrà, doncs, determinar la funció discreta v_k. Aplicant la fórmula de la diferència d'un producte, tenim que

$$\begin{aligned} q_k &= \triangle y_k + p_k \cdot y_k = \triangle (u_k \cdot v_k) + p_k \cdot (u_k \cdot v_k) = \\ &= (\triangle u_k \cdot v_k + u_{k+1} \cdot \triangle v_k) + p_k \cdot (u_k \cdot v_k) = \\ &= (\triangle u_k + p_k \cdot u_k) \cdot v_k + u_{k+1} \cdot \triangle v_k = \\ &= 0 \cdot v_k + u_{k+1} \cdot \triangle v_k = u_{k+1} \cdot \triangle v_k \end{aligned}$$

d'on

$$u_{k+1} \cdot \triangle v_k = q_k \quad \text{o, alternativament,} \quad v_{k+1} = v_k + \frac{q_k}{u_{k+1}}.$$

Aquesta equació recurrent ens permetrà trobar v_k. En efecte, ja que

$$\begin{aligned} v_k &= v_{k-1} + \frac{q_{k-1}}{u_k} = \left(v_{k-2} + \frac{q_{k-2}}{u_{k-1}} \right) + \frac{q_{k-1}}{u_k} = \\ &= \left(v_{k-3} + \frac{q_{k-3}}{u_{k-2}} \right) + \frac{q_{k-2}}{u_{k-1}} + \frac{q_{k-1}}{u_k} = \dots \end{aligned}$$

hom dedueix que

$$\begin{aligned} v_k &= v_0 + \frac{q_0}{u_1} + \dots + \frac{q_{k-2}}{u_{k-1}} + \frac{q_{k-1}}{u_k} = v_0 + \sum_{t=0}^{k-1} \frac{q_t}{u_{t+1}} = \\ &= v_0 + \sum_{t=0}^{k-1} \left(\frac{q_t}{\prod\limits_{s=0}^{t} (1 - p_s)\, u_0} \right). \end{aligned}$$

Finalment, la solució general de l'EDF lineal de primer ordre completa serà

$$\begin{aligned} y_k &= u_k \cdot v_k = \left(\prod_{s=0}^{k-1} (1 - p_s)\, u_0 \right) \left(v_0 + \sum_{t=0}^{k-1} \left(\frac{q_t}{\prod\limits_{s=0}^{t} (1 - p_s)\, u_0} \right) \right) = \\ &= \prod_{s=0}^{k-1} (1 - p_s) \left(y_0 + \sum_{t=0}^{k-1} \left(\frac{q_t}{\prod\limits_{s=0}^{t} (1 - p_s)} \right) \right), \text{ amb } y_0 = u_0 \cdot v_0. \end{aligned}$$

Exemple 43 *Trobeu la solució general de l'EDF lineal de primer ordre*

$$\triangle y_k - k \cdot y_k = (k+1)!.$$

Ja que els seus coeficients són

$$p_k = -k \quad \text{i} \quad q_k = (k+1)!,$$

tenim, aplicant la fórmula anterior, que

$$\begin{aligned}
y_k &= \prod_{s=0}^{k-1}(1-p_s)\left(y_0 + \sum_{t=0}^{k-1}\left(\frac{q_t}{\prod_{s=0}^{t}(1-p_s)}\right)\right) = \\
&= \prod_{s=0}^{k-1}(1+s)\left(y_0 + \sum_{t=0}^{k-1}\left(\frac{(t+1)!}{\prod_{s=0}^{t}(1+s)}\right)\right) = \\
&= k! \cdot \left(y_0 + \sum_{t=0}^{k-1}\frac{(t+1)!}{(t+1)!}\right) = k! \cdot \left(y_0 + \sum_{t=0}^{k-1} 1\right) = \\
&= k! \cdot (y_0 + k)\,.
\end{aligned}$$

Aplicació econòmica: equació dinàmica dels préstecs amb amortització progressiva

Estudiarem l'equació dinàmica dels préstecs valorats sota un règim financer d'interès compost a tant vençut. Considerem un préstec de n termes i de nominal C, amortitzable periòdicament, amb terme amortitzador

$$\alpha_r = A_r + Y_r$$

en què Y_r és la quota d'interès i A_r la quota de capital del període r-èsim. Provarem que si el préstec es valora en un règim financer d'interès compost a tant efectiu periòdic vençut I_M^r, la resta R_r pendent d'amortitzar al final del període r-èsim satisfà l'EDF lineal de primer ordre

$$\triangle R_{r-1} - I_M^r \cdot R_{r-1} = -\alpha_r.$$

Des d'un punt de vista financer, la resta pendent R_r és igual a la resta pendent del període anterior, R_{r-1}, menys la part del terme amortitzador α_r del període r-èsim destinada a la devolució del nominal i que és A_r. En altres paraules, que

$$R_r = R_{r-1} - A_r.$$

Com que la quota d'interès és

$$Y_r = I_M^r \cdot R_{r-1},$$

ja que es calcula sobre lal resta pendent del període anterior, deduïm que

$$R_r = R_{r-1} - A_r = R_{r-1} - (\alpha_r - Y_r) = R_{r-1} - \alpha_r + I_M^r \cdot R_{r-1}$$

d'on

$$\triangle R_{r-1} - I_M^r \cdot R_{r-1} = (R_r - R_{r-1}) - I_M^r \cdot R_{r-1} = -\alpha_r$$

com calia veure. La resoldrem tot seguit. Com que aquesta EDF és lineal de primer ordre a coeficients

$$p_r = -I_M^{r+1} \quad \text{i} \quad q_r = -\alpha_{r+1},$$

la seva solució general serà

$$\begin{aligned} R_r &= \prod_{s=0}^{r-1}(1-p_s)\left(R_0 + \sum_{t=0}^{r-1}\left(\frac{q_t}{\prod_{s=0}^{t}(1-p_s)}\right)\right) = \\ &= \prod_{s=0}^{r-1}\left(1+I_M^{s+1}\right)\left(R_0 - \sum_{t=0}^{r-1}\left(\frac{\alpha_{t+1}}{\prod_{s=0}^{t}\left(1+I_M^{s+1}\right)}\right)\right) = \\ &= \prod_{s=1}^{r}(1+I_M^s)\left(R_0 - \sum_{t=1}^{r}\left(\frac{\alpha_t}{\prod_{s=1}^{t}(1+I_M^s)}\right)\right). \end{aligned}$$

En el cas particular del préstec amortitzable pel sistema francès, els termes amortitzadors i el tants efectius periòdics d'interès vençut són constants i iguals a

$$\alpha_r = \alpha \quad \text{i} \quad I_M^r = I_M.$$

Així doncs, aplicant la fórmula anterior, deduïm que

$$\begin{aligned}
R_r &= \prod_{s=1}^{r}(1+I_M^s)\left(R_0-\sum_{t=1}^{r}\left(\frac{\alpha_t}{\displaystyle\prod_{s=1}^{t}(1+I_M^s)}\right)\right)= \\
&= \prod_{s=1}^{r}(1+I_M)\left(R_0-\sum_{t=1}^{r}\left(\frac{\alpha}{\displaystyle\prod_{s=1}^{t}(1+I_M)}\right)\right)= \\
&= (1+I_M)^r\left(R_0-\alpha\cdot\sum_{t=1}^{r}\frac{1}{(1+I_M)^t}\right)= \\
&= (1+I_M)^r\left(R_0-\alpha\cdot \mathsf{a}_{\overline{r}|I_M}\right),
\end{aligned}$$

en què

$$\mathsf{a}_{\overline{r}|I_M}=\sum_{t=1}^{r}\frac{1}{(1+I_M)^t}=\frac{1-(1+I_M)^{-r}}{I_M}$$

és el valor actual d'una renda unitària de r termes valorada a un interès compost efectiu vençut i periòdic I_M. Aquesta solució general depèn de les restes pendents d'amortitzar inicial i final,

$$R_0=C \quad \text{i} \quad R_n=0,$$

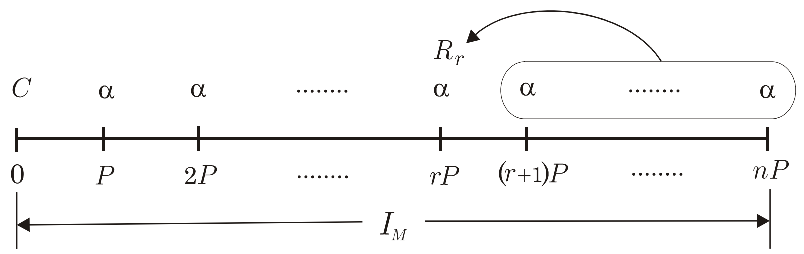
d'on

$$0=R_n=(1+I_M)^n\left(C-\alpha\cdot\mathsf{a}_{\overline{n}|I_M}\right) \quad \text{i} \quad R_0=C=\alpha\cdot\mathsf{a}_{\overline{n}|I_M}.$$

En conseqüència, aplicant les fórmules del càlcul financer, s'obté

$$R_r=(1+I_M)^r\left(\alpha\cdot\mathsf{a}_{\overline{n}|I_M}-\alpha\cdot\mathsf{a}_{\overline{r}|I_M}\right)=\alpha\cdot\mathsf{a}_{\overline{n-r}|I_M}.$$

En altres paraules, que la resta pendent d'amortitzar al final del període r-èsim d'aquest tipus de préstecs és el valor en r dels $n-r$ termes amortitzadors que resten per pagar. Esquemàticament,



EDF lineals de primer ordre a coeficients constants

L'EDF *lineal de primer ordre a coeficients constants* és del tipus

$$\triangle y_k + p \cdot y_k = q, \quad \text{amb } p \text{ i } q \text{ constants.}$$

Per exemple, l'EDF associada a l'interès compost,

$$\triangle C_k - 1.01 \cdot C_k = 0,$$

és d'aquest tipus amb coeficients

$$p = -1.01 \quad \text{i} \quad q = 0.$$

Trobarem la solució general de l'EDF lineal de primer ordre a coeficients constants suposant que

$$p \neq 1, 0.$$

Si apliquem la fórmula que hem obtingut en l'apartat anterior amb

$$p_k = p \quad \text{i} \quad q_k = q$$

i la fórmula de la suma d'una progressió geomètrica de raó i primer terme $\frac{1}{1-p}$ obtenim que

$$\begin{aligned}
y_k &= \prod_{s=0}^{k-1}(1-p)\left(y_0 + \sum_{t=0}^{k-1}\left(\frac{q}{\displaystyle\prod_{s=0}^{t}(1-p)}\right)\right) = \\
&= (1-p)^k\left(y_0 + q\cdot\sum_{t=0}^{k-1}\left(\frac{1}{(1-p)^{t+1}}\right)\right) = \\
&= (1-p)^k\left(y_0 + q\cdot\left(\frac{\left(\frac{1}{1-p}\right) - \left(\frac{1}{(1-p)}\right)^{k+1}}{1-\left(\frac{1}{1-p}\right)}\right)\right) = \\
&= (1-p)^k\left(y_0 + q\cdot\left(\frac{1-\frac{1}{(1-p)^k}}{-p}\right)\right) = \\
&= (1-p)^k\cdot y_0 - q\cdot\left(\frac{(1-p)^k-1}{p}\right).
\end{aligned}$$

En conseqüència,

$$y_k = (1-p)^k\cdot\left(y_0 - \frac{q}{p}\right) + \frac{q}{p}$$

és la solució general de l'EDF lineal de primer ordre a coeficients constants p i q i amb y_0 com a paràmetre. Fixem-nos que, si

$$q = 0$$

y_k seria el terme k-èsim d'una progressió geomètrica de raó $1 - p$ i de primer terme y_0. Per un altre cantó, si

$$p = 0$$

l'EDF en qüestió seria

$$\triangle y_k = q, \quad \text{d'on} \quad y_{k+1} = y_k + q$$

que és l'equació recurrent associada a una progressió aritmètica de raó q i de primer terme y_0. Així doncs, la solució general seria, en aquest cas,

$$y_k = y_0 + k \cdot q$$

Això posa de manifest que les progressions aritmètiques i geomètriques són casos particulars d'EDF lineals de primer ordre a coeficients constants.

Exemple 44 *Resoleu l'EDF*

$$\triangle y_k + E y_k = 1.$$

Com que

$$\begin{aligned} 1 &= \triangle y_k + E y_k = (y_{k+1} - y_k) + y_{k+1} = 2y_{k+1} - y_k = \\ &= 2y_{k+1} - 2y_k + y_k = 2 \triangle y_k + y_k, \end{aligned}$$

tenim l'EDF lineal de primer ordre

$$\triangle y_k + \left(\frac{1}{2}\right) y_k = \frac{1}{2}, \quad \text{a coeficients constants} \quad p = q = \frac{1}{2}.$$

Així doncs, aplicant la fórmula que acabem d'obtenir, tindrem com a solució general l'expressió

$$y_k = (1-p)^k \left(y_0 - \frac{q}{p}\right) + \frac{q}{p} = \left(\frac{1}{2}\right)^k (y_0 - 1) + 1.$$

Aplicació econòmica: model de la teranyina

Suposem que la demanda D_t d'un producte, en un període qualsevol t, depèn linealment del seu preu d'equilibri p_t en la forma

$$D_t = d_0 - d_1 \cdot p_t$$

en què d_0 i d_1 són constants positives diferents de zero, mentre que l'oferta S_t depèn linealment del preu d'equilibri del període anterior en la forma

$$S_t = s_1 \cdot p_{t-1} - s_0$$

en què s_0 i s_1 són, també, constants positives diferents de zero. El model de la teranyina estudia l'evolució temporal d'aquest preu d'equilibri p_t. Ja que aquest preu és el preu d'equilibri del període t, podem escriure que

$$D_t = S_t, \quad \text{d'on} \quad d_0 - d_1 \cdot p_t = s_1 \cdot p_{t-1} - s_0$$

i, per tant, que

$$p_t + \left(\frac{s_1}{d_1}\right) p_{t-1} = \left(\frac{s_0 + d_0}{d_1}\right).$$

Com podem comprovar, aquesta equació recurrent està associada a l'EDF lineal de primer ordre

$$\triangle p_t + \left(\frac{s_1 + d_1}{d_1}\right) p_t = \left(\frac{s_0 + d_0}{d_1}\right)$$

a coeficients constants

$$p = \frac{s_1 + d_1}{d_1} \quad \text{i} \quad q = \frac{s_0 + d_0}{d_1}.$$

Tenint en compte que

$$P_e = \frac{s_0 + d_0}{s_1 + d_1} = \frac{q}{p}$$

és el preu d'equilibri del producte en el mercat estàtic, deduïm, aplicant la fórmula de la solució general de l'EDF lineal de primer ordre a coeficients constants, que

$$p_t = (1 - p)^t \left(p_0 - \frac{q}{p}\right) + \frac{q}{p} = \left(-\frac{s_1}{d_1}\right)^t (p_0 - P_e) + P_e,$$

amb el preu d'equilibri inicial p_0 com a paràmetre. Així doncs, podem estudiar l'evolució temporal de p_t analitzant el límit d'aquesta expressió quan la variable temporal discreta t creix indefinidament. Fixem-nos que aquest límit dependrà del preu d'equilibri inicial p_0, del preu P_e d'equilibri del mercat estàtic i de la relació entre les pendents s_1 i d_1 de les rectes oferta i demanda. Volem estudiar ara la relació entre aquests paràmetres que fan que el preu d'equilibri dinàmic sigui estable a la llarga. En primer lloc, fixem-nos que si

$$p_0 = P_e$$

és a dir, si el preu d'equilibri inicial coincideix amb el preu d'equilibri del mercat estàtic, el preu d'equilibri del producte en qualsevol període és constant igual a P_e ja que

$$p_t = \left(-\frac{s_1}{d_1}\right)^t \cdot 0 + P_e = P_e.$$

En cas contrari, és a dir, quan els preus d'equilibri p_0 i P_e són diferents, tindríem que

$$\lim_{t\to\infty} p_t = \left(-\frac{s_1}{d_1}\right)^{+\infty} \cdot (p_0 - P_e) + P_e.$$

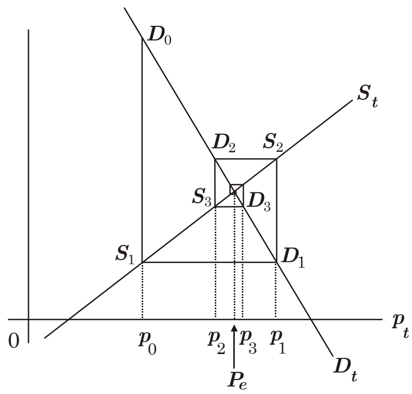
Aquest límit existeix i val P_e quan

$$s_1 < d_1$$

és a dir, quan la demanda decreix més ràpidament que creix l'oferta a mesura que el preu d'equilibri augmenta. En conseqüència, el preu d'equilibri dinàmic p_t del model de la teranyina tendeix cap al preu d'equilibri estàtic P_e quan

$$p_0 = P_e \quad \text{o bé} \quad s_1 < d_1.$$

En aquests casos, l'evolució de p_t i de la demanda D_t i oferta S_t, a partir d'un preu incial p_0 diferent de P_e, seria, gràficament



EDF lineals d'ordre superior a coeficients constants

Finalment estudiarem les EDF lineals d'ordre superior a coeficients constants. En general, una **EDF lineal d'ordre** n **a coeficients constants** és una equació recurrent del tipus

$$y_{k+n} + a_{n-1} \cdot y_{k+n-1} + \cdots + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = b(k)$$

amb les constants reals $a_0, a_1, \ldots,\ a_{n-1}$ com a coeficients i la funció discreta $b(k)$ com a terme independent. De manera semblant al cas de les EDO lineals d'ordre superior, si

$$b(k) = 0$$

l'EDF lineal d'ordre n s'anomena *reduïda* o *homogènia* i, en cas contrari, *completa*. Per exemple, l'EDF

$$y_{k+3} + y_{k+2} - 2y_k = k$$

és lineal de tercer ordre completa a coeficients constants i terme independent

$$a_2 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = -2 \quad \text{i} \quad b(k) = k.$$

Per resoldre l'EDF lineal completa cal trobar, prèviament, la solució general de la homogènia associada.

Resolució de l'EDF lineal d'ordre superior homogènia

Per això, cal considerar l'*equació característica* associada a l'EDF lineal d'ordre superior a coeficients constants que és l'equació polinòmica de grau n en la variable λ

$$\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0.$$

Per exemple, l'equació característica associada a l'EDF anterior és

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 2 = 0.$$

La solució general de l'EDF lineal d'ordre superior a coeficients constants homogènia està relacionada amb les arrels de la seva equació característica. Com veurem tot seguit, el procés de resolució és anàleg al cas de les EDO lineals d'ordre superior a coeficients constants.

Teorema 45 *Donada una EDF lineal d'ordre n a coeficients reduïda tenim que*

1. *Si λ_0 és una arrel real simple de l'equació característica associada, la funció discreta*

$$(\lambda_0)^k$$

   és una solució particular.

2. Si λ_0 és una arrel real de multiplicitat s de l'equació característica associada, les s funcions discretes

$$(\lambda_0)^k, k \cdot (\lambda_0)^k, ..., k^{s-1} \cdot (\lambda_0)^k$$

són solucions particulars.

3. Si el número complex

$$\lambda_0 = \alpha + \beta \cdot i, \quad amb \quad i = \sqrt{-1},$$

és una arrel simple de l'equació característica associada, les dues funcions discretes

$$r^k \cdot \sin(\theta k) \quad i \quad r^k \cdot \cos(\theta k), \quad amb \quad \begin{cases} r = +\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{\beta}{\alpha} \end{cases},$$

són solucions particulars.[6]

4. Si el número complex

$$\lambda_0 = \alpha + \beta \cdot i, \quad amb \quad i = \sqrt{-1},$$

és una arrel de multiplicitat s de l'equació característica associada, les $2s$ funcions discretes

$$r^k \cdot \sin(\theta k), k \cdot \left(r^k \cdot \sin(\theta k)\right), ..., k^{s-1} \cdot \left(r^k \cdot \sin(\theta k)\right)$$

i

$$r^k \cdot \cos(\theta k), k \cdot \left(r^k \cdot \cos(\theta k)\right), ..., k^{s-1} \cdot \left(r^k \cdot \cos(\theta k)\right)$$

són solucions particulars.

A més, la solució general de l'EDF lineal d'ordre n a coeficients constants homogènia és una combinació lineal de les n solucions particulars associades a les arrels de la seva equació característica.

Exemple 46 *Resoleu l'EDF*

$$y_{k+3} + y_{k+2} - 2y_k = 0.$$

Com que que les arrels de l'equació característica associada

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 2 = 0$$

són

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1 + i \quad \text{i} \quad \lambda_3 = -1 - i,$$

[6] r i θ són, respectivament, el mòdul i l'argument de $\alpha + \beta \cdot i$.

la solució general serà de la forma

$$y_k = C_1 \cdot \lambda_1^k + C_2 \cdot r^k \cdot \sin(\theta k) + C_3 \cdot r^k \cdot \cos(\theta k)$$

amb

$$r = +\sqrt{(-1)^2 + 1^2} = +\sqrt{2} \quad \text{i} \quad \theta = \arctan\left(\tfrac{-1}{1}\right) = \tfrac{3\pi}{4}.$$

Així doncs,

$$y_k = C_1 + \left(C_2 \cdot \sin\left(\tfrac{3\pi k}{4}\right) + C_3 \cdot \cos\left(\tfrac{3\pi k}{4}\right)\right)\left(\sqrt{2}\right)^k.$$

és la solució general de l'EDF lineal de tercer ordre amb C_1, C_2 i C_3 com a paràmetres.

Resolució de l'EDF lineal d'ordre superior completa

La solució general d'aquesta EDF depèn, com en el cas de les EDO, de la solució general de l'EDO reduïda associada que acabem d'obtenir. En efecte, la solució general y_k de l'EDF lineal d'ordre n a coeficients constants completa s'obté sumant a una de les seves solucions particulars y_k^p la solució general y_k^r de l'EDF lineal homogènia associada. Així doncs, serà de la forma

$$y_k = y_k^r + y_k^p.$$

La solució particular y_k^p de l'EDF lineal completa que cal determinar depèn, per la seva banda, de la funció discreta $b(k)$. Igual que amb les EDO lineals d'ordre superior a coeficients constants estudiarem el cas en què $b(k)$ és un polinomi en la variable k de la forma[7]

$$b(k) = b_m \cdot k^m + b_{m-1} \cdot k^{m-1} + ... + b_1 \cdot k + b_0.$$

Es poden presentar dos casos en funció de si la unitat és arrel o no de l'equació característica. Si no ho és, la solució particular y_k^p és un polinomi del mateix grau que $b(k)$ de la forma

$$y_k^p = \mu_m \cdot k^m + \mu_{m-1} \cdot k^{m-1} + ... + \mu_1 \cdot k + \mu_0$$

i si ho és, y_k^p és un polinomi del tipus

$$y_k^p = \left(\mu_m \cdot k^m + \mu_{m-1} \cdot k^{m-1} + ... + \mu_1 \cdot k + \mu_0\right) k^s,$$

on s és la multiplicitat de l'arrel unitat de l'equació característica. Evidentment, els coeficients μ_i s'obtindran substituint y_k^p en l'EDF lineal completa.

[7] Ja que una constant pot ser vista com un polinomi de grau zero, aquest cas inclou també el de $b(k)$ igual a constant.

Exemple 47 *Resoleu l'EDF lineal de segon ordre completa*

$$y_{k+3} + y_{k+2} - 2y_k = k.$$

Ja sabem per l'exemple anterior que la solució general de l'EDF homogènia associada és

$$y_k^r = C_1 + \left(C_2 \cdot \sin\left(\tfrac{3\pi k}{4}\right) + C_3 \cdot \cos\left(\tfrac{3\pi k}{4}\right)\right)\left(\sqrt{2}\right)^k.$$

Com que el terme independent de l'EDF lineal és el polinomi

$$b(k) = k$$

i que 1 és arrel simple de l'equació característica associada, la solució particular y_k^p serà de la forma

$$y_k^p = (\mu_1 \cdot k + \mu_0)\, k = \mu_1 \cdot k^2 + \mu_0 \cdot k.$$

Ja que aquesta funció discreta y_k^p ha de satisfer l'EDF lineal de segon ordre completa

$$y_{k+3}^p + y_{k+2}^p - 2y_k^p = k$$

i tenint en compte que

$$\begin{aligned} y_{k+3}^p &= \mu_1 (k+3)^2 + \mu_0 (k+3) = (\mu_1)\, k^2 + (6\mu_1 + \mu_0)\, k + (9\mu_1 + 3\mu_0) \\ y_{k+2}^p &= \mu_1 (k+2)^2 + \mu_0 (k+2) = (\mu_1)\, k^2 + (4\mu_1 + \mu_0)\, k + (4\mu_1 + 2\mu_0), \end{aligned}$$

deduïm que

$$k = y_{k+3}^p + y_{k+2}^p - 2y_k^p = (10\mu_1)\, k + (13\mu_1 + 5\mu_0)$$

d'on, igualant coeficient a coeficient, s'obté el sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{aligned} 10\mu_1 &= 1 \\ 13\mu_1 + 5\mu_0 &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad \text{amb solució} \quad \mu_1 = \frac{1}{10} \quad \text{i} \quad \mu_0 = -\frac{13}{50}.$$

Així doncs, la solució general de l'EDF lineal completa és, finalment,

$$y_k = y_k^r + y_k^p = C_1 + \left(C_2 \cdot \sin\left(\tfrac{3\pi k}{4}\right) + C_3 \cdot \cos\left(\tfrac{3\pi k}{4}\right)\right)\left(\sqrt{2}\right)^k + \left(\tfrac{k^2}{10} - \tfrac{13k}{50}\right).$$

Aplicació: el model de transmissió d'informació de Shannon Suposem que tenim un canal de comunicació que emet missatges amb un codi binari de símbols s_1 i s_2 que triguen t_1 i t_2 unitats temporals a ser emesos.[8] Es tracta de determinar la funció discreta N_t que ens dóna el número de missatges de durada t que podem emetre amb aquest codi.

[8] Pensem, per exemple, en el codi morse o en la transmissió de senyals digitals.

És clar que, en general, N_t és igual a la suma del número de missatges de durada t que acaben en s_1 més el número dels que ho fan en s_2. Com que el número de missatges de durada t que acaben en s_i és, precisament, el número de missatges de durada $t - t_i$ tenim que

$$N_t = N_{t-t_1} + N_{t-t_2}.$$

Si, com a hipòtesi addicional, el símbol s_2 triga el doble de temps que s_1 en ser emès, és a dir, si

$$t_2 = 2t_1$$

i si escollim t_1 com a unitat temporal de referència, és a dir,

$$t_1 = 1,$$

s'obté l'EDF lineal de segon ordre a coeficients constants reduïda

$$N_t = N_{t-1} + N_{t-2}$$

En trobarem les solucions. Com que que el seu polinomi característic

$$p_2(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1 \quad \text{té per arrels} \quad \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

la solució general serà de la forma

$$N_t = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t.$$

Com a conseqüència del fet que

$$N_0 = 0 \quad \text{i} \quad N_1 = 1,$$

ja que no hi ha missatges de durada 0 i l'únic missatge de durada 1 és s_1, s'obté el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} 0 = N_0 = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = C_1 + C_2 \\ \\ 1 = N_1 = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{cases}$$

que té per solució

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{i} \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Així doncs, la solució particular serà la successió de números reals[9] de terme general

$$N_t = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t\right).$$

[9] Anomenada *successió de Fibonacci.*

Ja que

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t = 0,$$

hom dedueix que, a la llarga, els valors d'N_t són aproximadament iguals a

$$N_t \simeq \tfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t.$$

Per exemple, el nombre de possibles missatges de durada 100 unitats temporals seria gairebé igual a

$$N_{100} \simeq \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{120} = 3.542248482 \cdot 10^{20}.$$

Resulta que la constant

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803...$$

que apareix en la solució general d'aquesta EDF és una de les constants numèriques més versàtils (la podem trobar en la programació computacional, la biologia, la física, la pintura, la demografia, l'arquitectura, etc). Apuntem, com a curiositat, dues de les expressions equivalents de Φ que criden més l'atenció

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}} = \Phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

Val a dir, finalment, que algunes EDF no lineals es poden resoldre transformant-les en lineals per mitjà d'un canvi de variable adequat. Malauradament, aquesta estratègia de resolució no és viable en la majoria dels casos i les EDF no lineals s'han d'estudiar per vies alternatives als procediments que hem vist.

Exercicis

1. Trobeu la solució general de l'EDF

$$y_k = \frac{y_{k-1}}{k + y_{k-1}}$$

aplicant el canvi de variable

$$y_k = \frac{1}{x_k}.$$

2. Resoleu l'EDF

$$y_{k+1} = y_k + a^k$$

en què a és un paràmetre real qualsevol, i estudieu el valor de $\lim_{k\to\infty} y_k$ per a tot a.

3. Estudieu l'EDF

$$y_{k+2} + 2a \cdot y_{k+1} + y_k = 1$$

pels valors del paràmetre a tals que $a^2 \leq 1$.

4. Trobeu la solució general de l'EDF

$$E^n y_k = 2 \cdot E^{n-1} y_k$$

per a tot nombre natural n.

5. Sigui N_k el nombre d'individus d'una determinada població al final de l'any k. Si la variable N_k experimenta un increment relatiu del 0.2 %,

   (a) Proveu que la població creix en progressió geomètrica de raó 1.002 i calculeu el temps que cal esperar per doblar el tamany inicial de la població. Depèn aquest temps del nombre inicial d'individus? Raoneu la resposta.

   (b) Doneu resposta a les qüestions de l'apartat anterior suposant que, a més, l'increment absolut de la població ve disminuït per un pèrdua anual constant de 10 individus.

6. Suposem que al final de l'any k la renda nacional és igual a

$$R_k = C_k + I_k + D_k$$

en què C_k és el consum intern, I_k és la inversió privada induïda i D_k és la despesa pública generada. Si en k el consum intern és la meitat de la renda nacional de l'any anterior, la inversió privada induïda és igual a $\frac{2}{3}$ de l'increment que experimentarà el consum intern al final de l'any següent i la despesa pública generada és igual a $\frac{1}{4}$ de la de l'any anterior,

   (a) Trobeu l'expressió de D_k en funció de la despesa inicial D_0.

(b) Plantegeu l'EDF que ens determina R_k en funció de D_0.

(c) Resoleu l'EDF anterior suposant que $D_0 = \frac{2}{3}$.

7. Una factoria produeix per vendre i mantenir un nivell òptim d'existències en el seu magatzem de manera que, en un període k, la producció per vendre v_k és exactament igual a la demanda del període anterior i la producció per emmagatzemar w_k és la diferència entre la demanda i la producció per vendre del període $k-1$. En aquestes condicions,

   (a) Proveu que, en tot període k,
   $$w_k = \triangle v_{k-1}.$$

   (b) Si per condicionants de la producció tenim que, en tot període k,
   $$w_k = \frac{1}{3}v_k + 1000$$
   plantegeu i resoleu l'EDF que ens permet trobar v_k en funció de v_0.

   (c) Tenint en compte el que heu fet anteriorment, determineu w_k en funció de w_0 i demostreu que, independentment dels valors de v_0 i w_0, v_k i w_k creixen contínuament.

8. Segons una de les descripcions possibles que es pot fer del model clàssic de creixement de la renda nacional de Harrod, la inversió efectuada en tot període, és a dir, l'estalvi, és proporcional a la renda anticipada del període següent amb una constant de proporcionalitat $\alpha > 0$ i la inversió desitjada pels empresaris en tot període és igual al producte d'una constant $\beta > 0$ per l'increment experimentat per la renda en aquest període. Si R_t, A_t i I_t designen, respectivament, la renda percebuda, l'estalvi total i la inversió desitjada pels empresaris en un període t,

   (a) Plantegeu l'EDF que satisfà la renda percebuda R_t si les inversions desitjades sempre s'efectuen, és a dir, quan l'estalvi és igual a la inversió desitjada.

   (b) Resoleu aquesta EDF si $\alpha = 0.1$ i $\beta = 0.2$ amb unes rendes inicials de $R_0 = 2$ i $R_1 = 3$.

   (c) Estudieu l'evolució temporal de la renda percebuda sota les hipòtesis anteriors.

9. Considerem el model macroeconòmic següent en què la renda nacional de l'any k, R_k, s'obté com a suma del consum intern C_k i de les inversions produïdes I_k,

$$R_k = C_k + I_k.$$

Com a hipòtesis significatives del model tenim que, al final de l'any k, el consum intern és proporcional a la renda nacional del mateix període llevat d'una constant, és a dir, que

$$C_k = c + m \cdot R_k, \quad \text{amb} \quad 0 < m < 1 \quad \text{i} \quad c > 0,$$

(m és la *propensió marginal* al consum) i que l'increment de la renda nacional d'un any per l'altre és proporcional a la inversió de l'any anterior, és a dir, que

$$\triangle R_k = r \cdot I_k, \quad \text{amb} \quad r > 0$$

com a *factor de creixement.* En aquest context,

(a) Plantegeu i resoleu l'EDF que ens permet trobar R_k.

(b) Estudieu l'evolució temporal de R_k i justifiqueu el fet que es tracta d'un model dinàmic de creixement continu de la renda nacional.

10. S'atribueix a Fibonacci el primer model de creixement poblacional. L'any 1220 escrivia: ≪"Imaginem que tenim una parella de conills, mascle i femella, dins un tancat on poden niar i criar. Suposem que els conills comencen a procrear als dos mesos del seu naixement, engendrant una única parella mascle-femella, i, a partir d'aquest moment, una parella més al llarg dels mesos següents i amb les mateixes característiques. Si cap d'aquestes parelles mor, quants conills tindrà el tancat al cap d'un any?≫ En aquests supòsits, si denotem per p_k el nombre de parelles presents al tancat en el mes k-èsim, per m_k el de parelles madures, per i_k el d'immadures i per n_k el de parelles nascudes en aquest mes,

(a) Trobeu les equacions que lliguen les variables poblacionals p_k, m_k, i_k i n_k entre si.

(b) Proveu que les quatre variables anteriors satisfan la mateixa EDF i resoleu-la per la variable p_k.

(c) Tenint en compte els valors inicials de p_1 i p_2, responeu a la pregunta de Fibonacci.[10]

[10] Com a curiositat, les parelles de conills ocuparien un volum superior al de l'Univers observable al cap de 10 anys!

Apèndix A

El teorema fonamental de la programació convexa

Provarem el teorema fonamental de la programació convexa per al cas d'un programa canònic convex de màxim (per a un programa de mínim raonaríem de manera anàloga). Abans, però, escriurem les condicions de Kuhn-Tucker a partir del vector gradient de la funció objectiu i de la matriu jacobiana de la funció de restricció. En efecte, si

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

és un òptim del programa canònic de màxim

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = f(x) \\ \text{sota} & g(x) \leq b \\ & x \geq 0_n \end{array}\right\}$$

que satisfà les hipòtesis del teorema de Kuhn-Tucker, existirà un vector

$$\lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 \\ \vdots \\ \lambda_m^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

de manera que

1. $\nabla f(x_0) - \lambda_0 \cdot Jg(x_0) \leq 0_n$

2. $\langle \nabla f(x_0) - \lambda_0 \cdot Jg(x_0), x_0 \rangle = 0$

3. $g(x_0) \leq b$

4. $x_0 \geq 0_n$

5. $\langle g(x_0) - b, \lambda_0 \rangle = 0$

6. $\lambda_0 \geq 0_m$

La demostració del teorema fonamental de la programació convexa depèn bàsicament d'un teorema de caracterització per a les funcions convexes i còncaves de tipus $\mathbf{C}^2$, d'un lema tècnic,[1] i de les propietats del producte escalar. El teorema de caracterització ens diu el següent.

Teorema 48 *Si la funció escalar*

$$f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

és de tipus $\mathbf{C}^2$ *sobre un conjunt* S *obert i convex tenim que*

1. f *és convexa (còncava) sobre* S *si i només si la matriu hessiana* $Hf(x)$ *és definida o semidefinida positiva (negativa) per a qualsevol punt* x *d'*S*.*

2. *Si la matriu hessiana* $Hf(x)$ *és definida positiva (negativa) per a qualsevol punt* x *de* S*, la funció* f *és estrictament convexa (còncava) sobre* S*.*

El lema tècnic que necessitem per a la prova del teorema fonamental de la programació convexa afirma el següent.

Lema 49 *Si* x_0 *és un punt que satisfà les sis condicions de Kuhn-Tucker d'un programa canònic convex de màxim, amb funció objectiu* $f(x)$ *i funció de restricció* $g(x)$ *de tipus* $\mathbf{C}^2$ *sobre un domini convex i obert, aleshores, per a tot punt factible* x *del programa, tenim que*[2]

$$\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \leq \langle \lambda_0 \cdot Jg(x_0), x - x_0 \rangle \leq 0.$$

Veurem que, amb aquests dos resultats, la prova del teorema fonamental de la programació convexa és directa a partir de la fórmula de Taylor associada a la funció objectiu.

[1] *Lema* és el nom que hom dóna a certs resultats intermedis que s'utilitzen en la prova d'altres que reben pròpiament el nom de *teoremes.*

[2] Per a un programa canònic convex de mínim les desigualtats canvien de sentit.

Teorema 50 (Programació convexa) *Tot punt que satisfà les condicions de Kuhn-Tucker associades a un programa convex de màxim, amb funció objectiu i funcions de restricció de tipus* $\mathbf{C}^2$ *sobre un domini obert i convex, és un òptim global del programa.*

Demostració. Sigui x_0 un punt que satisfà les sis condicions de Kuhn-Tucker d'un programa convex de màxim, amb funció objectiu $f(x)$ i funció de restricció g de tipus $\mathbf{C}^2$ sobre un domini obert i convex. A causa precisament a que f és de tipus $\mathbf{C}^2$ sobre un domini convex, f admet fórmula de Taylor de manera que, per a tot punt factible x, existeix un altre punt factible c tal que

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \cdot (x - x_0)^t \cdot Hf(c) \cdot (x - x_0).$$

Tenint en compte que el programa de màxim és convex, la funció objectiu f és còncava sobre el conjunt factible la qual cosa ens assegura, pel teorema de caracterització que hem enunciat més amunt, que la matriu hessiana $Hf(c)$ és definida o semidefinida negativa i, en particular, que

$$\frac{1}{2} \cdot (x - x_0)^t \cdot Hf(c) \cdot (x - x_0) \leq 0$$

i que, amb l'anterior,

$$f(x) \leq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle.$$

Per una altra banda, i atès que pel lema tècnic tenim, en particular, que

$$\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \leq 0,$$

hom dedueix, finalment, que per a tot punt factible x

$$f(x) \leq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \leq f(x_0).$$

En altres paraules, que el punt x_0 maximitza f sobre el conjunt factible associat al programa, és a dir, que x_0 és un òptim global.[3] ■

[3] Cal fer notar que les sis condicions de Kuhn-Tucker són necessàries per a demostrar el lema tècnic que hem emprat en aquesta prova.

Apèndix B

El teorema fonamental de la programació lineal

Per demostrar aquest teorema necessitem endinsar-nos una mica en l'*anàlisi convexa*. Començarem introduint els conceptes de politop i poliedre de $\mathbb{R}^n$: diem que un subconjunt P de $\mathbb{R}^n$ és un *politop* si es pot expressar com a intersecció finita no buida de *semiespais tancats* del tipus

$$S = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq a \right\}$$

o bé

$$S = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq a \right\}.$$

Si, a més, P és acotat hom diu que és un *poliedre* de $\mathbb{R}^n$. És evident que el conjunt factible associat a un programa lineal és sempre un politop. Cal destacar ara una classe especial de punts dels politops, els vèrtexs: un punt v d'un politop P de $\mathbb{R}^n$ és un *vèrtex* si no pertany a cap dels segments formats per la resta de punts de P (pot provar-se que la definició de vèrtex que acabem de donar és equivalent a la definició que hem utilitzat l'inici del segon capítol). Cal fer notar que encara que no tots els politops tenen necessàriament vèrtexs, els poliedres sí. Un altre concepte que necessitem és el de combinació lineal convexa que no és més que una generalització de la de segment entre dos punts: hom diu que el punt x de $\mathbb{R}^n$ és una *combinació lineal convexa* dels punts

$p_1, \ldots, p_k$ de $\mathbb{R}^n$ si existeixen uns escalars $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de $\mathbb{R}$ tals que

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot p_i, \quad \text{amb} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

El resultat que donem tot seguit sense demostració, i que hem de menester per provar el teorema fonamental de la programació lineal, caracteritza els poliedres a partir dels seus vèrtexs.

Teorema 51 *Tot poliedre coincideix amb el conjunt format per les combinacions lineals convexes dels seus vèrtexs.*

Demostrarem el teorema fonamental de la programació lineal per a un programa de màxim[1] acotat, és a dir, per a un programa lineal que té com a conjunt factible associat un poliedre. El cas general és més complicat i nosaltres no el veurem.

Teorema 52 (programació lineal) *Si un programa lineal de màxim té òptim finit, un dels vèrtexs del conjunt factible associat és òptim global i, a més, qualsevol punt que pertanyi al segment que tingui per extrems dos òptims globals també és un òptim global.*

Demostració. Suposarem al llarg de la prova que el conjunt factible associat és acotat, és a dir, que és un poliedre. Així doncs, i aplicant el teorema de caracterització per a poliedres enunciat més amunt, tenim que tot punt factible x del programa es pot expressar com a combinació lineal convexa dels vèrtexs $v_1, \ldots, v_k$ del conjunt factible. Per tant, existiran uns escalars $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tals que

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot v_i, \quad \text{amb} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Sigui ara v_p el vèrtex que pren el valor més gran per la funció objectiu f. Si provem que

$$f(x) \leq f(v_p)$$

haurem vist que v_p és un òptim del programa ja que x denota qualsevol punt factible. En efecte, com a conseqüència de la linealitat de f, de l'elecció particular de v_p i del fet de que els escalars $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ són positius i sumen la unitat, deduïm que

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot f(v_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot f(v_p) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) \cdot f(v_p) = 1 \cdot f(v_p) = f(v_p). \end{aligned}$$

[1] Per al cas de mínim raonaríem de manera anàloga.

En altres paraules, que el vèrtex v_p és un màxim global del programa lineal. Finalment, el teorema local-global ens assegura que qualsevol punt del segment que tingui per extrems dos màxims globals també serà un màxim global ■

Així doncs, com a conseqüència directa del teorema fonamental de la programació lineal tenim el corol·lari següent.[2]

Corol.lary 53 *Si un programa lineal té un únic òptim finit, necessàriament l'ha de de tenir en un vèrtex del conjunt factible associat.*

[2] *Corol·lari* és el nom donat a certs resultats que es desprenen immediatament d'altres més generals que reben pròpiament el nom de *teoremes*.

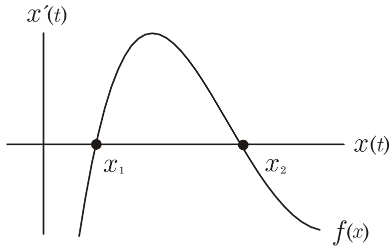
Apèndix C

Anàlisi qualitativa d'una EDO de primer ordre

Els mètodes de resolució que ens permeten trobar les solucions generals de les EDO de primer ordre més importants no funcionen si algunes de les primitives que apareixen en el procés de resolució no es poden calcular. També pot passar que no existeixi cap mètode de resolució pròpiament dit (això és precisament el que succeeix molt sovint amb les EDO no lineals). En aquests casos, i sota certes restriccions, es pot dur a terme el que s'anomena una *anàlisi qualitativa* de l'EDO. Aquesta anàlisi consisteix, bàsicament, en estudiar el comportament de les solucions d'una EDO a partir de la informació proporcionada per l'estructura de la equació mateixa. Per dur a terme l'anàlisi qualitativa d'una EDO de primer ordre necessitem introduir algunes nocions bàsiques de dinàmica de sistemes. Sigui

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$$

una EDO de primer ordre en les variables t i $x(t)$, i de la qual no es coneix la seva solució general (suposarem, per facilitar la comprensió del que segueix, que t representa la variable temporal). En concret, volem estudiar el límit temporal de les solucions particulars associades quan t creix indefinidament. Aquest estudi comença amb la representació gràfica de $f(x)$ sobre el sistema de referència donat per les variables $x(t)$ i $x'(t)$. Com a cas il·lustratiu, considerem l'esquema



Així doncs, s'anomena *diagrama de fase* de l'EDO

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$$

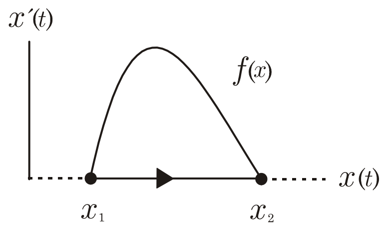
a la gràfica de $f(x)$ en el sistema de referència associat a les variables x i x'. Per un altre cantó, diem que x_0 és un *punt d'equilibri* de l'EDO si

$$f(x_0) = 0.$$

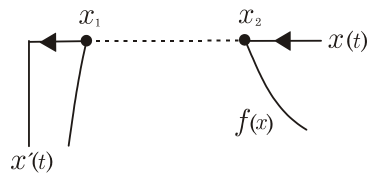
Finalment, hom diu que un punt d'equilibri x_0 de l'EDO és *estable* si

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$$

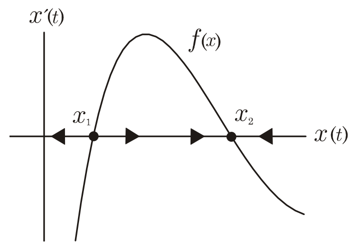
per a les solucions particulars $x(t)$ de l'EDO properes a x_0, i *inestable* en cas contrari. En el gràfic anterior, els punts x_1 i x_2 són els dos únics punts d'equilibri de l'EDO ja que s'obtenen de la intersecció de la gràfica de $f(x)$ amb l'eix d'abcisses. Un cop establert el diagrama de fase de l'EDO i coneguts els punts d'equilibri associats, el pas següent consisteix en determinar gràficament el caràcter d' aquests punts, és a dir, si són estables o inestables. En el nostre cas, i com que en el primer quadrant del diagrama de fase la derivada temporal de $x(t)$ és positiva, $x(t)$ és creixent respecte t. Conseqüentment, i a mesura que t augmenta, $x(t)$ es mourà d'esquerra a dreta per l'eix d'abcisses del diagrama de fase entre x_1 i x_2. Gràficament,



Anàlogament, i tenint en compte que en el quart quadrant del diagrama de fase la derivada temporal de $x(t)$ és negativa, $x(t)$ és decreixent respecte de t. Així doncs, a mesura que t augmenta, $x(t)$ es mou ara de dreta a esquerra per l'eix d'abcisses a l'esquerra d'x_1 i a la dreta d'x_2. Gràficament,



Finalment, i combinant ambdós gràfics, s'obté el diagrama de fase temporal



Aquest esquema ens diu que l'EDO té un punt d'equilibri inestable en x_1 i un punt d'equilibri estable en x_2. Com a aplicació econòmica de l'anterior, analitzarem el model de producció d'R. M. Solow que estudia la relació entre els inputs capital K i treball L associats a una funció de producció

$$Q = Q(K, L)$$

amb rendiments a escala constants (homogènia de grau 1), i en què K i L són variables que depenen funcionalment del temps t. Les hipòtesis econòmiques del model són, bàsicament, que la inversió es realitza en proporció constant al llarg del temps de manera que

$$\frac{dK}{dt} = s \cdot Q\,(K, L)\,, \quad \text{amb} \quad 0 < s < 1 \quad (\textit{propensió marginal a l'estalvi})$$

i que la força de treball creix exponencialment en la forma

$$L = L_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}, \quad \text{amb} \quad \lambda > 0 \quad (\textit{taxa de creixement}).$$

Solow estava interessat en les conseqüències econòmiques que puguessin desprendre's de l'evolució temporal de la variable relacional

$$x = x\,(t) = \frac{K}{L}$$

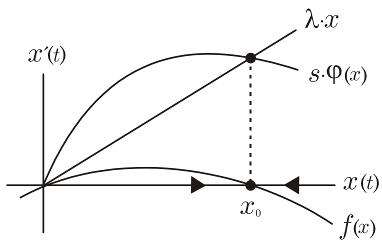
que satisfà l'EDO de primer ordre

$$\frac{dx}{dt} = s \cdot \varphi\,(x) - \lambda \cdot x, \quad \text{on} \quad \varphi\,(x) = Q\,(x, 1) \quad \text{i} \quad s, \lambda > 0.$$

El problema es troba en el fet que, en molts casos, aquesta EDO no es pot resoldre analíticament ja que la funció $\varphi\,(x)$ adopta una expressió que no permet integrar-la pels mètodes habituals. En aquesta tessitura, i com veurem tot seguit, es pot estudiar l'evolució temporal de $x(t)$ a partir de l'anàlisi qualitativa. En el cas que ens ocupa, i com que la funció $\varphi(x)$ que apareix en l'EDO del model de Solow és sempre coneguda, també ho és la funció

$$f(x) = s \cdot \varphi(x) - \lambda \cdot x.$$

És evident que l'anàlisi qualitativa dependrà del tipus de funció $\varphi(x)$. Si, per exemple, $\varphi(x)$ fos una funció contínua i derivable, creixent i còncava, el diagrama de fase de l'EDO del model de Solow podria ser de la forma



En aquest cas, el punt d'equilibri x_0 que anul·la la funció $f(x)$, és a dir, l'arrel de l'equació

$$s \cdot \varphi(x) - \lambda \cdot x = 0$$

és estable per a qualsevol solució particular de l'EDO. En altres paraules, que la relació entre el capital K i el treball L tendeix a la llarga cap el valor x_0 independentment dels valors inicials que puguin prendre aquests dos factors de producció. Com veiem, podem estudiar el comportament de les solucions particulars d'algunes EDO sense resoldre-les necessàriament.

Apèndix D

Les EDF i la teoria del caos

Com a exemple d'EDF no lineal que no es pot resoldre analíticament, estudiarem la *corba logística*. Aquesta EDF va ser introduïda pel biòleg R. May (1976)[1] amb l'objecte d'esbrinar la dinàmica evolutiva de certes poblacions d'insectes en ecosistemes tancats. Si la variable discreta p_n representa el número d'individus d'una d'aquestes poblacions al final de l'any n i la constant positiva L denota la el límit poblacional màxim, May conjecturà que

$$p_{n+1} = k \cdot p_n \cdot (L - p_n)\,, \quad \text{amb} \quad k > 0 \quad \text{com a paràmetre.}$$

Fent

$$x_n = \frac{p\,(n)}{L} \quad \text{i} \quad \mu = k \cdot L,$$

s'obté finalment l'EDF no lineal de primer ordre

$$x_{n+1} = F_\mu\,(x_n) = \mu \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$$

anomenada corba logística, que depèn del paràmetre μ i en què la variable discreta x_n denota tants per cent poblacionals.[2] Doncs bé, resulta que aquesta EDF no té solució general per a cap valor de μ. Per tant, si el que es vol és estudiar l'evolució temporal de la població en funció del

[1] Sembla ser que un altre científic interessat en la matemàtica del creixement demogràfic, P. F. Verhulst, ja la va considerar el 1845!

[2] Per exempel, si x_5 fos igual a 0.7 això voldria dir que la població d'insectes està al 70% de la capacitat màxima que l'ecosistema pot suportar al final del cinquè any.

paràmetre μ, caldrà abordar el problema des d'una altra perspectiva. Per començar, són necessàries unes quantes nocions de caràcter general. El punt de partida és una EDF de primer ordre del tipus

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

en què $f(x)$ és una funció real de variable real de la forma

$$f : A \longrightarrow A, \quad \text{amb} \quad A \subseteq \mathbb{R}.$$

Aquestes EDF s'anomenen *sistemes dinàmics discrets unidimensionals* (*SDU*, per abreujar) i la funció $f(x)$ és la *llei d'evolució* del SDU. La corba logística n'és un exemple; en aquest cas, la llei d'evolució és la paràbola

$$F_\mu(x) = \mu x(1-x) = (-\mu)x^2 + \mu x, \quad \text{amb} \quad A = [0,1].$$

El fet de que $F_\mu(x)$ prengui valors entre 0 i 1 condiciona els del paràmetre μ. En el nostre cas,

$$0 \leq \mu \leq 4.$$

Donat un SDU i un punt x_0 de A, definim l'*òrbita* d'x_0 com el conjunt format per les seves imatges successives per f,

$$\begin{aligned} O^+(x_0) &= \left\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^n(x_0), \ldots\right\} = \\ &= \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}. \end{aligned}$$

Per exemple, respecte de la corba logística, l'òrbita del punt

$$x_0 = 0.3, \quad \text{per a} \quad \mu = 2,$$

seria

n	$O^+(0.3)$
0	0.3
1	0.42
2	0.4872
3	0.49967232
4	0.4999997853
5	0.5
6	0.5
$\vdots$	$\vdots$

.

Per una altra banda, i donada una funció real de variable real del tipus

$$f : A \longrightarrow A, \quad \text{amb} \quad A \subseteq \mathbb{R},$$

diem que un punt p de A és un *punt fix* de f si

$$f(p) = p$$

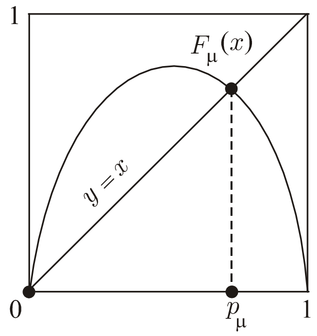
Per exemple, els punts fixos de la corba logística s'obtenen plantejant l'equació de segon grau

$$x = F_\mu(x) = (-\mu)\,x^2 + \mu x$$

que depèn del paràmetre μ. Aquesta equació té per solucions

$$p_0 = 0, \quad \text{per a tot} \quad 0 \le \mu \le 4, \quad \text{i} \quad p_\mu = \frac{\mu - 1}{\mu}, \quad \text{per a tot} \quad 1 \le \mu \le 4.$$

Gràficament,



Notem, per exemple, que el punt 0.5 és un punt fix de F_2 ja que

$$p_2 = \frac{2-1}{2} = 0.5.$$

En canvi, l'únic punt fix de $F_{0.8}$ seria l'origen de coordenades ja que

$$\mu = 0.8 < 1.$$

Així mateix, i per a tot nombre natural m, diem que p és un punt *m-periòdic* de

$$f : A \longrightarrow A, \quad \text{amb} \quad A \subseteq \mathbb{R},$$

si

$$f^m(p) = p \quad \text{i} \quad f^k(p) \neq p, \quad \text{per a tot} \quad k < m.$$

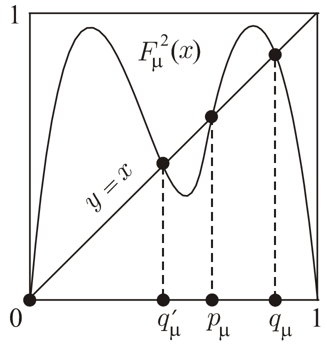
La determinació dels punts m-periòdics és més complicada que la dels punts fixos. De fet, per trobar els punts 2-periòdics, cal resoldre l'equació

$$x = F_\mu^2(x) = F_\mu(F_\mu(x)) = \mu^2 x\,(1-x)\left(1 - \mu x + \mu x^2\right)$$

que té per solucions

$$p_0 = 0, \quad p_\mu = \frac{\mu - 1}{\mu} \quad \text{i} \quad q_\mu, q'_\mu = \frac{(\mu+1) \pm \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu}.$$

Gràficament,



Com que que 0 i p_μ són punts fixos, q_μ i q'_μ són els dos únics punts 2-periòdics per a valors de μ superiors a 3.[3] Això vol dir que, en particular, la funció F_2 no té punts 2-periòdics. El càlcul dels punts 3-periòdics, 4-periòdics, etc., és encara més laboriós. Finalment, s'anomena *atractor* d'un SDU al conjunt format pels punts fixos o m-periòdics de la seva llei d'evolució cap a on tendeixen les òrbites associades. Els elements d'un atractor són els *punts atractors.* La noció d'atractor serà clau en el nostre estudi. Amb aquests conceptes es poden determinar, amb cert detall, els atractors de la corba logística en funció del paràmetre poblacional μ. D'entrada es pot demostrar que si

$$(a) \quad 0 \leq \mu \leq 1$$

aleshores el punt fix

$$p_0 = 0$$

és l'únic punt atractor de la corba logística. Així doncs, la població tendeix cap a l'extinció per a aquests valors de μ. En canvi, si

$$(b) \quad 1 < \mu \leq 3$$

llavors el punt fix

$$p_\mu = \frac{\mu - 1}{\mu}$$

és l'únic punt atractor de la corba logística. Notem que el tant per cent poblacional tendeix ara a estabilitzar-se al voltant del valor p_μ. Per exemple, el punt atractor de la corba logística per a

$$\mu = 2 \quad \text{és} \quad p_2 = 0.5.$$

Això vol dir que, independentment de la grandària inicial, la població d'insectes de l'ecosistema arribarà amb el pas del temps al 50 % de la seva capacitat màxima. Per a valors de μ més grans, el problema es més

[3]Fixem-nos que el paràmetre μ ha de ser més gran que 3 si volem que q_μ i q'_μ siguin nombres reals.

delicat. Vegem-ne uns quants casos. Pot demostrar-se, per exemple, que per a

$$(c) \quad \mu = 3.2$$

l'atractor està format pels 2 punts 2-periòdics

$$q_{3.2} = 0.7994555 \quad \text{i} \quad q'_{3.2} = 0.5130445.$$

En aquest cas, el tant per cent poblacional oscil·la a la llarga entre aquests dos valors. Per exemple, l'òrbita del punt 0.1 seria

n	$O^+(0.1)$
0	0.1
1	0.288
2	0.656179
$\vdots$	$\vdots$
31	0.5130445
32	0.7994555
33	0.5130445
34	0.7994555
$\vdots$	$\vdots$

En altres paraules, si la població inicial està a un 10 % de la seva capacitat màxima, a la llarga ocuparà un 80 % de l'ecosistema en anys parells i baixarà a un 51.3 % en anys imparells. En canvi, per a

$$(d) \quad \mu = 3.5$$

l'atractor està format per 2^2 punts 2^2-periòdics i per a

$$(e) \quad \mu = 3.56$$

per 2^3 punts 2^3-periòdics. A partir d'aquest valor de μ, el nombre de punts periòdics del atractor, així com el seu període, es duplica progressivament fins arribar al valor límit[4]

$$\mu_\infty = 3.56992456...$$

en què el nombre de punts periòdics de l'atractor és infinit. Aquest comportament que acabem de descriure (i que rep el nom de *duplicació del període*) obliga que el tant per cent poblacional, a mesura que μ creix, oscil·li de manera progressiva entre un nombre cada vegada més gran de punts atractors i fa que el seu valor sigui, en la pràctica, impredictible. Per a valors de μ superiors a μ_∞, la complexitat de l'atractor pot augmentar encara més fins arribar al valor límit

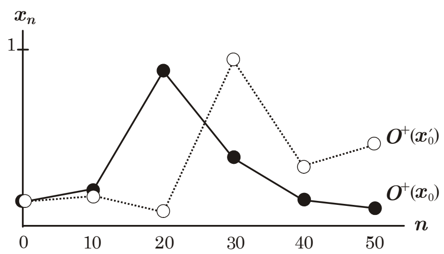
$$(f) \quad \mu = 4$$

[4] És l'anomenada *constant de Feigenbaum.*

en què l'atractor pren el seu màxim grau de complexitat (hi trobem punts atractors de qualsevol periodicitat i, per tant, el tant per cent poblacional pot prendre una infinitat de valors en el decurs de la seva evolució). En aquest cas hom diu que la corba logística és un SDU *caòtic* i que el seu atractor és un *atractor caòtic*. Una de les propietats més importants d' aquests SDU és l'anomenada *sensibilitat a les condicions inicials* (que també es coneix amb el nom d'*efecte papallona)*. Aquesta propietat ens assegura que les òrbites de punts tant propers com es vulgui es diferencien progressivament a mesura que el nombre de períodes n augmenta. Per exemple, les òrbites dels punts

$$x_0 = 0.1 \quad \text{i} \quad x_0' = 0.10001$$

són totalment diferents a partir del desè any. Gràficament,



En aquest cas és del tot impossible predir el que farà la població d'insectes a la llarga. Ens trobem enfront d'una situació certament paradoxal: coneixem la llei d'evolució poblacional, la corba logística, però en la pràctica no podem utilitzar-la per determinar el tant per cent poblacional a partir d'un cert nombre d'anys. Com a aplicació econòmica[5] de l'anterior, considererem l'SDU

$$p_{t+1} = p_t^\alpha \cdot e^{\beta(p_E - p_t)}, \quad \text{amb} \quad \alpha \geq 1 \quad \text{i} \quad \beta \geq 0,$$

que relaciona el preu de mercat p_t d'una acció en el període t amb el del període següent, i en què p_E és el seu preu d'equilibri (el preu p_t vol reflexar les tensions entre operadors *chartistes* i *fonamentalistes*). Resulta que aquest SDU pot ser caòtic per a certs valors dels paràmetres α, β i p_E. En efecte, si fixem els valors

$$\beta = 1 \quad \text{i} \quad p_E = 2$$

es pot provar que, a mesura que α creix, apareix el fenomen de la duplicació del període. La taula següent ens mostra el nombre de punts

[5] Veure A. Fernández Díaz. *Caos y mercados de capitales: una introducción.* Madrid: CEURA, 1994.

atractors en funció d'alguns valors del paràmetre α,

α	Punts atractors
1.25	1 punt fix
2	2 punts 2-periòdics
2.4	2^2 punts 2^2-periòdics
2.48	2^3 punts 2^3-periòdics
$\vdots$	$\vdots$
2.8	∞ punts periòdics

Com veiem, per a

$$\alpha = 2.8,$$

l'SDU és caòtic. Caldria fer, finalment, dos comentaris importants relacionats amb els SDU caòtics: primer, que la raó del comportament tan erràtic que mostren les òrbites té a veure més aviat amb la no linealitat de la llei d'evolució que no pas amb la presència d'un gran nombre de variables (de fet, els SDU només hi tenen una); i segon, que la duplicació del període en un SDU ens diu que pot evolucionar cap al caos (n'hi han molts exemples interessants en aquest sentit associats a fenòmens reals). Val a dir que la teoria del caos que, entre d'altres, estudia les EDF no lineals des de la perspectiva dels atractors està tenint un gran impacte en l'àmbit de la ciència econòmica i empresarial.

Bibliografia

[1] Alegre, P. et al. *Ejercicios resueltos de Matemáticas empresariales II.* Madrid: AC, 1991.

[2] Balbas, A.; Gil, J. L. *Programación matemática.* Madrid: AC, 1987.

[3] Borrell, J. *Métodos matemáticos para la economía II.* Madrid: Pirámide, 1989.

[4] Demidovich, B. et al. *Problemas y ejercicios de análisis matemático.* Madrid: Paraninfo, 1976.

[5] Dowling, E. T. *Matemáticas para economistas.* México: McGraw-Hill, 1980.

[6] Goldberg, S. *Introducción a las ecuaciones en diferencias finitas.* Barcelona: Marcombo, 1964.

[7] Heras, A. et al. *Programación matemática y modelos económicos: un enfoque teórico-práctico.* Madrid: AC, 1990.

[8] Lancaster, K. *Economía matemática.* Barcelona: Bosch, 1972.

[9] Martín, M. A. et al. *Iniciación al Caos.* Madrid: Síntesis, 1995.

[10] Nikaido, H. *Métodos matemáticos del análisis económico moderno.* Barcelona: Vicens Vives Universidad, 1978.

[11] Vegas, A.; López, M. *Elementos de matemáticas para economistas.* Madrid: Pirámide, 1989.

Índex analític