

VŠB - Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra aplikované mechaniky



Diplomová práce

Analýza ocelové nádrže pro uskladnění vody

Analysis of Steel Tank for Water Storage

Student: Bc. Tomáš Kmínek

Vedoucí práce: Ing. Pavel Maršálek, Ph.D.

Ostrava 2018

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta strojní
Katedra aplikované mechaniky

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Tomáš Kmínek**
Studijní program: N2301 Strojní inženýrství
Studijní obor: 3901T003 Aplikovaná mechanika
Téma: **Analýza ocelové nádrže pro uskladnění vody**
Analysis of Steel Tank for Water Storage

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

1. Rešerše problematiky
2. Studium metody řešení
3. Návrh algoritmu
4. Pevnostní kontrola
5. Zhodnocení a závěr

Seznam doporučené odborné literatury:


- [1] Bathe, K. J.: Finite Element Procedures; Prentice Hall, USA, 2006; ISBN: 978-0979004902.
- [2] Bhatti, M. A.: Fundamental Finite Element Analysis and Applications: with Mathematica and MATLAB Computations; John Wiley, New York, 2006; ISBN 0-471-64808-6.
- [3] Bhatti, M.A.: Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures: with Mathematica and MATLAB Computations; John Wiley, New York, 2005; ISBN 0-471-64807-9.
- [4] Przemieniecki, J. S.: Theory of Matrix Structural Analysis; Dover Civil and Mech. 1985; ISBN: 9780486649481.
- [5] Wriggers, P.: Nonlinear Finite Element Methods; Prentice Hall; USA, 2008; ISBN: 978-3-540-71001.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

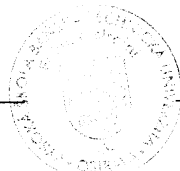
Vedoucí diplomové práce: **Ing. Pavel Maršálek**

Datum zadání: 08.12.2017

Datum odevzdání: 21.05.2018



Ing. Martin Fusek, Ph.D.
vedoucí katedry



doc. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.
děkan fakulty

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu práce Ing. Pavlu Maršálkovi, Ph.D. za odborné vedení, věnovaný čas a cenné rady. Dále bych chtěl poděkovat Ing. Zdenku Porubovi, Ph.D. a prof. Ing. Petru Horylovi, CSc., dr.h.c. za cenné rady při zpracování práce. Poděkování také patří mé rodině a přátelům za trpělivost a podporu.

Tato práce byla částečně podpořena grantem v rámci studentské grantové soutěže s čísly SP2017/156 - Masivně paralelní modelování silně nelineárních procesů v mechanice a SP2018 - Využití metod topologické optimalizace v inženýrské praxi, VŠB - Technická univerzita Ostrava, Česká Republika.

Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě

.....
podpis studenta

Prohlašuji, že

- jsem seznámen s tím, že na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č.121/2000 Sb. - autorský zákon, zejména § 35 – využití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a využití díla školního a § 60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně, ke své vnitřní potřebě, diplomovou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že jeden výtisk diplomové práce bude uložen v Ústřední knihovně VŠB-TUO k prezenčnímu nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že údaje o diplomové práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – diplomovou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).

V Ostravě

.....
podpis studenta

Jméno a příjmení autora práce: Tomáš Kmínek

Adresa trvalého pobytu autora práce: Zelená 328, Frýdek-Místek

Anotace

KMÍNEK, T. *Analýza ocelové nádrže pro uskladnění vody: diplomová práce*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra aplikované mechaniky, 2018, 65 stran. Vedoucí práce: Maršálek, P.

Diplomová práce se zabývá pevnostní analýzou ocelové nádrže pro uskladnění vody. Cílem práce je tvorba několika procedur tvořících výpočetní algoritmus pro rychlé a korektní pevnostní posouzení konstrukce nádrže. První část práce se zabývá rozбором zatížení nádrží. Druhá část se věnuje matematickému popisu rámu nádrže, kde je využito metody konečných prvků, konkrétně skořepinových prvků. Ve třetí části je proveden rozbor a návrh výpočetního algoritmu. Podrobně jsou popsány procedury sloužící k vytvoření konečnoprvkové sítě a zatížení rámu nádoby. Čtvrtá část je věnována aplikaci výpočetního algoritmu na konkrétní technické řešení skutečné nádrže na vodu typu EQ2a, vyrobené společností Vítkovice Machinery Group. V závěru práce je provedena pevnostní kontrola a porovnání výsledků s komerčním softwarem ANSYS Workbench 18.0.

Anotation

KMÍNEK, T. *Analysis of Steel Tank for Water Storage: Master Thesis*. Ostrava: VŠB - Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Applied Mechanics, 2018, 65 pages. Head of Thesis: Maršálek, P.

This thesis deals with Analysis of Steel Tank for Water Storage. The main object of this thesis is making a few procedures which create computational algorithm for quick and correct strength verification of Water Storage construction. First part is focused on analysis of Water Storage loads. Second part describes mathematic formulation of this Water Storage where is used FEM method especially shell elements. Third part is focused on analysis and suggestion of computational algorithm. All procedures that create FEM mesh and construction loads are described in detail. Fourth part is focused on application of computational algorithm especially technical solution of Water Storage type EQ2a which was made by Vítkovice Machinery Group. In the last part of the thesis it is described strength verification and own algorithm is compared to commercial software ANSYS Workbench 18.0.

Obsah

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Rešerše problematiky zatížení nádrže | 3 |
| 1.1 | Zatížení větrem | 3 |
| 1.2 | Zatížení hydrostatickým tlakem | 6 |
| 1.3 | Zatížení vlastní tíhou | 6 |
| 2 | Studium metody řešení | 7 |
| 2.1 | Matice tuhosti úlohy rovinné napjatosti | 10 |
| 2.2 | Desková tuhost | 16 |
| 2.3 | Skořepinová tuhost | 23 |
| 3 | Návrh algoritmu | 31 |
| 3.1 | Tvorba konečnoprvkové sítě a okrajových podmínek | 33 |
| 3.2 | Zatížení hydrostatickým tlakem | 35 |
| 3.3 | Zatížení větrem | 36 |
| 3.4 | Zatížení vlastní tíhou | 38 |
| 4 | Pevnostní kontrola | 41 |
| 4.1 | Schéma úlohy | 41 |
| 4.2 | Konečnoprvková síť | 42 |
| 4.3 | Okrajové podmínky | 43 |
| 4.4 | Materiálová data | 43 |
| 4.5 | Analýza výsledků | 44 |
| 4.5.1 | Vliv zatížení hydrostatickým tlakem | 44 |
| 4.5.2 | Vliv zatížení vlastní tíhy | 46 |
| 4.5.3 | Vliv zatížení větrem | 47 |
| 4.5.4 | Vliv kombinace zatížení | 49 |
| 4.5.5 | Zhodnocení bezpečnosti | 51 |
| 5 | Zhodnocení a závěr | 53 |
| 5.1 | Porovnání výsledků | 53 |
| 5.2 | Další vývoj | 54 |

Seznam použitých zkratek

| Značka | Popis veličiny | Jednotka |
|----------------------------------|--|-------------------|
| \mathbf{B} | Geometrická matice úlohy rovinné napjatosti | [-] |
| \mathbf{B}_b^T | Geometrická matice pro ohybové namáhání | [-] |
| \mathbf{B}_s^T | Geometrická matice pro namáhání smykem | [-] |
| \mathbf{C} | Matice materiálových konstant | [var.] |
| C_0 | Součinitel orografie | [-] |
| c_{fl} | Pomocný součinitel fluktuační složky tlaku | [-] |
| c_e | Součinitel expozice | [-] |
| c_{pe} | Součinitel vnějšího tlaku | [-] |
| $c_{p,0}$ | Součinitel vnějšího tlaku bez vlivu proudění kolem volných konců | [-] |
| D | Průměr nádrže | [m] |
| D | Koeficient deskové tuhosti | [$\frac{N}{m}$] |
| E | Modul pružnosti v tahu | [Pa] |
| Err | Relativní odchylka | [-] |
| F | Síla | [N] |
| $f_{p1}, f_{p2}, f_{p3}, f_{p4}$ | Uzlové síly od hydrostatického tlaku | [N] |
| \mathbf{f}_l | Lokální vektor zatížení v lokálním souřadném systému | [-] |
| G | Modul pružnosti ve smyku | [Pa] |
| \mathbf{G} | Matice derivací tvarových funkcí | [-] |
| G_{el} | Tíhová síla elementu | [N] |
| g | Tíhové zrychlení | [ms^{-2}] |

| Značka | Popis veličiny | Jednotka |
|----------------------|--|---------------------|
| H | Transformační matice | [-] |
| h_1, h_2, h_3, h_4 | Vzdálenosti uzlů od vodní hladiny | [m] |
| h_1 | Tloušťka plechů 1. vrstvy | [m] |
| h_2 | Tloušťka plechů 2. vrstvy | [m] |
| h_3 | Tloušťka plechů 3. vrstvy | [m] |
| I_v | Intenzita turbulence větru | [-] |
| i_1 | První invariant | [Pa] |
| i_2 | Druhý invariant | [Pa ²] |
| J | Jakobián transformace | [-] |
| k_{bez} | Koeficient bezpečnosti | [-] |
| K_c | Skořepinová matice tuhosti | [var.] |
| K_d | Matice deskové tuhosti | [var.] |
| K_k | Matice tuhosti v krutu | [var.] |
| K_l | Matice tuhosti v lokálním souřadném systému | [var.] |
| K_p | Matice tuhosti úlohy rovinné napjatosti | [var.] |
| m | Počet uzlů | [-] |
| N | Matice tvarových funkcí | [-] |
| Napětí_pozice | Pozice vyhodnocovaného napětí na skořepině | [-] |
| n | Počet elementů | [-] |
| počet_el_d | Počet elementů na spodní hraně | [-] |
| počet_el_h1 | Počet elementů 1. vrstvy plechů na boční hraně | [-] |
| počet_el_h2 | Počet elementů 2. vrstvy plechů na boční hraně | [-] |
| počet_el_h3 | Počet elementů 3. vrstvy plechů na boční hraně | [-] |
| q | Spojité zatížení | [$\frac{N}{m}$] |
| q_b | Základní dynamický tlak větru | [Pa] |

| Značka | Popis veličiny | Jednotka |
|----------------------------|--|----------------------|
| q_p | Maximální dynamický tlak větru | [Pa] |
| Re | Reynoldsovo číslo | [-] |
| R_e | Mez kluzu | [Pa] |
| R_m | Mez pevnosti | [Pa] |
| S | Obsah plochy elementu | [m ²] |
| s | 1. osa rodičovského souřadného systému | [-] |
| t | 2. osa rodičovského souřadného systému | [-] |
| \mathbf{u} | Pole posunutí | [-] |
| u | Posunutí ve směru osy x | [m] |
| V_h | Výška hladiny ode dna nádoby | [m] |
| V_1 | Výška plechů 1. vrstvy | [m] |
| V_2 | Výška plechů 2. vrstvy | [m] |
| V_3 | Výška plechů 3. vrstvy | [m] |
| v_b | Základní rychlost média | [ms ⁻¹] |
| v | Posunutí ve směru osy y | [m] |
| w | Posunutí ve směru osy z | [m] |
| w_e | Tlak větru na vnější stranu válcové nádoby | [MPa] |
| w_i | Váha v integračních bodech ve směru lokální souřadné osy s | [-] |
| w_j | Váha v integračních bodech ve směru lokální souřadné osy t | [-] |
| z_0 | Charakteristika použité kategorie terénu | [m] |
| $\boldsymbol{\alpha}$ | Vektor uzlových posunutí | [-] |
| α_k | Koeficient krutové složky | [-] |
| $\boldsymbol{\alpha}_l$ | Vektor uzlových posunutí v lokálním souřadném systému | [-] |
| $\boldsymbol{\varepsilon}$ | Vektor deformací | [-] |
| λ | Efektivní štíhlost | [-] |

| Značka | Popis veličiny | Jednotka |
|------------------------|---|-----------------------|
| μ | Poissonovo číslo | [-] |
| ρ_m | Hustota materiálu | [kgm^{-3}] |
| σ | Vektor napětí | [Pa] |
| σ_{HMH} | Redukované napětí podle HMH hypotézy | [Pa] |
| σ_{max} | Maximální napětí podle hypotézy HMH | [Pa] |
| σ_{okt} | Normálové napětí na oktaedrické rovině | [Pa] |
| τ_{okt} | Smykové napětí na oktaedrické rovině | [Pa] |
| φ | Součinitel plnosti | [-] |
| φ_x | Natočení okolo osy x | [rad] |
| φ_y | Natočení okolo osy y | [rad] |
| φ_z | Natočení okolo osy z | [rad] |
| ψ_λ | Součinitel koncového efektu | [-] |
| $\psi_{\lambda\alpha}$ | Součinitel koncového efektu pro úhel α | [-] |
| ρ | Hustota kapaliny | [kgm^{-3}] |

Úvod

Pro uskladnění kapalných nebo sypkých hmot vyrábí společnost Vítkovice Machinery Group již od roku 1966 ocelové nádrže, které jsou sestaveny z tenkých plechů (Obr. 1). Jednotlivé plechy jsou spojeny pomocí šroubových spojů a utěsněny tmelem. Aby byla zvýšena antikorozní ochrana nádrže, jsou plechy smaltovány. Dno nádrže může být tvořeno železobetonovou deskou, ocelovou konstrukcí nebo stejně jako plášť ze smaltovaných plechů. Tyto nádrže lze rozdělit do dvou hlavních skupin a to na nádrže se střechou a bez střechy. Tato diplomová práce se zabývá nádržemi bez střechy s pevným železobetonovým dnem.



Obr. 1: Smaltovaná nádrž

Všeobecně platí, že každý výrobce se snaží vyrábět své produkty s co nejnižšími náklady, ale samozřejmě tak, aby splňoval všechny zákaznické požadavky. To znamená variabilita vstupních dat (průměr nádrže, výšky jednotlivých vrstev plechů a jejich tloušťky), rychlé a přehledné pevnostní vyhodnocení, využití volně dostupných skriptovacích a grafických programů. Ve výpočetním algoritmu budou zahrnuty zatížení od hydrostatického tlaku, vlastní tíhy a tlaku větru. Protože tento typ nádrží na vodu je bez střechy, není nutné uvažovat se zatížením od sněhu.

Předpoklady řešení:

- Spodní uložení nádrže je definováno jako ideální vetknutí.

- Nebude docházet k velkým posunutím ani deformacím.
- Je uvažován izotropní elastický materiál.
- Jedná se o statické zatěžování konstrukce nádrže.
- V modelu nejsou uvažovány šroubové spoje jednotlivých plechů.

Z výše uvedených předpokladů řešení smaltované nádrže je definován hlavní cíl, který bude realizován pomocí několika dílčích cílů.

Hlavní cíl:

- Vytvořit výpočetní algoritmus pro rychlé pevnostní posouzení navrhované nádrže pro uskladnění vody.

Dílčí cíle:

- Vytvořit proceduru pro sestavení matice tuhosti vybraného elementu.
- Vytvoření procedury pro načtení sítě a okrajových podmínek z programu LS-PrePost-4.3 pro testovací úlohy.
- Vytvoření procedury pro generaci sítě s volitelnými parametry pro geometrii nádrže.
- Vytvoření procedury pro aplikaci zatížení působící na nádrž (hydrostatický tlak, tlak od větru a vlastní tíha).
- Vytvoření procedury pro zápis výsledků exportovaných do programu ParaView 4.3.1 ke grafické vizualizaci.

Kapitola 1

Rešerše problematiky zatížení nádrže

V této kapitole bude proveden rozbor, který se bude zabývat zatížením větrem, hydrostatickým tlakem a vlastní tíhou.

1.1 Zatížení větrem

K přibližnému popsání silových účinků působení větru na ocelovou nádrž se využívá norma ČSN EN 1991 – 1 – 4. Zabývá se nejenom velikostí výsledného zátěžného tlaku, ale i jeho rozložením na dané stěny nádrže.

Určení velikosti tlaku

Základní rychlost větru lze určit podle Tab. 1.1 (Lit. [8]). Hodnota základní rychlosti větru může být rovněž určena měřením.

| Oblast | I | II | III | IV | V |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| v_b | 22.50 | 25.00 | 27.50 | 30.00 | 36.00 |

Tab. 1.1: Hodnoty základních hodnot rychlosti větru v_b [ms^{-1}]

Ze základní rychlosti větru je dále potřeba určit střední rychlost větru

$$V_m = v_b C_o C_r, \quad (1.1)$$

kde $C_o = 1$ je součinitel orografie, který závisí na sklonu terénu. Součinitel drsnosti terénu C_r lze vypočítat ze vztahu

$$C_r = k_r \ln \left(\frac{z_e}{z_0} \right), \quad (1.2)$$

kde z_e je referenční výška, z_0 lze určit podle Tab. 1.2 a součinitel terénu k_r lze vypočítat ze vztahu

$$k_r = 0.19 \left(\frac{z_0}{0.05} \right)^{-0.07}. \quad (1.3)$$

| Oblast | Popis | z_0 [m] |
|--------|---|-----------|
| 0 | Moře nebo pobřežní oblasti vystavené otevřenému moři. | 0.003 |
| I | Jezera nebo vodorovné oblasti se zanedbatelnou vegetací a bez překážek. | 0.010 |
| II | Oblasti s nízkou vegetací jako je tráva a s izolovanými překážkami (stromy, budovy), jejichž vzdálenost je větší než 20násobek výšky překážek. | 0.050 |
| III | Oblasti rovnoměrně pokryté vegetací nebo budovami nebo s izolovanými překážkami, jejichž vzdálenost je maximálně 20násobek výšky překážek (jako jsou vesnice, předměstský terén, souvislý les). | 0.300 |
| IV | Oblasti, ve kterých je nejméně 15% povrchu pokryto pozemními stavbami, jejichž průměrná výška je větší než 15m. | 1.000 |

Tab. 1.2: Kategorie terénů a jejich parametry

Pro určení intenzity turbulence větru I_v je nejprve nutné určit součinitel flukтуаční složky tlaku c_{fl} z Tab. 1.3 podle kategorií terénu. Potom lze intenzitu vypočítat ze vztahu

$$I_v = \frac{c_{fl}}{7 C_r C_0}. \quad (1.4)$$

| Oblast | I | II | III | IV |
|----------|-------|-------|-------|-------|
| c_{fl} | 1.188 | 1.330 | 1.508 | 1.640 |

Tab. 1.3: Pomocný součinitel flukтуаční složky tlaku c_{fl}

Základní dynamický tlak větru q_b v $[\text{Nm}^{-2}]$ lze určit pomoci vztahu

$$q_b = \frac{1}{2} \rho v_b^2, \quad (1.5)$$

kde $\rho = 1.25 \text{ kgm}^{-3}$ je měrná hmotnost vzduchu. Maximální dynamický tlak lze určit ze základního pomocí vztahu

$$q_p = q_b c_e, \quad (1.6)$$

kde c_e je součinitel expozice a podle Eurokódu je definován vztahem

$$c_e = c_0^2 c_r^2 (1 + 7 I_v). \quad (1.7)$$

Profil zatížení tlaku na válcovou nádrž

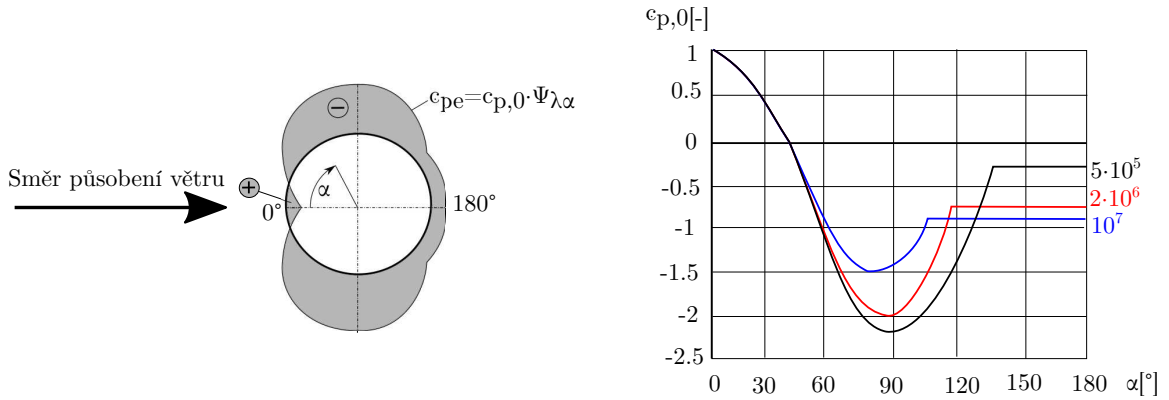
Pro určení tlaku větru na vnější stranu válcové nádrže w_e se využívá vztahu

$$w_e = q_p c_{pe}, \quad (1.8)$$

kde c_{pe} je součinitel vnějšího tlaku. Pro tento součinitel platí

$$c_{pe} = c_{p,0} \psi_{\lambda\alpha}, \quad (1.9)$$

kde $c_{p,0}$ je součinitel vnějšího tlaku bez vlivu proudění kolem volných konců a jeho rozložení je vidět na Obr. 1.1. Konkrétní určující hodnoty pro dané křivky jsou uvedeny v Tab. 1.4 pro různé hodnoty Reynoldsova čísla R_e .



Obr. 1.1: Rozložení $c_{p,0}$ po stěně válcové nádrže

| R_e | α_{min} | $c_{p,0,min}$ | α_A | $c_{p,0,h}$ |
|----------------|----------------|---------------|------------|-------------|
| $5 \cdot 10^5$ | 85 | -2.2 | 135 | -0.4 |
| $2 \cdot 10^6$ | 80 | -1.9 | 120 | -0.7 |
| 10^7 | 75 | -1.5 | 105 | -0.8 |

Tab. 1.4: Konkrétní hodnoty pro různé hodnoty R_e

$\psi_{\lambda\alpha}$ je součinitel koncového efektu pro úhel α a jeho velikost se mění v závislosti na velikosti úhlu α podle následujících vztahů

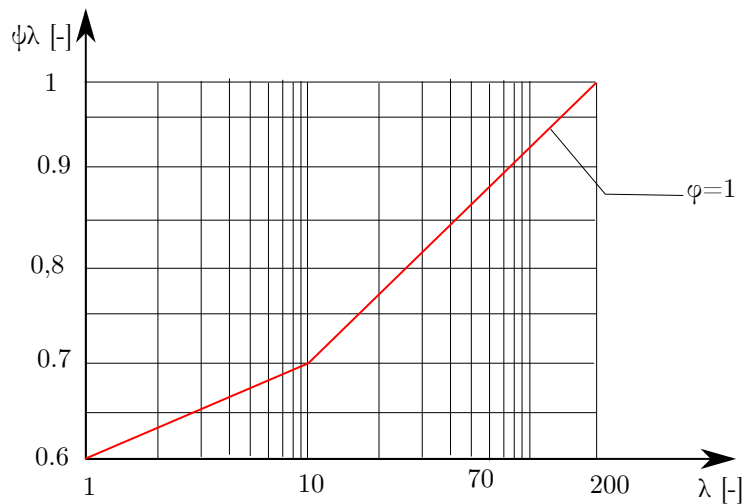
$$\psi_{\lambda\alpha} = 1 \quad \text{pro } 0^\circ \leq \alpha \leq \alpha_{min}, \quad (1.10)$$

$$\psi_{\lambda\alpha} = \psi_\lambda + (1 - \psi_\lambda) \cos\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{\alpha - \alpha_{min}}{\alpha_A - \alpha_{min}}\right)\right) \quad \text{pro } \alpha_{min} < \alpha < \alpha_A, \quad (1.11)$$

$$\psi_{\lambda\alpha} = \psi_\lambda \quad \text{pro } \alpha_A \leq \alpha \leq 180^\circ. \quad (1.12)$$

ψ_λ je součinitel koncového efektu a je závislý na efektivní štíhlosti λ a součiniteli plnosti φ Obr. 1.2. Efektivní štíhlost pro válcové nádrže do výšky 15 m se určí jako menší hodnota z

hodnot $\lambda = \frac{d}{h}$ nebo $\lambda = 70$, kde h je výška nádrže a d je průměr nádrže. Součinitel plnosti pro plné tvary je $\varphi = 1$.



Obr. 1.2: Závislost koncového efektu na efektivní štíhlosti

1.2 Zatížení hydrostatickým tlakem

Toto zatížení působí vždy kolmo na vnitřní stranu nádrže a je ovlivněno výškou hladiny vody ode dna nádrže. Vztah pro výpočet hydrostatického tlaku

$$p_{hyd} = \rho g V_h, \quad (1.13)$$

kde ρ je hustota kapaliny, g je tíhové zrychlení a V_h je výška hladiny ode dna nádrže.

1.3 Zatížení vlastní tíhou

Jedná se o silové zatížení nádrže, které má smysl uvažovat pro nádrže s větší hmotností. Vztah pro tíhovou sílu

$$F_g = m g, \quad (1.14)$$

kde m je hmotnost nádrže a g je tíhové zrychlení.

Kapitola 2

Studium metody řešení

Po důkladné analýze typu úlohy bylo stanoveno, že pro matematický popis této úlohy bude vhodné použít skořepinový 4-uzlový izoparametrický prvek. Toto řešení má oproti použití prostorových prvků výhodu v tom, že není potřeba tak velkého množství elementů a proto jsou výpočetní i časové nároky nižší. Pro výslednou formulaci se předpokládá, že nebude docházet k **velkým posuvům ani deformacím**. Výsledná lokální matice tuhosti skořepinového prvku \mathbf{K}_c se bude skládat ze tří dílčích submatic a to z matice tuhosti úlohy rovinné napjatosti \mathbf{K}_p , deskové tuhosti \mathbf{K}_d a matice tuhosti v krutu \mathbf{K}_k .

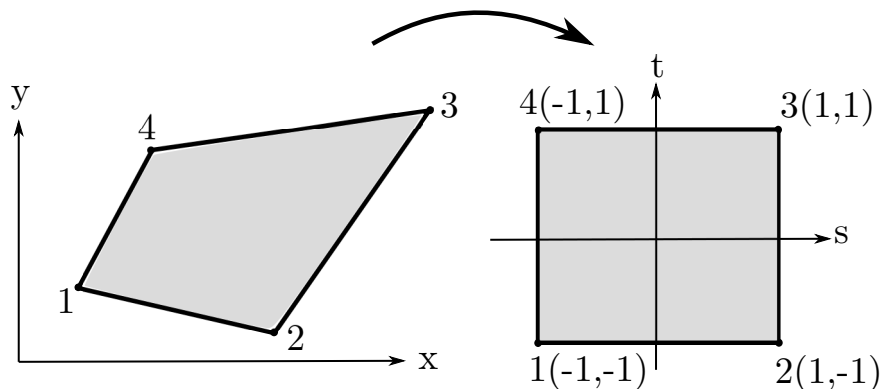
$$\mathbf{K}_c = \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_d + \mathbf{K}_k \quad (2.1)$$

Jednotlivé dílčí matice budou detailně rozebrány v dalších kapitolách a pro každou z nich je uveden testovací příklad. Procedury použité pro řešení příkladů jsou dále v textu ověřeny.

Izoparametrický 4-uzlový element

K popisu 4-uzlového parametrického elementu jsou využity čtyři tvarové funkce, které jsou získány na základě Lagrangeovy formulace. Rodičovský element je jednotkový čtverec, který lze získat za pomoci izoparametrického mapování. Skutečný element znázorněný na Obr. 2.1 vlevo je mapován na rodičovský element na Obr. 2.1 vpravo.

izoparametrické mapování



Obr. 2.1: Skutečný a rodičovský element

Pole posuvů \mathbf{u} je popsáno aproximační rovnicí

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \boldsymbol{\alpha}, \quad (2.2)$$

kde \mathbf{N} je matice tvarových funkcí a $\boldsymbol{\alpha}$ je vektor zobecněných uzlových posunutí. Jejich skladba se liší podle typu úlohy. Jednotlivé tvarové funkce v rodičovském souřadném systému jsou popsány rovnicemi

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - s) (1 - t), \quad (2.3)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 + s) (1 - t), \quad (2.4)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + s) (1 + t), \quad (2.5)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 - s) (1 + t). \quad (2.6)$$

Vztahy pro geometrii skutečného elementu jsou definovány za pomoci tvarových funkcí

$$x = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$y = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}. \quad (2.8)$$

Derivací Rov. 2.7, 2.8 v rodičovském souřadném systému s, t je získáno

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1+t & 1-t & 1+t & -1-t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1+t & 1-t & 1+t & -1-t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1+s & -1-s & 1+s & 1-s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1+s & -1-s & 1+s & 1-s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}. \quad (2.12)$$

K převodu derivací mezi jednotlivými souřadnými systémy

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

slouží Jakobián transformace

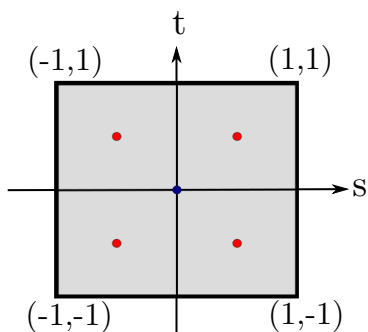
$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Gaussova kvadratura

Pro některé druhy funkcí je složité určit jejich primitivní funkci analyticky. Z toho důvodu se běžně používá Gaussova kvadratura, která nahrazuje integrační počet součtem. Z důvodu přesnosti této metody je nutno volit správný stupeň kvadratury. Protože element má dva body v každém směru, je volen druhý stupeň kvadratury pro čtyři integrační body ($N = 4$). Integrace funkce $f(x, y)$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) ds dt \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_i w_j f(s_i, t_j), \quad (2.15)$$

kde s_i, t_j jsou souřadnice integračních bodů a w_i, w_j jsou váhy kvadrurního vzorce. Tab. 2.1 popisuje hodnotu jednotlivých vah pro daný počet bodů a souřadnice integračních bodů. Integrační body jsou znázorněny na Obr. 2.2 červenou barvou pro druhý stupeň kvadratury a modrou pro první stupeň.



Obr. 2.2: Zobrazení polohy integračních bodů na rodičovském elementu

| N | s, t | w | m, n |
|-----|-------------------------|-----|--------|
| 1 | 0 | 4 | 1 |
| 4 | $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ | 1 | 2 |

Tab. 2.1: Hodnoty konstant kvadrurního vzorce

Výše popsané vztahy jsou aplikovány pro získání dílčích matic tuhosti.

2.1 Matice tuhosti úlohy rovinné napjatosti

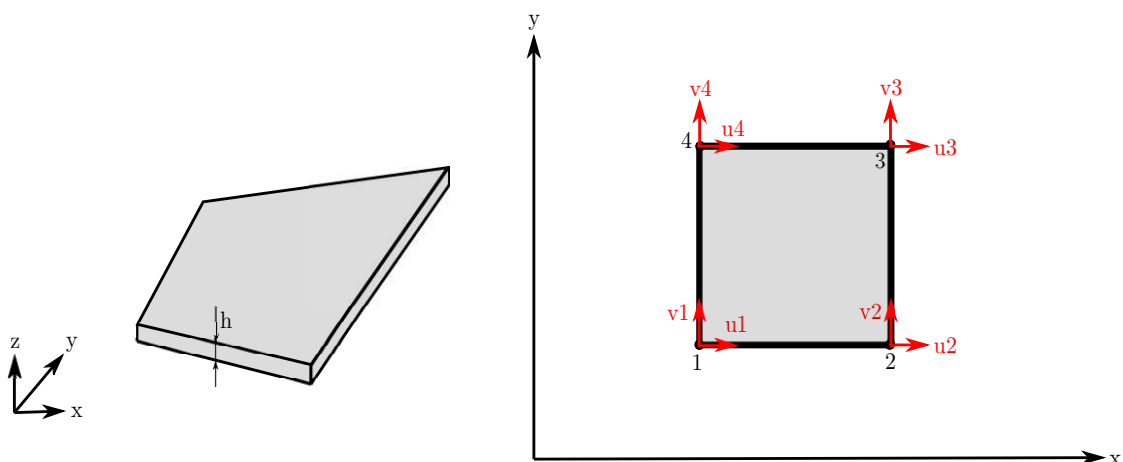
Tato úloha je charakterizována jako případ rovinné napjatosti, kde je jeden rozměr h podstatně menší než zbývající dva a zatížení působí pouze ve směru osy x a y , viz Obr. 2.3 vlevo. Na Obr. 2.3 vpravo jsou znázorněny jednotlivé stupně volnosti v rovině x, y .

Vektor uzlových posunutí α má pro případ rovinné napjatosti tvar

$$\alpha = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}. \quad (2.16)$$

Odpovídající vektor deformací ε má tvar

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$



Obr. 2.3: Prvek rovinné napjatosti a zobrazení jednotlivých stupňů volnosti

a vektor napětí σ tvar

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.18)$$

Konstituční vztah pro rovinnou napjatost lze v maticovém zápisu zapsat

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\}, \quad (2.19)$$

kde C je maticí materiálových konstant

$$C = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

V Rov. 2.20 představuje E modul pružnosti v tahu a μ Poissonovo číslo. Rovnici 2.2 mezi polem posuvů, maticí tvarových funkcí a vektorem zobecněných uzlových posunutí lze pro tento případ rozepsat

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}. \quad (2.21)$$

Vztah mezi vektorem deformací $\boldsymbol{\varepsilon}$ a polem posuvů \boldsymbol{u} lze pomocí Cauchyho vztahů vyjádřit

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (2.22)$$

Pro převod mezi derivacemi pole posunutí ze souřadnic x, y do souřadnic s, t je využito determinantu jakobiánu \mathbf{J}

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & -\frac{\partial y}{\partial s} \\ -\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{Bmatrix}, \quad (2.23)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & -\frac{\partial y}{\partial s} \\ -\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{Bmatrix}. \quad (2.24)$$

Vztah pro \mathbf{J} je uveden výše v rovnici 2.14. Sloučením Rov. 2.23, 2.24 vznikne rovnice

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & -\frac{\partial y}{\partial s} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial y}{\partial t} & -\frac{\partial y}{\partial s} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{Bmatrix}, \quad (2.25)$$

kde po roznásobení dostaneme vztah pro matici \mathbf{A} definován jako

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & -\frac{\partial y}{\partial s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} & -\frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Pro určení geometrické matice \mathbf{B} je nutné sestavit matici derivací tvarových funkcí

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1+t & 0 & 1-t & 0 & 1+t & 0 & -1-t & 0 \\ -1+s & 0 & -1-s & 0 & 1+s & 0 & 1-s & 0 \\ 0 & -1+t & 0 & 1-t & 0 & 1+t & 0 & -1-t \\ 0 & -1+s & 0 & -1-s & 0 & 1+s & 0 & 1-s \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

s využitím rovnic 2.9, 2.11, 2.10, 2.12. Vztah pro vektor deformace nyní lze zapsat

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{G} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\alpha}, \quad (2.28)$$

kde geometrická matice $\mathbf{B}^T = \mathbf{A} \mathbf{G}$. Matice tuhosti \mathbf{K}_p úlohy rovinné napjatosti v původních souřadnicích x, y odpovídá

$$\mathbf{K}_p = h \iint_S \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{B}^T dS, \quad (2.29)$$

kde h je tloušťka elementu, S je plocha elementu. Z důvodu jednodušší integrace se matice tuhosti určuje v souřadnicích s, t rodičovského elementu

$$\mathbf{K}_p = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{B}^T \det \mathbf{J} \mathbf{B} ds dt, \quad (2.30)$$

kde \mathbf{J} je jakobián transformace viz. rovnice 2.14. Z důvodu rychlejšího a snadnějšího určení matice tuhosti se využívá Gaussova kvadratura (Kap. 2). Proto lze přepsat integrální tvar do formy

$$\mathbf{K}_p = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{B}^T \det \mathbf{J} ds dt \approx h \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_i w_j \mathbf{B}(s_i, t_j) \mathbf{C} \mathbf{B}^T(s_i, t_j) \det \mathbf{J}(s_i, t_j). \quad (2.31)$$

Pro sestavení lokální matice tuhosti byla v programovacím jazyce Python vytvořena Pro. 2.1.

```

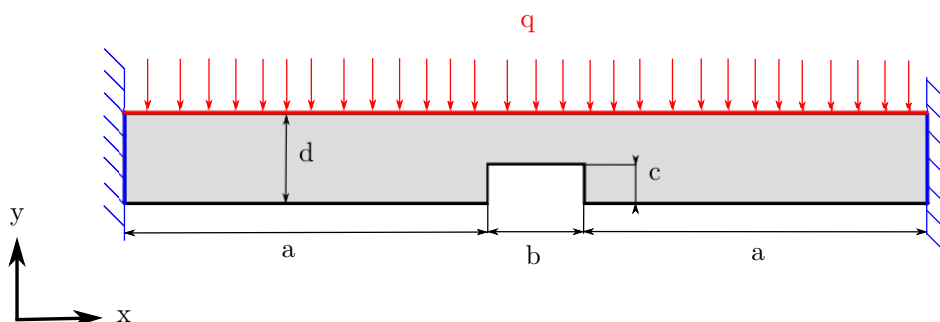
1 def matTuhosti_p(x1_loc, x2_loc, x3_loc, x4_loc, y1_loc, y2_loc, y3_loc, y4_loc, m, n, E, h, nu):
2     #poloha integracnich bodu#
3     int_body=np.array([[1/(np.sqrt(3)),1/(np.sqrt(3))],[-1/(np.sqrt(3)),1/(np.sqrt(3))],\
4     [-1/(np.sqrt(3)),-1/(np.sqrt(3))],[1/(np.sqrt(3)),-1/(np.sqrt(3))]], dtype=np.float64)
5     ws=1
6     wt=1
7     x1=x1_loc
8     x2=x2_loc
9     x3=x3_loc
10    x4=x4_loc
11    y1=y1_loc
12    y2=y2_loc
13    y3=y3_loc
14    y4=y4_loc
15    k_loc=np.zeros((8,8), dtype=np.float64)
16    for i in range(4):
17        t=int_body[i,0]
18        s=int_body[i,1]
19        X=np.array([[x1],[x2],[x3],[x4]], dtype=np.float64) #vektor x-ovych souradnic#
20        Y=np.array([[y1],[y2],[y3],[y4]], dtype=np.float64) #vektor y-ovych souradnic#
21        dx_ds=np.dot(1/4*np.array([[ -1+t,1-t,1+t,-1-t ]], dtype=np.float64), X)
22        dy_ds=np.dot(1/4*np.array([[ -1+t,1-t,1+t,-1-t ]], dtype=np.float64), Y)
23        dx_dt=np.dot(1/4*np.array([[ -1+s,-1-s,1+s,1-s ]], dtype=np.float64), X)
24        dy_dt=np.dot(1/4*np.array([[ -1+s,-1-s,1+s,1-s ]], dtype=np.float64), Y)
25        J=np.array([[dx_ds[0,0],dy_ds[0,0]],[dx_dt[0,0],dy_dt[0,0]]], dtype=np.float64)
26        det_J=np.linalg.det(J) #jakobian transformace#
27        if (det_J<0):
28            det_J=-1*det_J
29        A=(1/det_J)*np.array([[dy_dt,-dy_ds,0,0],[0,0,-dx_dt,dx_ds],\
30        [-dx_dt,dx_ds,dy_dt,-dy_ds]], dtype=np.float64)
31        G=(1/4)*np.array([[ -1+t,0,1-t,0,1+t,0,-1-t,0],[ -1+s,0,-1-s,0,1+s,0,1-s,0],\
32        [0,-1+t,0,1-t,0,1+t,0,-1-t],[0,-1+s,0,-1-s,0,1+s,0,1-s]], dtype=np.float64)
33        B_t=np.dot(A,G)
34        B=B_t.transpose()
35        C=E/(1-nu**2)*np.array([[1,nu,0],[nu,1,0],[0,0,(1-nu)/2]], dtype=np.float64) #matice
36        materialovych konstant#
37        U1=np.dot(B,C)
38        V1=np.dot(U1,B_t)
39        W1=np.dot(V1,det_J)
40        k_loc+=h*ws*wt*W1 #lokální matice tuhosti#
41    return k_loc

```

Pro 2.1: Lokální matice tuhosti úlohy rovinné napjatosti \mathbf{K}_P

Testovací příklad

Pro ověření Pro. 2.1 byl převzat testovací příklad (Lit. [2]) představující oboustranně vetknutý nosník zatížený spojitým zatížením, který je zobrazen na Obr. 2.4. Rozměry a materiálové konstanty jsou uvedeny v Tab. 2.2.



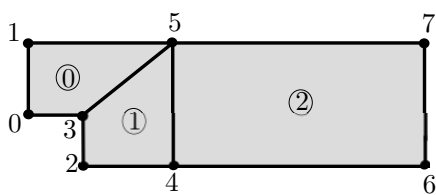
Obr. 2.4: Geometrie nosníku

Z důvodu symetrie byl zvolen poloviční model a zavedena podmínka symetrie. Na Obr. 2.5 je

| Označení neznámé | Hodnota | Jednotka |
|------------------|-----------------|--------------------|
| a | 48 | in |
| b | 12 | in |
| c | 5 | in |
| d | 12 | in |
| tloušťka | 4 | in |
| E | 3×10^6 | lb/in ² |
| q | 50 | lb/in ² |
| ν | 0.3 | — |

Tab. 2.2: Hodnoty zadání

znázorněno číslování uzlů a elementů. Uzly jsou označeny pouhým číslem a elementy číslem v kroužku. Výsledky získané pomocí procedury v Pythonu jsou porovnány s literaturou viz. Tab. 2.3. Posunutí u je ve směru osy x a posunutí v je ve směru y .

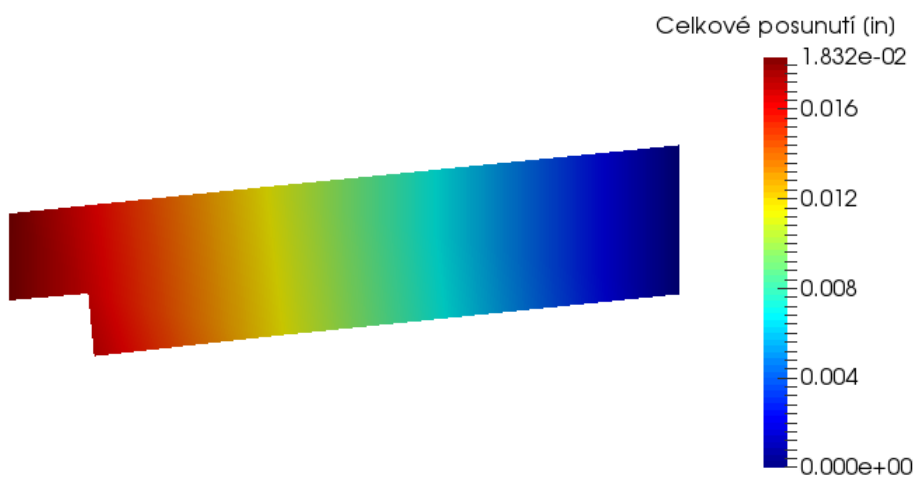


Obr. 2.5: Zobrazení elementů a uzlů

| Číslo uzlu | Vlastní algoritmus | | Literatura | | Rozdíl [%] |
|------------|--------------------|----------|------------|----------|------------|
| | u [in] | v [in] | u [in] | v [in] | |
| 0 | 0 | -0.018 | 0 | -0.018 | 0.00 |
| 1 | 0 | -0.018 | 0 | -0.018 | 0.00 |
| 2 | 0.003 | 0.017 | 0.003 | 0.017 | 0.00 |
| 3 | 0.001 | -0.016 | 0.001 | -0.016 | 0.00 |
| 4 | 0.003 | -0.011 | 0.003 | -0.011 | 0.00 |
| 5 | -0.002 | -0.012 | -0.002 | -0.012 | 0.00 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.00 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.00 |

Tab. 2.3: Posunutí jednotlivých uzlů

Z Tab. 2.3 je zřejmé, že výsledky získané vlastní procedurou jsou totožné s Lit. [2], proto lze takto vytvořenou Pro. 2.1 považovat za ověřenou. Rozložení celkového posunutí zvětšeno 300× je zobrazeno na Obr. 2.6.



Obr. 2.6: Rozložení celkového posunutí zvětšeno 300×

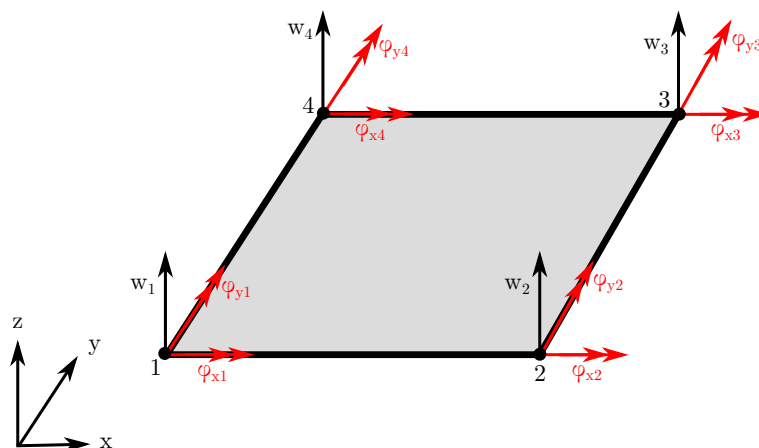
2.2 Desková tuhost

Pro popis deskové tuhosti se používá řada teorií, jako je například Kirchofova nebo Mindlinova. Pro vytvořenou proceduru bude použita Mindlinova teorie, která je vhodná pro popis

nejenom tenké desky, ale i středně tenké desky. Tuto teorii lze použít, pokud je splněna podmínka

$$\frac{1}{10} \leq \frac{\text{tloušťka desky}}{\text{charakteristický rozměr}} \leq \frac{1}{5}. \quad (2.32)$$

Na Obr. 2.7 jsou znázorněny vektory posunutí a natočení jednotlivých uzlů.



Obr. 2.7: Zobrazení posuvů a natočení

Vektor uzlových posunutí α má pro tento případ tvar

$$\alpha = \begin{Bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix}, \quad (2.33)$$

kde w je průhyb, φ_x odpovídající β_y je natočení okolo osy x a φ_y odpovídající β_x je natočení okolo osy y . Vektor deformací ε má tvar

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

a vektor napětí σ má tvar

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}. \quad (2.35)$$

Vztahy pro pole posunutí v závislosti na tvarových funkcích a zobecněných posuvech jednotlivých uzlů elementu lze napsat

$$\{\mathbf{u}\} = [N_1 \ 0 \ 0 \ N_2 \ 0 \ \dots] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ w_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_w^T \boldsymbol{\alpha}, \quad (2.36)$$

$$\{\boldsymbol{\beta}_x\} = [0 \ 0 \ -N_1 \ 0 \ 0 \ \dots] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ w_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_{\beta_x}^T \boldsymbol{\alpha}, \quad (2.37)$$

$$\{\boldsymbol{\beta}_y\} = [0 \ N_1 \ 0 \ 0 \ N_2 \ \dots] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ w_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_{\beta_y}^T \boldsymbol{\alpha}. \quad (2.38)$$

Výpočtem derivací a rozdělením na smykovou část a ohybovou část vzniknou vektory $\boldsymbol{\psi}_s$ a $\boldsymbol{\psi}_b$

$$\boldsymbol{\psi}_s = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & -N_1 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ w_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{sp}^T \boldsymbol{\alpha}, \quad (2.39)$$

$$\boldsymbol{\psi}_b = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & -\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ w_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{bp}^T \boldsymbol{\alpha}. \quad (2.40)$$

Při použití vztahu 2.14 pro Jakobián transformace lze převést matice derivací $\mathbf{B}_{sp}^T, \mathbf{B}_{bp}^T$ ze souřadného systému x, y na geometrické matice $\mathbf{B}_s^T, \mathbf{B}_b^T$ v souřadné soustavě s, t .

$$\mathbf{B}_s^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\det \mathbf{J}} (J_{22} \frac{\partial N_1}{\partial s} - J_{21} \frac{\partial N_1}{\partial t}) & 0 & N_1 & \frac{1}{\det \mathbf{J}} (J_{22} \frac{\partial N_2}{\partial s} - J_{21} \frac{\partial N_2}{\partial t}) & \dots \\ \frac{1}{\det \mathbf{J}} (-J_{12} \frac{\partial N_1}{\partial s} + J_{11} \frac{\partial N_1}{\partial t}) & -N_1 & 0 & \frac{1}{\det \mathbf{J}} (-J_{12} \frac{\partial N_2}{\partial s} + J_{11} \frac{\partial N_2}{\partial t}) & \dots \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{B}_b^T = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(J_{22} \frac{\partial N_1}{\partial s} - J_{21} \frac{\partial N_1}{\partial t}) & 0 & \dots \\ 0 & -J_{12} \frac{\partial N_1}{\partial s} + J_{11} \frac{\partial N_1}{\partial t} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & J_{22} \frac{\partial N_1}{\partial s} - J_{21} \frac{\partial N_1}{\partial t} & -(-J_{12} \frac{\partial N_1}{\partial s} + J_{11} \frac{\partial N_1}{\partial t}) & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Lokální matice tuhosti smyku se určí za pomoci Gaussovy kvadratury. Z důvodu numerické dominance smykové matice tuhosti \mathbf{K}_{ds} je nutné použít kvadraturu prvního stupně (viz. Tab. 2.1 pro $m = n = 1$), aby se tento jev, zvaný smykové zadržení, částečně odstranil.

$$\mathbf{K}_{ds} = \kappa G h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_s \mathbf{B}_s^T \det \mathbf{J} ds dt \approx \kappa G h \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_i w_j \mathbf{B}_s(s_i, t_j) \mathbf{B}_s^T(s_i, t_j) \det \mathbf{J}(s_i, t_j) \quad (2.43)$$

Kde $\kappa = \frac{5}{6}$, h je tloušťka elementu a G je modul pružnosti ve smyku.

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (2.44)$$

Pro určení matice tuhosti ohybu \mathbf{K}_{db} se použije Gaussova kvadratura druhého stupně (viz. Tab. 2.1 pro $m = n = 2$)

$$\mathbf{K}_{db} = D \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_b \mathbf{B}_b^T \det \mathbf{J} ds dt \approx D \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_i w_j \mathbf{B}_b(s_i, t_j) \mathbf{B}_b^T(s_i, t_j) \det \mathbf{J}(s_i, t_j), \quad (2.45)$$

kde D je koeficient deskové tuhosti

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}. \quad (2.46)$$

Celková matice tuhosti \mathbf{K}_d se určí jako součet těchto dvou dílčích matic.

$$\mathbf{K}_d = \mathbf{K}_{ds} + \mathbf{K}_{db} \quad (2.47)$$

Pro určení napětí se použily vztahy 2.39 a 2.40. Tyto vztahy lze dosadit do následujících rovnic pro výpočet napětí, kde E je modul pružnosti v tahu, μ je Poissonovo číslo, G je modul pružnosti ve smyku a z je vzdálenost od střednice průřezu. Pro napětí na střednici platí $z = 0$, pro horní stranu elementu platí $z = h/2$ a pro spodní stranu $z = -h/2$.

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) = -\frac{E z}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial\beta_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial\beta_y}{\partial y} \right) \quad (2.48)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) = -\frac{E z}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial\beta_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial\beta_x}{\partial x} \right) \quad (2.49)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = -G z \left(\frac{\partial\beta_y}{\partial y} + \frac{\partial\beta_x}{\partial x} \right) \quad (2.50)$$

$$\tau_{yz} = \kappa G \gamma_{yz} = \kappa G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \right) \quad (2.51)$$

$$\tau_{zx} = \kappa G \gamma_{zx} = \kappa G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \right) \quad (2.52)$$

Pro sestavení lokální matice tuhosti byla v programovacím jazyce Python vytvořena Pro. 2.2.

```

1 def matTuhosti_o(x1_loc, x2_loc, x3_loc, x4_loc, y1_loc, y2_loc, y3_loc, y4_loc, m, n, E, h, nu):
2     x1=x1_loc
3     x2=x2_loc
4     x3=x3_loc
5     x4=x4_loc
6     y1=y1_loc
7     y2=y2_loc
8     y3=y3_loc
9     y4=y4_loc
10    #poloha integracnich bodu#
11    int_body=np.array([[1/(np.sqrt(3)),1/(np.sqrt(3))],[-1/(np.sqrt(3)),1/(np.sqrt(3))],\
12                      [-1/(np.sqrt(3)),-1/(np.sqrt(3))],[1/(np.sqrt(3)),-1/(np.sqrt(3))]], dtype=np.float64)
13    kapa=5/6
14    C=np.array([[1, nu, 0],[nu, 1, 0],[0, 0, (1-nu)/2]], dtype=np.float64) #matice materialovych
15    konstant#
16    D=(E*h**3)/(12*(1-nu**2)) #deskova tuhost#
17    G=E/(2*(1+nu))
18    ws_b=1 #vaha kvadrurniho pravidla ve smeru s#
19    wt_b=1 #vaha kvadrurniho pravidla ve smeru t#
20    kb=np.zeros((12,12), dtype=np.float64)
21    k_loc=np.zeros((12,12), dtype=np.float64)
22    for i in range(4):
23        t=int_body[i,0]
24        s=int_body[i,1]
25        X=np.array([[x1],[x2],[x3],[x4]], dtype=np.float64) #vektor x-ovych souradnic#
26        Y=np.array([[y1],[y2],[y3],[y4]], dtype=np.float64) #vektor y-ovych souradnic#
27        dx_ds=np.dot(1/4*np.array([[1-t,1-t,1+t,-1-t]], dtype=np.float64), X)
28        dy_ds=np.dot(1/4*np.array([[1-t,1-t,1+t,-1-t]], dtype=np.float64), Y)
29        dx_dt=np.dot(1/4*np.array([[1+s,-1-s,1+s,1-s]], dtype=np.float64), X)
30        dy_dt=np.dot(1/4*np.array([[1+s,-1-s,1+s,1-s]], dtype=np.float64), Y)
31        #jakobian transformace#
32        J=np.array([[dx_ds[0,0],dy_ds[0,0]],[dx_dt[0,0],dy_dt[0,0]]], dtype=np.float64)
33        dN1_ds=(1/4)*(t-1)
34        dN1_dt=(1/4)*(s-1)
35        dN2_ds=(-1/4)*(t-1)
36        dN2_dt=(-1/4)*(s+1)
37        dN3_ds=(1/4)*(t+1)
38        dN3_dt=(1/4)*(s+1)
39        dN4_ds=(-1/4)*(t+1)
40        dN4_dt=(-1/4)*(s-1)
41        J11=dx_ds
42        J12=dx_dt
43        J21=dy_ds
44        J22=dy_dt
45        N1=1/4*(s-1)*(t-1)
46        N2=-1/4*(s+1)*(t-1)
47        N3=1/4*(s+1)*(t+1)
48        N4=-1/4*(s-1)*(t+1)
49        det_J=np.linalg.det(J)
50        if (det_J<0):
51            det_J=-1*det_J

```

```

51     kon=(1/det_J)
52     Bb1=np.array([[0,0,-J22*dN1_ds+J21*dN1_dt],[0,-J12*dN1_ds+J11*dN1_dt,0],\
53     [0,J22*dN1_ds-J21*dN1_dt,J12*dN1_ds-J11*dN1_dt]],dtype=np.float64)
54     Bb2=np.array([[0,0,-J22*dN2_ds+J21*dN2_dt],[0,-J12*dN2_ds+J11*dN2_dt,0],\
55     [0,J22*dN2_ds-J21*dN2_dt,J12*dN2_ds-J11*dN2_dt]],dtype=np.float64)
56     Bb3=np.array([[0,0,-J22*dN3_ds+J21*dN3_dt],[0,-J12*dN3_ds+J11*dN3_dt,0],\
57     [0,J22*dN3_ds-J21*dN3_dt,J12*dN3_ds-J11*dN3_dt]],dtype=np.float64)
58     Bb4=np.array([[0,0,-J22*dN4_ds+J21*dN4_dt],[0,-J12*dN4_ds+J11*dN4_dt,0],\
59     [0,J22*dN4_ds-J21*dN4_dt,J12*dN4_ds-J11*dN4_dt]],dtype=np.float64)
60     Bb_t=(1/det_J)*(np.concatenate((Bb1,Bb2,Bb3,Bb4),axis=1))
61     Bb=Bb_t.transpose() #geometricka matice ohybove tuhosti#
62     B1=np.dot(Bb,C)
63     kb+=D*ws_b*wt_b*np.dot(B1,Bb_t)*det_J # matice tuhosti v ohybu #

64
65     t=0
66     s=0
67     ws=4
68     X=np.array([[x1],[x2],[x3],[x4]],dtype=np.float64)
69     Y=np.array([[y1],[y2],[y3],[y4]],dtype=np.float64)
70     dx_ds=np.dot(1/4*np.array([[ -1+t,1-t,1+t,-1-t ]],dtype=np.float64),X)
71     dy_ds=np.dot(1/4*np.array([[ -1+t,1-t,1+t,-1-t ]],dtype=np.float64),Y)
72     dx_dt=np.dot(1/4*np.array([[ -1+s,-1-s,1+s,1-s ]],dtype=np.float64),X)
73     dy_dt=np.dot(1/4*np.array([[ -1+s,-1-s,1+s,1-s ]],dtype=np.float64),Y)
74     J=np.array([[dx_ds[0,0],dx_dt[0,0]],[dy_ds[0,0],dy_dt[0,0]]],dtype=np.float64)
75     det_J=np.linalg.det(J)
76     if (det_J<0):
77         det_J=-1*det_J
78         dN1_ds=(1/4)*(t-1)
79         dN1_dt=(1/4)*(s-1)
80         dN2_ds=(-1/4)*(t-1)
81         dN2_dt=(-1/4)*(s+1)
82         dN3_ds=(1/4)*(t+1)
83         dN3_dt=(1/4)*(s+1)
84         dN4_ds=(-1/4)*(t+1)
85         dN4_dt=(-1/4)*(s-1)
86         J11=dx_ds
87         J12=dx_dt
88         J21=dy_ds
89         J22=dy_dt
90         N1=1/4*(s-1)*(t-1)
91         N2=-1/4*(s+1)*(t-1)
92         N3=1/4*(s+1)*(t+1)
93         N4=-1/4*(s-1)*(t+1)
94         kon=(1/det_J)
95         Bs1=np.array([[kon*((J22*dN1_ds)-(J21*dN1_dt)),0,N1],[kon*((-J12*dN1_ds)+(J11*dN1_dt)),-N1,0]]\
96         ,dtype=np.float64)
97         Bs2=np.array([[kon*((J22*dN2_ds)-(J21*dN2_dt)),0,N2],[kon*((-J12*dN2_ds)+(J11*dN2_dt)),-N2,0]]\
98         ,dtype=np.float64)
99         Bs3=np.array([[kon*((J22*dN3_ds)-(J21*dN3_dt)),0,N3],[kon*((-J12*dN3_ds)+(J11*dN3_dt)),-N3,0]]\
100        ,dtype=np.float64)
101        Bs4=np.array([[kon*((J22*dN4_ds)-(J21*dN4_dt)),0,N4],[kon*((-J12*dN4_ds)+(J11*dN4_dt)),-N4,0]]\
102        ,dtype=np.float64)
103        Bs_t=np.concatenate((Bs1,Bs2,Bs3,Bs4),axis=1)
104        Bs=Bs_t.transpose() #geometricka matice smykovy tuhosti#
105        ks=kapa*G*h*ws*np.dot(Bs,Bs_t)*det_J # matice tuhosti ve smyku #

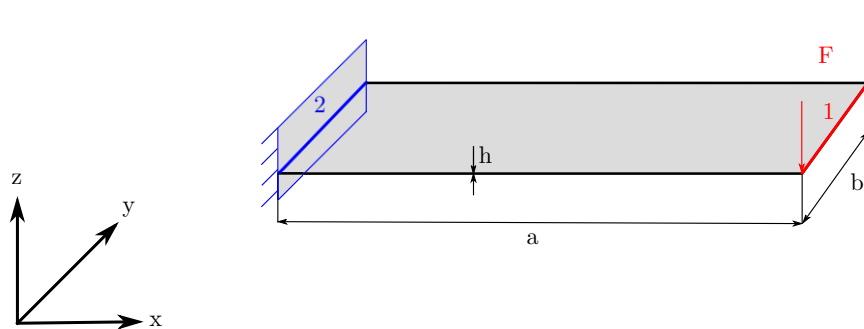
106
107        k_c=ks+kb # celkova matice #
108        k_loc+=k_c
109        return k_loc

```

Pro 2.2: Lokální matice deskové tuhosti \mathbf{K}_d

Testovací příklad

Jako testovací příklad byl vybrán nosník zatížený silou viz. Obr. 2.8. Na hraně 2 bylo zamezeno všem posuvům i natočením a na hranu 1 byla zavedena síla F . V Tab. 2.4 jsou uvedeny hodnoty neznámých veličin.



Obr. 2.8: Schéma úlohy

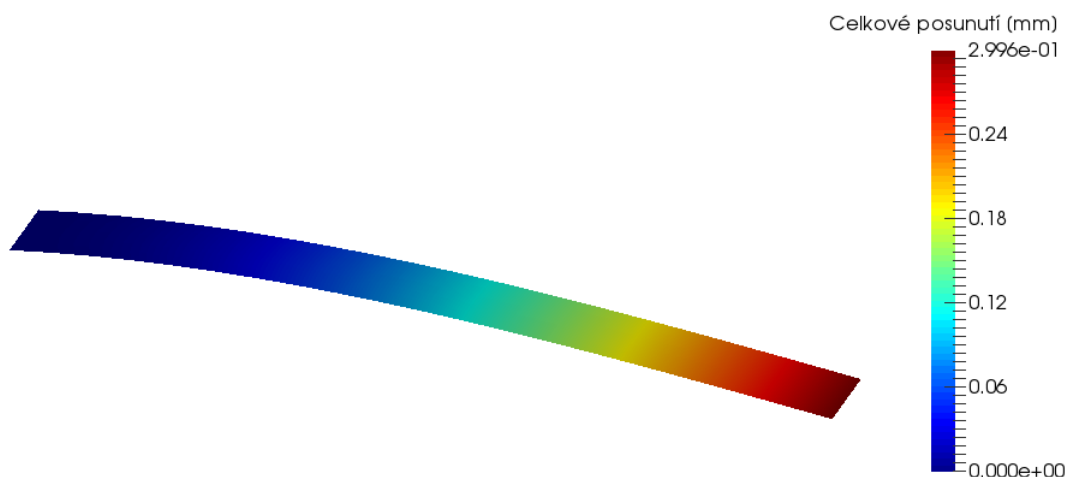
| Označení neznámé | Hodnota | Jednotka |
|------------------|---------|----------|
| a | 20 | mm |
| b | 5 | mm |
| h | 1 | mm |
| E | 210 000 | MPa |
| F | 10 | N |
| ν | 0.3 | — |

Tab. 2.4: Hodnoty zadání

Pro analýzu příkladu byly vytvořeny tři rozdílné sítě. Jejich výsledné maximální posunutí v absolutní hodnotě je závislé na počtu elementů a jsou porovnány s komerčním softwarem ANSYS v Tab. 2.5. Pro síť s největším počtem elementů je vykresleno rozložení celkových posunutí na Obr. 2.9.

| Počet elementů | Vlastní algoritmus | ANSYS | Rozdíl [%] |
|----------------|--------------------|-------|------------|
| 4 | 0.295 | 0.294 | 0.34 |
| 14 | 0.298 | 0.297 | 0.34 |
| 100 | 0.299 | 0.299 | 0.00 |

Tab. 2.5: Maximální celkové posunutí v [mm] a jeho závislost na počtu elementů

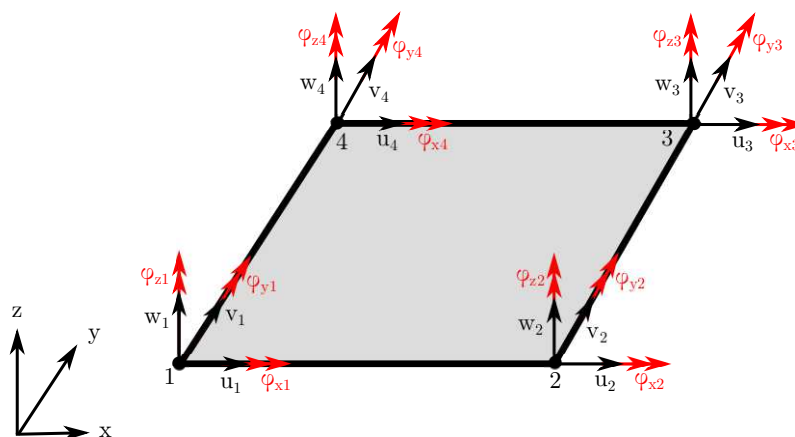


Obr. 2.9: Rozložení celkového posunutí zvětšeno $10\times$

Porovnáním hodnot z Tab. 2.5 je zřejmé, že výsledky získané vlastní procedurou se téměř shodují s komerčním softwarem ANSYS, proto takto sestavenou proceduru lze považovat za ověřenou.

2.3 Skořepinová tuhost

Výsledná skořepinová matice tuhosti \mathbf{K}_c je sestavena z předešlých dvou matic tuhosti (\mathbf{K}_p a \mathbf{K}_d popsaných v Kap. 2.1 a 2.2) a matice tuhosti v krutu \mathbf{K}_k . Matice tuhosti rovinné napjatosti popisuje posuvy u, v a desková matice tuhosti popisuje posuvy w a natočení φ_x, φ_y . Poslední potřebný stupeň volnosti je natočení φ_z . Toto natočení je popsáno maticí tuhosti v krutu. Výsledný element tvořený čtyřmi uzly, kde každý uzel obsahuje šest stupňů volnosti, je znázorněn na Obr. 2.10.



Obr. 2.10: Zobrazení možných zobecněných posuvů skořepinového prvku

Vektor zobecněných uzlových posunutí α má tvar

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ \varphi_{z1} \\ u_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}. \quad (2.53)$$

Matice tuhosti skořepinového prvku \mathbf{K}_c má rozměr 24×24 a skládá se ze 3 matic tuhosti

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_d + \mathbf{K}_k, \quad (2.54)$$

kde \mathbf{K}_p je matice tuhosti rovinné napjatosti, \mathbf{K}_d je desková tuhost a \mathbf{K}_k je matice tuhosti v krutu. Matice \mathbf{K}_k je diagonální matice, kde $\mathbf{K}_{k1,1} = \mathbf{K}_{k2,2} = \mathbf{K}_{k3,3} = \mathbf{K}_{k4,4} = \alpha_k E h S$. Koefficient $\alpha_k = 10^{-10}$, E je modul pružnosti v tahu, S je obsah elementu a h je tloušťka elementu. Obsah elementu lze spočítat např. za pomoci Gaussovy metody pro $n = 4$ ze souřadnic krajních bodů

$$S = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right|. \quad (2.55)$$

Pro výpočet napětí lze vyjít z principu superpozice, kde index p značí napětí pro případ rovinné napjatosti a index d označuje napětí vypočtené podle deskové teorie. Napětí v krutu bylo zanedbáno z důvodu minimálního vlivu.

$$\sigma_x = \sigma_{xp} + \sigma_{xd} \quad (2.56)$$

$$\sigma_y = \sigma_{yp} + \sigma_{yd} \quad (2.57)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{xyp} + \tau_{xyd} \quad (2.58)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_{yzd} \quad (2.59)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{zxd} \quad (2.60)$$

K určení redukovaného napětí podle hypotézy HMH je výhodné využít vlastností invariant tenzoru napjatosti a oktaedrické roviny.

$$i_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (2.61)$$

$$i_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{zy}^2 \quad (2.62)$$

$$\tau_{okt} = \frac{1}{3} \sqrt{2(i_1^2 - 3i_2)} \quad (2.63)$$

$$\sigma_{HMH} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{okt} \quad (2.64)$$

Pro sestavení lokální matice tuhosti skořepiny je v programovacím jazyce Python vytvořena Pro. 2.3.

```

1 def matTuhosti_c(m,n,P,T,nu,E,nonID,vyska1,vyska2,vyska3,h1,h2,h3):
3     for j in range(n):
4         K_loc_c=np.zeros((24,24),dtype=np.float64)
5
6         # Nacteni matice tuhosti rovinne napjatosti#
7         index_p1=np.arange(0,24,6)
8         index_p2=index_p1+1
9         index_pc=np.zeros((4,2),dtype=np.float64)
10        index_pc[:,0]=index_p1[:]
11        index_pc[:,1]=index_p2[:]
12        index_pcc = index_pc.ravel()
13        index_pcc=index_pcc.astype(np.int32)
14        vel_ID=np.size(index_pcc)
15        for k in range(vel_ID):
16            for l in range(vel_ID):
17                K_loc_c[index_pcc[k],index_pcc[l]]+=k_loc_p[k,l]
18
19        # Nacteni matice deskove tushoti #
20        index_o1=np.arange(2,24,6)
21        index_o2=index_o1+1
22        index_o3=index_o1+2
23        index_oc=np.zeros((4,3),dtype=np.float64)
24        index_oc[:,0]=index_o1[:]
25        index_oc[:,1]=index_o2[:]
26        index_oc[:,2]=index_o3[:]
27        index_occ = index_oc.ravel()
28        index_occ=index_occ.astype(np.int32)
29        vel_ID=np.size(index_occ)
30        for k in range(vel_ID):
31            for l in range(vel_ID):
32                K_loc_c[index_occ[k],index_occ[l]]+=k_loc_o[k,l]
33
34        # Nacteni matice tuhosti v krutu #
35        index_k=np.arange(5,24,6)
36        vel_ID=np.size(index_k)
37        for e in range(vel_ID):
38            K_loc_c[index_k[e],index_k[e]]+=k_loc_k
39
40    return K_loc_c

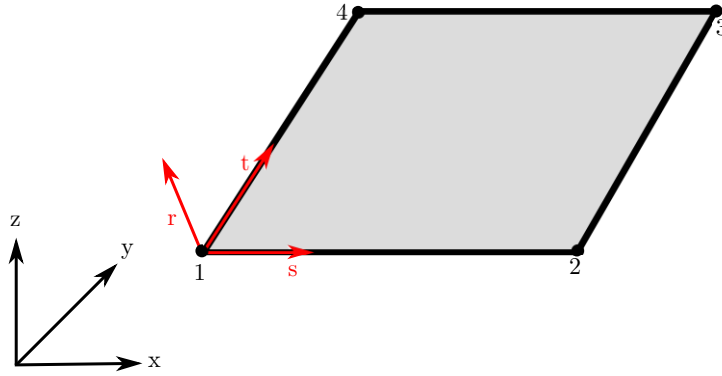
```

Pro 2.3: Lokální matice tuhosti skořepinového elementu \mathbf{K}_c

Transformační matice

Pro popsání prostorových skořepin je výhodné využít transformační matice \mathbf{H} , která slouží k přepočtu z lokálního do globálního souřadného systému. Jednotlivé prvky transformační matice jsou směrové kosiny mezi třemi osami globálního souřadného systému x, y, z a třemi osami lokálního souřadného systému s, t, r . Tyto systémy jsou znázorněny na Obr. 2.11.

$$\begin{Bmatrix} s \\ t \\ r \end{Bmatrix} = \mathbf{H} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_s & m_s & n_s \\ l_t & m_t & n_t \\ l_r & m_r & n_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (2.65)$$



Obr. 2.11: Lokální a globální souřadný systém

K určení prvního řádku transformační matice bylo nutné sestavit jednotkový vektor \vec{V}_s mezi prvním a druhým bodem elementu.

$$\mathbf{V}_{12} = \begin{Bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{Bmatrix} \quad (2.66)$$

Délka vektoru \mathbf{V}_{12}

$$L_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (2.67)$$

a jednotkový vektor \vec{V}_s je

$$\vec{V}_s = \begin{Bmatrix} \frac{x_2 - x_1}{L_{12}} \\ \frac{y_2 - y_1}{L_{12}} \\ \frac{z_2 - z_1}{L_{12}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_s \\ m_s \\ n_s \end{Bmatrix}. \quad (2.68)$$

Pro určení třetího řádku bylo nejprve nutné sestavit vektor \mathbf{V}_{13} a z důvodu kolmosti osy r k ose s byl použit vektorový součin.

$$\mathbf{V}_{13} = \begin{Bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{V}_{12} \times \mathbf{V}_{13} = \begin{Bmatrix} y_3(z_1 - z_2) + y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) \\ x_3(z_2 - z_1) + x_2(z_1 - z_3) + x_1(z_3 - z_2) \\ x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

Obdobně délka vektoru \mathbf{V}_r

$$L_r = \sqrt{X_r^2 + Y_r^2 + Z_r^2}. \quad (2.71)$$

Jednotlivé prvky třetího řádku jsou potom

$$l_r = \frac{X_r}{L_r}, \quad (2.72)$$

$$m_r = \frac{Y_r}{L_r}, \quad (2.73)$$

$$n_r = \frac{Z_r}{L_r}. \quad (2.74)$$

Pro prostřední řádek se využije toho, že osa t je kolmá k oběma osám s a r .

$$\mathbf{V}_t = \begin{Bmatrix} l_r \\ m_r \\ n_r \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} l_s \\ m_s \\ n_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_t \\ m_t \\ n_t \end{Bmatrix} \quad (2.75)$$

Při znalosti transformační matice lze psát následující vztah pro přepočítání mezi globálními a lokálními uzlovými posunutími. K rozlišení lokálních posunutí od globálních byly ty lokální označeny indexem l .

$$\begin{Bmatrix} u_{1l} \\ v_{1l} \\ w_{1l} \\ \varphi_{x1l} \\ \varphi_{y1l} \\ \varphi_{z1l} \\ u_{2l} \\ \vdots \\ \varphi_{z4l} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{H} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ \varphi_{z1} \\ u_2 \\ \vdots \\ \varphi_{z4} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_l = \mathbf{T} \boldsymbol{\alpha} \quad (2.76)$$

Maticovou rovnici pro element v lokálním souřadném systému lze psát

$$\mathbf{K}_l \boldsymbol{\alpha}_l = \mathbf{f}_l, \quad (2.77)$$

po dosazení s použitím vztahu 2.76 lze rovnici upravit

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{T} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f}_1. \quad (2.78)$$

Po vynásobení obou stran rovnice zleva \mathbf{T}^T vznikne vztah

$$\mathbf{T}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{T} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_1. \quad (2.79)$$

Z předešlého vztahu vyplývá, že vztah pro matici tuhosti \mathbf{K} v globálním souřadném systému bude

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{T} \quad (2.80)$$

a pro vektor zatížení \mathbf{f} v globálním souřadném systému lze psát

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_1. \quad (2.81)$$

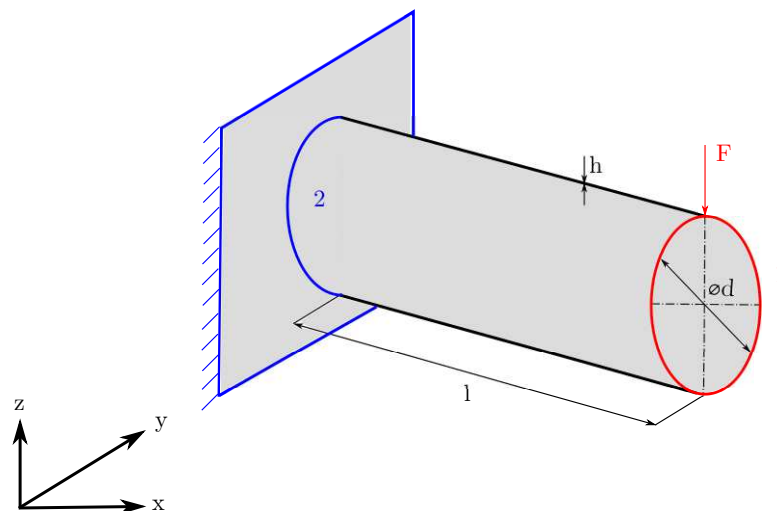
Výsledná rovnice s využitím předešlých substitucí je

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f}. \quad (2.82)$$

Testovací příklad

Jako testovací příklad byla vybrána trubka. Tato trubka je na jedné hraně 1 zatížena silou F a dokonale vetknuta na hraně 2. Schéma soustavy je znázorněno na Obr. 2.12 a jednotlivé hodnoty zadání v Tab. 2.6.

V Tab. 2.7 je porovnána závislost výsledného maximálního posunutí na počtu elementů a s komerčním softwarem ANSYS. Vykreslení celkového posunutí pro síť s největším počtem elementů, zvětšeno $100\times$ je znázorněno na Obr. 2.13.



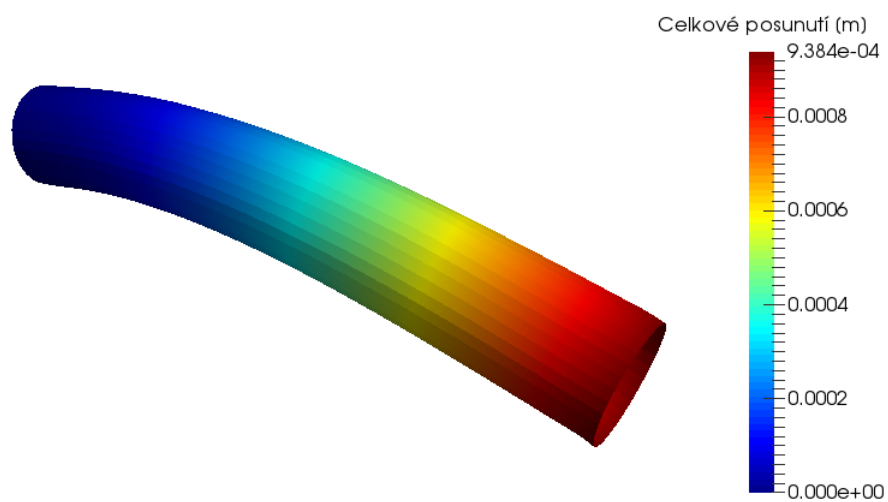
Obr. 2.12: Schéma úlohy

| Označení neznámé | Hodnota | Jednotka |
|------------------|---------|----------|
| l | 300 | mm |
| d | 50 | mm |
| h | 1 | mm |
| E | 210 000 | MPa |
| F | 1000 | N |
| ν | 0.3 | – |

Tab. 2.6: Hodnoty zadání

| Počet elementů | Procedura v Pythonu | ANSYS | Rozdíl [%] |
|----------------|---------------------|-------|------------|
| 128 | 1.015 | 1.044 | 2.78 |
| 480 | 0.950 | 0.957 | 0.73 |
| 1892 | 0.938 | 0.939 | 0.11 |

Tab. 2.7: Porovnání maximálního celkového posunutí [mm] a jeho závislost na počtu elementů



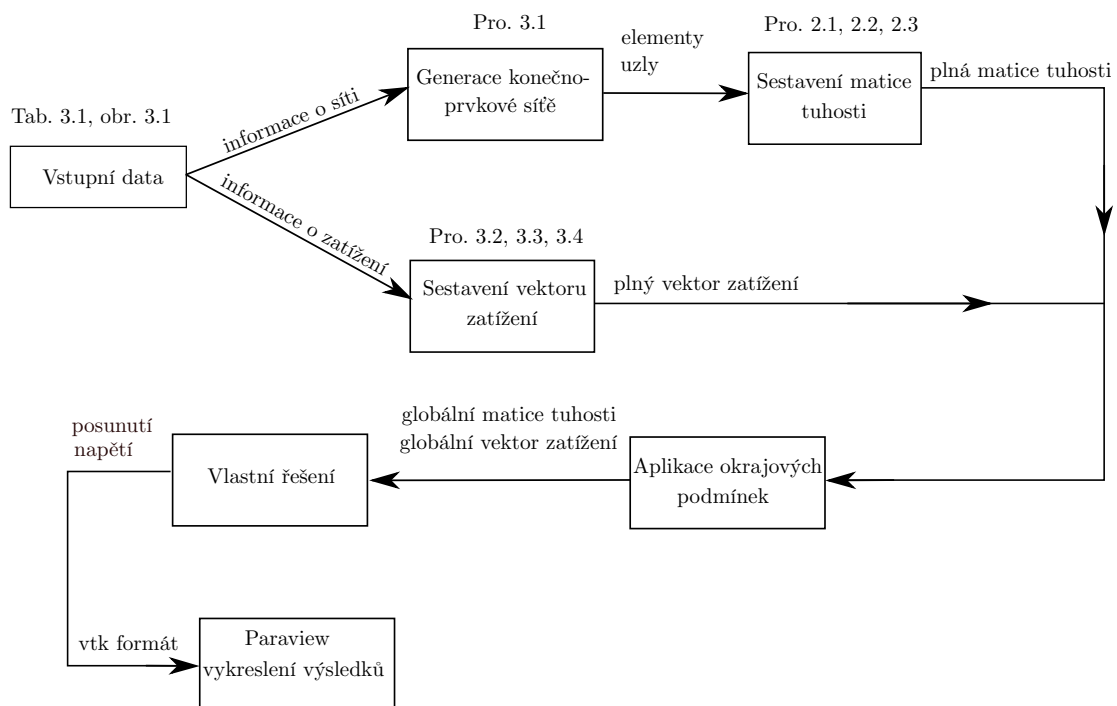
Obr. 2.13: Rozložení celkového posunutí zvětšeno 100×

Z Tab. 2.7 je zřejmé, že výsledky získané vlastní procedurou se téměř shodují s výsledky komerčního softwaru ANSYS a proto takto sestavenou proceduru můžeme považovat za ověřenou.

Kapitola 3

Návrh algoritmu

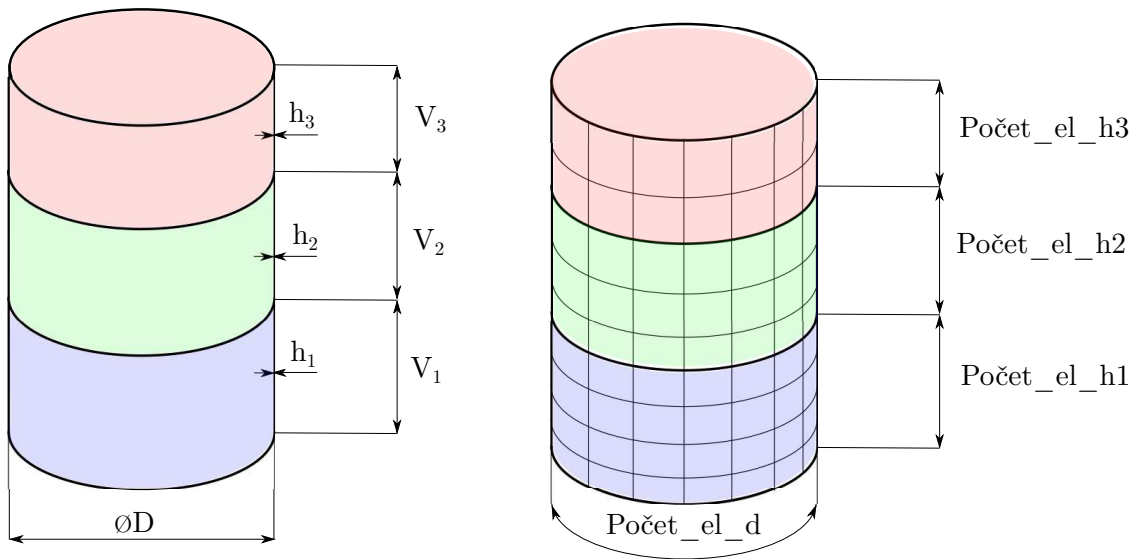
Po zadání vstupních dat viz Tab. 3.1 a Obr. 3.2 bude navržený výpočetní algoritmus schopen určit výsledky posunutí \mathbf{u} a redukovaného napětí σ podle hypotézy HMM a to jak neprůměrované, tak i průměrované. Výpočetní algoritmus je navržen tak, že je nádrž sestavena ze tří různých vrstev plechů různých tloušťek. Posloupnost výpočetního algoritmu je znázorněna na Obr. 3.1 a jednotlivé procedury budou detailněji rozebrány v dalších kapitolách. Průměrování napětí do bodů se provádí tak, že se pro každý bod sítě určí sousedící elementy. Výsledné průměrované napětí je pak určeno jako aritmetický průměr napětí sousedících elementů.



Obr. 3.1: Posloupnost algoritmu

| SKUPINA | POPIS PROMĚNNÉ | OZNAČENÍ |
|--------------------------------|--|------------------------|
| MATERIÁL | Modul pružnosti v tahu | E |
| | Poissonovo číslo | μ |
| | Hustota materiálu | ρ_m |
| GEOMETRIE | Průměr nádrže | D |
| | Výška 1. vrstvy plechů | V_1 |
| | Tloušťka 1. vrstvy plechů | h_1 |
| | Výška 2. vrstvy plechů | V_2 |
| | Tloušťka 2 vrstvy plechů | h_2 |
| | Výška 3. vrstvy plechů | V_3 |
| SÍŤ | Počet elementů na spodní hraně | Počet_el_d |
| | Počet elementů 1. vrstvy plechů na boční hraně | Počet_el_h1 |
| | Počet elementů 2. vrstvy plechů na boční hraně | Počet_el_h2 |
| | Počet elementů 3. vrstvy plechů na boční hraně | Počet_el_h3 |
| ZATÍŽENÍ HYDROSTATICKÝM TLAKEM | Hustota kapaliny | ρ |
| | Výška hladiny od dna nádrže | V_h |
| ZATÍŽENÍ VĚTREM | Základní rychlost vzduchu | v_b |
| | Pomocný součinitel flukтуаční složky tlaku | c_{fl} |
| | Charakteristika použité kategorie terénu | z_0 |
| | Součinitel orografie | C_0 |
| VYHODNOCENÍ | Součinitel koncového efektu | $\psi_{\lambda\alpha}$ |
| | Pozice vyhodnocovaného napětí na skořepině | Napětí_pozice |

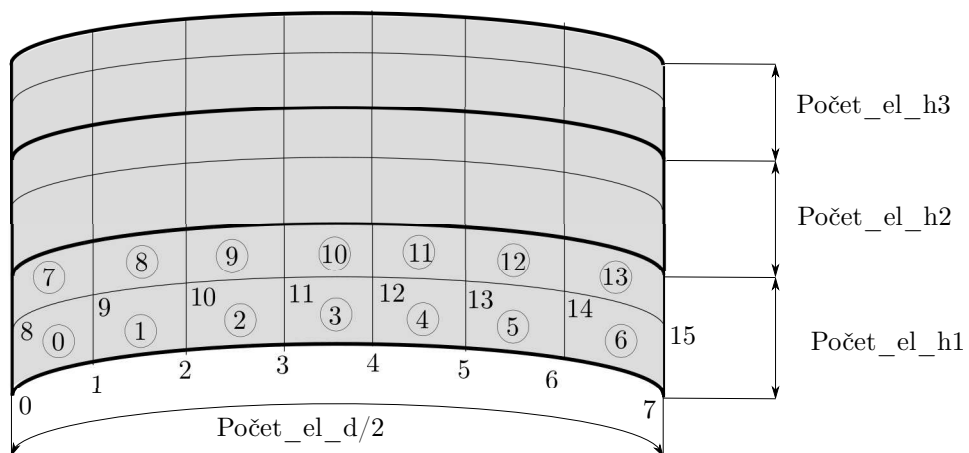
Tab. 3.1: Vstupní parametry



Obr. 3.2: Schéma ocelové nádrže

3.1 Tvorba konečnoprvkové sítě a okrajových podmínek

Protože geometrie úlohy i zatížení je symetrické, je výhodné využít pouze poloviční model a okrajových podmínek symetrie. Procedura pro tvorbu konečnoprvkové sítě byla navržena tak, aby dokázala ze vstupních parametrů vytvořit konečnoprvkovou síť a automaticky určila pozici okrajových podmínek. Pro válcové nádrže je vhodné využít polárních souřadnic, které jsou posléze přepočítány do kartézských. Číslování jednotlivých uzlů, elementů a jednotlivé vstupní parametry pro konečnoprvkovou síť jsou znázorněny na Obr. 3.3.



Obr. 3.3: Číslování uzlů a elementů

Pro sestavení konečnoprvkové sítě byla v programovacím jazyce Python vytvořena Pro. 3.1, která zprostředkovává dalším procedurám informaci o souřadnicích uzlů, skladbě elementů a pozici okrajových podmínek.

```

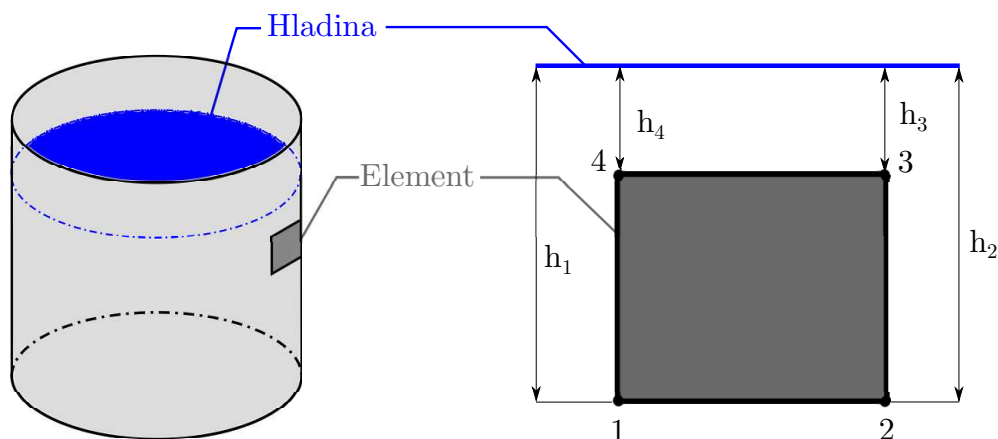
def sitar(D, vyska1, vyska2, vyska3, pocet_el_d, pocet_el_h1, pocet_el_h2, pocet_el_h3):
2   pocet_el_hc=pocet_el_h1+pocet_el_h2+pocet_el_h3
   r=D/2
4   d_alfa=180/pocet_el_d
   alfa=np.zeros((pocet_el_d+1,1), dtype=np.float64)
6   for i in range(pocet_el_d+1):
       alfa[i,0]=180-d_alfa*i
8   #prevod na radiany#
   alfa_rad=alfa*np.pi/180
10  #prepocet od polarnich osuradnic#
   x=np.zeros((pocet_el_d+1,1), dtype=np.float64) #x-ova souradnice#
12  y=np.zeros((pocet_el_d+1,1), dtype=np.float64) #y-ova souradnice#
   for i in range(pocet_el_d+1):
14     x[i,0]=r*np.cos(alfa_rad[i,0])
       y[i,0]=r*np.sin(alfa_rad[i,0])
16  z1=np.zeros((pocet_el_h1+1,1), dtype=np.float64)
   z2=np.zeros((pocet_el_h2,1), dtype=np.float64)
18  z3=np.zeros((pocet_el_h3,1), dtype=np.float64)
   d_z1=vyska1/pocet_el_h1
20  d_z2=vyska2/pocet_el_h2
   d_z3=vyska3/pocet_el_h3
22  for i in range(pocet_el_h1+1):
       z1[i,0]=d_z1*i
24  for i in range(pocet_el_h2):
       z2[i,0]=d_z2*(i+1)+z1[pocet_el_h1,0]
26  for i in range(pocet_el_h3):
       z3[i,0]=d_z3*(i+1)+z2[pocet_el_h2-1,0]
28  z=np.concatenate((z1, z2, z3), axis=0) #z-ova souradnice#
   #Vytvoreni matice souradnic jednotlivych uzlu P#
30  n=(pocet_el_d+1)*(pocet_el_hc+1)
   P=np.zeros((3,n), dtype=np.float64)
32  for i in range(pocet_el_hc+1):
       for j in range(pocet_el_d+1):
34         P[0, (pocet_el_d+1)*i+j]=x[j,0]
           P[1, (pocet_el_d+1)*i+j]=y[j,0]
36         P[2, (pocet_el_d+1)*i+j]=z[i,0]
   #Vytvoreni matice T, ve ktere je uvedeno ktere body tvori dany element#
38  m=(pocet_el_d)*(pocet_el_hc)
   T=np.zeros((4,m), dtype=np.float64)
40  T1=np.zeros((1,m), dtype=np.float64)
   for i in range(pocet_el_hc):
42     for j in range(pocet_el_d):
         T1[0, (pocet_el_d)*i+j]=j+(pocet_el_d+1)*i
44         T2=T1+1
           T3=T1+pocet_el_d+2
           T4=T3-1
46     T[0,:]=T1[0,:]
       T[1,:]=T2[0,:]
       T[2,:]=T3[0,:]
48     T[3,:]=T4[0,:]
   #Pozice uchyceni ID#
52  ID=np.zeros((1, pocet_el_d+1), dtype=np.float64)
   for i in range(pocet_el_d+1):
54     ID[0, i]=i
   #Pozice symetrie SYM#
56  SYM1=np.zeros((1, pocet_el_hc+1), dtype=np.float64)
   for i in range(pocet_el_hc+1):
58     SYM1[0, i]=i*(pocet_el_d+1)
   SYM2=np.zeros((1, pocet_el_hc+1), dtype=np.float64)
60  for i in range(pocet_el_hc+1):
       SYM2[0, i]=i*(pocet_el_d+1)+(pocet_el_d)
62  SYMETRY=np.concatenate((SYM1, SYM2), axis=1)
64  return (P, T, ID, SYMETRY)

```

Pro 3.1: Tvorba konečnoprvkové sítě

3.2 Zatížení hydrostatickým tlakem

Hydrostatický tlak patří do skupiny stálých zatížení a proto se jeho vliv zvyšuje o 35%. Působí vždy ve směru normály ke každému elementu, proto je výhodné jej zadávat v lokálních vektorech zatížení \mathbf{f}_i . Hydrostatický tlak se dá přepočítat do uzlových sil každého elementu. Tyto uzlové síly se do lokálního vektoru zatížení zadávají na pozici, která reprezentuje směr osy z .



Obr. 3.4: Znázornění vzdáleností h_1, h_2, h_3, h_4

$$\mathbf{f}_i = \{0, 0, f_{p1}, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, f_{p4}, 0, 0, 0\}^T \quad (3.1)$$

Jednotlivé uzlové síly $f_{p1}, f_{p2}, f_{p3}, f_{p4}$ lze určit z následujících vztahů

$$f_{p1} = \frac{\rho g h_1 S}{4}, \quad (3.2)$$

$$f_{p2} = \frac{\rho g h_2 S}{4}, \quad (3.3)$$

$$f_{p3} = \frac{\rho g h_3 S}{4}, \quad (3.4)$$

$$f_{p4} = \frac{\rho g h_4 S}{4}. \quad (3.5)$$

$$(3.6)$$

S označuje obsah daného elementu, ρ je hustota vody, g je gravitační zrychlení a h_1, h_2, h_3, h_4 jsou vzdálenosti jednotlivých bodů elementu od hladiny. Tyto vzdálenosti jsou znázorněny na Obr. 3.4. Pro sestavení lokálního vektoru zatížení od hydrostatického tlaku byla v programovacím jazyce Python vytvořena Pro. 3.2.

```

1 def vektZatizeniLoc_p(idx,T,x1,x2,x3,x4,y1,y2,y3,y4,z1,z2,z3,z4,p,m,n,E,nu,P,hladina,rho,g):
2     F_loc_p=np.zeros((24,1),dtype=np.float64)
3     ##### PREVOD NA LOKALNI SOURADNICE #####
4     H_loc=matTransformace(x1,x2,x3,x4,y1,y2,y3,y4,z1,z2,z3,z4,m,n,E,nu)
5     h_loc=np.zeros((3,3),dtype=np.float64)

```

```

7     index_h1=np.arange(0,3,1)
    vel_ID_h1=np.size(index_h1)
    for e in range(vel_ID_h1):
9         for f in range(vel_ID_h1):
            h_loc[index_h1[e],index_h1[f]]+=H_loc[e,f]
11        bod1=np.array([[x1],[y1],[z1]],dtype=np.float64)
        bod2=np.array([[x2],[y2],[z2]],dtype=np.float64)
13        bod3=np.array([[x3],[y3],[z3]],dtype=np.float64)
        bod4=np.array([[x4],[y4],[z4]],dtype=np.float64)
15        bod1_loc=np.dot(h_loc,bod1)
        bod2_loc=np.dot(h_loc,bod2)
17        bod3_loc=np.dot(h_loc,bod3)
        bod4_loc=np.dot(h_loc,bod4)
19        x1_loc=bod1_loc[0,0]
        y1_loc=bod1_loc[1,0]
21        z1_loc=bod1_loc[2,0]
        x2_loc=bod2_loc[0,0]
23        y2_loc=bod2_loc[1,0]
        z2_loc=bod2_loc[2,0]
25        x3_loc=bod3_loc[0,0]
        y3_loc=bod3_loc[1,0]
27        z3_loc=bod3_loc[2,0]
        x4_loc=bod4_loc[0,0]
29        y4_loc=bod4_loc[1,0]
        z4_loc=bod4_loc[2,0]
31        ##### URCENI VZDALENOSTI OD HLADINY #####
        vyska_1=hladina-z1
33        vyska_2=hladina-z2
        vyska_3=hladina-z3
35        vyska_4=hladina-z4
        ##### VYPOCET OBSAHU ELEMENTU #####
37        Z=(x1_loc*y2_loc-x2_loc*y1_loc)+(x2_loc*y3_loc-x3_loc*y2_loc)+(x3_loc*y4_loc-x4_loc*y3_loc)\
        +(x4_loc*y1_loc-x1_loc*y4_loc)
39        S=1/2*np.abs(Z)
        ##### VYPOCET HYDROSTATICKEHO TLAKU #####
41        if vyska_1>0:
            F_h1=rho*g*vyska_1*S/4
43        else:
            F_h1=0
45        if vyska_2>0:
            F_h2=rho*g*vyska_2*S/4
47        else:
            F_h2=0
49        if vyska_3>0:
            F_h3=rho*g*vyska_3*S/4
51        else:
            F_h3=0
53        if vyska_4>0:
            F_h4=rho*g*vyska_4*S/4
55        else:
            F_h4=0
57        F_loc_p[2,0]=-F_h1
        F_loc_p[8,0]=-F_h2
59        F_loc_p[14,0]=-F_h3
        F_loc_p[20,0]=-F_h4
61        return F_loc_p

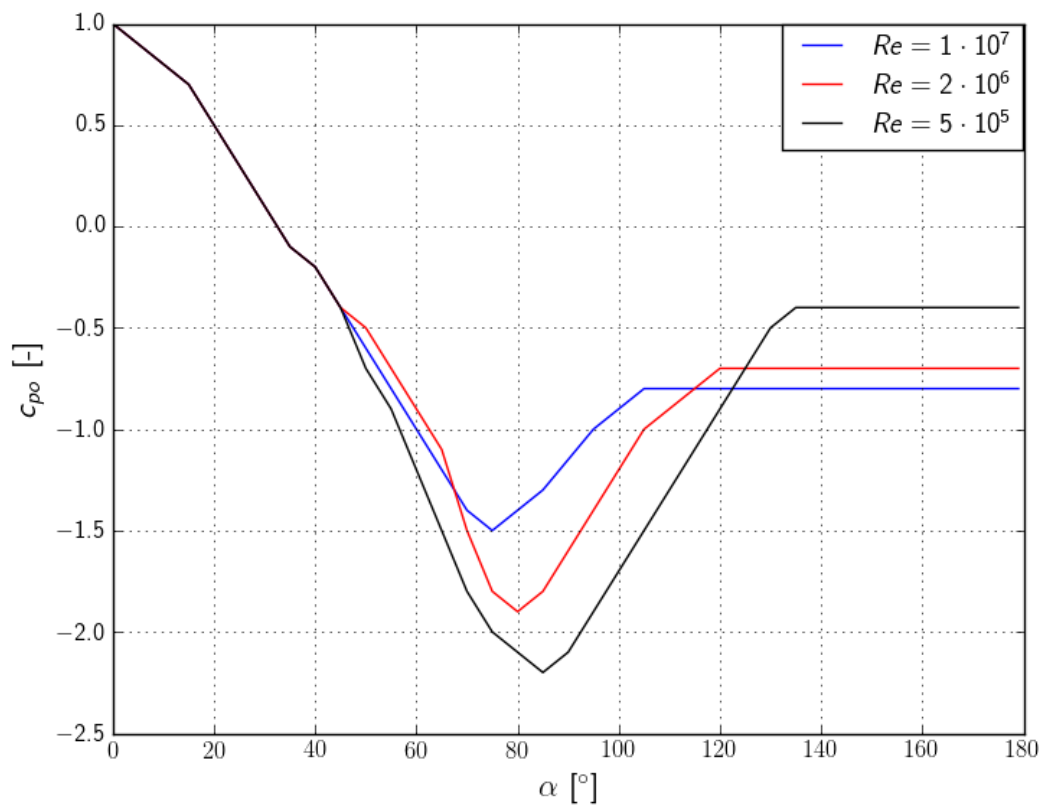
```

Pro 3.2: Lokální vektor zatížení od hydrostatického tlaku

3.3 Zatížení větrem

Zatížení větrem patří do skupiny náhodných zatížení, proto se jeho vliv zvětšuje o 50%. Na rozdíl od zatížení hydrostatickým tlakem, které je ovlivněno výškou hladiny, je zatížení větrem závislé na úhlu (Kap. 1.1). Protože pro součinitel vnějšího tlaku bez vlivu proudění kolem volných konců $c_{p,0}$ není křivka přesně dána rovnicí, bylo nutné vytvořit přibližnou křivku tak, že se každých 5° určila přibližná hodnota $c_{p,0}$. Vzniklé body se poté lineárně interpolovaly. Toto bylo provedeno se všemi třemi křivkami v dané normě a výsledek je zobrazen na Obr. 3.5. Procedura byla sestavena tak, aby po zadání v_b [ms^{-1}] byla schopna určit na základě Reynoldsova čísla, jakou křivku a konkrétní hodnoty $c_{p,0}$ použít pro určení správné hodnoty tlaku, který působí na vnější povrch nádrže.

Pro sestavení lokálního vektoru zatížení od tlaku větru na vnější povrch nádrže byla v programovacím jazyce Python vytvořena Pro. 3.3.



Obr. 3.5: Závislost součinitele $c_{p,0}$ na úhlu α

```

def vektZatizeniLoc_vitr(idx,T,x1,x2,x3,x4,y1,y2,y3,y4,z1,z2,z3,z4,p_vzduch,m,n,E,nu,x0,y0,F_cpo,
    psi_k,alfa_min,alfa_a):
2     ##### PŘEVOD NA LOKÁLNÍ SOURADNICE #####
    F_loc_vitr=np.zeros((24,1),dtype=np.float64)
4     H_loc=matTransformace(x1,x2,x3,x4,y1,y2,y3,y4,z1,z2,z3,z4,m,n,E,nu)
    h_loc=np.zeros((3,3),dtype=np.float64)
6     index_h1=np.arange(0,3,1)
    vel_ID_h1=np.size(index_h1)
8     for e in range(vel_ID_h1):
        for f in range(vel_ID_h1):
10            h_loc[index_h1[e],index_h1[f]]+=H_loc[e,f]
    bod1=np.array([[x1],[y1],[z1]],dtype=np.float64)
12    bod2=np.array([[x2],[y2],[z2]],dtype=np.float64)
    bod3=np.array([[x3],[y3],[z3]],dtype=np.float64)
14    bod4=np.array([[x4],[y4],[z4]],dtype=np.float64)
    bod1_loc=np.dot(h_loc,bod1)
16    bod2_loc=np.dot(h_loc,bod2)
    bod3_loc=np.dot(h_loc,bod3)
18    bod4_loc=np.dot(h_loc,bod4)
    x1_loc=bod1_loc[0,0]
20    y1_loc=bod1_loc[1,0]
    x2_loc=bod2_loc[0,0]
22    y2_loc=bod2_loc[1,0]
    x3_loc=bod3_loc[0,0]
24    y3_loc=bod3_loc[1,0]
    x4_loc=bod4_loc[0,0]
26    y4_loc=bod4_loc[1,0]
    ##### VÝPOČET OBSAHU ELEMENTU #####
28    Z=(x1_loc*y2_loc-x2_loc*y1_loc)+(x2_loc*y3_loc-x3_loc*y2_loc)+(x3_loc*y4_loc-x4_loc*y3_loc)+(
        x4_loc*y1_loc-x1_loc*y4_loc)
    S=1/2*np.abs(Z)
30    ##### URČENÍ SPRÁVNEHO c_p0 VE VSECH UZLECH #####
    c_po_c=np.zeros((4,1),dtype=np.float64)

```

```

32  alfa_c=np.zeros((4,1),dtype=np.float64)
    ##### URCENI UHLU APLHA PRO KAZDY BOD #####
34  alfa_c[0,0]=np.arctan2(y1-y0,x1-x0)
    alfa_c[1,0]=np.arctan2(y2-y0,x2-x0)
36  alfa_c[2,0]=np.arctan2(y3-y0,x3-x0)
    alfa_c[3,0]=np.arctan2(y4-y0,x4-x0)
38  alfa_deg=180-alfa_c*180/np.pi
    for k in range(4):
40      alfa=(alfa_deg[k,0])
        c_po_c[k,0]=cpo(alfa,F_cpo)
42  c_po1=c_po_c[0,0]
    c_po2=c_po_c[1,0]
44  c_po3=c_po_c[2,0]
    c_po4=c_po_c[3,0]
46  ##### URCENI SPRAVNEHO SOUCINITELE KONCOVEHO EFEKTU VE VSECH UZLECH #####
    if alfa_deg[0,0]<alfa_min or alfa_deg[0,0]==alfa_min:
48      psi_k_a1=1
        if alfa_deg[0,0]>alfa_min and alfa_deg[0,0]<alfa_a:
50          psi_k_a1=psi_k+(1-psi_k)*np.cos(((np.pi)/2)*((alfa_deg[0,0]-alfa_min)/(alfa_a-alfa_min)))
        if alfa_deg[0,0]>alfa_a or alfa_deg[0,0]==alfa_a:
52          psi_k_a1=psi_k
        if alfa_deg[1,0]<alfa_min or alfa_deg[1,0]==alfa_min:
54          psi_k_a2=1
        if alfa_deg[1,0]>alfa_min and alfa_deg[1,0]<alfa_a:
56          psi_k_a2=psi_k+(1-psi_k)*np.cos(((np.pi)/2)*((alfa_deg[1,0]-alfa_min)/(alfa_a-alfa_min)))
        if alfa_deg[1,0]>alfa_a or alfa_deg[1,0]==alfa_a:
58          psi_k_a2=psi_k
        if alfa_deg[2,0]<alfa_min or alfa_deg[2,0]==alfa_min:
60          psi_k_a3=1
        if alfa_deg[2,0]>alfa_min and alfa_deg[2,0]<alfa_a:
62          psi_k_a3=psi_k+(1-psi_k)*np.cos(((np.pi)/2)*((alfa_deg[2,0]-alfa_min)/(alfa_a-alfa_min)))
        if alfa_deg[2,0]>alfa_a or alfa_deg[2,0]==alfa_a:
64          psi_k_a3=psi_k
        if alfa_deg[3,0]<alfa_min or alfa_deg[3,0]==alfa_min:
66          psi_k_a4=1
        if alfa_deg[3,0]>alfa_min and alfa_deg[3,0]<alfa_a:
68          psi_k_a4=psi_k+(1-psi_k)*np.cos(((np.pi)/2)*((alfa_deg[3,0]-alfa_min)/(alfa_a-alfa_min)))
        if alfa_deg[3,0]>alfa_a or alfa_deg[3,0]==alfa_a:
70          psi_k_a4=psi_k
    ##### URCENI SPRAVNE UZLOVE SILY OD TLAKU VETRU #####
72  F_vitr1=(S/4)*c_po1*psi_k_a1*p_vzduch
    F_vitr2=(S/4)*c_po2*psi_k_a2*p_vzduch
74  F_vitr3=(S/4)*c_po3*psi_k_a3*p_vzduch
    F_vitr4=(S/4)*c_po4*psi_k_a4*p_vzduch
76  F_loc_vitr[2,0]=F_vitr1
    F_loc_vitr[8,0]=F_vitr2
78  F_loc_vitr[14,0]=F_vitr3
    F_loc_vitr[20,0]=F_vitr4
80  return F_loc_vitr

```

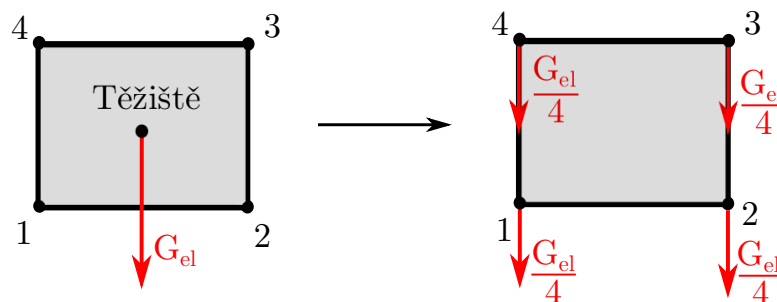
Pro 3.3: Lokální vektor zatížení od tlaku větru \mathbf{f}_v

3.4 Zatížení vlastní tíhou

Zatížení vlastní tíhou patří do skupiny stálých zatížení a proto se jeho vliv navyšuje o 35%. Tíhová síla každého elementu G_{el} se dá určit z

$$G_{el} = m g = \rho_m S h g, \quad (3.7)$$

kde h je tloušťka elementu, S je obsah elementu, ρ_m je hustota materiálu plechu a g je tíhové zrychlení. Tíhová síla má působíště v těžišti daného elementu a bylo ji třeba rozdělit do jednotlivých uzlů, viz. Obr. 3.6.



Obr. 3.6: Rozdělení tíhové síly od uzlů

Pro sestavení lokálního vektoru zatížení od vlastní tíhy byla v programovacím jazyce Python vytvořena Pro. 3.4.

```

1 def vektZatizeniLoc_g(idx,T,x1,x2,x3,x4,y1,y2,y3,y4,z1,z2,z3,z4,p,m,n,E,nu,P,rho_mat,g,h1,h2,h3,
2     vyska1,vyska2,vyska3):
3     F_loc_g=np.zeros((24,1),dtype=np.float64)
4     ##### PŘEVOD NA LOKÁLNÍ SOURADNICE #####
5     H_loc=matTransformace(x1,x2,x3,x4,y1,y2,y3,y4,z1,z2,z3,z4,m,n,E,nu)
6     h_loc=np.zeros((3,3),dtype=np.float64)
7     index_h1=np.arange(0,3,1)
8     vel_ID_h1=np.size(index_h1)
9     for e in range(vel_ID_h1):
10        for f in range(vel_ID_h1):
11            h_loc[index_h1[e],index_h1[f]]+=H_loc[e,f]
12        bod1=np.array([[x1],[y1],[z1]],dtype=np.float64)
13        bod2=np.array([[x2],[y2],[z2]],dtype=np.float64)
14        bod3=np.array([[x3],[y3],[z3]],dtype=np.float64)
15        bod4=np.array([[x4],[y4],[z4]],dtype=np.float64)
16        bod1_loc=np.dot(h_loc,bod1)
17        bod2_loc=np.dot(h_loc,bod2)
18        bod3_loc=np.dot(h_loc,bod3)
19        bod4_loc=np.dot(h_loc,bod4)
20        x1_loc=bod1_loc[0,0]
21        y1_loc=bod1_loc[1,0]
22        z1_loc=bod1_loc[2,0]
23        x2_loc=bod2_loc[0,0]
24        y2_loc=bod2_loc[1,0]
25        z2_loc=bod2_loc[2,0]
26        x3_loc=bod3_loc[0,0]
27        y3_loc=bod3_loc[1,0]
28        z3_loc=bod3_loc[2,0]
29        x4_loc=bod4_loc[0,0]
30        y4_loc=bod4_loc[1,0]
31        z4_loc=bod4_loc[2,0]
32        ##### VÝPOČET OBSAHU ELEMENTU #####
33        Z=(x1_loc*y2_loc-x2_loc*y1_loc)+(x2_loc*y3_loc-x3_loc*y2_loc)+(x3_loc*y4_loc-x4_loc*y3_loc)\
34            +(x4_loc*y1_loc-x1_loc*y4_loc)
35        S=1/2*np.abs(Z)
36        stredni_vyska=(z1+z2+z3+z4)/4
37        if stredni_vyska<vyska1:
38            h=h1
39        if stredni_vyska>(vyska1+vyska2):
40            h=h3
41        if stredni_vyska>vyska1 and stredni_vyska<(vyska1+vyska2):
42            h=h2
43        hmotnost=rho_mat*S*h
44        F_loc_g[2]=-hmotnost*g/4
45        F_loc_g[8]=-hmotnost*g/4
46        F_loc_g[14]=-hmotnost*g/4
47        F_loc_g[20]=-hmotnost*g/4
48        return F_loc_g

```

Pro 3.4: Lokální vektor zatížení od vlastní tíhy \mathbf{f}_g

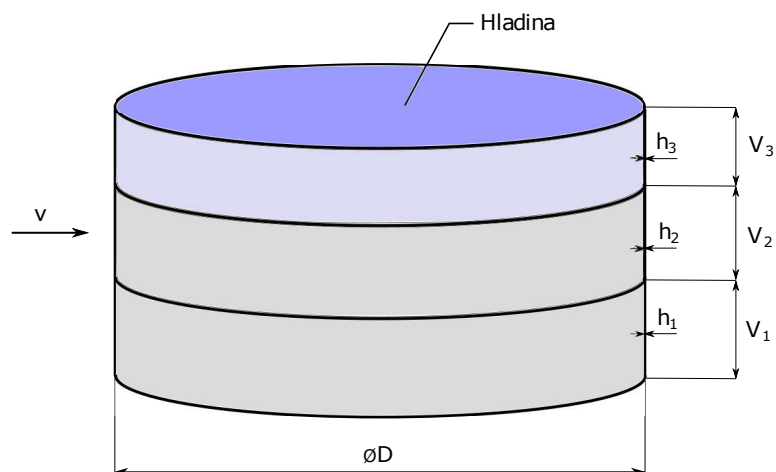
Kapitola 4

Pevnostní kontrola

Pro pevnostní kontrolu s využitím popsaného vlastního algoritmu byla vybrána nádrž na vodu typ EQ2a od společnosti Vítkovice Machinery Group. Výsledky získané vlastním algoritmem byly pro každý zátěžný stav srovnány s komerčním softwarem ANSYS. Jednotlivé rozměry nádrže, konkrétní hodnoty zatížení a zavedení okrajových podmínek bude rozebráno dále v textu.

4.1 Schéma úlohy

Nádrž o průměru D se skládá ze tří vrstev plechů o výškách V_1, V_2, V_3 a tloušťkách h_1, h_2, h_3 . Schéma úlohy je znázorněno na Obr. 4.1 a jednotlivé hodnoty rozměrových parametrů jsou zapsány v Tab. 4.1. Předpokládá se, že nádrž bude naplněna vodou až po horní okraj a vítr bude proudit zleva doprava.



Obr. 4.1: Schéma úlohy

| Popis parametru | Značení parametru | Hodnota | Jednotka |
|------------------------------|-------------------|---------|----------|
| Průměr nádrže | D | 15.43 | m |
| Výška první vrstvy plechů | V_1 | 1.455 | m |
| Výška druhé vrstvy plechů | V_2 | 1.455 | m |
| Výška třetí vrstvy plechů | V_3 | 1.455 | m |
| Tloušťka první vrstvy plechů | h_1 | 4.000 | mm |
| Tloušťka druhé vrstvy plechů | h_2 | 4.000 | mm |
| Tloušťka třetí vrstvy plechů | h_3 | 3.000 | mm |

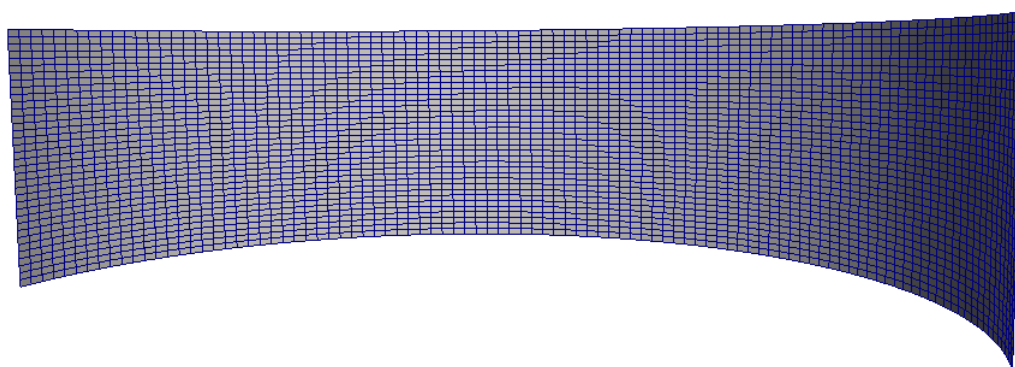
Tab. 4.1: Hodnoty parametrů

4.2 Konečnoprvková síť

Zvolená konečnoprvková síť byla získána pomocí Pro. 3.1. Vstupní parametry pro tuto proceduru byly voleny tak, aby se tvar jednotlivých elementů co nejvíce blížil čtverci. Počet elementů byl postupně navyšován, dokud rozdíl v získaných výsledcích (posunutí, napětí) byl menší než 5% oproti předchozímu počtu elementů. Konečnoprvková síť zvolená pro tento konkrétní případ je znázorněna na Obr. 4.2 a její parametry jsou shrnuty v Tab. 4.2.

| Popis parametru | Značení parametru | Hodnota |
|---------------------------------|-------------------|---------|
| Počet elementů na spodní hraně | Počet_el_d | 200 |
| Počet elementů plechů 1. vrstvy | Počet_el_h1 | 12 |
| Počet elementů plechu 2. vrstvy | Počet_el_h2 | 12 |
| Počet elementů plechu 3. vrstvy | Počet_el_h3 | 12 |
| Počet uzlů | m | 3737 |
| Počet elementů | n | 3600 |

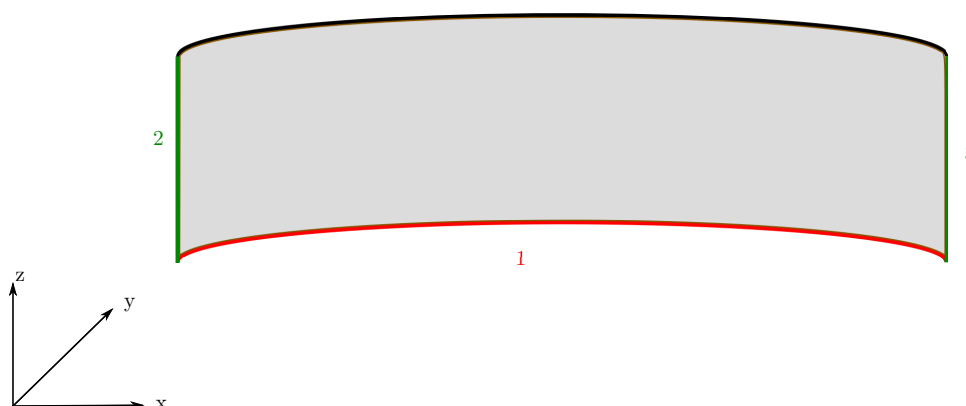
Tab. 4.2: Hodnoty parametrů sítě



Obr. 4.2: Zvolená konečnoprvková síť

4.3 Okrajové podmínky

Protože dno nádrže je zalito do betonu, je na spodní hraně nádrže 1 předepsáno nulové posunutí a natočení ve všech směrech. Na hrany 2 a 3 je zavedena podmínka symetrie, takže je zde zamezeno posunutí ve směru osy y a natočení okolo osy z . Tyto okrajové podmínky jsou znázorněny na Obr. 4.3.



Obr. 4.3: Znázornění okrajových podmínek

4.4 Materiálová data

Jak už bylo zmíněno v jedné z předchozích kapitol, je uvažován izotropní elastický materiál. Použitý materiál je ocel KOSMALT-E 300T. Její mechanické vlastnosti jsou shrnuty v Tab. 4.3.

Tab. 4.3: Mechanické vlastnosti

| Mechanická vlastnost | Značka | Hodnota | Jednotka |
|------------------------|--------|-----------|------------------|
| Mez kluzu | R_e | 300 – 450 | MPa |
| Mez pevnosti | R_m | 350 – 550 | MPa |
| Poissonovo číslo | μ | 0.3 | - |
| Modul pružnosti v tahu | E | 210 000 | MPa |
| Hustota oceli | ρ | 7850 | kgm ³ |

4.5 Analýza výsledků

V následujících kapitolách budou rozebrány jednotlivé zátěžné stavy a bude vidět jejich porovnání s komerčním softwarem ANSYS. Posuzovat se budou průměrovaná napětí. Pozice napětí na skořepinovém elementu mohou být trojího typu, a to na spodní nebo horní ploše a na střednici. Ve výpočetním algoritmu lze zadat, které napětí má být vyhodnocováno dle Tab. 4.4. Horní plocha skořepiny je na vnitřní straně nádrže a spodní plocha je na vnější straně. Pro každý konkrétní typ zatížení bude uvedeno, na jaké ploše bude napětí vyhodnoceno.

| Poloha napětí | Napětí_pozice |
|---------------|---------------|
| Horní plocha | 1 |
| Střednice | 0 |
| Spodní plocha | -1 |

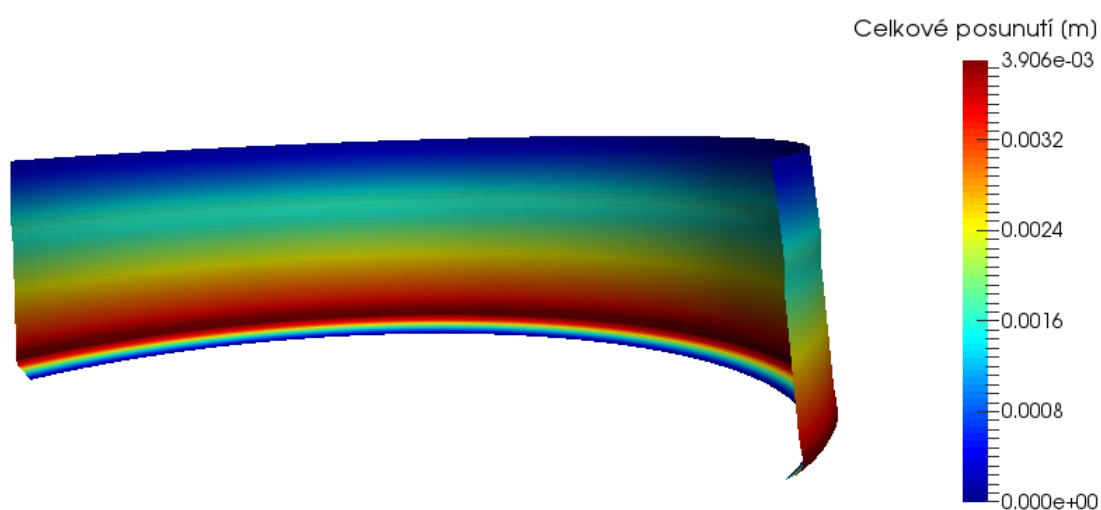
Tab. 4.4: Nastavení vyhodnocovaného napětí

4.5.1 Vliv zatížení hydrostatickým tlakem

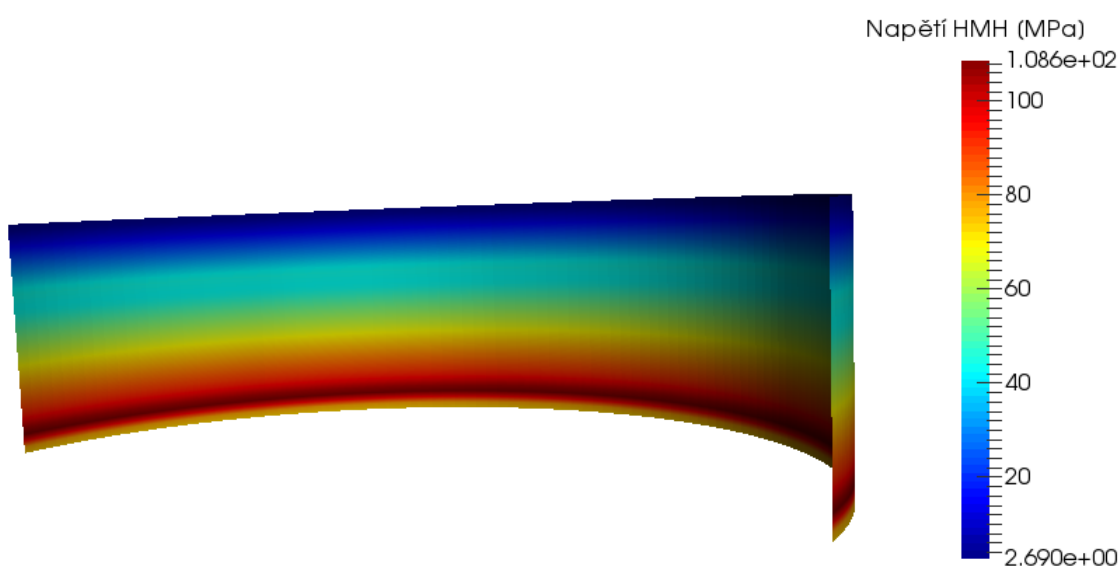
V tomto konkrétním případě je nádrž naplněna vodou až po její horní okraj. Porovnané napětí bude vyhodnocováno na vnitřním plášti nádrže, protože zde dosahuje nejvyšších hodnot. Porovnání maximálních celkových posunutí a napětí podle hypotézy HMM je znázorněno v Tab. 4.5. Rozložení celkových posunutí zvětšeno 100× je znázorněno na Obr. 4.4. Rozložení redukovaného napětí podle hypotézy HMM je znázorněno na Obr. 4.5.

| Popis | Vlastní algoritmus | ANSYS | Rozdíl [%] |
|---|-----------------------|-----------------------|------------|
| Maximální celkové posunutí [m] | $3.906 \cdot 10^{-3}$ | $4.019 \cdot 10^{-3}$ | 2.81 |
| Maximální napětí podle hypotézy HMM [MPa] | 108.6 | 122.1 | 11.06 |

Tab. 4.5: Porovnání maximálního celkového posunutí a napětí



Obr. 4.4: Rozložení celkového posunutí zvětšeno 100×



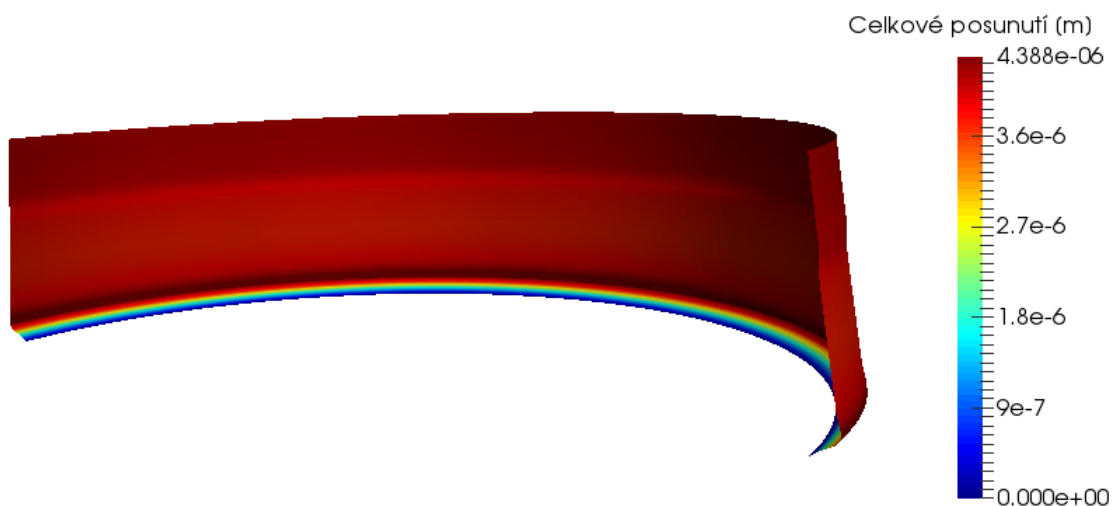
Obr. 4.5: Rozložení redukovaného napětí podle HMM hypotézy

4.5.2 Vliv zatížení vlastní tíhy

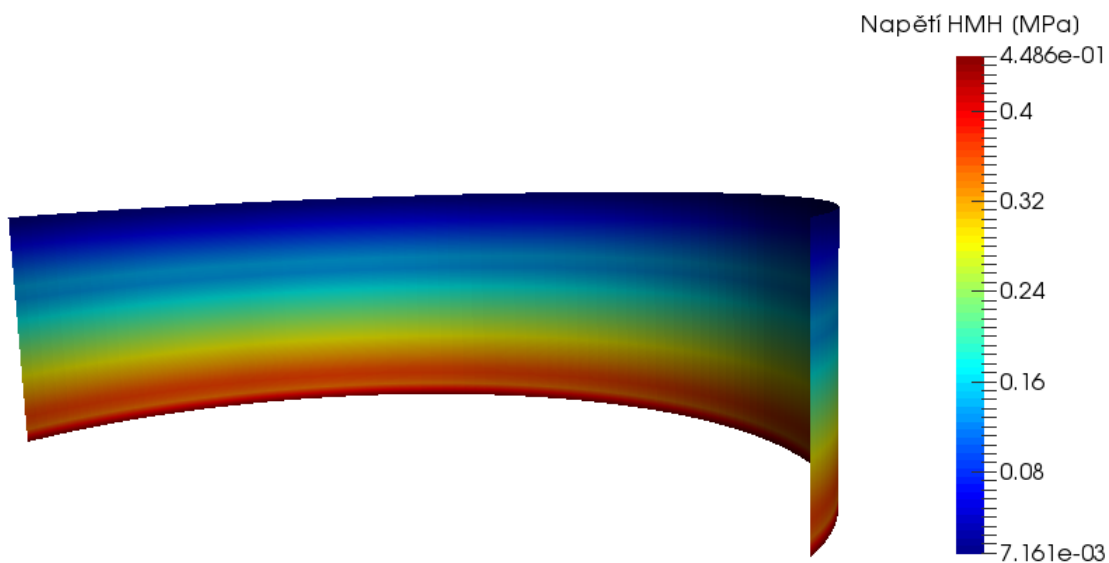
Toto zatížení má smysl uvažovat u struktur, kde jejich hmotnost dosahuje poměrně vysokých hodnot. Napětí bude vyhodnocováno na vnějším plášti nádrže. Porovnání maximálních celkových posunutí a napětí podle hypotézy HMH je znázorněno v Tab. 4.6. Rozložení celkových posunutí zvětšeno 100 000× je znázorněno na Obr. 4.6. Rozložení redukovaného napětí podle hypotézy HMH je znázorněno na Obr. 4.7.

| Popis | Vlastní algoritmus | ANSYS | Rozdíl [%] |
|---|-----------------------|-----------------------|------------|
| Maximální celkové posunutí [m] | $4.388 \cdot 10^{-6}$ | $4.509 \cdot 10^{-6}$ | 2.68 |
| Maximální napětí podle hypotézy HMH [MPa] | 0.449 | 0.458 | 1.97 |

Tab. 4.6: Porovnání maximálního celkového posunutí a napětí



Obr. 4.6: Rozložení celkového posunutí zvětšeno 100 000×



Obr. 4.7: Rozložení redukovaného napětí podle HMH hypotézy

4.5.3 Vliv zatížení větrem

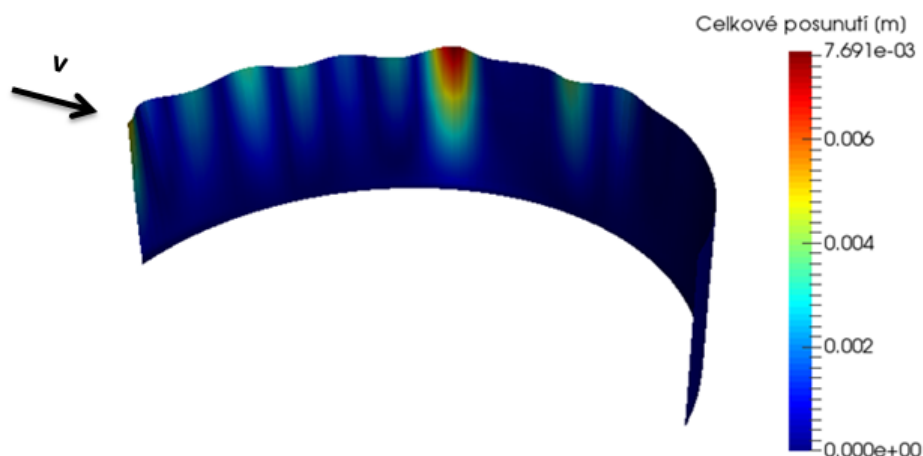
Pevnostní posouzení od zatížení větrem navazuje na kap. 3.3, kde je popsán způsob zadávání výsledného tlaku. Pro tuto konkrétní nádrž jsou v Tab. 4.7 uvedeny hodnoty parametrů zatížení s využitím vztahů z kap. 1.1. Pro součinitel vnějšího tlaku bez vlivu proudění kolem volných konců $c_{p,0}$ byla vybrána modrá křivka viz. Obr. 3.5. Porovnání maximálního celkového posunutí a napětí podle hypotézy HMH je znázorněna v Tab. 4.8. Rozložení celkového posunutí zvětšeno $100\times$ je znázorněno na Obr. 4.8. Rozložení redukovaného napětí podle hypotézy HMH je znázorněno na Obr. 4.9. Toto napětí je vyhodnocováno na vnějším plášti nádrže, protože zde nabývá nejvyšších hodnot.

| Popis | Označení parametru | Hodnota | Jednotka |
|--|--------------------|-------------------|------------------|
| Základní rychlost větru | V_b | 44.500 | ms^{-1} |
| Střední rychlost větru | V_m | 37.800 | ms^{-1} |
| Součinitel orografie | C_0 | 1.000 | - |
| Referenční výška | z_e | 4.365 | m |
| Charakteristika použité kategorie terénu | z_0 | 0.050 | m |
| Součinitel terénu | k_r | 0.190 | - |
| Součinitel drsnosti terénu | C_r | 0.850 | - |
| Pomocný součinitel flukтуаční složky tlaku | c_{fl} | 1.330 | - |
| Intenzita turbulence | I_v | 0.220 | - |
| Základní dynamický tlak | g_b | 1237 | Nm^{-2} |
| Součinitel expozice | c_e | 1.850 | - |
| Maximální dynamický tlak | g_p | 2290 | Nm^{-2} |
| Reynoldsovo číslo | Re | $4.58 \cdot 10^7$ | - |
| Efektivní štíhlost | λ | 3.530 | - |
| Součinitel koncového efektu | ψ_λ | 0.650 | - |

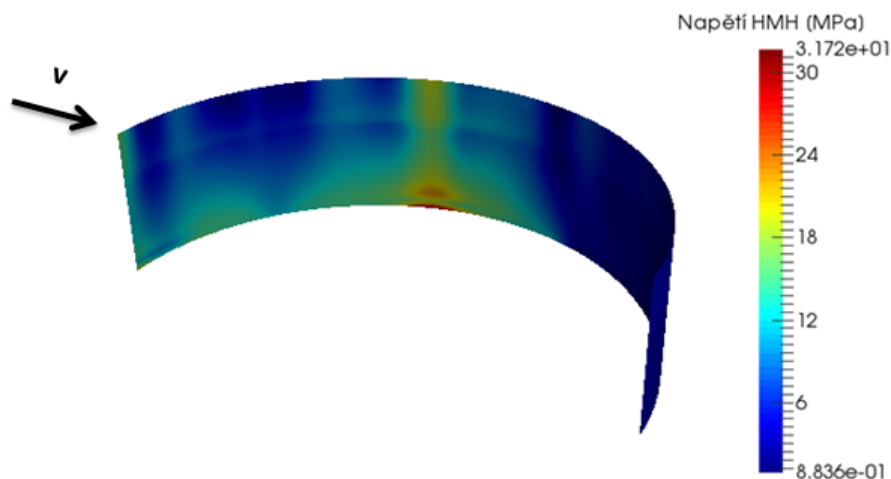
Tab. 4.7: Konkrétní hodnoty parametrů zatížení

| Popis | Vlastní algoritmus | ANSYS | Rozdíl [%] |
|---|-----------------------|-----------------------|------------|
| Maximální celkové posunutí [m] | $7.691 \cdot 10^{-3}$ | $7.478 \cdot 10^{-3}$ | 2.85 |
| Maximální napětí podle hypotézy HMM [MPa] | 31.7 | 32.4 | 2.16 |

Tab. 4.8: Porovnání maximálního celkového posunutí a napětí



Obr. 4.8: Rozložení celkového posunutí zvětšeno 100×



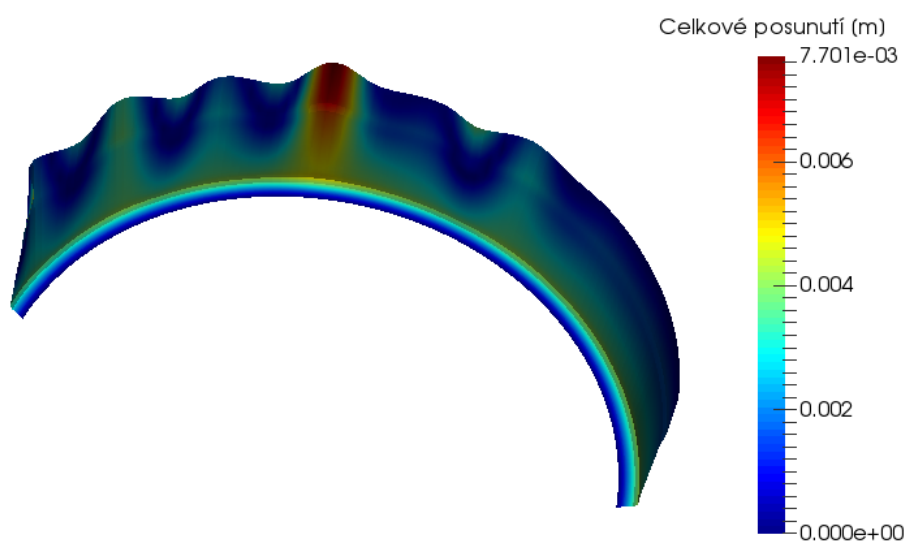
Obr. 4.9: Rozložení redukovaného napětí podle HMH hypotézy

4.5.4 Vliv kombinace zatížení

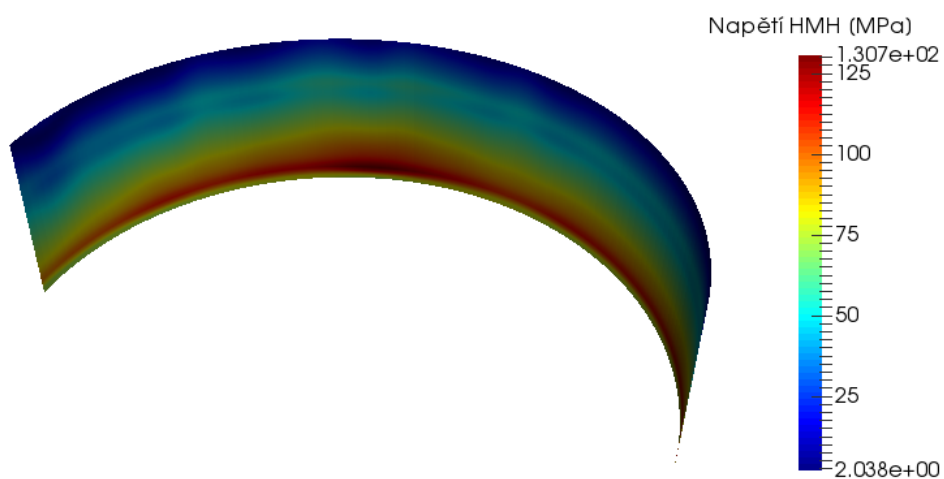
Celkové zatížení nádrže se bude skládat z výstupů z Kap. 4.5.1, 4.5.2, 4.5.3, které představují zatížení hydrostatickým tlakem, větrem a vlastní tíhou. Princip metody konečných prvků dovoluje velmi jednoduše tyto jednotlivé zatížení spojit a to tak, že se sečtou jednotlivé lokální vektory zatížení. Porovnání maximálních celkových posunutí a napětí podle hypotézy HMH je znázorněno v Tab. 4.9. Rozložení celkových posunutí zvětšeno 100× je znázorněno na Obr. 4.10. Rozložení redukovaného napětí podle hypotézy HMH je znázorněno na Obr. 4.11. Toto napětí je vyhodnocováno na vnitřním plášti nádrže, protože zde nabývá nejvyšších hodnot.

| Popis | Vlastní algoritmus | ANSYS | Rozdíl [%] |
|---|-----------------------|-----------------------|------------|
| Maximální celkové posunutí [m] | $7.701 \cdot 10^{-3}$ | $7.495 \cdot 10^{-3}$ | 2.75 |
| Maximální napětí podle hypotézy HMM [MPa] | 130.7 | 148.1 | 11.75 |

Tab. 4.9: Porovnání maximálního celkového posunutí a napětí



Obr. 4.10: Rozložení celkových posunutí zvětšeno 100×



Obr. 4.11: Rozložení redukovaného napětí podle HMM hypotézy

4.5.5 Zhodnocení bezpečnosti

Pro pevnostní posouzení nádrže zatěžované kombinovaným zatížením pomocí vlastního algoritmu lze využít koeficient bezpečnosti k_{bez} určený vůči mezi kluzu

$$k_{bez} = \frac{R_e}{\sigma_{max}} = \frac{300}{131} \doteq 2.3, \quad (4.1)$$

kde R_e je spodní hodnota meze kluzu použitého materiálu a σ_{max} je maximální hodnota redukovaného napětí podle hypotézy HMM. Pro hodnotu $k_{bez} = 2.3$ lze usoudit, že nádrž pevnostně **splňuje požadavky bezpečnosti**. Napětí způsobené vlastní tíhou pro tento typ nádrže je řádově podstatně menší než od zbylých dvou zatížení, můžeme proto vliv tohoto zatížení zanedbat.

Kapitola 5

Zhodnocení a závěr

Podnět ke zhotovení této práce dala společnost Vítkovice Machinery Group, která vyrábí nádrže pro uskladnění vody. Protože potřebují pevnostně zkontrolovat jenom jeden typ úlohy, u které se pouze mění vstupní parametry (geometrie, materiál, výška hladiny, lokalita), je pro tuto společnost zbytečné kupovat komerční software, který dostatečně nevyužijí. Proto byl dle jejich požadavků sestaven výpočetní algoritmus ve volně dostupném programovacím jazyce Python. Celá tato práce se zabývá postupným vývojem algoritmu, od vstupních údajů až po pevnostní vyhodnocení.

V první části bylo rozebráno zatížení nádrží a především byla rozebrána norma ČSN EN 1991 – 1 – 4, která popisuje působení větru na vnější plášť nádrže. Ve druhé části se dospělo k závěru, že nejvhodnější bude použít skořepinové prvky a proto je zde rozebrán jejich matematický popis i s testovacími příklady, které jsou pak porovnány s komerčním softwarem ANSYS nebo přímo s literaturou. Ve třetí části je popsáno schéma algoritmu, tvorba jednotlivých procedur pro tvorbu konečnoprvkové sítě a jednotlivých zátěžných stavů. V poslední části jsou uvedeny výsledky jednotlivých zátěžných stavů a jejich porovnání s komerčním softwarem. Konečným výstupem je rozložení celkových posunutí a napětí podle hypotézy HMM. Tyto výsledky jsou graficky realizovány pomocí volně dostupného programu ParaView.

5.1 Porovnání výsledků

Jak už bylo uvedeno, jednotlivé zátěžné stavy z předchozích kapitol byly řešeny vlastním algoritmem a porovnány s komerčním softwarem ANSYS. Pro posouzení rozdílu v jednotlivých přístupech je zavedena relativní odchylka. Tato odchylka v procentech je počítána pomocí vztahu

$$Err = \frac{|X_A - X_P|}{X_A} \cdot 100, \quad (5.1)$$

kde X značí konkrétní posuzovanou hodnotu (napětí, posunutí), index A označuje výsledek z komerčního softwaru ANSYS a index P označuje výsledek získaný vlastní procedurou v Pythonu. Porovnání pro jednotlivé zátěžné stavy je uvedeno v Tab. 5.1.

| ZÁTĚŽNÝ STAV | VELIČINA | VLASTNÍ ALGORITMUS | ANSYS | Err [%] |
|--------------------|------------------|-----------------------|-----------------------|---------|
| HYDROSTATICKÝ TLAK | Posunutí [m] | $3.906 \cdot 10^{-3}$ | $4.019 \cdot 10^{-3}$ | 2.81 |
| | HMH napětí [MPa] | 108.6 | 122.1 | 11.06 |
| VLASTNÍ TÍHA | Posunutí [m] | $4.388 \cdot 10^{-6}$ | $4.509 \cdot 10^{-6}$ | 2.68 |
| | HMH napětí [MPa] | 0.449 | 0.458 | 1.97 |
| ZATÍŽENÍ VĚTREM | Posunutí [m] | $7.691 \cdot 10^{-3}$ | $7.478 \cdot 10^{-3}$ | 2.85 |
| | HMH napětí [MPa] | 31.7 | 32.9 | 2.16 |
| KOMBINACE ZATÍŽENÍ | Posunutí [m] | $7.701 \cdot 10^{-3}$ | $7.495 \cdot 10^{-3}$ | 2.75 |
| | HMH napětí [MPa] | 130.7 | 148.1 | 11.75 |

Tab. 5.1: Srovnání vlastního algoritmu s komerčním softwarem ANSYS

Z uvedené tabulky vyplývá, že rozdíl mezi posunutími vypočtenými vlastním algoritmem a komerčním softwarem ANSYS je do **3%**, což je zanedbatelná odchylka. U napětí se už pak odchylka pohybuje přibližně **12%**, která může být způsobena následujícími vlivy

- Ve vlastním algoritmu byla zanedbána část napětí, která se týká krutové složky.
- Komerční software ANSYS má oproti vlastní proceduře lépe propracované průměrování napětí.
- Komerční software ANSYS používá jinou teorii pro popis skořepinového prvku.

I přes tyto odchylky je navržený algoritmus vhodný pro rychlou pevnostní kontrolu navržené nádrže s dostatečnou přesností, proto jsou všechny cíle této diplomové práce splněny. Výstupy diplomové práce budou prezentovány na mezinárodní konferenci ICNAAM 2018¹.

5.2 Další vývoj

Pokud by vývoj této procedury dále pokračoval, bylo by vhodné se dále vydat třemi směry.

První směr by měl vyřešit zvýšení její přesnosti a rychlosti. Ke zvýšení přesnosti by mohlo pomoci využití elementů s meziuzly, návrh lepšího průměrování napětí nebo doplnění napětí o krutovou složku. Větší rychlosti výpočtu by se dalo docílit vhodnou volbou řešiče, jako je například metoda sdružených gradientů s vhodným předpodmíněním.

¹16-th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics

V druhém směru by bylo možné uvažovat o modifikaci geometrie, která by se týkala druhého typu nádrží se střechou, kde by se také přidalo zatížení sněhem.

V posledním směru by se dalo uvažovat o modifikaci algoritmu pro nelineární úlohy a to jak pro velká posunutí, tak třeba i pro velké deformace nebo přejít na dynamické úlohy.

Seznam použité literatury

- [1] Bathe, K. J.: Finite Element Procedures; Prentice Hall, USA, 2006; ISBN: 978-0979004902.
- [2] Bhatti, M. A.: Fundamental Finite Element Analysis and Applications: with Mathematica and MATLAB Computations; John Wiley, New York, 2006; ISBN 0-471-64808-6.
- [3] Bhatti, M.A.: Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures: with Mathematica and MATLAB Computations; John Wiley, New York, 2005; ISBN 0-471-64807-9.
- [4] Przemieniecki, J. S.: Theory of Matrix Structural Analysis; Dover Civil and Mech, 1985; ISBN: 9780486649481.
- [5] Wriggers, P.: Nonlinear Finite Element Methods; Prentice Hall; USA, 2008; ISBN: 978-3-540-71001.
- [6] RAO, B.N. Finite Element Analasis [online]. Indian Institute of Technology, Madras: Department of Civil Engineering, s. 1-47 [cit. 2018-2-28]. Dostupné z: http://nptel.ac.in/reviewed_pdfs/105106051/lec36.pdf
- [7] Vítkovi Machinery Group: SMALTOVANÉ NÁDRŽE [online]. [cit. 2018-02-28]. Dostupné z: <http://www.vitkovice.cz/smaltovane-nadrze1>.
- [8] KRÁL, Jaromír. Navrhování konstrukcí na zatížení větrem: příručka k ČSN EN 1991-1-4. Praha: Pro Ministerstvo pro místní rozvoj a Českou komoru autorizovaných inženýrů a techniků činných ve výstavbě vydalo Informační centrum ČKAIT, 2010. Technická knihnice (ČKAIT). ISBN 978-80-87438-05-3.
- [9] NOOR, Ahmed Khairy, Ted BELYTSCHKO a J. C. SIMO. Analytical and computational models of shells: presented at the Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers, San Francisco, California, December 10-15, 1989. New York, NY: The Society, c1989. CED (Series), vol. 3. ISBN 0-7918-0373-2.
- [10] SMITH, I. M., D. V. GRIFFITHS a Lee. MARGETTS. Programming the finite element method. Fifth edition. Chichester, West Sussex, United Kingdom: John Wiley & Sons, 2014. ISBN 9781118535936.

- [11] RAO, Singiresu S. The finite element method in engineering. Oxford: Pergamon Press, 1982.
- [12] HUGHES, Thomas J. R. The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis. Mineola: Dover Publications, 2000. ISBN 0-486-41181-8.
- [13] REDDY, J. N. An introduction to the finite element method. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, c1993. McGraw-Hill series in mechanical engineering. ISBN 0-07-051355-4.
- [14] COOK, Robert Davis. Finite element modeling for stress analysis. New York: Wiley, c1995. ISBN 0471107743.
- [15] STRANG, Gilbert a George J. FIX. An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1973. Prentice-Hall Series in Automatic Computation.
- [16] LACKNER, Roman. Adaptive finite element analysis of reinforced concrete plates and shells. Wien: Österreichischer Kunst- und Kulturverlag, 2000. Dissertationen der Technischen Universität Wien. ISBN 3-85437-203-5.
- [17] BULL, John W., ed. Finite Element Analysis of Thin-Walled Structures. London: Elsevier Applied Science, 1988. ISBN 1-85166-136-0.
- [18] ZIENKIEWICZ, O. C. The Finite Element Method. 3. expanded and revised ed. London: McGraw-Hill Book Co, 1977.
- [19] ZIENKIEWICZ, O.C. The Finite Element Method. Volume 1. Basic Formulation and Linear Problems. 4th Ed. New York: McGraw-Hill, 1989. ISBN 0070841748.
- [20] DESAI, C. S. a John Fredrick ABEL. Introduction to the finite element method; a numerical method for engineering analysis. New York: Van Nostrand Reinhold Co, 1972.

Seznam obrázků

| | | |
|------|---|----|
| 1 | Smaltovaná nádrž | 1 |
| 1.1 | Rozložení $c_{p,0}$ po stěně válcové nádrže | 5 |
| 1.2 | Závislost koncového efektu na efektivní štiřlosti | 6 |
| 2.1 | Skutečný a rodičovský element | 8 |
| 2.2 | Zobrazení polohy integračních bodů na rodičovském elementu | 10 |
| 2.3 | Prvek rovinné napjatosti a zobrazení jednotlivých stupňů volnosti | 11 |
| 2.4 | Geometrie nosníku | 14 |
| 2.5 | Zobrazení elementů a uzlů | 15 |
| 2.6 | Rozložení celkového posunutí zvětšeno $300\times$ | 16 |
| 2.7 | Zobrazení posuvů a natočení | 17 |
| 2.8 | Schéma úlohy | 22 |
| 2.9 | Rozložení celkového posunutí zvětšeno $10\times$ | 23 |
| 2.10 | Zobrazení možných zobecněných posuvů skořepinového prvku | 23 |
| 2.11 | Lokální a globální souřadný systém | 26 |
| 2.12 | Schéma úlohy | 29 |
| 2.13 | Rozložení celkového posunutí zvětšeno $100\times$ | 30 |
| 3.1 | Posloupnost algoritmu | 31 |
| 3.2 | Schéma ocelové nádrže | 33 |
| 3.3 | Číslování uzlů a elementů | 33 |
| 3.4 | Znázornění vzdáleností h_1, h_2, h_3, h_4 | 35 |
| 3.5 | Závislost součinitele $c_{p,0}$ na úhlu α | 37 |
| 3.6 | Rozdělení tíhové síly od uzlů | 39 |
| 4.1 | Schéma úlohy | 41 |
| 4.2 | Zvolená konečnoprvková síť | 43 |
| 4.3 | Znázornění okrajových podmínek | 43 |
| 4.4 | Rozložení celkového posunutí zvětšeno $100\times$ | 45 |
| 4.5 | Rozložení redukovaného napětí podle HMM hypotézy | 45 |
| 4.6 | Rozložení celkového posunutí zvětšeno $100\,000\times$ | 46 |

| | | |
|------|--|----|
| 4.7 | Rozložení redukovaného napětí podle HMM hypotézy | 47 |
| 4.8 | Rozložení celkového posunutí zvětšeno 100× | 49 |
| 4.9 | Rozložení redukovaného napětí podle HMM hypotézy | 49 |
| 4.10 | Rozložení celkových posunutí zvětšeno 100× | 50 |
| 4.11 | Rozložení redukovaného napětí podle HMM hypotézy | 50 |

Seznam tabulek

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Hodnoty základních hodnot rychlosti větru v_b [ms^{-1}] | 3 |
| 1.2 | Kategorie terénů a jejich parametry | 4 |
| 1.3 | Pomocný součinitel flukтуаční složky tlaku c_{fl} | 4 |
| 1.4 | Konkrétní hodnoty pro různé hodnoty R_e | 5 |
| 2.1 | Hodnoty konstant kvadrurního vzorce | 10 |
| 2.2 | Hodnoty zadání | 15 |
| 2.3 | Posunutí jednotlivých uzlů | 16 |
| 2.4 | Hodnoty zadání | 22 |
| 2.5 | Maximální celkové posunutí v [mm] a jeho závislost na počtu elementů | 22 |
| 2.6 | Hodnoty zadání | 29 |
| 2.7 | Porovnání maximálního celkového posunutí [mm] a jeho závislost na počtu elementů | 29 |
| 3.1 | Vstupní parametry | 32 |
| 4.1 | Hodnoty parametrů | 42 |
| 4.2 | Hodnoty parametrů sítě | 42 |
| 4.3 | Mechanické vlastnosti | 44 |
| 4.4 | Nastavení vyhodnocovaného napětí | 44 |
| 4.5 | Porovnání maximálního celkového posunutí a napětí | 45 |
| 4.6 | Porovnání maximálního celkového posunutí a napětí | 46 |
| 4.7 | Konkrétní hodnoty parametrů zatížení | 48 |
| 4.8 | Porovnání maximálního celkového posunutí a napětí | 48 |
| 4.9 | Porovnání maximálního celkového posunutí a napětí | 50 |
| 5.1 | Srovnání vlastního algoritmu s komerčním softwarem ANSYS | 54 |

Seznam procedur

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Lokální matice tuhosti úlohy rovinné napjatosti \mathbf{K}_p | 14 |
| 2.2 | Lokální matice deskové tuhosti \mathbf{K}_d | 20 |
| 2.3 | Lokální matice tuhosti skořepinového elementu \mathbf{K}_c | 25 |
| 3.1 | Tvorba konečnoprvkové sítě | 34 |
| 3.2 | Lokální vektor zatížení od hydrostatického tlaku | 35 |
| 3.3 | Lokální vektor zatížení od tlaku větru \mathbf{f}_v | 37 |
| 3.4 | Lokální vektor zatížení od vlastní tíhy \mathbf{f}_g | 39 |

Seznam příloh

Příloha A - CD nosič

- Text diplomové práce.
- Vytvořená procedura v programovacím jazyce Python pro pevnostní kontrolu nádrží na vodu.