VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra kybernetiky a biomedicínského inženýrství

Design LMMSE filtru pro MR obrazová data

LMMSE Filter Design for MR Image Data

2018 Martina Polachová

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra kybernetiky a biomedicínského inženýrství

Zadání bakalářské práce

Student: **Martina Polachová**

Studijní program: B2649 Elektrotechnika

Studijní obor: 3901R039 Biomedicínský technik

Téma: Design LMMSE filtru pro MR obrazová data
LMMSE Filter Design for MR Image Data

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

1. Nastudování problematiky obrazového šumu.
2. Nastudování možností filtrace obrazových dat a hodnocení úrovně šumu v obraze.
3. Rešerše MR obrazového šumu a filtračních metod pro MR obrazová data.
4. Návrh a implementace SW generátorů pro simulaci MR obrazového šumu.
5. Návrh a implementace matematického modelu LMMSE filtru pro eliminaci MR šumu.
6. Testování LMMSE filtru pro vybraná MR data.
7. Hodnocení efektivity LMMSE filtrace s cílem extrakce informací z MR.

Seznam doporučené odborné literatury:

[1] CHAN, Tony F. a Jianhong SHEN. *Image processing and analysis: variational, PDE, wavelet, and stochastic methods.* Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, c2005. ISBN 978-0-89871-589-7.
[2] PRATT, William K. *Digital image processing: PIKS Scientific inside.* 4th ed., Newly updated and rev. ed. Hoboken, N.J.: Wiley-Interscience, c2007. ISBN 978-0471767770.
[3] Dougherty, Geoff. Image analysis in medical imaging: recent advances in selected examples. *Biomedical Imaging and Intervention Journal.* 2010, 6(3): e32. ISSN 1823-5530. doi: 10.2349/biij.6.3.e32.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Jan Kubíček**

Datum zadání: 01.09.2017
Datum odevzdání: 30.04.2018

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ-TECHNICKÁ UNIVERZITA fakulta elektrotechniky a informatiky
1016 OSTRAVA

doc. Ing. Jiří Koziorek, Ph.D.
vedoucí katedry

prof. Ing. Pavel Brandštetter, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně. Uvedla jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpala.

V Ostravě 30. dubna 2018 ....

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá metodikou odstranění šumu v obraze. Zaměřuje se na MRI snímky, na které jsou aplikovány generátory obrazových šumů, a dále se zabývá návrhem LMMSE filtru, který je pak použit na zašuměné obrazy. Byly použity šumy salt and pepper, Gaussův šum a Ricianův šum. Je provedeno objektivní i subjektivní hodnocení provedené filtrace, a to pomocí parametrů SNR, MSE, SSIM, QILV a korelace. Návrh je zpracováván v prostředí Matlabu.

Klíčová slova: šum, Gaussova distribuce, Ricianova distribuce, LMMSE filtr

Abstract

This bachelor thesis deals with the method of removing noise in image. It focuses on MRI images where noise generators are applied. The thesis also deals with the LMMSE filter design which is then used for shaded images. Salt and Pepper noise, Gaussian noise and Rican noise are used. An objective and subjective evaluation of the efficiency for each noise type is done by using parameters SNR, MSE, SSIM, QILV and correlation. The design is processed in the Matlab environment.

Keywords: noise, Gauss distribution, Rician distribution, LMMSE filter

Obsah

Seznam použitých zkratek a symbolů

1D signál	–	jednorozměrný signál
2D signál	–	dvourozměrný signál
3D signál	–	trojrozměrný signál
ACS	–	AutoCalibration Signal region; oblast autokalibrovaného signálu
AWGN	–	Additive White Gaussian Noise; aditivní bílý Gaussův šum
CA	–	Conventional Approach; konvenční přístup
CE-MRA	–	Contrast Enhancement Magnetic Resonance Angiography; kontrastní angiografická magnetická rezonance
CMS	–	Composite Magnitude Signal; signál s kompozitní velikostí
CT	–	Computer Tomography; počítačová tomografie
DFT	–	Discrete Fourier Transform; diskrétní Fourierova transformace
DT	–	Diffusion Tensor; difuzní tenzor
FOV	–	Field of View; zobrazovaný prostor
FS	–	Fully Sampled; úplné vzorkování
FSE sekvence	–	Fast spin echo; rychlá zobrazovací sekvence spinu signálu
GRAPPA	–	GeneRalized Autocalibrating Partial Parallel Acquisition; generalizovaná autokalibrační parciální paralelní akvizice
iDFT	–	Inverse Discrete Fourier Transform; inverzní diskrétní Fourierova transformace
LMMSE	–	Linear Minimum Mean Square Error; lineární minimum střední kvadratické chyby
MAE	–	Mean Absolute Error; střední absolutní chyba
ML	–	Maximum Likelihood; maximální pravděpodobnost
MMSE	–	Minimum Mean Square Error; minimální střední kvadratická chyba
MR	–	Magnetic Resonance; magnetická rezonance
MRA	–	Magnetic Resonance Angiography; angiografická magnetická rezonance
MRI	–	Magnetic Resonance Imaging; zobrazování magnetickou rezonancí
MSE	–	Mean Square Error; střední kvadratická chyba
NLM	–	Non Local Mean; filtr nelineálního průměru
PDF	–	Probability Density Function; funkce rozdělení hustoty pravděpodobnosti
PILS	–	Partially parallel imaging with localized sensitivities; parciální paralelní zobrazování s lokalizovanými intenzitami
QILV	–	Quality Index based on Local Variance; index kvality založený na lokálním rozptylu

RF signál	–	radiofrekvenční signál přijímaný i emitovaný cívkami
RTG	–	Rentgenovo záření
SENSE	–	Sensitivity Encoding for Fast MRI; kódování citlivosti pro rychlou MR
SMASH	–	SiMultaneous Acquisition of Spatial Harmonics; simultánní akvizice prostorových harmonických složek
SNR	–	Signal to Noise Ratio; poměr signálu k šumu
SoS metoda	–	Sum of Squares; metoda součtu čtverců
SSIM	–	Structural Similarity Index for Measuring; index strukturální podobnosti
TE	–	Echo Time; čas mezi excitačním pulsem a detekcí rezonančního signálu
TR	–	Repetition Time; doba opakování excitačních pulsů

Seznam obrázků

Seznam tabulek

1 Úvod

Data generovaná magnetickou rezonancí jsou ovlivněna několika zdroji obrazové degradace, jako jsou konstrukční omezení, časy skenování, pohyby pacienta, nebo dokonce pohyby molekul u subjektu snímání. Jedním ze zdrojů degradace, které ovlivňují většinu akvizic, je šum. Přítomnost šumu ovlivňuje nejen vizuální kvalitu snímku.

Studium šumu v obraze a jeho následného odstranění je proto stále recentním tématem. S masivní produkcí digitálních obrazů vzrostla potřeba efektivních metod obnovy obrazu. Ve většině aplikací je odstranění šumu základem pro následné operace zpracování obrazu (detekce hran, segmentace obrazu, rozpoznávání objektů atd.). Jeho cílem je zachovat vlastnosti obrazu neporušené. Hlavním úkolem technik pro odstranění šumu tedy je snížit množství šumu, tj. upravovat obraz, při zachování detailů, okrajů a obecně malých struktur, které by mohly být rozhodující pro správnou diagnózu.

Stěžejním tématem bakalářské práce je design a realizace statistického odhadu šumu na bázi LMMSE (linear minimum mean square error) filtru, který je následně testován na vybrané sadě MRI (magnetická rezonance) snímků. Prvním krokem tohoto zadání bude implementace generátorů šumů salt and pepper, Gaussova a Ricianova šumu, které aplikuji na MRI snímky. Na takové zašuměné obrazy v dalším kroku následně použiji vytvořený LMMSE filtr a budu analyzovat výsledky takové filtrace pro nastavení určujících parametrů filtrů, které umožňují nastavení manifestace úrovně šumu v MR obrazech. Bude zohledněn vliv měnících se úrovní šumů a budou testovány i různé úrovně samotného filtru. Pro objektivní hodnocení a případné další využití budou počítány parametry SNR (signal to noise ratio), MSE (mean squared error), SSIM (structural similarity), QILV (quality index based on local variance) a korelace a také budou pro porovnání uvedeny obrazové výstupy.

Filtrace je důležitá z hlediska modelování objektů z obrazových dat. Uplatňuje se v řadě úloh, jako je vyhlazování snímku a detekce hran. Špatná kvalita nativních obrazů předurčuje špatný výstup segmentačních modelů. Použitím filtrů propouštíme do výsledného obrazu pouze určitý typ informace.

2 Základní metody odstranění šumu

Mnoho aplikací pro zpracování obrazu v rámci MRI (magnetické rezonance) je založeno na stochastických metodách vycházejících ze znalostí statistiky šumu. Ve své práci se budu zabývat jak modely šumu, tak filtry, jež hrají v procesu odstranění šumu také důležitou roli. K eliminaci šumu může vést i odhad signálu pomocí odstranění šumu, jemuž musí předcházet dobře definovaný statistický model dat (obvykle Gaussovo rozdělení; viz kap. 4.2). Magnetická rezonance obsahuje šum z různých zdrojů (včetně šumu ze stochastické variace a šumu z vířivých proudů a mnoha fyziologických procesů) a artefaktů způsobených magnetickou citlivostí mezi sousedními tkáněmi, rigidním a nestálým pohybem těla a dalšími zdroji. Elektricky vodivé tkáně v těle pacienta vytvářejí tepelný šum, který je hlavním zdrojem šumu v MRI. Šum je také výsledkem chyb, které nastanou v průběhu akvizice. Náhodný šum, který vstupuje do zobrazovacího systému z externích zdrojů, má obvykle Gaussovo nebo normální rozdělení.

Chceme-li porovnat více modelů šumu a diskutovat o jejich využití, musíme přijmout rozumný kompromis mezi přesností modelu a jeho schopností generalizace.

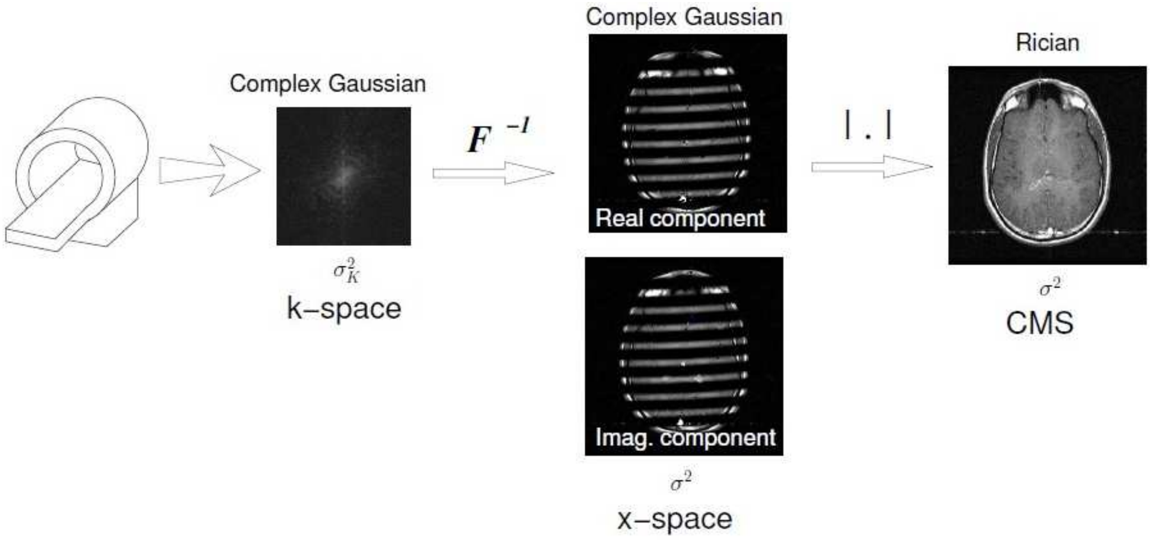
Data jsou získána v k-prostoru [1] pomocí pravidelného kartézského vzorkování.

Příspěvky šumu jsou nezávislé, celkový šum je součtem šumů z každého jednotlivého zdroje.

Pro modelování šumu vezmeme v úvahu i další předpoklad o výkonu šumu, jehož hodnota je konstantní.

V literatuře jsou již dlouho diskutované Gaussův a Ricianův model šumu. Když je poměr signálu k šumu (SNR) nižší než 2, skutečná a imaginární část prostorového rozložení šumu obvykle závisí na signálu a vede k Ricianově distribuci. Pokud je hodnota SNR poměrně vysoká, pak je patrné, že Ricianovu distribuci je vhodné vyměnit za Gaussovu distribuci. Obraz je získán v k-prostoru a dále je přenesen do společné obrazové domény pomocí inverzní Fourierovy transformace (jak znázorňuje obr. 1). Šum může být odstraněn různými technikami, jako jsou prostorové a časové filtry, filtrování anizotropní difuze, filtr nelineálního průměru (NLM; non local means), dvoustranný a trilaterální filtr, transformace waveletů, odhady lineární minimální kvadratické chyby, přístupy s maximální pravděpodobností nebo statistické odhady neparametrické analýzy sousedních a singularních funkcí. Technik filtrování šumu je ale mnohem více a stále přibývají a neměla by se opomenout existence např. konvenčního přístupu (CA), metody maximální pravděpodobnosti (ML), lineárních odhadů šumu, nebo WEIGHTED LEAST SQUARES k odhadu difuzního tenzoru (DT), který je optimální, pokud data projdou Ricianovou nebo necentrální χ-distribucí (stacionární necentrální χ-distribuce – nc-χ – je rozšířením Ricianova modelu u systému více nezávislých cívek – plně vzorkovaný k-prostor).

[1] k-prostor je spektrum prostorových frekvencí snímané scény reprezentované maticí dat. Údaje o k-prostoru jsou získávány opakovaným použitím excitačních impulsů s jiným gradientem kódování fází pro každý gradient čtení. Každá vzorkovaná čára k-prostoru je kódována frekvencí a měřený signál je rovnoměrně odebírán. Body k-prostoru jsou nezávislé vzorky RF signálu přijímané každou cívkou.



Obrázek 1: Proces akvizice jedné cívky

Zdroj: [2]

Metody filtrace šumu v MRI lze rozdělit do tří skupin: metody definované v prostorové doméně, metody pracující v transformované doméně a metody využívající statistické vlastnosti signálů.

2.1 Tepelný šum

Tepelný šum vzniká během akvizice signálu a je jedním z nejčastějších příčin degradace obrazu. Je definován rovnicí

$$\sigma^2_{thermal} \propto 4 \cdot k_B \cdot T \cdot R_{eff} \cdot B_W, \tag{1}$$

kde:

$\sigma_{thermal}$ je tepelný šum
k_B je Boltzmannova konstanta
T je absolutní teplota odporu
R_{eff} je efektivní odpor cívky načtený objektem pro skenování
B_W je šířka pásma systému detekce šumu

Předpoklad, že šum ovlivňuje všechny frekvence stejně, znamená, že šum je nezávislý na každém zdroji a nezávislý na signálu a je modelován jako komplexní proces aditivního bílého Gaussova šumu (AWGN) s nulovou střední hodnotou a odchylkou $\sigma^2_{k_l}$:

$$\begin{aligned} s_l(k) &= a_l(k) + n_l\left(k; 0, \sigma^2_{k_l}(k)\right) \\ l &= 1 \ldots L, \end{aligned} \tag{2}$$

kde:

$s_l(k)$ je přijatý (zašuměný) signál na l-té cívce

$a_l(k)$ je signál bez šumu na l-té cívce

$n_l(k)$ je šumová složka pixelu

$\sigma_{k_l}^2$ je rozptyl k-tého vzorku signálu z l-té cívky

L je počet cívek

Pokud je šum v RF signálu považován za stacionární, má smysl považovat n_l za stacionární (což znamená, že σ_{k_l} je konstantní) a lze napsat

$$n_l\left(k;0,\sigma_{k_l}^2(k)\right) \equiv n_l(k;0,\sigma_{k_l}^2) = n_{l_r}(k;0,\sigma_{k_l}^2) + j \cdot n_{l_i}(k;0,\sigma_{k_l}^2), \tag{3}$$

kde:

n_{l_r} je reálná složka šumu

n_{l_i} je imaginární složka šumu

Komplexní obrazová doména se získá inverzní diskrétní Fourierovou transformací (iDFT) z $s_l(k)$, která se aplikuje na každou cívku a která za určitých předpokladů bude ortogonální lineární transformací. Šum pro každou přijímací cívku pak bude dán vztahem

$$\begin{gathered} S_l(x) = A_l(x) + N_l\left(x;0,\sigma_l^2(x)\right) \\ l = 1 \dots L, \end{gathered} \tag{4}$$

kde:

$S_l(x)$ je transformovaný přijatý (zašuměný) signál na l-té cívce

$A_l(k)$ je transformovaný signál bez šumu na l-té cívce

$N_l(k)$ je transformovaná šumová složka pixelu

L je počet cívek

$N_l\left(x;0,\sigma_l^2(x)\right) = N_{l_r}\left(x;0,\sigma_l^2(x)\right) + j \cdot N_{l_i}\left(x;0,\sigma_l^2(x)\right)$

Pro získání akvizice jedné cívky je komplexní model zjednodušen (za předpokladu využití aditivního bílého Gaussova šumu s nulovou střední hodnotou a rozptylem σ^2) na tvar

$$S(x) = A(x) + N\left(x;0,\sigma^2(x)\right), \tag{5}$$

kde:

$N_l\left(x;0,\sigma^2(x)\right) = N_r\left(x;0,\sigma^2(x)\right) + j \cdot N_i\left(x;0,\sigma^2(x)\right)$

2.2 Necentrální χ-distribuce nekorelovaných cívek

Pro systémy s více cívkami musí být signál rekonstruován z L komplexních signálů z každé cívky. Jednou z nejpoužívanějších metod je takzvaná SoS (metoda součtu čtverců), kterou lze aplikovat podle vztahu

$$M_L(x) = \sqrt{\sum_{l=1}^{L} |S_l(x)|^2}, \tag{6}$$

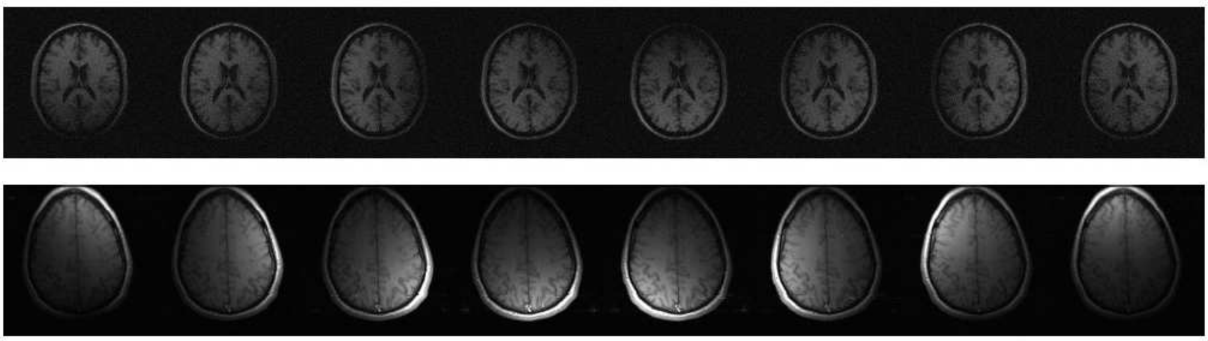
kde:

$M_L(x)$	je rekonstruovaný signál
L	je počet cívek
$S_l(x)$	je přijatý signál z l cívek

V ideálním případě je rozptyl šumu stejný pro všechny cívky, což vede k získání nekorelovaných vzorků. χ-distribuce pak svou PDF (funkci hustoty rozložení pravděpodobnosti) redukuje k podobě Ricianovy distribuce (viz kap. 4.3).

2.3 Necentrální χ-distribuce korelovaných cívek

χ-distribuce bývá používána pro modelování šumu v obrazech z magnetické rezonance, pokud je signál přijímaný z více cívek kombinován s metodou SoS. Pro moderní systémy zahrnující až 32 nebo 64 cívek však přijímače obecně vykazují určitou vazbu. To znamená, že šum v každém místě k-prostoru bude korelován z cívky na cívku. Za předpokladu, že taková korelace je nezávislá na frekvenci (tj. stejná pro všechny k-prostorové vzorky), lineární operátor iDFT bude klonovat tuto přesně stejnou korelaci mezi cívkami v komplexní obrazové doméně, takže kovarianční matice se stane nediagonální symetrickou maticí.



Obrázek 2: Ilustrační data magnetické rezonance: syntetická akvizice osmi cívek s korelovaným šumem (nahoře), probíhající akvizice mozku ze skeneru GE Signa 1.5T s osmi cívkami (dole)
Zdroj: [3]

U nc-χ s vícenásobnými korelovanými cívkami je třeba vzít v úvahu přiblížení skutečné distribuce a efektivní hodnoty parametrů. Parametry konečného rozdělení jsou závislé na signálu, a proto je jejich odhad složitější, než je tomu u jednodušších modelů. Obrázek 2 zobrazuje distribuce zapojené do akvizic s vícenásobnými cívkami. Lze si povšimnout, že korelace mezi cívkami jsou stejné jak v k-prostoru, tak v oblasti obrazu. Tyto korelace jsou závislé na hardwaru, a jsou tedy nevyhnutelné.

2.4 Distribuce šumu pro plně vzorkovaný k-prostor s více cívkami

Existence korelací šumu mezi jednotlivými cívkami vyžaduje pro χ-distribuci použití efektivních parametrů:

$$\begin{aligned} L_{\mathit{eff}} &= \frac{A_T^2 \operatorname{Stopa}(\Sigma) + \left(\operatorname{Stopa}(\Sigma)\right)^2}{A^* \Sigma A + \|\Sigma\|_F^2} \\ \sigma_{\mathit{eff}}^2 &= \frac{\operatorname{Stopa}(\Sigma)}{L_{\mathit{eff}}}, \end{aligned} \tag{7}$$

kde:

L_{eff}	je efektivní počet cívek
A_T^2	$= \sum_{l=1}^{L} \|A_l\|^2$
A	$= [A_1, A_2 \ldots A_l]^T$
Σ	je kovarianční matice
$\|\Sigma\|_F$	je Frobeniova norma kovarianční matice
σ_{eff}^2	je efektivní rozptyl

Hodnoty efektivních parametrů závisí na samotném signálu, tudíž jsou lokálně odlišné, což působí obtíže při tvorbě statistických modelů pro zpracování signálů.

2.5 Distribuce GRAPPA

Na rozdíl od předchozích případů činí interpolace GRAPPA signál na každé cívce nestacionární ještě před provedením SoS. Šum l-té cívky v obrazové doméně bude následovat komplexní nestacionární Gaussovu distribuci, jejíž distribuce šumu pro reálnou nebo imaginární část je definována s rozptylem

$$\sigma_l^2 = W_l^* \Sigma W_l, \tag{8}$$

kde:

$W_l^* \Sigma W_l$	reprezentuje kovarianční matici (matici rekonstruovanou z map intenzit každé cívky)

Pokud neexistují žádné počáteční korelace mezi cívkami, vztah 8 se zjednoduší na tvar

$$\sigma_l^2 = \sum_{m=1}^{L} \sigma_m^2 \left|W_{ml}\right|^2, \tag{9}$$

kde:

W_{ml} je matice konvolučního jádra

Distribuce šumu nezávisí na signálu, ale na původní kovarianční matici a na koeficientech rekonstrukce GRAPPA. Po přijetí SoS se účinná mapa šumu stává závislou na signálu.

2.6 Distribuce SENSE

Při rekonstrukci SENSE projde finální signál nestacionární komplexní Gaussovou distribucí. Konečná distribuce šumu bude mít rozptyl σ_l^2:

$$\begin{aligned} \sigma_l^2 &= W_l^* \Sigma W_l \\ l &= 1 \ldots L \end{aligned} \tag{10}$$

U distribuce SENSE nezáleží na signálu, ale na kovarianční matici a na mapách citlivosti cívek. To znamená, že odvodit SENSE umožňuje znalost mapy citlivosti a rychlosti akcelerace.

Navíc v případě SENSE není mapa šumu jedinou zajímavou mapou související se šumem, kterou je třeba vzít v úvahu. Kvůli procesu rekonstrukce bude mezi sousedními vrstvami vysoká korelace. Rovněž lze definovat korelační matici

$$\rho_{i,j}^2 = \frac{\sigma_{i,j}^2}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{W_i^* \Sigma W_j}{\sqrt{(W_i^* \Sigma W_i)(W_j^* \Sigma W_j)}}, \tag{11}$$

kde:

i je řádek matice

j je sloupec matice

2.7 Praktická ukázka metod

Pro ilustraci lze uvést některé mapy šumu a vzít v úvahu dva různé soubory dat:

1. Aby bylo možné předem znát všechny parametry (Σ, počet cívek, A_l atd.), byl použit syntetický fantom napodobující paralelní akvizici (jak znázorňuje obr. 2 nahoře). Počátečním bodem je 2D syntetický řez A_0 v obrazové doméně (převzatým z databáze BrainWeb MR) s jasovou intenzitou v rozmezí <0; 255>. Průměrná hodnota intenzity pro bílou hmotu je 158, pro šedou hmotu 105, pro mozkomíšní mok 36 a pro pozadí 0. Systém osmi cívek je simulován použitím umělých map citlivosti kódovaných pro každou cívku tak, aby

$A_T^2 = \sum_{l=1}^{8} |A_l|^2 = A_0$. Obrazová doména každé cívky je ovlivněna Gaussovým šumem s $\sigma_l^2 = 100$ a korelačním koeficientem $\rho^2 = 0,05$ mezi všemi cívkami, aby platilo

$$\Sigma = 100 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0,05 & \dots & 0,05 \\ 0,05 & 1 & \dots & 0,05 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,05 & 0,05 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

2. Reálná T1 akvizice mozku (na obr. 2 dole) pořízená skenerem GE Signa 1.5T EXCITE (s nastavením FSE sekvence snímání, 8 cívek, $TR = 500$ms, $TE = 13,8$ms, velikost obrazu 256×256 bodů, FOV: 20×20 cm).

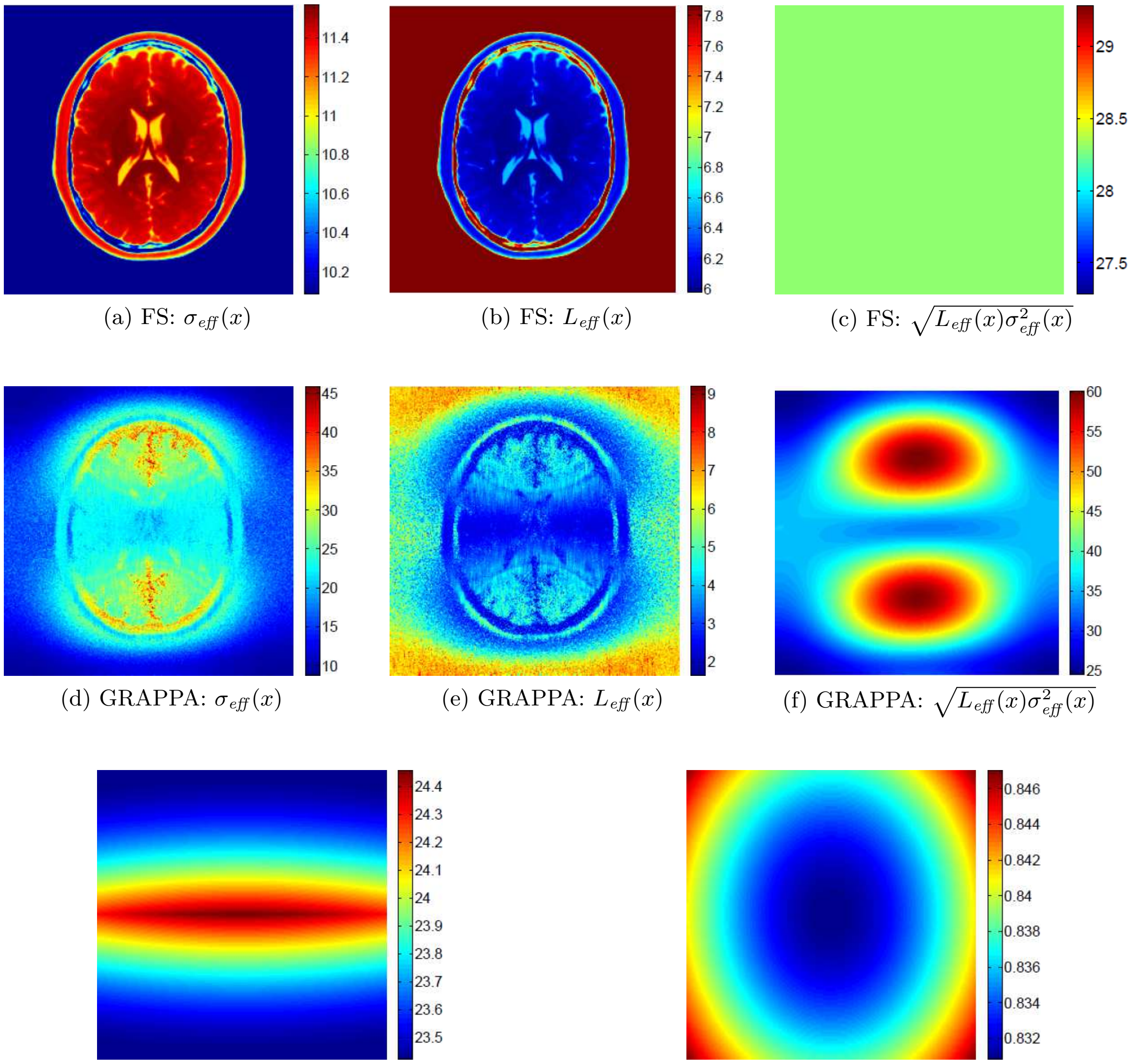
Pro případ úplného vzorkování (FS) a syntetická data s použitím SoS pro výpočet CMS (signálu s kompozitní veličinou) je nejprve třeba vypočítat mapy parametry σ_{eff} a L_{eff} (dle vztahů 7), které jsou vyobrazeny na obr. 3a a 3b. V úvahu se berou dvě základní oblasti – oblast pozadí a oblast signálu. Pozadí má oproti signálu nižší úroveň šumu. Součin map parametrů σ_{eff} a L_{eff} dává konstantní hodnotu pro celý obraz (což znázorňuje obr. 3c):

$$\sigma_{eff}^2 \cdot L_{eff} = \mathrm{Stopa}(\Sigma) = \sigma_l^2 \cdot L = 100 \cdot 8 \tag{13}$$

Za použití stejných dat v každé cívce je k-prostor podvzorkován s akceleračním přírůstkem $r = 2$ při zachování 32 vrstev ACS pro kalibraci; k rekonstrukci je použita GRAPPA. Výsledný CMS je získán pomocí SoS. Vypočítané mapy pro GRAPPA jsou znázorněny na obr. 3d a 3e. Patrný je velký rozsah hodnot pro σ_{eff} způsobený zejména koeficienty. Většina pozadí vykazuje úroveň cca 10, přičemž jsou zde oblasti signálu s hodnotou šumu kolem 45. Pozadí a signál zároveň neutvářejí tak pravidelný obrazec jako v případě úplného vzorkování. Součin $\sigma_{eff}^2 \cdot L_{eff}$ také není konstantní, ale tvoří mapu s různými hodnotami pro různá vstupní data. Výhodou je, že nezávisí na signálu, ale pouze na rekonstrukčních koeficientech a na původní kovarianční matici. Obrázek 3f zobrazuje mapu pro syntetická data, obrázek 4a potom předkládá stejnou mapu pro reálnou akvizici. Pro reálnou akvizici jsou použity koeficienty GRAPPA a je předpokládána stejná matice Σ jako v případě syntetických dat (existují metody, které umožňují odhad skutečné Σ, ale pro ilustraci a srovnání je použita stejná pro oba případy).

I za předpokladu stejné matice Σ se výsledná mapa se liší, což svědčí o velkém vlivu koeficientů GRAPPA na konečnou distribuci šumu. Použitím vztahu 8 lze také vypočítat rozptyl šumu komplexního Gaussova rozdělení v každé cívce před samotným SoS.

Na závěr je k-prostor znova podvzorkován s použitím akceleračního přírůstku $r = 2$ a pro rekonstrukci je použito SENSE. Výsledné $\sigma_{\mathcal{R}}$ a $\rho_{i,j}^2$ jsou znázorněny na obr. 3g a 3h (syntetická data) a na obr. 4b a 4c (skutečná akvizice). Jednotnost map šumu je závislá na mapě citlivosti. V případě syntetických dat jsou hodnoty úrovně šumu v malém rozsahu. Tím pádem lze s malou



(a) FS: $\sigma_{eff}(x)$

(b) FS: $L_{eff}(x)$

(c) FS: $\sqrt{L_{eff}(x)\sigma^2_{eff}(x)}$

(d) GRAPPA: $\sigma_{eff}(x)$

(e) GRAPPA: $L_{eff}(x)$

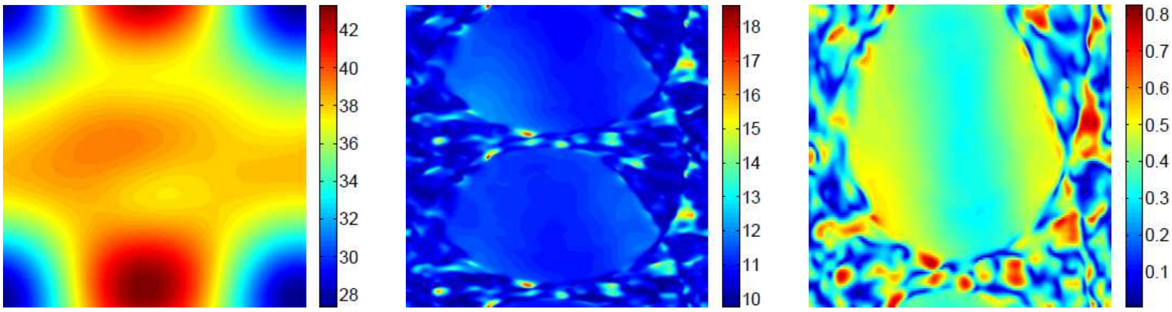
(f) GRAPPA: $\sqrt{L_{eff}(x)\sigma^2_{eff}(x)}$

(g) SENSE: $\sigma_{\mathcal{R}}(x)$

(h) SENSE: $\rho^2_{i,j}(x)$

Obrázek 3: Mapy šumu pro syntetická data

Zdroj: [3]



(a) GRAPPA: $\sqrt{L_{\mathit{eff}}(x)\sigma^2_{\mathit{eff}}(x)}$ (b) SENSE: $\sigma_{\mathcal{R}}(x)$ (c) SENSE: $\rho^2_{i,j}(x)$

Obrázek 4: Mapy šumu pro reálné akvizice

Zdroj: [3]

chybou předpokládat, že šum bude stacionární, a zvolit stejný přístup jako u akvizice jedné cívky. Pro skutečnou akvizici je ovšem rozsah hodnot širší.

2.8 Ricianův a nc-χ model ve voxelové statistice

Ricianova distribuce byla obecně přijata jako vhodný model šumu v aplikacích MR, nicméně pro složitost Ricianovy statistiky se často upřednostňuje aproximace této distribuce Gaussovými funkcemi. Toto zjednodušení je opodstatněné, jelikož pro velké SNR jsou obě distribuce prakticky totožné. Hlavní výhoda Gaussova rozložení tkví ve velkém množství technologií zpracování obrazu založených na tomto modelu. Ve smyslu statistiky splňují Gaussovy zašuměné signály dvě užitečné vlastnosti:

$$\begin{aligned} E\{M(x)\} &= A_T(x); \\ E\{(M(x) - A_T(x))^2\} &= \sigma^2, \end{aligned} \tag{14}$$

které vyjadřují, že střední hodnota pozorování je rovna vlastní veličině a střední hodnota chyby odhadu nezávisí na skutečném signálu $A_T(x)$. Toto chování nevykazují signály distribuované Ricianovým modelem; pro ty platí

$$E\{M(x)\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} L_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{A_T(x)^2}{2\sigma^2}\right)\sigma, \tag{15}$$

kde:

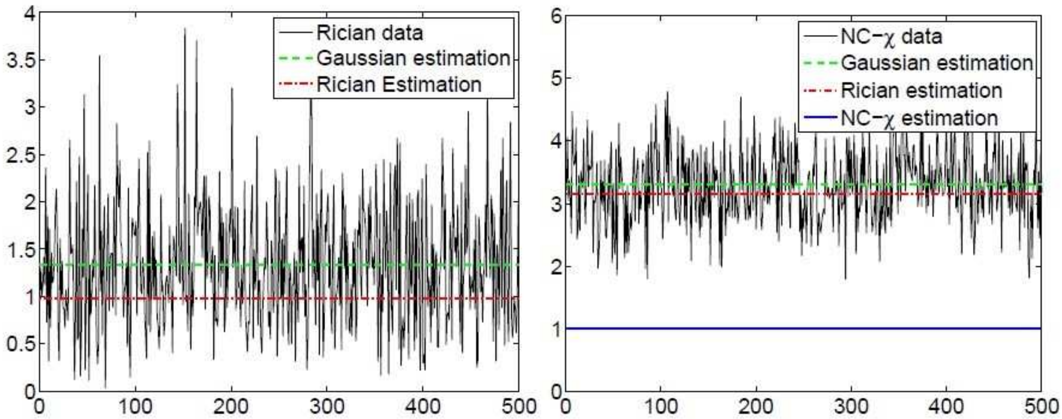
$L_n(x) = {}_1F_1(-n; 1; x)$

Chyba odhadu v tomto případě závisí na skutečné hodnotě $A_T(x)$. Použití Gaussova přístupu k odhadu hodnoty $A_T(x)$ zavede v odhadu systematickou chybu, která se sníží, když $A_T(x) \gg \sigma$. Tato chyba bude mít negativní vliv na kvantitativní formy, jako je difuze, perfuze nebo funkční MRI, zvláště pokud je sníženo SNR.

Oproti Ricianovu modelu je nc-χ model méně oblíbený, přestože se ukázal jako vhodný pro mnoho systémů s vícenásobnými cívkami, například pro systémy s rekonstrukcí GRAPPA. V těchto případech může použití Ricianových statistik vést k výrazným chybám. Přestože by Gaussova distribuce mohla být vhodnějším modelem, pro systémy s více cívkami způsobí Ricianův i Gaussův model jistou odchylku v odhadu $A_T(x)$, protože střední hodnota velikosti signálu není rovna odhadované velikosti:

$$E\{M_L(x)\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} L_{\frac{1}{2}}^{L-1} \left(-\frac{A_T(x)^2}{2\sigma^2} \right) \tag{16}$$

Ilustrace toho, jak může nesoulad při výběru modelu šumu ovlivnit odhad šumu, je demonstrována na obr. 5. Bylo generováno 500 vzorků dvou náhodných 1D signálů, následovala Ricianova a nc-χ distribuce s $A_T = 1$ a $\sigma_i = 0,8$. Hodnota A_T se odhaduje pomocí vztahů 14, respektive z předpokladů Ricianova, Gausova a nc-χ modelu. Vzhledem k tomu, že demonstrace probíhá s nízkým SNR, nesoulad mezi zvoleným modelem a reálnými daty vede ke zkreslení při odhadu skutečné hodnoty signálu.



Obrázek 5: 1D příklad odhadu $A_T(x)$ při použití různých modelů

Zdroj: [3]

2.9 Nestacionarita a mapa šumu

Hlavním předpokladem pro získání Ricianovy akvizice jedné cívky je, že šum je stacionární, a proto jedna hodnota σ, tedy směrodatná odchylka, charakterizuje celý soubor dat. V případě systému s více cívkami L popisuje σ vlastnosti šumu u všech zaznamenaných voxelů (bodů mřížky v 3D prostoru). Při znatelných korelacích je u nc-χ statistik nutné znovu definovat jejich parametry. Mapa šumu u uvedeného příkladu (obr. 3) znázorňuje značnou disproporci hodnot šumu mezi signálem a oblastmi pozadí. Navíc L_{eff} a σ_{eff} jsou nejen prostorově závislé, ale také závislé na signálu. Naštěstí je součin $L_{\mathit{eff}} \cdot \sigma_{\mathit{eff}}^2$ (celkový přírůstek šumu pro všechny cívky) konstantní, tedy nezávislý na signálu, pro celou oblast obrazu. Jak již bylo řečeno, znamená to, že většina kvantitativních technik MRI založených na výpočtech místních momentů bude stejně platná pro systémy s jednoduchým a vícenásobným vinutím vždy, když bude získán plně vzorkovaný k-prostor.

Kromě GRAPPA a SENSE může být provedena analýza šumu i jinými technikami jako SMASH, PILS nebo nekartézský SENSE. U SENSE mapa šumu závisí hlavně na původní úrovni šumu a na mapě citlivosti každé cívky. Odpovídající mapa $\sigma(x)$ poskytuje odhad, jak daleko od stacionárního Ricianova modelu jsme. U GRAPPA zvýhodňují vznik šumu závislého na signálu jak počáteční korelace mezi cívkami, tak interpolace rekonstrukce.

Většina algoritmů pro odhad difuzních modelů MRI běží voxel za voxelem a nevyžaduje skutečnou znalost distribuce šumu – hlavně proto, že předpokládá základní Gaussovo rozložení šumu. Ve žádném z těchto případů není nestacionarita závažným problémem, pokud výpočty zahrnují voxel nebo okolí dostatečně malé, aby bylo možno uvažovat přibližně homogenní distribuci šumu, jejíž parametry nejsou relevantní. Jiné metody difuzní magnetické rezonance naopak zahrnují určitý druh prostorové regularizace a v tom případě prostorová variabilita šumu vyžaduje přeformulování. U jiných kvantitativních metod založených na Ricianově statistice, ačkoli s každým voxelem zacházejí nezávisle, vyžadují výpočty předchozí znalost výkonu šumu, proto budou poznamenány nehomogenitou šumu.

2.10 Prostorově korelované šumové vzory

V určitých situacích může šum vykazovat nezanedbatelnou korelaci mezi proximálními obrazy. Při použití SENSE bude každý pixel korelován s jiným $r - 1$ pixelem ve stejném sloupci. Interpolace GRAPPA se naopak provádí v k-prostoru, kde souvislé linie spektra budou stejně korelovány. Pokud je však operátor DFT použit pro načtení domény obrazu, tyto korelace jsou rozloženy řídce: každý řádek v obrazové doméně je vypočten jako vážená superpozice všech řádků k-prostoru. Vzhledem k tomu, že váhy DFT jsou vysoce nesoudržné, mohou být konečné korelace považovány za zanedbatelné.

3 Filtrace obrazových dat

Existuje mnoho způsobů, jak rekonstruovat obraz nebo sadu dat. Důležitá vlastnost dobrého filtru je, že by měl úplně odstranit šum a zachovat hrany (místa, kde dochází ke strmé změně hodnoty jasu). Tradičně existují dva typů modelů – lineární a nelineární. Užívanější jsou spíše lineární filtry. Jejich výhodou je rychlost, a nevýhodou zase nedostatečná schopnost efektivně chránit hranice snímků, které jsou tedy rozmazané. Lineární 2D filtry pracují na principu dvourozměrné konvoluce, proto jsou někdy označovány jako konvoluční filtry. Výpočet výsledného obrazu probíhá pixel po pixelu, kde pixel výstupního obrazu je spočten jako konvoluce jeho okolí a konvolučního jádra. Konvoluční jádro, označované někdy také jako maska či filtrační okno, je nejčastěji reprezentováno čtvercovou maticí o lichém počtu řádků a sloupců. Podobně jako jednorozměrný signál obsahuje i obraz nízkofrekvenční a vysokofrekvenční informaci. Vysoké frekvence jsou dány velkým rozdílem hodnot sousedních pixelů reprezentujících strmou změnu jasové funkce, a určují tedy hrany obrazu. Nízké frekvence popisují postupné přechody v obrazu, a určují tak velké jednotné plochy. Podle toho, jaké frekvence filtr propouští, můžeme rozdělit filtry na vysokofrekvenční a nízkofrekvenční.

3.1 Nízkofrekvenční filtry

Jak již samotný název filtrů napovídá, nízké frekvence v obrazu jsou propuštěny, zatímco vysoké frekvence jsou filtry potlačeny. Po aplikaci těchto typů filtru dochází k odstranění hran v obraze, a obraz je tedy shlazený. Efekt shlazení je závislý na velikosti použité masky. Pro velké masky dochází k většímu shlazení obrazu. Tyto filtry se používají pro odstranění šumu a rozmazání obrazu. Do této skupiny patří například průměrový, Gaussův nebo mediánový filtr.

3.1.1 Mediánový filtr

Patří mezi nelineární metody, často je nazýván také jako nelineární založený na třídění velikosti jasu obrazových elementů. Je velmi rozšířený v digitálním zpracování obrazu, protože za určitých podmínek při odstraňování šumu zachovává hrany. Hlavní výhodou je to, že může eliminovat vliv hodnot vstupního šumu o extrémně velké veličiny. Používá se k odstranění šumu známého pod názvem „salt & pepper“ představujícího impulzní model šumu. Bod v obrazu je aproximován mediánem, který je spočten z pole bodů, jež jsou vymezeny maskou mediánového filtru. Mediánový filtr funguje na principu plujícího okna (matice), jehož jádro se pohybuje přes celý obraz. Nejdříve je spočítán medián pixelů v pohybujícím se okně a pak je centrální pixel nahrazen touto hodnotou. Medián se hodí především pro impulzní šumy.

3.1.2 Wienerův filtr

Cílem Wienerova filtru je odfiltrovat šum, který poškodil signál. Přistupuje k filtrování z jiného úhlu. Je založen na statistickém přístupu. Princip filtru vychází z minimalizace střední kvadratické chyby mezi původní obrazovou maticí a rekonstruovanou maticí. Je tedy založen na metodě nejmenších čtverců a matematicky lze funkci filtru vyjádřit jako

$$f(x,y) = \bar{g} + \frac{\sigma_f^2}{\sigma_f^2 + \sigma_n^2}\left(g(x,y) - \bar{g}\right), \tag{17}$$

kde:

$f(x,y)$	značí obnovený obraz
$\bar{g}$	je lokální průměr
σ_f^2	je lokální rozptyl
σ_n^2	je rozptyl šumu

Máme-li okno o velikosti $(2m+1) \times (2n+1)$, pak je jeho lokální průměr $\bar{g}$ definován jako

$$\bar{g} = \frac{1}{L} \sum_{s=-m}^{m} \sum_{t=-n}^{n} g(s,t), \tag{18}$$

kde:

L je počet pixelů v obrazu

Lokální rozptyl plovoucího okna σ_g^2 je pak

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{L-1} \sum_{s=-m}^{m} \sum_{t=-n}^{n} \left(g(s,t) - \bar{g}\right)^2. \tag{19}$$

Lokální rozptyl signálu σ_f^2 použitý ve vztahu 17 je vypočítán ze σ_g^2 se znalostí rozptylu šumu σ_n^2 odečtením σ_n^2 od σ_g^2 s předpokladem, že signál a šum nejsou korelovány.

3.1.3 Gaussův filtr

Jedná se o rozšíření filtru průměrování, a to Gaussovým rozložením. Za rozšíření považujeme zvýšení váhy středového bodu masky nebo i jeho okolí (body, které mají s bodem jednu stejnou souřadnici). Aplikací filtru dosáhneme vyhlazení obrazu, odstranění detailů a šumu. Na rozdíl od klasického průměrování používá jiné jádro, které reprezentuje model vrcholu Gaussovy křivky. Výsledný obraz je dán vztahem

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}, \tag{20}$$

kde:

$G(x,y)$	je rekonstruovaný obraz
x a y	jsou souřadnice pixelu v obrazové matici
σ^2	je rozptyl

Jedna z možných podob konvoluční masky je

$$\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Součet všech hodnot masky dává po vynásobení vahou před maticí výslednou hodnotu 1, z čehož plyne, že se nemění celková světlost obrazu.

3.2 Vysokofrekvenční filtry

U vysokofrekvenčních filtrů jsou vysoké frekvence propuštěny, a nízké nikoliv. Dochází tak ke zviditelnění hran v obraze. K automatické detekci takových míst v obraze slouží lokální předzpracování (filtrace). Hrana v obraze je dána vlastnostmi obrazového elementu a jeho okolí. Je určena tím, jak náhle se mění hodnota obrazové funkce parciální derivace $f(x, y)$, tedy obnoveného obrazu. Změnu funkce udává její gradient – vektorová veličina určující směr největšího růstu funkce (směr gradientu) a strmost tohoto růstu (velikost, modul gradientu). Pixely s velkým modulem gradientu jsou hrany. Tento typ filtrů se používá pro ostření obrazu nebo zvýraznění jeho hran.

3.2.1 Laplaceův filtr

Tento filtr se používá pro detekci hran v obraze. Metoda je ovšem náchylná na šum, a tak je dobré na obraz nejdříve použít libovolný filtr pro odstranění šumu (např. mediánový filtr). Z hlediska výpočtů Laplaceův operátor zajímá pouze velikost gradientu bez ohledu na její směr. Pro odhad velikosti se používá všesměrový Laplaceův operátor, který vychází z druhých parciálních derivací:

$$\nabla^2 g(x, y) = \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial y^2} \tag{21}$$

V digitálním obraze je také laplacián (Laplaceův operátor) aproximován diskrétní konvolucí.

3.2.2 Sobelův filtr

Sobelův filtr zvýrazňuje hrany buď v horizontální, nebo vertikální rovině. Případně je možné obě možnosti zkombinovat a získat tzv. celkový Sobelův gradient. Touto úpravou se však filtr stává nelineárním. Matice jsou aplikovány každá zvlášť. Výsledný Sobelův gradient se pak spočte vztahem

$$G = \sqrt{X^2 + Y^2}, \tag{22}$$

kde:

X a Y jsou sumy součinů příslušné váhy ve filtrovacím okně a hodnoty pixelu

Na stejném principu jako Sobelův filtr pracují i další filtry, mezi které patří na příklad Prewittův, Robertsonův nebo Kirschův filtr.

4 Syntetické generátory obrazového šumu

Aplikaci syntetického šumu obrazu v prostředí Matlab lze provést pomocí funkce `imnoise`. Pomocí jejího druhého vstupního parametru lze zvolit typ šumu. Lze volit na příklad mezi `gaussian` pro aditivní bílý Gaussův šum nebo `salt & pepper` pro impulzní šum. Matlab nabízí i jiné, jako jsou `localvar`, `poisson`, `speckle`. V případě Ricianova šumu je zapotřebí stáhnout knihovnu „Rice/Rician distribution“, která je volně dostupná na stránkách MathWorks.

Syntaxe funkce je `J = imnoise(I,type)`, kde `I` je předmětný obraz a `type` je hodnota, která specifikuje typ šumu.

Při syntaxi `J = imnoise(I,type,parameter)` lze specifikovat další parametry s ohledem na typ šumu. Například `J = imnoise(I,'gaussian',m,v)` přidá do obrazu `I` Gaussův bílý šum o průměru `m` a rozptylu `v`. `J = imnoise(I,'salt & pepper',d)`přidá šum typu salt & pepper do obrazu `I`, kde `d` je šum obrazu. Výchozí hodnota pro `d` je 0,05.

Parametry průměru a rozptylu pro šumy `gaussian`, `localvar` a `speckle` jsou vždy definovány pro obraz ve formátu *double* s rozsahem <0; 1>. Pokud je vstupní obraz ve formátu *uint8* nebo *uint16*, funkce `imnoise` konvertuje obraz do formátu *double*, přidá šum a pak obraz se šumem znovu konvertuje do formátu vstupního obrazu.

4.1 Salt & pepper

Tento šum je často označován také jako impulzní šum. Impulzní šum je velmi častý v digitálních obrazech. Je vždy nezávislý na pixelech obrazu a je rozložený po obraze. Na rozdíl od Gaussova šumu postihuje impulzní šum pouze některé pixely a ty ostatní zachovává. Tento šum je patrný při přenosu dat. Uvažujme na příklad matici 3×4 s náhodnými hodnotami v rozsahu 0 až 10. Tuto matici pak aplikujeme na obraz a pozice, které byly obsazeny nulou, jsou nahrazeny nulou, tedy černou barvou, a pozice, které byly obsazeny desítkou, jsou pak nahrazeny 255, tedy bílou. Příklad takového postupu znázorňuje obr. 6.

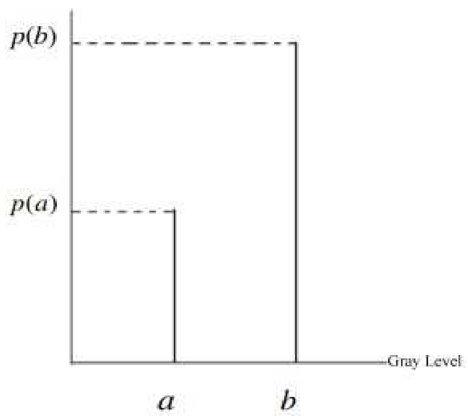
$$\begin{pmatrix} 237 & 107 & 166 \\ 234 & 95 & 162 \\ 239 & 116 & 169 \\ 56 & 126 & 89 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 10 & 4 \\ 7 & 8 & 4 \\ 10 & 0 & 5 \\ 3 & 10 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 237 & 255 & 166 \\ 234 & 95 & 162 \\ 255 & 0 & 169 \\ 56 & 255 & 89 \end{pmatrix}$$

Obrázek 6: Demonstrace aplikace šumu salt & pepper

Zdroj: autorka

Takové změny pixelů v obraze jsou způsobeny chybami v analogové a digitální konverzi a chybami v bitovém přenosu. PDF (rozložení hustoty pravděpodobnosti) impulzního šumu ilustruje obr. 7 (s pravděpodobností na svislé a stupni šedi na vodorovné ose) a popisuje vztah 23.

$$P(g) = \begin{cases} P(a) & \text{pro } g = a \\ P(b) & \text{pro } g = b \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{23}$$

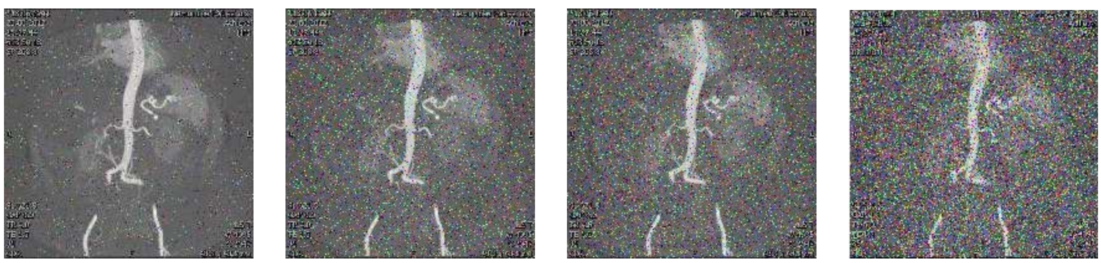


Obrázek 7: PDF impulzního šumu (pravděpodobnost na svislé, stupně šedi na vodorovné ose)

Zdroj: [14]

Pokud je $b > a$, tedy intenzita jasu pixelu b je větší než intenzita jasu pixelu a, samotný pixel b se změní na pixel s maximální možnou hodnotou jasu, tedy na bílý pixel (reprezentovaný nejvyšší hodnotou jasu). Pixel a se naopak změní na černý pixel (reprezentovaný nejnižší hodnotou jasu). Tento typ šumu obecně poškozuje digitální obraz poruchou pixelových prvků v senzorech kamery, nedostatečným místem v paměti, chybami v procesu digitalizace a mnoha dalšími. Pixely náhodně nabývají tří hodnot. Pixely nabudou hodnot pro barvu bílou, černou nebo se nemění. Šum salt & pepper se nejlépe odstraní mediánovým filtrem.

Příklady zašumění obrazu šumem salt & pepper předkládá obr. 8.



(a) $d = 0,02$ (b) $d = 0,08$ (c) $d = 0,1$ (d) $d = 0,2$

Obrázek 8: Analýza cévního systému: kontrastní MRI se superponovaným šumem salt & pepper o různých úrovních

Zdroj: autorka

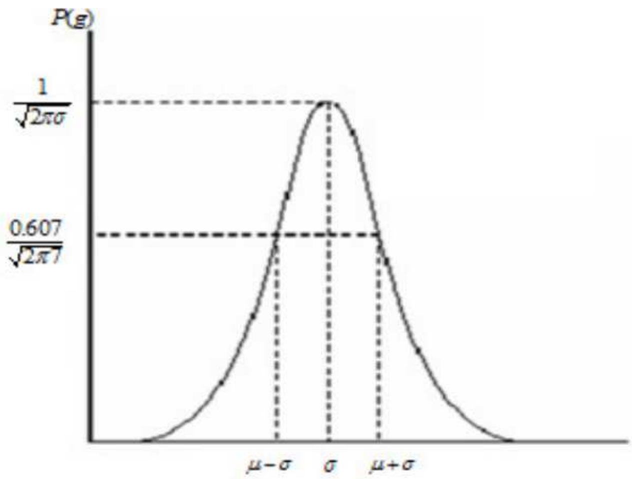
4.2 Gaussův šum

Gaussův šum je nazýván také jako elektronický šum, protože vzniká v zesilovačích nebo detektorech. Je způsoben přírodními zdroji, jako je tepelná vibrace atomů a diskrétní povaha záření teplých předmětů. Obecně narušuje digitální snímky šedými hodnotami. Tento šum je charakteristický svou PDF

$$P(g) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(g-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{24}$$

kde:
g je jasová intenzita šumu
σ je směrodatná odchylka
μ je střední hodnota

PDF Gaussova šumu znázorňuje obr. 9. Je patrné, že 70 % až 90 % pixelů degradovalo v obrazu mezi $\mu - \sigma$ a $\mu + \sigma$. Tvar normalizovaného histogramu je ve spektrální oblasti téměř stejný. Hodnota pixelu je vždy dána součtem samotné hodnoty pixelu a náhodného šumu, který je reprezentován právě hodnotou σ.

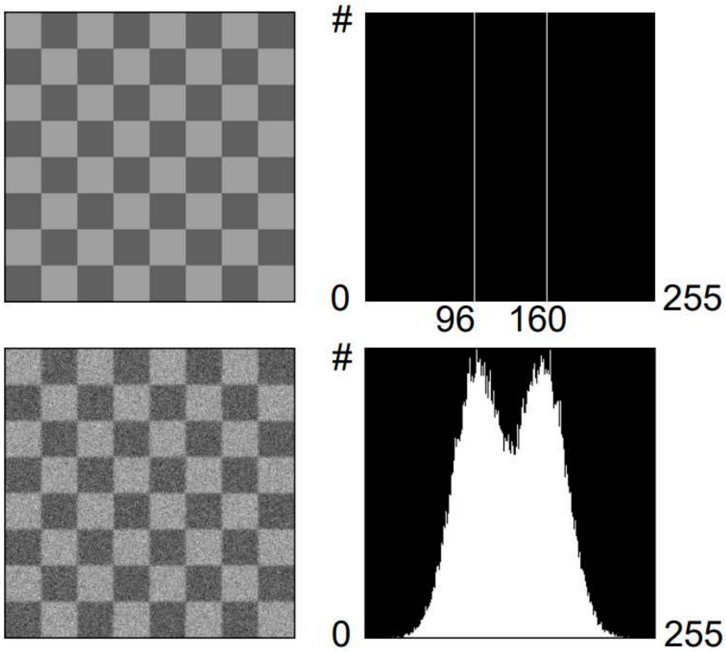


Obrázek 9: PDF Gaussova šumu

Zdroj: [4]

Obr. 10 předkládá dvě šachovnice a jejich histogramy. V horní části je obraz šachovnice bez šumu a ve spodní části je zobrazena šachovnice s přidaným aditivním Gaussovým šumem s hodnotou $\sigma = 20$. Na vodorovné ose histogramu se zobrazují pixely jednotlivé intenzity a na svislé ose je vidět četnost jednotlivých pixelů. Z horního histogramu je zřejmé, že šachovnice má stejný počet pixelů s hodnotou intenzity 96 a 160. Ve spodním histogramu lze vysledovat podobnost s PDF vyobrazenou na obr. 9.

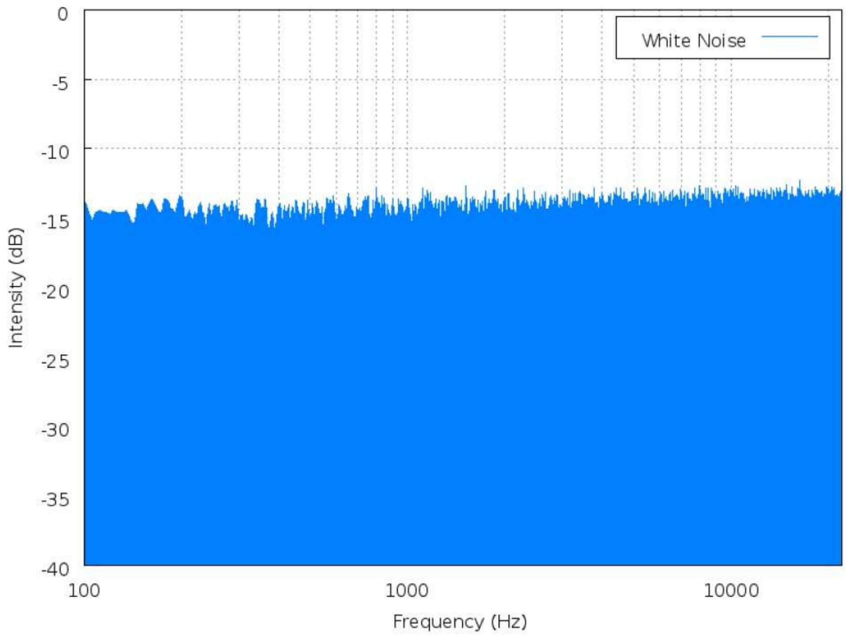
Gaussův bílý šum postihuje obraz tím, že ke každému pixelu je přičtena hodnota z normálního rozložení, které má určitý rozptyl, nulovou střední hodnotu a intenzitu zpravidla podstatně



Obrázek 10: Histogram zašuměného a nezašuměného obrázku

Zdroj: [18]

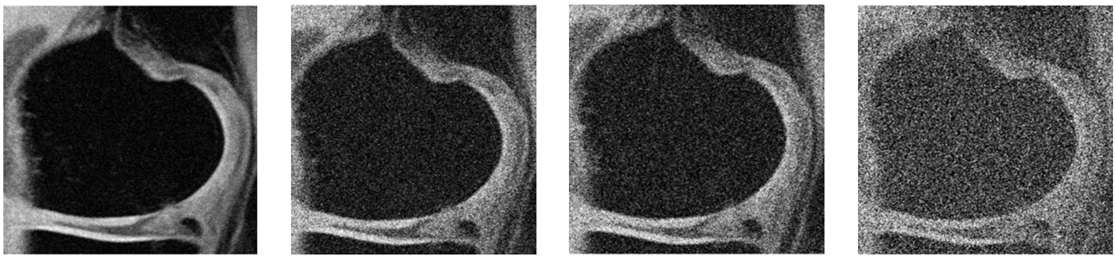
menší, než je maximální intenzita v obrazu. Spektrum šumu je rovnoměrné (což dokumentuje obr. 11), což znamená, že všechny frekvence obrazu jsou shodně ovlivněny. Lze konstatovat, že se jedná o širokopásmový šum.



Obrázek 11: Spektrum Gaussova šumu

Zdroj: [9]

Příklady zašumění obrazu Gaussovým šumem předkládá obr. 12.



(a) $\mu = 0; \sigma = 0,01$ (b) $\mu = 0; \sigma = 0,08$ (c) $\mu = 0; \sigma = 0,1$ (d) $\mu = 0; \sigma = 0,8$

Obrázek 12: Analýza chrupavky: obraz se superponovaným Gaussovým šumem s různými hodnotami μ a σ

Zdroj: autorka

Je-li pro generování aditivního Gaussova šumu použito funkce `imnoise`, je třeba si uvědomit, že tato funkce zašuměný obraz vymezuje do stejného intervalu jasových hodnot, jaký měl vstupní obraz. To znamená, že hodnoty spadající vlivem zašumění mimo tento interval jsou saturovány. Dalším způsobem je vygenerování šumové matice pomocí funkce `randn` a její přičtení k obrazové matici. Funkce `randn` generuje náhodná čísla z normálního rozdělení se směrodatnou odchylkou rovnou jedné a nulovou střední hodnotou. Změnu směrodatné odchylky pak lze provést vynásobením šumové matice příslušnou hodnotou a změnu střední hodnoty přičtením příslušné konstanty.

4.3 Ricianův šum

Za přítomnosti šumu může být prokázáno, že distribuce pravděpodobnosti pro měřenou intenzitu pixelů u Ricianova šumu je dána rovnicí

$$p_M(M) = \frac{M}{\sigma^2} e^{-\frac{M^2+A^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{A \cdot M}{\sigma^2}\right) \tag{25}$$

kde:

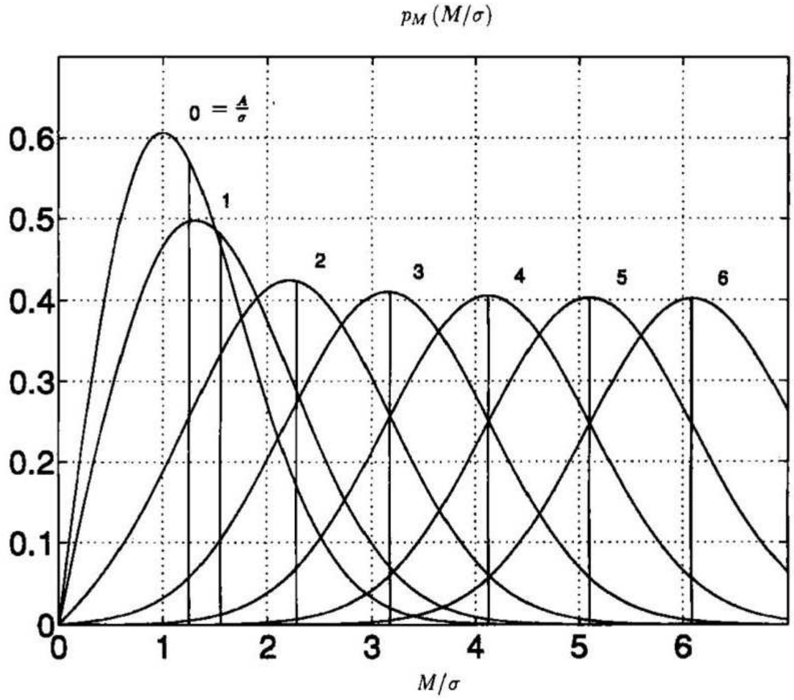
M je měřená intenzita pixelů

σ je směrodatná odchylka Gaussova šumu v reálném a imaginárním obraze

A je intenzita pixelů za nepřítomnosti šumu

I_0 je modifikovaný nultý řád Besselovy funkce prvního druhu

Znázornění Ricianovy distribuce znázorňuje graf na obr. 13. Z grafu lze vyčíst, že při malé hodnotě SNR ($\frac{A}{\sigma} \leq 1$) se Ricianova distribuce nepodobá Gaussově distribuci, při hodnotě $SNR = 3$ se jí ale začíná podobat velice.



Obrázek 13: Ricianova distribuce pro různé hodnoty SNR a $\frac{A}{\sigma}$

Zdroj: [7]

Zvláštní případ Ricianovy distribuce lze pozorovat v oblastech, kde je přítomen pouze šum, tedy $A = 0$. V takovém případě hovoříme o Rayleighově distribuci s PDF danou vztahem

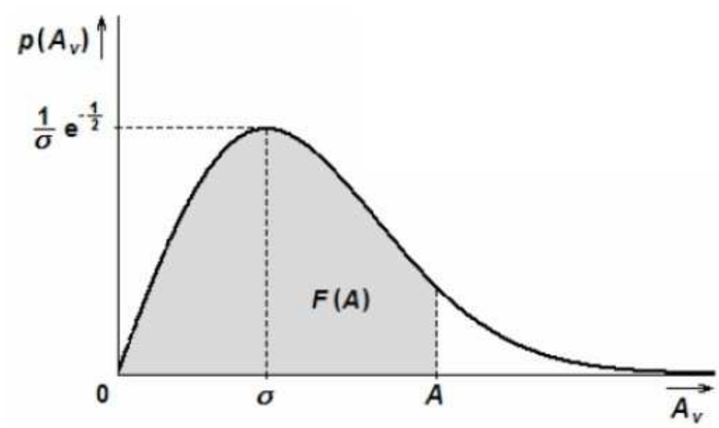
$$p(A_v) = \begin{cases} \frac{A_v}{\sigma^2} e^{-\frac{A_v^2}{2\sigma^2}} & \text{pro } A_v \geq 0 \\ 0 & \text{pro } A_v < 0 \end{cases} \tag{26}$$

kde:

σ^2 je rozptyl šumu

Znázornění Rayleighovy distribuce pak předkládá obr. 14.

Pro oblasti obrazu s velkou intenzitou signálu může být rozdělení šumu považováno za Gaussovo rozdělení s odchylkou σ^2 a střední hodnotu $\sqrt{A^2 + \sigma^2}$.



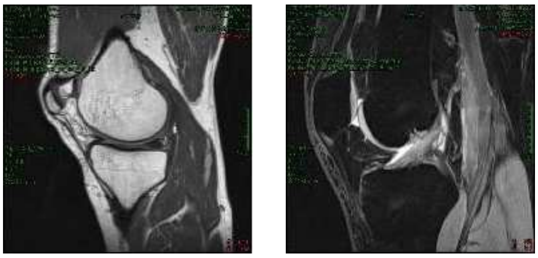
Obrázek 14: Rayleighova distribuce

Zdroj: [15]

5 Analýza testovacích MR dat

Při popisu struktur MR obrazu podle intenzity signálu dané sekvence se používá označení hypersignální pro tkáň, která je reprezentována světlou částí jasového spektra, izosignální nebo také hyposignální pro tkáň, jež je reprezentována tmavou částí jasového spektra, a pro tkáně zobrazené černou barvou je zaveden termín asignální. Důležité je uvádět i sekvenci, ve které byl obraz generován, protože v různých sekvencích dochází k signálové variabilitě analyzované tkáně.

MR vyšetření poskytuje výhodu v zobrazení struktur jak měkkých tkání (jako na příklad vazy, svaly, šlachy atd.), tak kostí a menisků, a proto je hojně využíváno v diagnostice patologií muskuloskeletálního systému. Koleno je jedním z nejvyšetřovanějších kloubů právě touto metodou. Mezi testovanými snímky tedy bude uveden MR snímek kolene i CT snímek kolenní oblasti. Na obr. 15 jsou zobrazeny dva snímky kolene, které byly testovány.



(a) CT snímek (b) MRI snímek

Obrázek 15: Vstupní dataset (snímky kolene)

Zdroj: autorka

Na MRI snímku kolene lze rozlišit chrupavky jako nejsvětlejší oblasti obrazu. Lze rozpoznat dvě chrupavky kolem kloubních hlavic stehenní a holenní kosti a třetí v oblasti čéšky. Dobře viditelné šedé oblasti náleží tkáním svalovým, mezi které v oblasti kolene patří m. gastrocnemius a m. vastus medialis. Kostěné tkáně jsou prezentovány velkými černými oblastmi, které prezentují kloubní hlavice kosti stehenní a holenní.

Výpočetní tomografie je zobrazovací metoda využívající rentgenového záření. Princip metody zobrazování spočívá v zeslabování svazku RTG záření v závislosti na hustotě vyšetřovaného objektu. Průchod RTG záření je digitálně zpracováván ve více průmětech vyšetřované vrstvy. Šířka vrstev neboli skenů se pohybuje v rozmezí 0,5–5 mm. CT vyšetření je vhodné pro diagnostiku patologií v kostech, zvláště k určení jejich lokalizace. Jedná se o intraartikulární fraktury a změny, které se nachází v intraoseálním prostoru. Tímto vyšetřením lze také dobře kontrolovat postavení implantátů.

Díky absenci ionizujícího záření je MRI ideální zobrazovací metodou pro opakované vyšetření v rámci dlouhodobého sledování, čehož lze využít při angiografii. Angiografie může být provedena bez použití kontrastu (time of flight MRA, phase contrast MRA), což produkuje přesné výsledky u pacientů s laminárním tokem v zobrazených cévách. Nejčastější užívanou angiografickou metodou pro získání trojrozměrného zobrazení cévních struktur je kontrastní MRA (contrast-enhancement MRA – CE-MRA). Tato metoda je vhodná například při vyšetření kalcifikací cév (kalcifikace je proces ukládání vápníku v podobě vápenatých solí – fosforečnanů nebo uhličitanů – ve tkáních), při němž se aplikuje gadoliniová kontrastní látka. Při projekci vyšetřované oblasti náleží kalcifikované oblasti výrazným světlým regionům, zatímco zbytek cév se zobrazí pouze šedou barvou. Vybrané snímky cévních systémů předkládá obr. 16.

(a) kontrastní MR cévního systému sestupné části aorty

(b) kalcifikace cév stehenní kosti

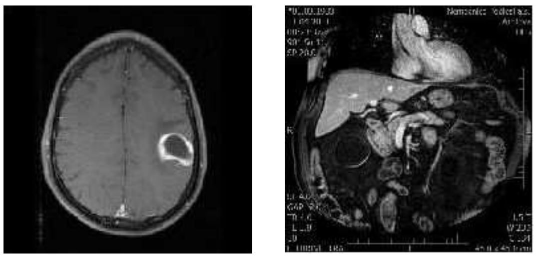
(c) kontrastní MR cévního systému lýtka

(d) kontrastní MR cévního systému dělení sestupné aorty

Obrázek 16: Vstupní dataset (cévní systémy)

Zdroj: autorka

K testovanému datasetu byl ještě přidán patologický snímek lidského mozku a snímek dutiny břišní (viz obr. 17). Rozlišení všech snímků je uvedeno v tab. 1.



(a) patologický snímek mozku

(b) MR snímek dutiny břišní

Obrázek 17: Vstupní dataset (mozek a dutina břišní)

Zdroj: autorka

Tabulka 1: Rozlišení vstupních dat

Vstupní obraz	Rozlišení
Koleno (CT)	600×600
Koleno (MR)	600×600
Kontrastní MR cévního systému sestupné aorty	640×640
Kalcifikace cév stehenní oblasti	960×960
Kontrastní MR cévního systému lýtka	640×640
Kontrastní MR cévního systému dělení sestupné aorty	640×640
Mozek (MR)	256×256
Břicho (MR)	480×480

6 Objektivizační parametry efektivity filtrace

Pro hodnocení efektivity filtrů jsou použity veličiny SNR, která udává odstup signálu od šumu, a MSE vyjadřující střední kvadratickou chybu (nazývanou též směrodatná či standardní chyba). Pro porovnání kvality výstupu je použit také SSIM (structural similarity) index založený na lokálním rozptylu QILV (quality index based on local variance) a kovarianci.

SNR lze vypočítat dle vztahu

$$SNR = \frac{P_{signál}}{P_{šum}}, \tag{27}$$

kde:
$P_{signál}$ je výkon signálu
$P_{šum}$ je výkon šumu

Pro získání hodnoty v jednotkách dB je zapotřebí výpočet 27 rozšířit na tvar

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10}\left(\frac{P_{signál}}{P_{šum}}\right). \tag{28}$$

Pro výpočet MSE je nejprve nutno definovat parametr MAE (mean absolute error), který odpovídá průměru absolutních rozdílů mezi vstupními a výstupními obrazovými pixely:

$$MAE = \frac{1}{MN} \sum_{x=1}^{M} \sum_{y=1}^{N} |U(x,y) - X(x,y)|, \tag{29}$$

kde:
M je počet řádků matice
N je počet sloupců matice
U je původní obraz bez šumu

Algoritmus filtrování generuje výsledky s vysokou přesností a rekonstruované obrazy budou podobně jako původní digitální obraz bez šumu s minimální střední chybou (MSE) danou vztahem

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{x=1}^{M} \sum_{y=1}^{N} |U(x,y) - X(x,y)|^2. \tag{30}$$

SSIM vyjadřuje strukturální podobnost dvou obrazů. Tento index nabývá hodnot 0 až 1, kdy 1 vyjadřuje shodné obrazy. U barevných obrazů se obvykle počítá jen na jasové složce. Hodnota SSIM je určena vztahem

$$SSIM(I,J) = \frac{(2\mu_I\mu_J + C_1)(2\sigma_{IJ} + C_2)}{(\mu_I^2 + \mu_J^2 + C_1)(\sigma_I^2 + \sigma_J^2 + C_2)}, \tag{31}$$

kde:

I a J	jsou porovnávané obrazy
μ_I a μ_J	jsou jejich lokální průměry
σ_I a σ_J	jsou standardní odchylky
σ_{IJ}	je korelační koeficient mezi obrazy
C_1 a C_2	jsou konstanty

Index SSIM vypočítá odchylky obou obrazů, ale globální index bere v úvahu pouze průměr těchto hodnot, takže ignoruje nestacionaritu obrazu.

Lokální rozptyl obrazu I je definován jako

$$\sigma^2(I_{i,j}) = E\left\{\left(I_{i,j} - \overline{I_{i,j}}\right)^2\right\}, \tag{32}$$

kde:

$\overline{I_{i,j}} = E\{I_{i,j}\}$ je lokální průměr

Lokální průměr může být odhadnut pomocí metody váženého sousedství $\eta_{i,j}$ soustředěného kolem analyzovaného pixelu s příslušnou vahou ω_p jako

$$\sigma^2(I_{i,j}) = \frac{\sum\limits_{p\in\eta_{i,j}} \omega_p \left(I_p - \overline{I_{i,j}}\right)^2}{\sum\limits_{p\in\eta_{i,j}} \omega_p}, \tag{33}$$

kde:

$$\overline{I_{i,j}} = \frac{\sum\limits_{p\in\eta_{i,j}} \omega_p I_p}{\sum\limits_{p\in\eta_{i,j}} \omega_p}. \tag{34}$$

Odhadovaný lokální rozptyl obrazu bude použit jako měřítko kvality strukturní podobnosti mezi dvěma obrazy. Statisticky vzato je průměr lokálního rozptylu odhadnut jako

$$\widehat{\mu_{V_I}} = \frac{1}{MN}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sigma^2(I_{i,j}). \tag{35}$$

Standardní odchylka lokálního rozptylu je definována jako:

$$\sigma_{V_I} = \left(E\left\{\left(\sigma^2(I_{i,j}) - \mu_{V_I}\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{36}$$

Kovariance mezi dvěma obrazy I a J je pak

$$\sigma_{V_I V_J} = E\left\{\left(\sigma^2(I_{i,j}) - \mu_{V_I}\right)\left(\sigma^2(J_{i,j}) - \mu_{V_J}\right)\right\}. \tag{37}$$

Pak lze definovat index QILV (Quality Index based on Local Variance)

$$QILV(I, J) = \frac{2\mu_{V_I}\mu_{V_J}}{\mu_{V_I}^2 + \mu_{V_J}^2} \cdot \frac{2\sigma_{V_I}\sigma_{V_J}}{\sigma_{V_I}^2 + \sigma_{V_J}^2} \cdot \frac{\sigma_{V_I V_J}}{\sigma_{V_I}\sigma_{V_J}}. \tag{38}$$

QILV je založen na porovnání lokální distribuce rozptylu mezi obrazem a „zlatým standardem“. Index je vhodný pro lepší hodnocení nestálosti obrazů, proto se výslovně zaměřuje na strukturu obrazu.

Matlab má předdefinovanou funkci pro výpočet MSE, jejíž název je `immse`. Rovněž má funkci `SNR`, která vypočte poměr signálu k šumu. Také lze využít předdefinované funkce pro výpočet SSIM.

6.1 Korelace

Nejjednodušším vztahem dvou metrických proměnných je vztah lineární, jehož míru lze zjistit korelačním koeficientem. Filtrace bude zohledněna také podle 2D korelace.

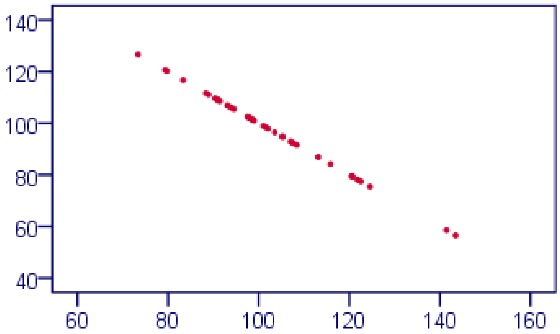
Lineární závislost dvou statistických souborů dat lze demonstrovat vynesením proměnných do grafu. V případě korelace se nestanovuje rovnice přímky závislosti (to je úlohou lineární regrese), ale je možné si přímku představit jako vyjádření lineárního vztahu a z odchylek bodů od přímky pak odhadnout míru tohoto vztahu. Tu vyjadřuje Pearsonův korelační koeficient (r) a nabývá hodnot od -1 do $+1$, které značí perfektní lineární vztah (záporný nebo kladný). V případě kladné korelace hodnoty obou proměnných zároveň stoupají. Pokud nastane záporná korelace, hodnota jedné proměnné stoupá a druhé klesá. V případě neexistence lineárního vztahu je $r = 0$.

Ukázky vzorku dat a hodnoty jejich příslušných korelačních koeficientů jsou znázorněny na obr. 18. Jestliže $r = \pm 1$, potom jde o dokonalou korelaci, kdy jsou body poskládány v dokonale rovné přímce. Nicméně výběrový soubor, se kterým se obvykle pracuje, obvykle vykazuje spíše nižší míru korelace.

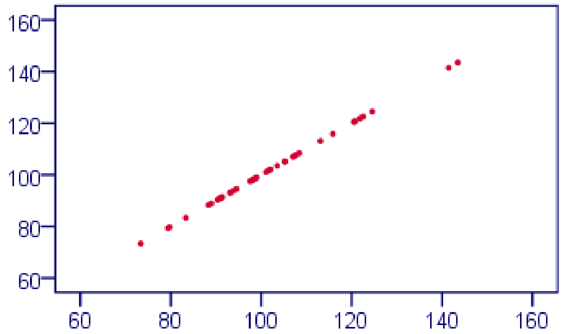
Korelační koeficient je měřítkem lineárního vztahu, a tedy hodnota $r = 0$ neznamená, že mezi proměnnými není žádný vztah. Na příklad bodový graf na obr. 18d má $r = 0$, což značí nulovou korelaci, nicméně proměnné mají dokonale kvadratický vztah.

Korelace je nezávislá na jednotkách původních proměnných, je bezrozměrná. Při změně pořadí proměnných se výše korelačního koeficientu nemění. Pro korelační koeficient je třeba brát v úvahu, že je platný pouze v rozmezí daném použitými daty a pokud je výrazně odlišný od nuly, není důkazem funkčního vztahu proměnných.

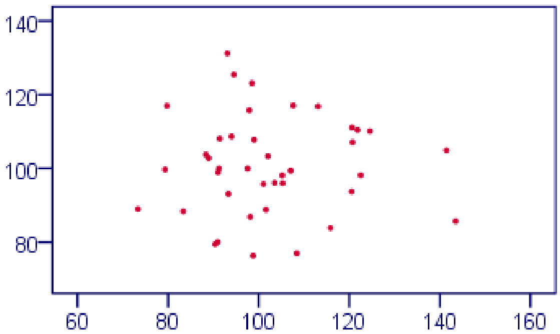
Výpočet korelačního koeficientu se liší podle typu zkoumaných statistických proměnných. V případě, že náhodné veličiny X a Y jsou kvantitativní náhodné veličiny se společným dvourozměrným normálním rozdělením, je pro konkrétní hodnoty (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$ výběrový



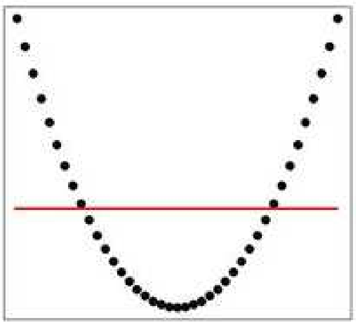
(a) $r = 1$
dokonalá kladná korelace



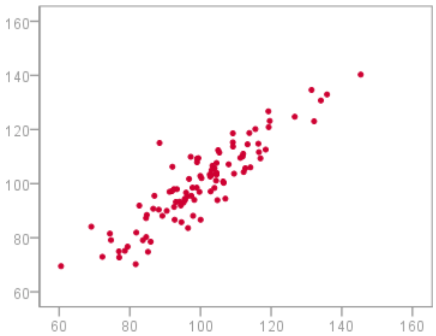
(b) $r = -1$
dokonalá záporná korelace



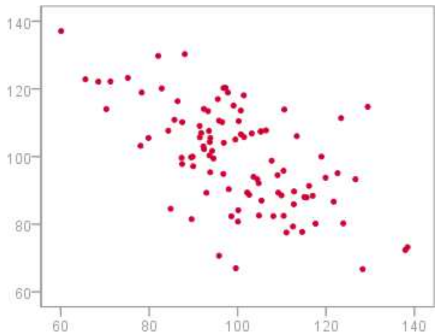
(c) $r = 0$
nulová korelace



(d) $r = 0$
dokonale kvadratický vztah



(e) $r = 0,9$
silná kladná korelace



(f) $r = -0,6$
středně silná záporná korelace

Obrázek 18: Příklady korelací

Zdroj: [11]

korelační koeficient dán vztahem

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}, \tag{39}$$

kde:

r je Pearsonův korelační koeficient

Součty čtverců ve jmenovateli výrazu 39 jsou $(n-1)$-násobkem výběrových rozptylů. Proto se lze často setkat s jednodušším vyjádřením Pearsonova korelačního koeficientu:

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}, \tag{40}$$

kde:

s_x je směrodatná odchylka proměnné x

s_y je směrodatná odchylka proměnné y

s_{xy} je kovariance proměnných x a y určená vztahem 41

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \tag{41}$$

Správná interpretace Pearsonova koeficientu předpokládá, že obě proměnné jsou náhodné veličiny a mají společné dvourozměrné normální rozdělení. Potom nulový korelační koeficient znamená, že veličiny jsou nezávislé. Pokud není splněn předpoklad dvourozměrné normality, z nulové hodnoty korelačního koeficientu nelze usuzovat na nic víc, než že veličiny jsou nekorelované.

7 Design LMMSE filtru pro MR obrazová data

Ve statistice a zpracování signálu je odhad minimální střední kvadratické chyby (MMSE) metodou, která minimalizuje střední kvadratickou chybu (MSE), jež je společným měřítkem kvality odhadu naměřených hodnot závislé proměnné. LMMSE filtr vycházející z minimalizace MSE funguje na bázi odhadu šumu (metodou statistických momentů). Snad nejlepších výsledků filtrace je dosaženo, když se předpokládá, že signál a šum jsou statisticky závislé podle Ricianovy distribuce. Lineární odhady MMSE jsou často používané, protože jsou snadno použitelné, velmi univerzální a jejich výpočet je rychlý. Vychází z nich i mnoho dalších metod, jako jsou Wiener-Kolmogorovův filtr nebo Kálmánův filtr.

Odhad šumu v MRI pomocí jednoho snímku se obvykle provádí z pixelů pozadí (tedy binarizací), kde se předpokládá, že signál je nulový. Jasová složka pixelu v takovém pozadí bývá nulová. Přímý odhad pak lze zapsat jako

$$\widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} M_i^2, \tag{42}$$

kde:
N je počet bodů zvažovaných pro odhad
M_i je jasová hodnota pixelu i

Tento odhad je také odhadem maximální pravděpodobnosti (ML) tohoto parametru pro Rayleighovu distribuci. Další způsob, jak odhadnout σ_n v oblastech bez signálu, je použitím prvního řádu momentu Rayleighovy PDF:

$$\widehat{\sigma_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} M_i \tag{43}$$

LMMSE odhad pro 2D signál s Ricianovou distribucí lze zapsat jako

$$\widehat{A_{ij}^2} = E\left\{A_{ij}^2\right\} + C_{A_{ij}^2 M_{ij}^2} C_{M_{ij}^2 M_{ij}^2}^{-1} (M_{ij}^2 - E\left\{M_{ij}^2\right\}), \tag{44}$$

kde:
A_{ij} je neznámá hodnota intenzity pixelu (i, j)
M_{ij} je jasová magnituda signálu
$C_{A_{ij}^2 M_{ij}^2}$ je vektor křížové kovariance
$C_{M_{ij}^2 M_{ij}^2}$ je kovariační matice

Po zjednodušení odhadu na bodový se vektory a matice stanou skalárními hodnotami. Úpravou lze tedy dostat tvar

$$\widehat{A_{ij}^2} = E\left\{A_{ij}^2\right\} + \frac{E\left\{A_{ij}^4\right\} + 2E\left\{A_{ij}^2\right\}\sigma_n^2 - E\left\{A_{ij}^2\right\}E\left\{M_{ij}^2\right\}}{E\{M_{ij}^4\} - E\left\{M_{ij}^2\right\}^2}\left(M_{ij}^2 - E\left\{M_{ij}^2\right\}\right). \tag{45}$$

Za předpokladu lokální ergodičnosti lze konečný zápis pro LMMSE odhad definovat jako

$$\widehat{A_{ij}^2} = \left\langle M_{ij}^2\right\rangle - 2\sigma_n^2 + K_{ij}\left(M_{ij}^2 - \left\langle M_{ij}^2\right\rangle\right), \tag{46}$$

kde

$$K_{ij} = 1 - \frac{4\sigma_n^2\left(\left\langle M_{ij}^2\right\rangle - \sigma_n^2\right)}{\left\langle M_{ij}^4\right\rangle - \left\langle M_{ij}^2\right\rangle^2}. \tag{47}$$

Z tohoto zápisu vyplývá, že hodnota σ_n^2 musí být řádně odhadnuta. To se většinou provádí z vybrané oblasti z pixelů na pozadí. Výkon celkového odhadu je tedy velice závislý na kvalitě odhadu odchylky šumu. Dříve byla tedy spousta metod odhadu založena na selekci pozadí. Nemusí se však jen pracovat s takovou selekcí, lze využít i tzv. distribuci local second order moment. Porovnání takové distribuce běžného snímku a MRI snímku předkládá obr. 19. Zřetelně lze vidět, že u snímku dívky zůstala distribuce lokálního momentu druhého řádu zcela nezměněná vzhledem k původnímu obrazu. U MRI snímku bez šumu má však distribuce maximum v počátku. Pokud bude na MRI aplikován Ricianův šum, maximum se posune z nuly na hodnotu $2\sigma_n^2$ (v tomto případě tedy na hodnotu 200). Pozici maxima lze určit pomocí vzorce

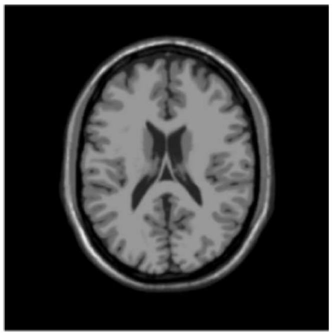
$$\widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{2}\arg\left(\max\{p(\widehat{\mu_2})\}\right), \tag{48}$$

kde:

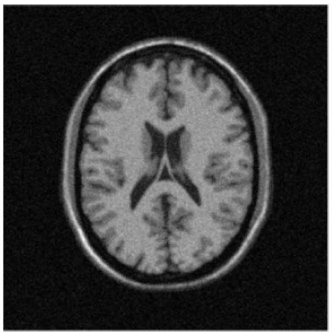
$p(\widehat{\mu_2})$ je distribuce local second order moment

(a) původní reálný snímek

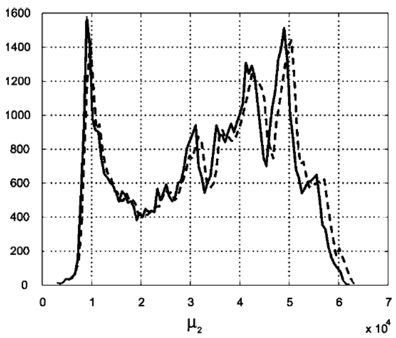
(b) zašuměný reálný snímek ($\sigma_n = 10$)



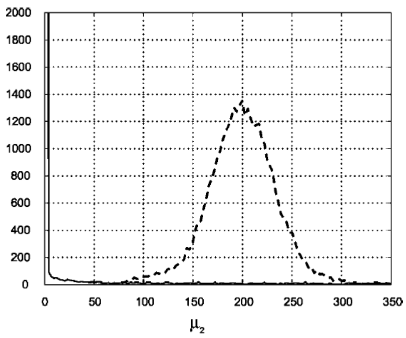
(c) původní MRI snímek



(d) zašuměný MRI snímek ($\sigma_n = 10$)



(e) distribuce pro reálné snímky (původní plnou čarou, zašuměný přerušovanou čarou)



(f) distribuce pro MRI snímky (původní plnou čarou, zašuměný přerušovanou čarou)

Obrázek 19: Porovnání distribuce local second order moment u běžného a MRI snímku
Zdroj: [1]

8 Testování LMMSE filtru na reálných MR datech

Pro samotnou fázi testování dat lze realizaci v Matlabu rozdělit do několika dílčích kroků. Nejprve se na načtená data aplikovaly výše zmíněné typy šumů. Pro každý typ šumu byl zvolen více než jeden parametr úrovně šumu. Pro zjednodušení kódu byla zvolena práce s buněčnými poli, do kterých se jednotlivé obrazy ukládaly. Další fází po zašumění obrazů byla aplikace filtru LMMSE. Po filtrování byly nové obrazy rovněž uloženy do nového buněčného pole, celkem tedy byla vytvořena již dvě pole.

První pole, tedy pole se zašuměnými obrazy, má velikost 8×11 – obsahuje tedy osm řádků a jedenáct sloupců. První sloupec tvoří vstupní obrazy, další sloupce jsou obrazy s přidaným šumem. Algoritmus dále s buněčným polem pracuje vždy tak, že celý první sloupec je vstupní proměnná pro příkaz přidání šumu. Pro šum typu salt & pepper a Gaussův šum je příkaz většinou jednořádkový s jednoduchou syntaxí. Pro aplikaci Ricianova šumu je syntaxe delší a na první pohled složitější, protože šum je přidáván do obrazu přes definovanou masku. Taková předdefinovaná a přidaná funkce vyžaduje úpravu vstupních obrazů na formát *double*, který umožňuje práci s desetinnými čísly, stejně jako například datový typ *float*. Oproti typu *float* má však *double* dvojnásobnou přesnost, což napovídá již samotný název. Vstupní obrazy ve formátech *jpeg* a *dicom* jsou nejprve konvertovány na monochromatický formát a dále na typ *double*. U formátu *jpeg* jde o velice rychlý převod, u formátu *dicom* však musí být nejdřív proveden převod z *uint16* na *uint8*. To je provedeno nalezením limitů kontrastu obrazu, které se nastaví ve stupních šedi na nové hodnoty intenzity:

```
im1 = imadjust(im1_1, stretchlim(im1_1, 0), []);
imwrite(im1, 'sample.png');
```

První buněčné pole je reprezentováno následujícími generátory šumu:

sloupec 2: salt & pepper; úroveň šumu 0,02
sloupec 3: salt & pepper; úroveň šumu 1
sloupec 4: Gaussův šum; průměr 0,1, rozptyl 0,1
sloupec 5: Gaussův šum; průměr 0,1, rozptyl 0,01
sloupec 6: Gaussův šum; průměr 0,5, rozptyl 0,01
sloupec 7: Gaussův šum; průměr 0,05, rozptyl 0,01
sloupec 8: Ricianův šum; rozptyl 0,05
sloupec 9: Ricianův šum; rozptyl 0,08
sloupec 10: Ricianův šum; rozptyl 0,1
sloupec 11: Ricianův šum; rozptyl 0,5

Následující ukázka zdrojového kódu reprezentuje definici buněčného pole pro vybrané typy syntetického obrazového šumu:

```
for j = 1 : radky
   pole{j,1} = zdroj{j};
   pole{j,2} = imnoise (pole{j,1},'salt & pepper',0.02);
   .
   .
   .
   pole{j,7} = imnoise (pole{j,1},'gaussian',0.05,0.01);
end

% Vypocet MSE
polemse = cell(radky,sloupce)
for j = 1 : radky
    for k = 1 : sloupce
        polemse{j,k}=immse(pole{j,1},pole{j,k})
    end
end
```

Tabulka 2 znázorňuje exemplární strukturu buněčného pole.

Tabulka 2: Struktura buněčného pole před filtrací

	Vstupní obraz	**Salt & pepper**		**Gaussův šum**				**Ricianův šum**			
		úroveň šumu 0,02	úroveň šumu 1	průměr 0,1 rozptyl 0,1	průměr 0,1 rozptyl 0,01	průměr 0,5 rozptyl 0,01	průměr 0,05 rozptyl 0,01	rozptyl 0,05	rozptyl 0,08	rozptyl 0,1	rozptyl 0,5
	(j;1)	(j;2)	(j;3)	(j;4)	(j;5)	(j;6)	(j;7)	(j;8)	(j;8)	(j;10)	(j;11)
(1;k)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
(2;k)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
(3;k)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
(4;k)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
(5;k)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
(6;k)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
(7;k)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
(8;k)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

V případě aplikace Ricianova šumu je předdefinovaná funkce na první pohled delší a má několik kroků. V prvním kroku je definována maska s nastaveným rozptylem. Pak je vypočtena maximální hodnota intenzity vstupního obrazu, z níž je odvozena hodnota rozptylu šumu. Pak už je jen provedena samotná aproximace šumu, kdy maska pomocí cyklu `for` projde vstupní obrazy a přidá Ricianův šum. Je-li celé pole zaplněno, může se spustit samotná filtrace. Vycházíme z předdefinované funkce, která pracuje s aplikací masky, a filtrované obrazy jsou uloženy do druhého buněčného pole, tentokrát velikosti 8×10, tedy 8 řádků a 10 sloupců. Lze si jej představit jako pole znázorněné v tab. 2 bez sloupce se vstupními obrazy.

Stěžejní částí je analýza a testování efektivity LMMSE filtru pro vybraná MR obrazová data. Pro všechny obrazy je provedena filtrace s několika hodnotami parametru `Ws`, který určuje velikost masky filtru. Vybrané hodnoty `Ws` byly 5, 7, 9, 13, 15 a 17. Následující extrakt zdrojového kódu reprezentuje aplikaci LMMSE filtru v rámci buněčného pole:

```
for j = 1 : radky
    for k = 2 : sloupce
        polefilt{j,k-1}=MRI_lmmse(pole{j,k},[Ws,Ws]);
    end
end
```

`MRI_lmmse` je předdefinovaná funkce odhadu šumu se čtvercovým oknem `[Ws,Ws]` neboli maskou použitou pro lokální odhad.

Pro všechny tyto úrovně filtru byly spočítány parametry SNR, MSE, SSIM, QILV a korelace a jejich hodnoty byly zaneseny do přehledných tabulek pro snazší hodnocení úrovně filtrace. Práci s buněčnými poli demonstruje následující kód (u parametrů se porovnávají obrazy z prvního sloupce prvního pole se sloupci z druhého pole):

```
polessim2 = cell(radek2,sloupec2)
for j = 1 : radek2
    for k = 1 : sloupec2
        polessim2{j,k}=ssim(pole{j,1},polefilt{j,k})
    end
end
```

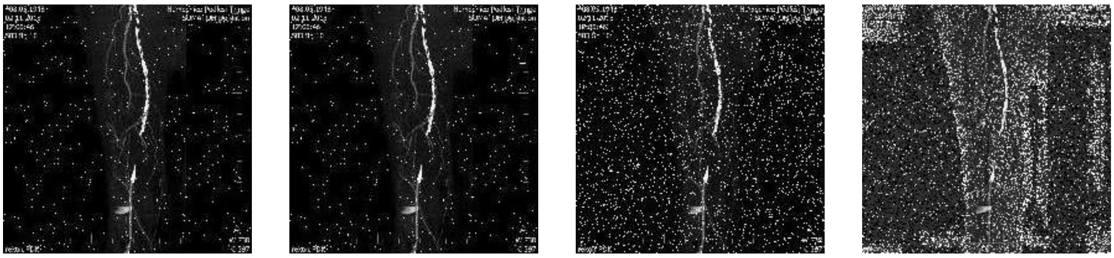
8.1 Filtrace pro salt & pepper

Filtrace impulzního šumu typu salt & pepper se na základě LMMSE filtru jeví jako neefektivní z hlediska testovacích výsledků. Již na první pohled je jasné, že je filtr neúčinný, a to pro všechny hodnoty velikosti masky `Ws`. Z tohoto testování lze usuzovat, že LMMSE filtr nelze aplikovat pro impulzní šum, což je demonstrováno na obr. 20.

Takový výsledek odpovídá očekávání, neboť mnoho zdrojů uvádí, že na tento typ šumu je vhodné použít mediánový filtr (jak je uvedeno v kap. 3.1.1). Není proto třeba se podrobněji zabývat hodnotami parametrů, jejichž průměry jsou uvedeny v tab. 3.

8.2 Filtrace pro Gaussův šum

Tvar křivky distribuce Ricianova a Gaussova šumu je velmi podobný (viz obr. 9 a obr. 13) a manifestace šumu LMMSE filtru v MR obrazech předpokládá Ricianovu distribuci. Dá se očekávat, že již u Gaussova šumu bude filtrace úspěšnější než u šumu salt & pepper.



(a) obraz před filtrací ($d = 0,02$) (b) obraz po filtraci ($d = 0,02$) (c) obraz před filtrací ($d = 1$) (d) obraz po filtraci ($d = 1$)

Obrázek 20: Snímky cévního systému s aplikací šumu salt & pepper o různých úrovních po filtraci s maskou $W_s = 5$

Zdroj: autorka

Tabulka 3: Průměrné hodnoty parametrů pro filtraci salt & pepper

Parametr	Hodnota
SNR	0,9270 dB
MSE	0,0275
SSIM	0,0710
QILV	0,0175
r	0,1590

Byly testovány čtyři úrovně Gaussova šumu, konkrétně tyto:

1. střední hodnota 0,1; rozptyl 0,1
2. střední hodnota 0,1; rozptyl 0,01
3. střední hodnota 0,5; rozptyl 0,01
4. střední hodnota 0,05; rozptyl 0,01

Vždy byly testovány i různé hodnoty velikosti masky.

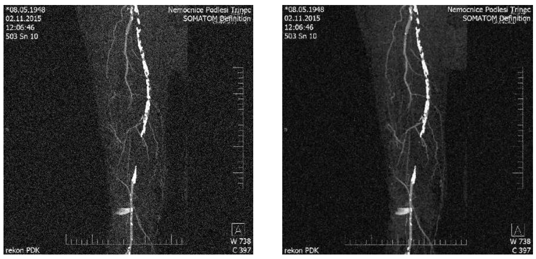
Tabulka 4 uvádí průměrné hodnoty sledovaných parametrů pro různé úrovně šumu. Tyto konkrétní hodnoty byly spočítány jako průměry z osmi filtrovaných snímků, na které byl aplikovaný filtr s hodnotou `Ws = 5`. SNR je parametrem hodnotícím odstup signálu od šumu. Je výrazně vyšší než u šumu salt & pepper. MSE (střední kvadratická chyba) je nízká, což je jakožto u chyby žádoucí. QILV, CORR a SSIM coby parametry s maximální hodnotou 1 lze také hodnotit jako vyšší.

Za efektivní lze označit filtrace s parametry $\mu = 0,1$ a $\sigma^2 = 0,01$ (třetí sloupec tabulky) a $\mu = 0,05$ a $\sigma^2 = 0,01$ (pátý sloupec tabulky).

Obrazový výstup jedné z efektivních filtrací předkládá obr. 21. Naopak neefektivní filtrace je představena na obr. 22.

Tabulka 4: Průměrné hodnoty parametrů pro filtraci Gaussova šumu

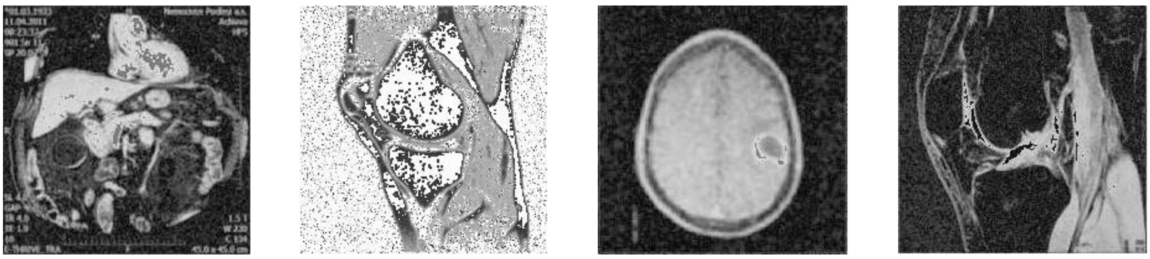
Parametr	Hodnota			
	$\mu = 0,1$ $\sigma^2 = 0,1$	$\mu = 0,1$ $\sigma^2 = 0,01$	$\mu = 0,5$ $\sigma^2 = 0,01$	$\mu = 0,05$ $\sigma^2 = 0,01$
SNR	3,625 dB	8,507 dB	2,036 dB	9,295 dB
MSE	0,039	0,019	0,173	0,019
SSIM	0,135	0,411	0,232	0,396
QILV	0,182	0,661	0,250	0,666
r	0,543	0,822	0,519	0,823



(a) před filtrací (b) po filtraci s $W_s = 5$

Obrázek 21: Zašuměné obrazy (Gauss; $\mu = 0,1$ a $\sigma^2 = 0,01$)

Zdroj: autorka



(a) MR snímek dutiny břišní (b) CT snímek kolene (c) MR snímek mozku (d) MR snímek kolene

Obrázek 22: Neefektivní filtrace Gaussova šumu (průměr 0,5; rozptyl 0,01)

Zdroj: autorka

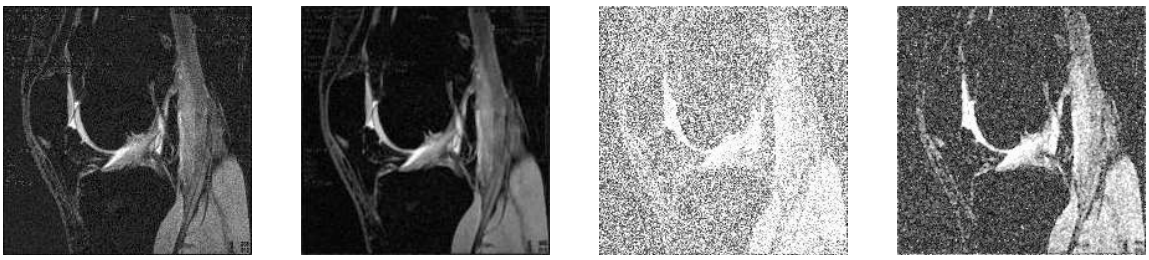
8.3 Filtrace pro Ricianův šum

Filtrovány byly MRI snímky s Ricianovým šumem s hodnotami rozptylu 0,05; 0,08; 0,1 a 0,5. Testování proběhlo při různých velikostech filtrační masky (s hodnotami `Ws` 5, 7, 9, 13, 15 a 17). Výsledné parametry uvádí tab. 5. Při změnách velikosti filtrační masky nenastávaly velké změny v průměrných hodnotách, proto jsou uvedeny jen výsledky pro nejnižší a nejvyšší hodnotu.

Tabulka 5: Průměrné hodnoty parametrů pro filtraci Ricianova šumu

	Parametr	Hodnota			
		$\mu = 0,1$ $\sigma^2 = 0,1$	$\mu = 0,1$ $\sigma^2 = 0,01$	$\mu = 0,5$ $\sigma^2 = 0,01$	$\mu = 0,05$ $\sigma^2 = 0,01$
$W_s = 5$	*SNR*	11,739 dB	9,982 dB	9,373 dB	1,037 dB
	MSE	0,019	0,019	0,019	0,078
	SSIM	0,538	0,461	0,424	0,116
	QILV	0,647	0,604	0,571	0,172
	r	0,842	0,853	0,857	0,646
$W_s = 17$	*SNR*	11,299 dB	9,509 dB	8,791 dB	1,750 dB
	MSE	0,019	0,019	0,020	0,067
	SSIM	0,518	0,467	0,452	0,247
	QILV	0,543	0,467	0,415	0,103
	r	0,869	0,857	0,849	0,699

Nejefektivnější filtrace bylo dosaženo pro rozptyl 0,05 a hodnotu `Ws = 5`, jako nedostatečná se naopak projevila filtrace pro rozptyl 0,5 a hodnotu `Ws = 17`, což lze posoudit objektivně na základě uvedených parametrů a subjektivně podle obr. 23. Pořád je patrná jakási zrnitost na oblastech, které by měly být homogenní, a přechody mezi různými úrovněmi jasu jsou rozmazané.

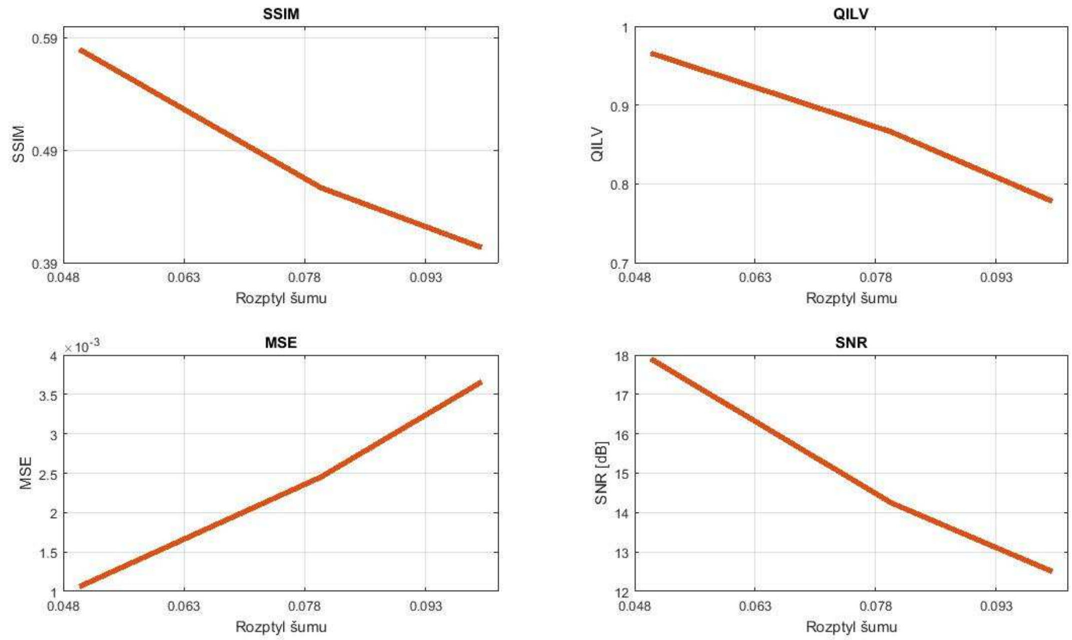


(a) snímek před filtrací ($\sigma^2 = 0,05$) (b) snímek po filtraci ($\sigma^2 = 0,05$) (c) snímek před filtrací ($\sigma^2 = 0,5$) (d) snímek po filtraci ($\sigma^2 = 0,5$)

Obrázek 23: Srovnání efektivní a neefektivní filtrace Ricianova šumu

Zdroj: autorka

Při zvyšování rozptylu šumu se mění hodnoty počítaných parametrů. U Ricianova šumu a rozptylu od 0,05 do 1 jsou patrné závislosti, které demonstrují grafy na obr. 24. Se zvyšujícím se rozptylem šumu mají parametry SNR, SSIM i QILV klesající charakter. Hodnoty parametrů jsou vyneseny na svislé ose. Hodnota MSE se naopak přirozeně zvedá, což odpovídá očekávání, neboť MSE je parametr určující průměrnou kvadratickou chybu. Nejefektivnější filtraci náleží nejvyšší hodnoty SSIM, SNR a QILV, naopak u MSE parametru se docílí nejnižší hodnoty. Grafy byly vytvořeny z výstupu pro masku velikosti 5. Se změnou velikosti masky se velikost parametrů mění jen nepatrně (viz tab. 5), ale chování je vždy stejné, proto by grafy pro jiné velikosti masky vypadaly velice podobně.



Obrázek 24: Závislosti jednotlivých parametrů při filtraci Ricianova šumu

Zdroj: autorka

8.4 Evaluace testování LMMSE filtru

Testováno bylo osm MRI snímků, každý byl infiltrován pro deset různých úrovní šumu, velikost masky filtru byla testována pro šest různých hodnot. Celkem byla tedy po filtraci získána sada 480 MRI snímků, které byly vyhodnoceny z hlediska efektivity filtrace. Jelikož samotný matematický základ filtru vychází z Ricianovy distribuce, lze předpokládat, že pro Ricianův a Gaussův šum je aplikace filtru nejlepší. V mnoha pramenech je také prezentován fakt, že pro impulzní šum typu salt & pepper je vhodnější volbou konvenční nízkofrekvenční filtr, jako je např. mediánový filtr nebo průměrový filtr.

Pro Ricianův šum také platí, že se vzrůstajícím rozptylem klesá kvalita filtrace. Při rozptylu nad 0,1 již filtrace nemá smysl a snímky jsou již příliš degradované. Pro Gaussův šum byla filtrace proveditelná při rozptylu 0,01 a průměrem $[0,05; 0,1]$.

9 Závěr

Během snímání a přenosu snímků jsou data narušena šumovou složkou, kterou nelze kompletně vyloučit. Šum je v teorii signálu definován jako aditivní informace, která byla k původní přidána pořizovacím zařízením či během transportu. Každý šum může být aproximován statistickým modelem. Studium modelů šumů je velmi důležitou součástí zpracování obrazu. Bez předchozího znalosti o modelech šumu nelze zpracovávat a provádět operace pro odstranění šumu. Modely šumu bývají navrženy funkcí hustoty pravděpodobnosti (PDF) s použitím průměru, rozptylu, a především šedých úrovní v digitálních snímcích. Na začátku této práce je literární rešerše, kde jsou vysvětleny základní principy vzniku šumu a jsou zde popsány i jednotlivé modely šumu, které byly testovány při samotné filtraci. Filtry nějakým způsobem vyhodnocují okolí pixelu a z něj usuzují, zda se jedná o šum. Za šum jsou považovány velké změny hodnoty sousedních pixelů. Filtry, které eliminují šum z jediného obrazu, pracují buď na principu konvoluce v prostorové doméně, nebo lokální statistiky okolí.

Ve své bakalářské práci jsem se tudíž věnovala implementaci generátorů několika šumů, které jsem aplikovala na sedm různých MRI snímků a jeden CT snímek, které byly dále filtrovány navrženým LMMSE filtrem, u kterého byla měněna velikost použité masky. Byly testovány šumy salt & pepper, Gaussův šum a Ricianův šum. Pro každý šum byla testována více než jedna úroveň tohoto šumu. Dalším úkolem bylo hodnocení úspěšnosti filtrace. Pro objektivní hodnocení byly pro každý případ počítány parametry SNR, tedy odstup signálu od šumu, MSE (střední kvadratická chyba), SSIM a QILV (tedy měřítka strukturální podobnosti) a korelace, která vyjadřuje lineární závislost. Při efektivní filtraci se parametr SNR pohyboval v průměru kolem 10 dB. MSE se pohybovala velice nízko – kolem dvou setin. SSIM a QILV byly rovny přibližně šesti desetinám a korelace osmi desetinám.

Statistická filtrace je důležitou procedurou z hlediska modelování zájmových objektů z MR obrazových klinických dat. Na jednu stranu je každá filtrační procedura spjata s modifikací klinické informace, která deformuje informace o stavu analyzované tkáně, na druhou stranu efektivní filtrace parciálně předurčuje kvalitu segmentačního procesu. Obecně se dá očekávat, že každý šum značně ovlivňuje kvalitu distribuce pixelů v MR obrazu. Tento fakt má za následek horší efektivitu segmentačního procesu, což může vést k nekorektní extrakci a modelování zájmových objektů. Z tohoto hlediska segmentační procedura na bázi statistického odhadu efektivně eliminuje šumovou složku obrazové informace a významně přispívá k efektivnější detekci oblastí zájmu u MR obrazových dat.

Prokázala jsem, že LMMSE filtr vycházející z Ricianovy distribuce šumu takový šum filtruje nejlépe, a ukázalo se, že přirozeně čím menší rozptyl šumu je (tedy čím nižší míra šumu je), tím je výsledný obraz kvalitnější a původní klinická informace zůstane zachována.

Literatura

[1] AJA-FERNANDEZ, S., C. ALBEROLA-LOPEZ a C.-F. WESTIN. Noise and Signal Estimation in Magnitude MRI and Rician Distributed Images: A LMMSE Approach. *IEEE Transactions on Image Processing.* 2008, **17**(8), 1383-1398. DOI: 10.1109/TIP.2008.925382. ISSN 1057-7149. Dostupné také z: http://ieeexplore.ieee.org/document/4543026/

[2] AJA-FERNÁNDEZ, Santiago. *Selected papers on statistical noise analysis in MRI* [online]. Valladolid: LPI, Universidad de Valladolid, 2015 [cit. 2018-04-29]. Dostupné z: https://www.lpi.tel.uva.es/ santi/personal/docus/noisebook_aja15.pdf

[3] AJA-FERNÁNDEZ, Santiago a Antonio TRISTÁN-VEGA. *A review on statistical noise models for Magnetic Resonance Imaging* [online]. Valladolid: LPI, Universidad de Valladolid, 2015 [cit. 2018-04-29]. Dostupné z: https://pdfs.semanticscholar.org/b67c/196652a722aa713c1619610b09b52e2cb9bf.pdf

[4] BOYAT, Ajay Kumar a Brijendra Kumar JOSHI. A Review Paper: Noise Models in Digital Image Processing. *Signal & Image Processing: An International Journal.* 2015, **6**(2).

[5] BUADES, Antoni, Bartomeu COLL a Jean-Michel MOREL. A Review of Image Denoising Algorithms, with a New One. *Journal on Multiscale Modeling and Simulation* [online]. 2005, **4**(2), 490-530 [cit. 2018-04-29]. DOI: 10.1137/040616024. ISSN 1540-3459. Dostupné z: http://epubs.siam.org/doi/10.1137/040616024

[6] BUCHTOVÁ, Eliška. *Zobrazovací metody kolenního kloubu.* Olomouc, 2017. Bakalářská práce. Univerzita Palackého v Olomouci, Fakulta zdravotnických věd. Vedoucí práce Vojtěch Prášil.

[7] GUDBJARTSSON, Hákon a Samuel PATZ. The Rician distribution of noisy MRI data. *Magnetic Resonance in Medicine.* 1996, **36**(2), 332-333. DOI: 10.1002/mrm.1910360224. ISSN 07403194. Dostupné také z: http://doi.wiley.com/10.1002/mrm.1910360224

[8] KAUR, Gursharan, Rakesh KUMAR a Kamaljeet KAINTH. A Review Paper on Different Noise Types and Digital Image Processing. *International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering.* 2016, **6**(6), 562-565. ISSN 2277 128X.

[9] NOVOZÁMSKÝ, Adam. NPGR032 – CVIČENÍ III.: Šum a jeho odstranění – teorie & praxe. In: *Department of Image Processing* [online]. Praha: Institute of Information Theory and Automation of the ASCR [cit. 2018-04-29]. Dostupné z: http://zoi.utia.cas.cz/files/NPGR032/NPGR032_03_644980.pdf

[10] PATIDAR, Pawan, Manoj GUPTA, Sumit SRIVASTAVA a Ashok Kumar NAGAWAT. Image De-noising by Various Filters for Different Noise. *International Journal of Computer*

Applications. 2010, **9**(4), 45-50. DOI: 10.5120/1370-1846. ISSN 09758887. Dostupné také z: http://www.ijcaonline.org/volume9/number4/pxc3871846.pdf

[11] Pearson Correlations — Quick Introduction. *SPSS TUTORIALS* [online]. Amsterdam: Sigma Plus Consulting, 2018 [cit. 2018-04-29]. Dostupné z: https://www.spss-tutorials.com/pearson-correlation-coefficient/

[12] PIKORA, Jan. *Implementace grafických filtrů pro zpracování rastrového obrazu*. Brno, 2008. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Fakulta informatiky. Vedoucí práce Tomáš Staudek.

[13] PLEVA, Martin a Petr OUŘEDNÍČEK. *MRI srdce: praktické využití z pohledu kardiologa*. Praha: Grada, 2012. ISBN 978-802-4739-311.

[14] ROY, Vandana. Spatial and Transform Domain Filtering Method for Image De-noising: A Review. *International Journal of Modern Education and Computer Science*. 2013, **5**(7), 41-49. DOI: 10.5815/ijmecs.2013.07.05. ISSN 20750161. Dostupné také z: http://www.mecs-press.org/ijmecs/ijmecs-v5-n7/v5n7-5.html

[15] ŠVIHÁLKOVÁ, Hana. *Detekce a analýza odlehlých bodů (outliers) v datech klinických registrů*. Brno, 2009. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Daniel Klime.

[16] VARGHESE, Justin, Mohamed Samiulla KHAN, Madappa SIDDAPPA, Saudia SUBASH, Mohamed GHOUSE a Omer Bin HUSSAIN. Efficient adaptive fuzzy-based switching weighted average filter for the restoration of impulse corrupted digital images. *IET Image Processing*. 2014, **8**(4), 199-206. DOI: 10.1049/iet-ipr.2013.0297. ISSN 1751-9659. Dostupné také z: http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/iet-ipr.2013.0297

[17] WALEK, Petr, Martin LAMOŠ a Jiří JAN. *Analýza biomedicínských obrazů*. Brno: VUT, 2013. ISBN 978-80-214-4792-9.

[18] WHITAKER, Ross. *Greyscales, Histograms, and Probabilities*. Salt Lake City: SCI Institute, School of Computing, University of Utah, 2010.

[19] ZELINKA, Martin. *Hardwarová akcelerace filtrace obrazu*. Brno, 2009. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií. Vedoucí práce Zdeněk Vašíček.

[20] ŽÁRA, Jiří, Jiří SOCHOR, Petr FELKE a Bedřich BENEŠ. *Moderní počítačová grafika*. Brno: Computer Press, 2004. ISBN 80-251-0454-0.