IDONEIDAD DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN BÁSICA, MEDIANTE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

JAIME DAVID GRISALES DÁVILA

UNIVERSIDAD DE TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
PEREIRA, RISARALDA
JUNIO, 2018

IDONEIDAD DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN BÁSICA, MEDIANTE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

JAIME DAVID GRISALES DÁVILA

DIRECTOR
DR. ELIÉCER ALDANA BERMÚDEZ

UNIVERSIDAD DE TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
PEREIRA, RISARALDA
JUNIO, 2018

RECONOCIMIENTOS

Esta investigación ha sido realizada gracias al apoyo de la Universidad Tecnológica de Pereira mediante la gestión de becas para docentes de dos instituciones educativas administradas bajo la Unión Temporal Alma Máter – UTP, que en este caso en particular se realiza en la INSTITUCIÓN EDUCATIVA HUGO ÁNGEL JARAMILLO.

Contó con el apoyo del profesor ELIECER ALDANA BERMÚDEZ, Doctor por la Universidad de Salamanca y director del Grupo de Investigación en Educación Matemática de la Universidad del Quindío (GEMAUQ).

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Eliécer Aldana Bermúdez, por haber creído arduamente en el trabajo que he realizado, por haber dirigido con la más alta calidad un trabajo de investigación que ha sido compartido nacional como internacionalmente en los eventos más importantes en Educación Matemática de Colombia y Latinoamérica.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira, quienes con su formación impartida logran desarrollos cognitivos y académicos de alto nivel en los estudiantes.

A la Unión Temporal Alma Máter – UTP y el Sistema de Universidades del Eje Cafetero (SUEJE) por permitir la conexión idónea con la Universidad Tecnológica de Pereira por permitir una mejor formación en los docentes de las dos instituciones educativas que se encuentran bajo su administración para mejorar calidad en la educación en los educandos.

A los directivos, administrativos, docentes y estudiantes de la Institución Educativa Hugo Ángel Jaramillo que de alguna forma u otra permitieron que todas las fases de esta investigación se realizaran exitosamente.

A mis padres, familiares y amigos por su apoyo en la realización de esta maestría.

DEDICATORIA

A mis madres Eneida María Dávila, Cecilia Páez, a mis padres Óscar de Jesús Grisales, Arturo Santamaría, a mis hermanos Óscar José Grisales, Roberto Andrés Grisales, Arturo José Santamaría, a mis tías Blanca Inés Grisales que ha sido como una madre para mí, Ana Lucía Grisales por su apoyo y cariño, Adelaida Dávila por creer siempre en mí, María Nieves Dávila por carisma y apoyo cuando estudiaba secundaria, Cecilia Grisales ("Chila") cuando me apoyaba en mis estudios de secundaria, Rosa María Grisales, Ruth Mari Grisales, Gloria Grisales, Margot Grisales, Gloria Dávila, y todas aquellas tías que en algún momento me han demostrado su cariño.

Finalmente, agradezco a mis familiares y amigos que de alguna forma u otra han compartido momentos especiales conmigo.

RESUMEN

Esta investigación tiene como objeto matemático las medidas de tendencial central, también conocidas como medidas de posición central, medidas de localización o de centralización, que son importantes en aplicaciones de la estadística para representar un conjunto de datos a través de un valor que lo represente, como el promedio o media aritmética, media geométrica, media armónica, media ponderada, mediana y moda. El propósito de esta investigación estuvo centrado en configurar una idoneidad didáctica para el aprendizaje de los conceptos de media, mediana y moda, en estudiantes Colombianos de Educación Básica Secundaria, mediante el Enfoque Ontosemiótico, y tuvo como propósitos específicos establecer una configuración epistémica-ecológica, una configuración interaccional-mediacional mediante el diseño de trayectorias didácticas, implementar una configuración cognitiva – afectiva y construir una valoración de la idoneidad didáctica realizada.

La metodología de esta investigación estuvo basada en el enfoque ontosemiótico de la instrucción matemática propuesto por Godino, Batanero & Font (2009) que es un sistema teórico inclusivo que articula diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y su enseñanza, que facilita determinar una idoneidad didáctica en el aprendizaje de las medidas de tendencia central en estudiantes de básica secundaria. Se presentan las bases teóricas, diseño y método de análisis del enfoque ontosemiótico para la valoración de una idoneidad didáctica en el proceso de aprendizaje de estudiantes de básica secundaria. En la descripción de la metodología, se abarcan las siguientes secciones: caracterización de la investigación, selección de los participantes, el escenario y contexto del estudio, así como las fases del diseño metodológico que facilita técnicas e instrumentos de recogida de información y procesamiento de los datos. Las fases del diseño metodológico son cuatro (4): Estudio Preliminar, Diseño de Trayectorias Didácticas, Implementación y Valoración. Esta metodología nos permitió alcanzar el propósito de la investigación de identificar los indicadores epistémicos, ecológicos, afectivos, cognitivos, mediacional e interaccional adecuados para configurar una idoneidad didáctica que permitiera potenciar el aprendizaje de las medidas de tendencia central en los estudiantes de básica secundaria.

Dentro de los principales resultados de esta investigación se encuentra: haber mejorado la experiencia de aprendizaje de los estudiantes en la construcción del concepto de medidas de tendencia central relacionando su entorno social, la comunidad donde viven y su propio contexto; haber aportado esta experiencia de enseñanza del pensamiento aleatorio u estadístico en estudiantes de básica secundaria, a profesores de matemáticas, socializando esta investigación en eventos importantes a nivel local, regional, nacional e internacional; haber publicado un resumen de la investigación en la revista de la Sociedad Colombiana de Matemáticas (SCM) en el XXI CONGRESO COLOMBIANO DE MATEMÁTICAS denominado “Avance de la matemática en Colombia” en la Universidad Nacional de Colombia ubicada en la ciudad de Bogotá D.C; haber publicado un artículo en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME 31) con sede principal en México D.C; y haber utilizado un Software Educativo denominado “Hagamos Estadística” que permitió potenciar el aprendizaje de las medidas de tendencia central en los estudiantes.

Palabras clave: idoneidad didáctica, aprendizaje, medidas de tendencia central, educación básica secundaria, enfoque ontosemiótico.

ABSTRACT

DIDACTICAL SUITABILITY FOR THE LEARNING OF CENTRAL TENDENCY MEASURES IN STUDENTS OF BASIC EDUCATION, TROUGH THE ONTOSEMIOTIC APPROACH

This research aims to configure a didactical suitability for the learning of the concepts of mean, median and mode, in the students in ninth grade of Secondary Basic Education. The project is based on the ontosemiotic approach of mathematical instruction proposed by Godino, Batanero and Font (2009). At the end of the research, students are expected to improve their performance in solving problem situations involving the concept of central tendency measures.

Key words: didactical suitability, learning, measures of central tendency, secondary basic education, ontosemiotic approach.

ÍNDICE

CAPITULO 2

CONSTRUCCIÓN DE UNA CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA Y ECOLOGICA DE IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

CAPITULO 3

DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA QUE GENERE UNA CONFIGURACIÓN INTERACCIONAL – MEDIACIONAL PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

ANEXOS

CAPITULO 1

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN, MARCO CONCEPTUAL, MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se expone el problema de investigación, el marco conceptual, el marco teórico utilizado para abordar este trabajo, así como la metodología y diseño metodológico implementado para la elaboración de esta investigación.

En el apartado dedicado al problema de investigación se formula la pregunta problematizadora, su justificación en términos de necesidades y pertinencia, y se exponen los propósitos de esta investigación para dar respuesta a esa pregunta.

El marco teórico de esta investigación está basado en el Enfoque Ontosemiótico de la instrucción matemática propuesto por Godino, Batanero & Font (2009), un sistema teórico que define la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Este marco teórico fue escogido porque permite alcanzar los propósitos de la investigación, al dar cimientos del cómo configurar una idoneidad didáctica para el aprendizaje de conceptos relacionados con la educación estadística.

La metodología de esta investigación se apoya en las bases teóricas, diseño y método de análisis del Enfoque Ontosemiótico para la valoración de la idoneidad didáctica en el proceso de aprendizaje de las medidas de tendencia central en estudiantes de básica secundaria. Se realiza la caracterización de la investigación, selección de los participantes, el escenario y contexto del estudio, así como las fases del diseño metodológico que facilitan las técnicas e instrumentos de recogida de información y procesamiento de los datos.

Las fases del diseño metodológico son cuatro (4): Estudio Preliminar, Diseño de Trayectorias Didácticas, Implementación y Valoración. En el estudio preliminar se estudian las situaciones problemas que serán planteadas a los estudiantes, luego se diseñan la trayectorias didácticas que permiten estructurar los conceptos de las medidas de tendencia central, se realiza su implementación en las aula de clases y se realiza una valoración del desarrollo cognitivo-afectivo de los estudiantes en la construcción de los conceptos, así como las configuraciones epistémica-ecológica e interaccional-mediacional necesarias para apoyar el proceso de aprendizaje de los educandos.

2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El mundo requiere de seres humanos capaces de analizar el entorno y lo que afecta al planeta, por ende cada vez más se requiere de herramientas de análisis para procesar e interpretar conjuntos de datos de información que permitan tomar decisiones para el futuro de la humanidad como por ejemplo, lo relativo a la capa de ozono y al calentamiento global. Por tal motivo, el ser humano requiere apoyarse en las herramientas que existen para el procesamiento de datos e información, y éstas herramientas se las brinda la estadística. En relación con la estadística, Wells (1946) citado por Castro & Zabala (2014) menciona que *“el pensamiento aleatorio será un día tan necesario para el ciudadano eficiente como la capacidad de leer y escribir”*.

Por esta razón, cada vez más en el campo de la educación, las instituciones educativas ven la importancia de integrar los conocimientos de la estadística en sus currículos. En algunas instituciones educativas no se le ha dado la importancia a la estadística en la formación de los futuros ciudadanos del planeta. Esto hace que los individuos enfrentados todos los días a una gran cantidad de información a través de medios físicos y electrónicos, solo la observen, sin saber analizarla para predecir futuros acontecimientos y dar explicación a fenómenos socioculturales de la actualidad. Por eso cada vez toma más fuerza la necesidad de incluir dentro de la formación de seres humanos, la educación estadística.

Como lo afirma el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2004) en su proyecto sobre Pensamiento Estadístico y tecnologías computacionales donde intenta producir en los *profesores, el interés por contribuir a que los temas estadísticos sean introducidos en las aulas de clase*, de tal manera que se pueda incidir en la formación de un ciudadano competente en el tratamiento, análisis y uso de la cantidad de información que hoy tenemos a disposición, que es necesario comprender porque está escrita en un lenguaje gráfico, en tablas o está presentada a través de medidas representativas de esa información.

Por ello es importante que los estudiantes de educación básica secundaria, manejen conceptos y aplicaciones de la estadística, que aprendan a representar un conjunto de datos a través de un valor que lo represente, como lo son las medidas de tendencia central. Según Batanero (2000) los estudiantes de educación básica secundaria presentan dificultades en el aprendizaje de estas medidas de tendencia central, y cita en su investigación a diversos autores que ilustran las dificultades encontradas en los estudiantes:

Menciona que el cálculo de la media por ejemplo, parece sencillo sin embargo Pollatsek, Lima & Well (1981) encontraron que incluso alumnos universitarios no ponderan adecuadamente los valores al resolver una situación problema y en ocasiones usan la media simple, en lugar de la media ponderada. Li & Shen (1992) indican que cuando se pide a los estudiantes calcular la media a partir de una tabla de frecuencias donde los datos se agrupan en intervalos, los estudiantes olvidan con frecuencia que cada uno de estos grupos debe ponderarse de modo distinto al calcular la media. En otros casos el algoritmo se aplica de forma mecánica sin comprender su significado. Cai (1995) encontró en su investigación que mientras la mayoría de alumnos de 12-13 años eran capaces de aplicar adecuadamente el algoritmo para calcular la media, sólo algunos alumnos eran capaces de determinar un valor desconocido en un conjunto pequeño de datos para obtener un valor medio dado. Incluso encontrando el valor desconocido, fueron pocos los que lo hicieron a partir de un uso comprensivo del algoritmo, multiplicando el valor medio por el número de valores para hallar la suma total y de ahí el valor faltante, sino que la mayoría simplemente usó el ensayo y error. Otros errores de cálculo en media, mediana y moda descritos por Carvalho (1998) al analizar las producciones escritas de los alumnos al resolver tareas estadísticas son los siguientes:

Moda: Tomar la mayor frecuencia absoluta;

Mediana: No ordenar los datos, para calcular la mediana; calcular el dato central de las frecuencias absolutas ordenadas de forma creciente; calcular la moda en vez de la mediana; equivocarse al calcular el valor central;

Media: Hallar la media de los valores de las frecuencias; no tener en cuenta la frecuencia absoluta de cada valor en el cálculo de la media.

En realidad, el cálculo de la mediana es complejo, porque el algoritmo de cálculo es diferente, según tengamos un número par o impar de datos, y según los datos se presenten en tablas de valores agrupados o sin agrupar (Mayén, Cobo & Batanero, 2009) y también el valor obtenido es diferente, según se aplique uno u otro algoritmo. Esto puede resultar difícil para los alumnos que están acostumbrados a un único método de cálculo y una única solución para los problemas matemáticos.

Gattuso & Mary (1998) analizan la evolución de la comprensión del algoritmo de cálculo de la media ponderada de los alumnos durante la enseñanza secundaria, usando problemas con diferentes contextos y forma de representación. Las tareas presentadas fueron: cálculo de medias ponderadas, efecto que el cambio de un dato produce sobre la media y hallar un valor faltante en un conjunto de datos para obtener un promedio dado. Identifican las siguientes variables didácticas que afectan a la dificultad de las tareas: formato (tabla, serie de números, gráfico), si los valores de las variables son o no mucho mayores que los de las frecuencias (lo que influye en que el niño discrimine los dos conceptos); si una de las frecuencias es mucho mayor que las otras (de modo que se estimule al niño a tener en cuenta las frecuencias). Observaron el efecto de estas variables y también la mejora con la instrucción, aunque no fue muy persistente en el tiempo.

Cuando los alumnos comienzan a estudiar la media, mediana y moda por primera vez ya conocen ciertas operaciones aritméticas como la suma y multiplicación, e inconscientemente aplican a la operación de “promediar” algunas propiedades de las anteriores operaciones que no se cumplen en el caso de los promedios. Mevarech (1983) observa que incluso los estudiantes universitarios piensan que la media tiene la propiedad asociativa y cuando tienen que hallar la media de un conjunto grande de números, lo dividen en partes hallando primero la media de cada parte y luego promediando el resultado obtenido. Podemos comprobar que esta propiedad, en general, no es cierta, si hallamos primero la media de tres números diferentes y luego promediamos los dos primeros y hacemos la media del valor obtenido con el último elemento. En otros casos no se tiene en cuenta el cero en el cálculo de la media, como si fuese un elemento neutro o bien se piensa que la media debe ser un elemento del mismo conjunto numérico del que se toman los datos. Strauss & Bichler (1988) analizan la comprensión de los niños de 8 a 14 años de las propiedades anteriormente mencionadas, y aunque una proporción importante de niños parecieron usar espontáneamente estas propiedades, algunos niños no tenían en cuenta el cero para calcular la media, o bien suponían que la media podría estar fuera del rango de variación de la variable, o que debería coincidir con uno de los valores de los datos.

Adicionalmente varios autores referencian estas dificultades en el aprendizaje de las medidas de tendencia central y se citan en el *anexo 1* de este trabajo.

Estas dificultades mencionadas anteriormente se evidencian en las Pruebas Saber, realizadas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) anualmente y que permite a cada institución evaluarse a sí misma y compararse con otras instituciones, entes territoriales y desempeño general del país. En los resultados obtenidos en las Pruebas Saber 2015, los estudiantes de la Institución Educativa Hugo Ángel Jaramillo (IEHAJ), presenta dificultades para responder asertivamente las Pruebas Saber en los grados 3°, 5° y 9°. Entre las dificultades presentada por los estudiantes se encuentran entender, representar, analizar un conjunto de datos, y organizarlos en tablas de frecuencias, gráficos, diagramas y toda forma de presentación estadística, además de resolver problemas relacionados con la posibilidad de ocurrencia de eventos con el desarrollo del concepto de probabilidad. Se puede evidenciar que estas dificultades las manifiestan los estudiantes de diferentes grados, por lo que se selecciona para esta investigación los estudiantes de educación básica secundaria, grado noveno específicamente.

Una vez analizado los resultados de las Pruebas Saber de noveno grado del área de matemáticas del año 2015 publicadas por el MEN en los Informes por colegio de la IEHAJ, se puede evidenciar lo siguiente:

El 61% de los estudiantes no resuelve problemas que requieran el uso e interpretación de medidas de tendencia central para analizar el comportamiento de un conjunto de datos.

El 46 % de los estudiantes no reconoce la media, mediana y moda con base en la representación de un conjunto de datos y explicita sus diferencias en distribuciones diferentes.

Para mejorar estos resultados con respecto a las Medidas de Tendencia Central (MTC) se deberá tener en cuenta que el aprendizaje de la media, mediana y moda pasa por comprender sus conceptos, características, su uso pertinente frente a ciertas situaciones y su interpretación en contextos específicos (Batanero, Godino, Holmes & Vallecillos, 1994). Por ello, a partir de la experiencia como profesor de este nivel educativo, de los bajos desempeños de los estudiantes en relación con el aprendizaje de la estadística y el desarrollo del pensamiento aleatorio en las pruebas nacionales, de las prácticas en el aula de cómo ha sido orientado este campo del conocimiento; de la búsqueda en la literatura sobre otros estudios referente a las MTC, emerge el siguiente interrogante que constituye el foco de esta investigación:

¿Qué configuraciones son necesarias para una idoneidad didáctica que potencie el aprendizaje de las medidas de tendencia central de estudiantes de grado noveno de educación básica, mediante el enfoque ontosemiótico?

Para dar respuesta a esta pregunta nos plantemos los objetivos de esta investigación:

Objetivo General:

Configurar una idoneidad didáctica para el aprendizaje de las medidas de tendencia central en estudiantes de grado noveno de Educación Básica, mediante el Enfoque Ontosemiótico de la instrucción matemática (EOS).

Objetivos específicos:

- ✓ Establecer una configuración epistémica – ecológica a través de un estudio preliminar de análisis de texto que indique el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia de las MTC, así como el grado en que el proceso de estudio se ajusta al Proyecto Educativo de la Institución Educativa Hugo Ángel Jaramillo (IEHAJ), a través de los condicionamientos del entorno social y cultural en que se desarrolla.

- ✓ Generar una configuración interaccional – mediacional mediante el diseño de trayectorias didácticas para resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción, y el grado de disponibilidad/adecuación, por medio de los recursos materiales necesarios para el desarrollo del proceso de aprendizaje de las MTC.

- ✓ Implementar una configuración cognitiva – afectiva que permita expresar la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos de los estudiantes en el proceso de estudio de las MTC, mediante el grado de implicación (interés, motivación, disposición) que ellos tienen en el proceso de aprendizaje.

- ✓ Construir una valoración de las idoneidades que permita visualizar una integración de las idoneidades epistémica, ecológica, interaccional, mediacional, cognitiva y afectiva, logrando una aproximación a una idoneidad didáctica para el aprendizaje de las MTC bajo el Enfoque Ontosemiótico. A continuación indicamos algunas hipótesis básicas, que orientarán las fases y actividades a realizar.

3. MARCO CONCEPTUAL

A continuación se describen los objetos matemáticos que se abordaron en la investigación, la media, la moda y la mediana como medidas de tendencia central.

3.1. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Las medidas de tendencia central son medidas estadísticas que pretenden resumir en un solo valor a un conjunto de valores. Al describir grupos de diferentes observaciones, con frecuencia es conveniente resumir la información con un solo número. Este número que suele situarse hacia el centro de la distribución de datos se denomina **medida** o **parámetro de tendencia central** o **de centralización**. Cuando se hace referencia únicamente a la posición de estos parámetros dentro de la distribución, independientemente de que ésta esté más o menos centrada, se habla de estas medidas como **medidas de posición**[1]**.** En este último se incluyen también los cuantíles entre estas medidas. Entre las medidas de tendencia central tenemos:

- Media aritmética
- Media ponderada
- Media geométrica
- Media armónica
- Mediana
- Moda

Las medidas de tendencia central más utilizadas y que estudiamos en este trabajo son: **media aritmética**, **mediana** y **moda**.

Los procedimientos para obtener las medidas estadísticas difieren levemente dependiendo de la forma en que se encuentren los datos. Si los datos se encuentran ordenados en una tabla estadística diremos que se encuentran "agrupados" y si los datos no están en una tabla hablaremos de datos "no agrupados".

[1] Fernández Fernández, Santiago; Alejandro Córdoba, José Maria Cordero Sánchez, Alejandro Córdoba (2002). «3.3. Medidas de posición». Estadística Descriptiva (2ª edición). ESIC Editorial. p. 134. ISBN 8473563069.

3.1.1. Media aritmética simple o promedio

La medida de tendencia central más conocida y utilizada es la media aritmética o promedio aritmético. Se representa por la letra griega µ cuando se trata del promedio del universo o población y por $\bar{Y}$ cuando se trata del promedio de la muestra. Es importante destacar que µ es una cantidad fija mientras que el promedio de la muestra es variable puesto que diferentes muestras extraídas de la misma población tienden a tener diferentes medias. La media se expresa en la misma unidad que los datos originales: centímetros, horas, gramos, etc.

La **media aritmética** es el valor obtenido por la suma de todos sus valores dividida entre el número de sumadores, por ejemplo, las notas de 5 alumnos en una prueba:

Tabla 1. Calculo de la media (Wackerly, 2002).

Niño	Nota	Procedimiento de cálculo
1	6,0	· Primero, se suman las notas:
2	5,4	6,0+5,4+3,1+7,0+6,1 = 27,6
3	3,1	· Luego el total se divide entre la cantidad de alumnos:
4	7,0	27,6/5=5,52
5	6,1	· La media aritmética en este ejemplo es 5,52

La **media aritmética** es, probablemente, uno de los parámetros estadísticos más extendidos.[2] Se le llama también **promedio** o, simplemente, **media**.

Definición formal

Dado un conjunto numérico de datos, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se define su media aritmética como

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Esta definición varía, aunque no sustancialmente, cuando se trata de variables continuas, esto es, también puede calcularse para variables agrupadas en intervalos.

[2] Wackerly, Dennis D; Mendenhall, William; Scheaffer, Richard L. (2002). «1.3. Descripción de un conjunto de mediciones: métodos numéricos». Estadística matemática con aplicaciones (6ª edición). Cengage Learning Editores.

La media aritmética, así como la moda y la mediana, tiene propiedades e inconvenientes de uso que se pueden observar en el anexo 2.

3.1.1.1. Media aritmética ponderada

A veces puede ser útil otorgar pesos o valores a los datos dependiendo de su relevancia para determinado estudio. En esos casos se puede utilizar una media ponderada.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son nuestros datos y $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son sus "pesos" respectivos, la media ponderada se define de la siguiente forma:

$$\overline{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

3.1.2. Moda

La moda es el dato más repetido de la encuesta, el valor de la variable con mayor frecuencia absoluta.[3] En cierto sentido la definición matemática corresponde con la locución "estar de moda", esto es, ser lo que más se lleva.

Su cálculo es extremadamente sencillo, pues solo necesita un recuento. En variables continuas, expresadas en intervalos, existe el denominado intervalo modal o, en su defecto, si es necesario obtener un valor concreto de la variable, se recurre a la interpolación.

Por ejemplo, el número de personas en distintos vehículos en una carretera: 5-7-4-6-9-5-6-1-5-3-7. El número que más se repite es 5, entonces la moda es 5.

Hablaremos de una distribución bimodal de los datos, cuando encontremos dos modas, es decir, dos datos que tengan la misma frecuencia absoluta máxima. Cuando en una distribución de datos se encuentran tres o más modas, entonces es multimodal. Por último, si todas las variables tienen la misma frecuencia diremos que no hay moda.

Cuando tratamos con datos agrupados en intervalos, antes de calcular la moda, se ha de definir el intervalo modal. El intervalo modal es el de mayor frecuencia absoluta.

[3] Rius Díaz, Francisca. «2.3.6 La moda». Bioestadística. Métodos y aplicaciones.

La moda, cuando los datos están agrupados, es un punto que divide el intervalo modal en dos partes de la forma *p* y *c-p*, siendo *c* la amplitud del intervalo, que verifiquen que:

$$\frac{p}{c-p} = \frac{n_i - n_{i-1}}{n_i - n_{i+1}}$$

Siendo n_i la frecuencia absoluta del intervalo modal y n_{i-1} y n_{i+1} las frecuencias absolutas de los intervalos anterior y posterior, respectivamente, al intervalo modal.

3.1.3. Mediana[4]

La mediana es un valor de la variable que deja por debajo de sí a la mitad de los datos, una vez que éstos están ordenados de menor a mayor. Por ejemplo, la mediana del número de hijos de un conjunto de trece familias, cuyos respectivos hijos son: 3, 4, 2, 3, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1 y 1, es 2, puesto que, una vez ordenados los datos: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, el que ocupa la posición central es 2:

$$\underbrace{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,}_{\text{Mitad inferior}}\ \underbrace{2,}_{\text{Mediana}}\ \underbrace{2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4}_{\text{Mitad superior}}$$

En caso de un número par de datos, la mediana no correspondería a ningún valor de la variable, por lo que se conviene en tomar como mediana el valor intermedio entre los dos valores centrales. Por ejemplo, en el caso de doce datos como los siguientes:

$$\underbrace{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,}_{\text{Valores inferiores}}\ \underbrace{1,\ 2,}_{\text{Valores intermedios}}\ \underbrace{2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4}_{\text{Valores superiores}}$$

Se toma como mediana $1,5 = \frac{1+2}{2}$. Existen métodos de cálculo más rápidos para datos más numerosos. Del mismo modo, para valores agrupados en intervalos, se halla el "intervalo mediano" y, dentro de éste, se obtiene un valor concreto por interpolación.

[4] Serret Moreno-Gil, Jaime. Procedimientos estadísticos. ESIC. p. 75. ISBN 8473561716. 1998.

Cálculo de la mediana para datos agrupados

Ejemplo (*N* impar)

La siguiente tabla muestra las calificaciones en la asignatura de Matemáticas de 39 alumnos de una clase:

Calificaciones	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Número de alumnos	2	2	4	5	8	9	3	4	2

Primero hallamos las frecuencias absolutas acumuladas Fi. Así, aplicando la fórmula asociada a la mediana para *n* impar, obtenemos X (39+1)/2 = X20 y basándonos en la fórmula que hace referencia a las frecuencias absolutas: N_i-1< n/2 < $_i$ = N19 < 19.5 < N20. Por tanto la mediana será el valor de la variable que ocupe el vigésimo lugar. En nuestro ejemplo, 21 (frecuencia absoluta acumulada para X_i = 5) > 19.5 con lo que M_e = 5 puntos (es aconsejable no olvidar las unidades; en este caso como estamos hablando de calificaciones, serán puntos). La mitad de la clase ha obtenido un 5 o menos, y la otra mitad un 5 o más.

Ejemplo (*N* par)

Las calificaciones en la asignatura de Matemáticas de 38 alumnos de una clase vienen dada por la siguiente tabla (debajo):

Calificaciones	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Número de alumnos	2	2	4	5	6	9	4	4	2

Primero hallamos las frecuencias absolutas acumuladas F_i.

Si volvemos a utilizar la fórmula asociada a la mediana para *n* par, obtenemos X (38/2) = X 19 y basándonos en la fórmula que hace referencia a las frecuencias absolutas --> N_i-1< n/2 < N_i = N18 < 19 < N19. Con lo cual la mediana será la media aritmética de los valores de la variable que ocupen el décimo noveno y el vigésimo lugar. En el ejemplo, el lugar décimo noveno lo ocupa el 5 y el vigésimo el 6, (desde el vigésimo hasta el vigésimo octavo) con lo que M_e = (5+6)/2 = 5,5 puntos.

3.2. INVESTIGACIONES EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS SOBRE EL APRENDIZAJE DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL (MTC)

A continuación se describe una compilación de resultados obtenidos de otras investigaciones sobre la forma como ha sido tratado el aprendizaje de las medidas de tendencia central (MTC) en la educación básica secundaria, cómo se encuentra el avance de su conocimiento en estos momentos y cuáles son las tendencias existentes para el desarrollo de su aprendizaje en los estudiantes.

Castro & Zabala (2014) realizaron una investigación en educación estadística denominado ¨*Un caso descriptivo en la enseñanza del Pensamiento Aleatorio*¨ que describe las principales características de la comprensión de los estudiantes de grado séptimo de educación básica secundaria, cuando se enfrentan a situaciones que involucran análisis de datos. Como conclusiones generales de la investigación mencionan que muchas de las dificultades que presentan los estudiantes en la compresión de los conceptos básicos de la estadística, podrían estar relacionadas con la capacidad de justificar un procedimiento o una estrategia de solución de un problema. A estas dificultades se adiciona la poca atención que los educadores han prestado a las supuestas "nociones simples" de la estadística como la elaboración de gráficos y tablas, y medidas de tendencia central como la media, moda y mediana.

Mayén, Díaz & Batanero (2009) realizan un estudio interesante sobre los "*conflictos semióticos de estudiantes con el concepto de mediana"* realizado a 518 estudiantes mexicanos de Educación Secundaria y Bachillerato donde se analizan las respuestas a una situación problema de cálculo de la mediana. En dicha investigación se utilizan las ideas del enfoque ontosemiótico para clasificar las respuestas y describir los conflictos semióticos detectados. Los resultados obtenidos por esta investigación confirman la existencia de conflictos representacionales, conceptuales y procedimentales; en el representacional consiste en confundir la terminología de media y mediana por lo que al pedir a un estudiante calcular la mediana calcula la media, coincidiendo con los resultados obtenidos por Cobo (2003); en los conflictos conceptuales cuando los estudiantes no discriminan entre media, mediana y moda; y conflictos procedimentales cuando hay fallo en la aplicación de un procedimiento como equivocarse en el total por el cual hay que dividir en el cálculo de la media.

Cobo (2003) realizó una investigación (estudio teórico-experimental), sobre el significado y la comprensión de las medidas de posición central en la Educación Secundaria Obligatoria en España, que analiza los tipos de problemas, representaciones, procedimientos de cálculo, definiciones, propiedades y argumentaciones relacionados con estos objetos, tanto en su faceta institucional como personal.

Mateus (2014) realiza un estudio cualitativo sobre la enseñanza de las Medidas de Tendencia Central en el cual usa una estrategia didáctica basada en e-learning, en grado décimo de educación secundaria en una institución educativa de Circasia – Quindío, Colombia. El autor utiliza la ingeniería didáctica (Artigue, 2011), donde incentiva el desarrollo de una cultura de la virtualidad, con base en las matemáticas. Se propone que los estudiantes tengas acceso a Plataforma Web, para promover aprendizaje autónomo a través de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC). Esta tecnología puede ser usada por los docentes como apoyo para sus cursos presenciales.

Batanero (2000) realiza una investigación sobre significados y comprensión de las medidas de posición central en la enseñanza de la educación primaria y secundaria.

4. MARCO TEÓRICO

Esta investigación está basada en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) que es un sistema teórico inclusivo que trata de articular diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y su enseñanza. Fue iniciado por el grupo de investigación Teoría de la Educación Matemática de la Universidad de Granada a principios de los años 90 siendo en la actualidad desarrollado y aplicado por otros grupos de investigación españoles y latinoamericanos.

4.1. Motivación y supuestos del EOS

El Enfoque Ontosemiótico (EOS) es un marco teórico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Con dicho fin se adopta una perspectiva global, teniendo en cuenta las diversas dimensiones implicadas y las interacciones entre las mismas, como se representa en la Figura 1. Se resalta el carácter relacional y multidimensional de la enseñanza de las matemáticas. “La enseñanza es relacional. Los profesores, los estudiantes, y el contenido sólo se pueden comprender unos en relación con los otros. El profesor trabaja para orquestar el contenido, las representaciones del contenido, y las interrelaciones de las personas que intervienen en la clase. Los modos de estar de los estudiantes, sus formas de participación, y su aprendizaje emerge de estas relaciones mutuamente constitutivas. La enseñanza es también multidimensional” (Frankle, Kazemi & Battey, 2007, p. 227)

Para las facetas epistémica y ecológica de la actividad matemática se asumen presupuestos antropológicos/ socioculturales (Bloor, 1983; Chevallard, 1992; Radford, 2006); en cuanto a las facetas cognitiva y afectiva se adoptan presupuestos semióticos (Eco, 1976; Hjelmslev, 1943; Peirce, 1931-58); y para la faceta instruccional (interaccional y mediacional) se asume una perspectiva socio-constructivista (Ernest, 1998; Brousseau, 1998). Se reconoce la complejidad de los procesos de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, por las interacciones sistémicas entre las distintas facetas y componentes. Dichas facetas se deben analizar según diversos niveles: las prácticas o acciones de los agentes implicados, las configuraciones de los objetos intervinientes, las normas que condicionan y soportan la realización de las prácticas y la valoración de la idoneidad o adecuación del proceso educativo en toda su globalidad (Godino, Font, Wilhelmi & Castro, 2009).

4.2. IDONEIDAD DIDÁCTICA E INDICADORES[5]

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Es una herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva a otra prescriptiva al proporcionar un sistema de criterios de intervención sobre los cuales existe un consenso en la comunidad de educación matemática.

Las seis facetas son entendidas de la siguiente manera (Rivas, 2014):

- ***Faceta epistémica***, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

- ***Faceta ecológica***, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

- ***Faceta cognitiva***, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.

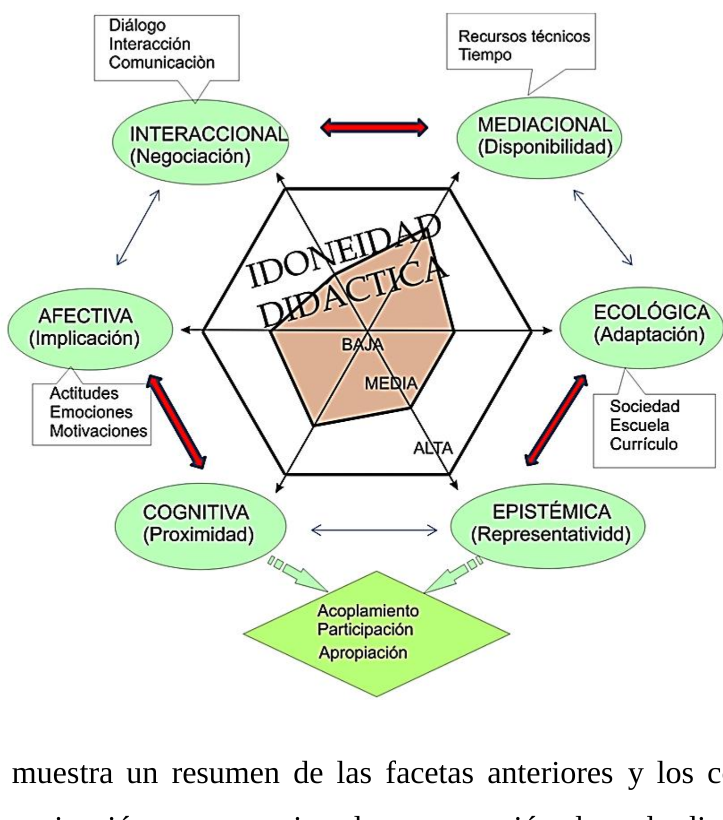
[5] GODINO. Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* (CIAEM-IACME), Recife (Brasil). 2011

- ***Faceta afectiva***, grado de implicación (interés, motivación,…) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

- ***Faceta interaccional***, un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales, y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

- ***Faceta mediacional***, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza- aprendizaje.

Figura 1. Componentes y criterios básicos de idoneidad didáctica (Godino, 2016).



A continuación se muestra un resumen de las facetas anteriores y los componentes que se analizaron en esta investigación, que permiten la comprensión de cada dimensión o faceta de idoneidad didáctica:

Tabla 2. *Facetas de la idoneidad didáctica y sus componentes (Rivas 2014, pág. 64)*

DIMENSIONES	**COMPONENTES**
Epistémica	Situaciones problemas Lenguajes Reglas Argumentos Relaciones
Ecológica	Innovación Adaptación socio-cultural y profesional Conexiones intra e inter disciplinares
Interaccional	Interacción docente-discente Interacción entre discentes Autonomía Evaluación formativa
Mediacional	Recursos materiales Número de alumnos Condiciones del aula Tiempo para la enseñanza y el aprendizaje
Cognitiva	Conocimientos previos Diferencias individuales Aprendizajes (evaluación sumativa)
Afectiva	Intereses Actitudes Emociones

En el *anexo 3* se detallan las nociones de cada una de las seis idoneidades, sus respectivos indicadores y la interacción entre facetas.

4.3. Configuración y trayectoria didáctica

Las nociones teóricas para el análisis de los procesos de instrucción matemática fueron interpretadas e introducidas por primera vez por Godino, Contreras & Font (2006). Por tal razón (Rivas, 2014) en su trabajo define que una *configuración didáctica* es un segmento de actividad didáctica que se distribuye entre los momentos de inicio y finalización de una tarea o situación-problema diseñada o implementada. En este sentido, las acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar el estudio conjunto de la tarea. Además la situación-problema que se delimita a una configuración didáctica puede estar formada por distintas subtareas cada una de las cuales se puede considerar como una *subconfiguración*. En consecuencia, una *trayectoria didáctica* se define como la secuencia de configuraciones didácticas mediante las cuales se aborda el estudio del contenido pretendido.

Para esta investigación dichas nociones de configuración y subconfiguración las utilizamos junto a la noción de trayectoria didáctica para realizar una descripción narrativa de la implementación (experimentación).

5. METODOLOGÍA

En este apartado, se presentan las bases teóricas, diseño y método de análisis del EOS para la Valoración de la Idoneidad Didáctica. En él se abarcan las siguientes secciones: caracterización de la investigación, selección de los participantes, el escenario y contexto del estudio, así como las fases del diseño metodológico que permitieron técnicas e instrumentos de recogida de información.

5.1. Caracterización de la investigación

Se realiza una investigación cualitativa - descriptiva, cuya fuente de datos es un análisis de documentos curriculares del MEN, datos del contexto donde se desarrolla este estudio, elementos para la construcción de una secuencia didáctica implementando el desarrollo de situaciones problemas para ser realizado por los estudiantes. En estas situaciones problemas se tiene en cuenta los criterios de idoneidad didáctica la Guía para la Valoración de la Idoneidad Didáctica de Godino (2011) que permite promover y facilitar una fase reflexiva en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta guía de valoración ofrece un recurso que permite crear un lenguaje común, y la asunción de unos principios didácticos compartidos, que puede ayudar en el intercambio de experiencias y el progreso de la investigación sobre la práctica.

Es una investigación cualitativa ya que reúne características propias de este tipo de estudios: se usa un proceso inductivo (explorar, describir y luego generar perspectivas generales); los datos no se reducen a valores numéricos; la técnica para recolectar datos es la revisión de documentos, respuestas realizadas por los estudiantes a situaciones problemas diseñadas en el momento de planeación de clases; se fundamenta en una perspectiva interpretativa; y por último, no se pretenden generalizar de manera probabilística los resultados (Hernández, Fernández & Baptista, 2006). Adicionalmente, los elementos que hacen que esta investigación sea de tipo descriptiva, son determinados por el nivel de especificidad en que se llega a describir el fenómeno en estudio.

En esta investigación cualitativa se extrae y describe criterios de idoneidad didáctica de la experiencia con los estudiantes en el aula abordando situaciones problemas en cuanto a medidas de tendencia central, bajo la mirada del Enfoque Ontosemiótico de Didáctica de la Matemática.

Por tal motivo, se describen indicadores de idoneidad para las diversas facetas o dimensiones de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las medidas de tendencia central. Los indicadores analizados son utilizados para valorar la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción matemática diseñada mediante una secuencia didáctica donde se involucran situaciones problemas relacionados con el objeto matemático medidas de tendencia central.

En este estudio empleamos un tipo particular de investigación de diseño (Cobb & Cols, 2003; Cobb & Gravemeijer, 2008) basada en el EOS a través de la cual abordaremos el diseño instruccional de una secuencia didáctica aplicada en un aula de clases de grado noveno de la Básica Secundaria, concretamente en el diseño, implementación y evaluación del tema de introducción a la estadística y medidas de tendencia central. Esta experiencia formativa se realiza en las condiciones habituales ofrecidas por Institución Educativa Hugo Ángel Jaramillo, dentro de la asignatura de Matemáticas para grado noveno, donde la formación del pensamiento estadístico o aleatorio es uno de los cinco tipos de pensamientos planteados por el MEN que se debe desarrollar en todo estudiante para ser competente matemáticamente, por ende, se destina un tiempo limitado para su instrucción.

La investigación basada en el diseño (también denominada investigación de diseño o experimentos de diseño) es una familia de aproximaciones metodológicas en el estudio del aprendizaje que tiene lugar en contextos naturales de clase. Utiliza el diseño y el análisis sistemático de estrategias y herramientas instruccionales, tratando que el diseño y la investigación sean interdependientes, sobreentendiéndose que la investigación incluye no solo la fase de diseño, sino también la implementación en contextos de clase y la evaluación de resultados.

En las investigaciones basadas en el diseño se consideran tres fases (Cobb & Gravemeijer, 2008): 1) planificación del experimento, 2) experimentación y 3) análisis retrospectivo de los datos generados en el experimento. En dichos diseños la valoración se sigue frecuentemente de criterios de validez externa para nuestro caso los criterios de idoneidad didáctica de Godino (2011), de tal manera que no es consustancial a ellos en la fase de planificación ni la determinación de los comportamientos esperados de los estudiantes ni la planificación de intervenciones controladas del docente.

5.1.1. Población de estudio.

La educación básica secundaria en Colombia está comprendida entre los grados sexto (6°) y noveno (9°) con estudiantes de 11 años a los 14 años, esta investigación está centrada en estudiantes de grado noveno en donde finaliza la educación básica para dar paso a la educación media que comprende los grados décimo (10°) y undécimo (11°). Se estudiarán las competencias del Pensamiento Aleatorio de los estudiantes de noveno grado relacionados en los Derechos Básicos de Aprendizajes en la versión uno y dos (DBA V1 y V2), los Estándares Básicos por Competencia, Lineamientos Curriculares desarrollados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y específicamente los relacionados con las Medidas de Tendencia Central.

5.1.2. Escenario y Contexto del estudio.

Esta investigación es realizada en la Institución Educativa Hugo Ángel Jaramillo (IEHAJ) de Pereira, el cual es uno de los Mega Colegio realizados en esta ciudad, que se inauguró en el año 2011 en la Comuna del Café y que está bajo la administración de la Unión Temporal Universidad Tecnológica de Pereira (UTP) y la Red de Universidades Públicas del Eje Cafetero SUEJE - Alma Máter.

Esta institución educativa cuenta con una capacidad instalada para 1440 estudiantes, de los cuales 120 dirigido a estudiantes de Grado Noveno, distribuidos en 3 grupos de 40 estudiantes, denominados grados noveno uno (9-1), noveno dos (9-2) y noveno tres (9-3).

En un *contexto académico* podemos mencionar que los estudiantes durante los cursos de matemáticas de años anteriores no han desarrollado las bases de conceptos estadísticos debido a que dentro del currículo no se había contemplado el desarrollo del pensamiento aleatorio como compromiso institucional. Esta investigación nace a raíz de la preocupación del no desarrollo de este pensamiento en la institución y sirve como referencia para desarrollar compromisos pedagógicos para mejorar estos aprendizajes deficientes evidenciados en las Pruebas Saber.

5.2. Fases del Diseño Metodológico.

5.2.1. Fase de Estudio Preliminar

En esta fase se realizó un estudio preliminar como se indica en los objetivos, que permitió establecer una configuración epistémica – ecológica que indica el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia de las MTC, así como el grado en que el proceso de estudio se ajusta al Proyecto Educativo de la Institución Educativa Hugo Ángel Jaramillo (IEHAJ), a través de los condicionamientos del entorno social y cultural en que se desarrolla.

5.2.2. Fase de Diseño de Trayectorias Didácticas

Se realizó el diseño de trayectorias didácticas a través de una configuración interaccional – mediacional para resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción, y el grado de disponibilidad/adecuación, por medio de los recursos materiales necesarios para el desarrollo del proceso de aprendizaje de las MTC.

5.2.3. Fase de Implementación

En esta fase se implementó una configuración cognitiva – afectiva que permite expresar la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos de los estudiantes en el proceso de estudio de las MTC, mediante el grado de implicación (interés, motivación, disposición) que ellos tuvieron en el proceso de aprendizaje.

5.2.4. Fase de Valoración

En esta fase se construyó una valoración de las idoneidades que permite visualizar una integración de las idoneidades epistémica, ecológica, interaccional, mediacional, cognitiva y afectiva, logrando una aproximación a una idoneidad didáctica para el aprendizaje de las MTC a través del Enfoque Ontosemiótico.

Las Fases del Diseño Metodológico y su relación con los objetivos, las actividades y los productos esperados se ilustra en la siguiente figura y tabla:

Figura 2. Fases del Diseño Metodológico basadas en el EOS (Grisales & Aldana, 2016).

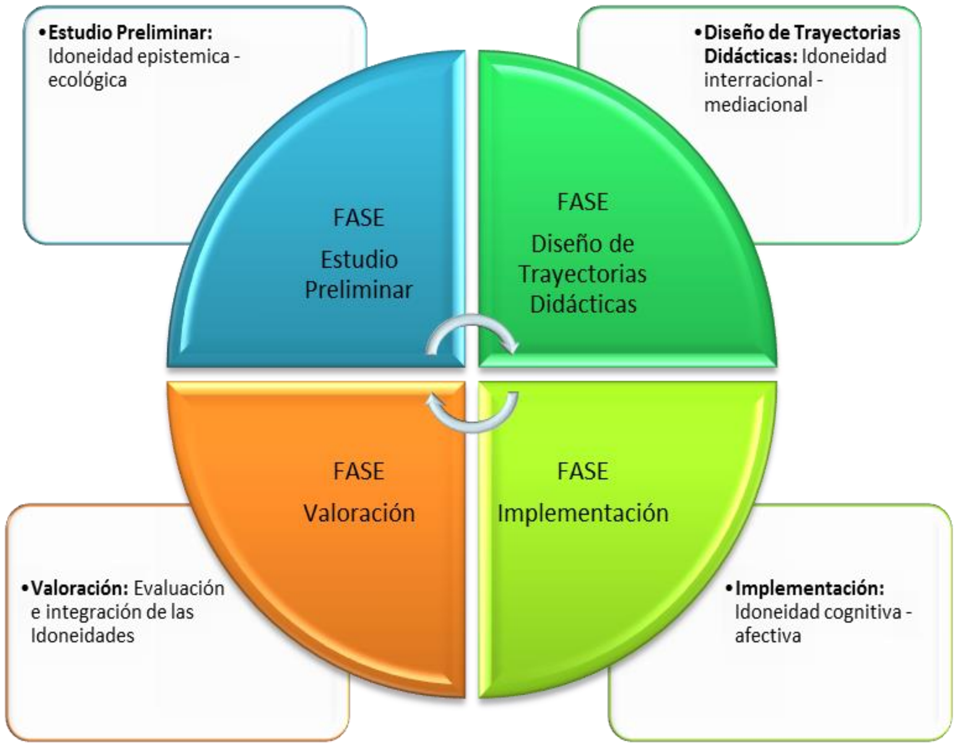
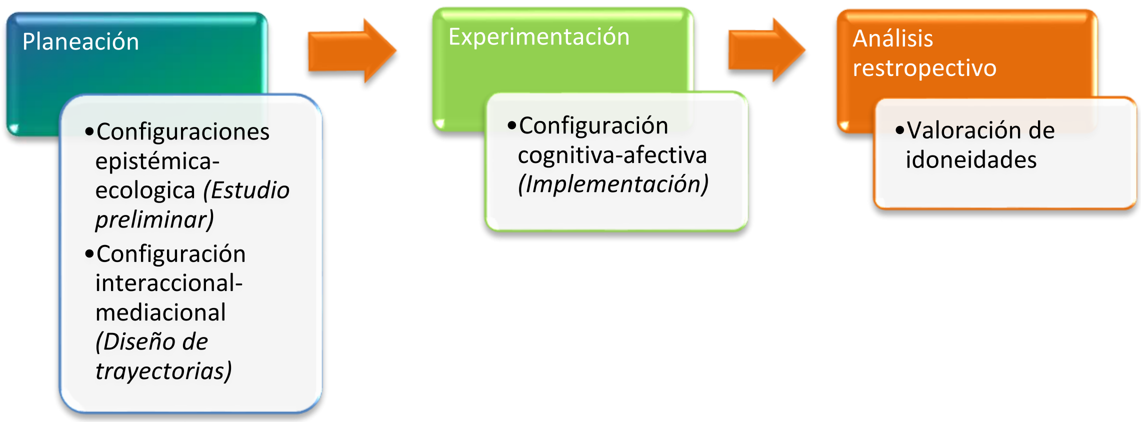


Tabla 3. Fases de la Investigación (Adaptado de Ossa & Aldana, 2017).

Fases	*Descripción*
Estudio preliminar	En las dimensiones epistémico – ecológica.
Diseño de la trayectoria didáctica	Selección de las situaciones problemas, diseño de la secuencia didáctica, y análisis a priori de las mismas, con indicación de los comportamientos esperados de los estudiantes y sus respuestas.
Implementación	De la trayectoria didáctica; observación de las interacciones entre estudiantes, recursos y evaluación de los aprendizajes logrados.
Valoración o análisis retrospectivo	Que se sigue de un contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación. También se reflexiona sobre las normas que condicionan el proceso instruccional y sobre la idoneidad didáctica.

Figura 3. Relación de las fases de la investigación con las fases de una investigación de diseño (Grisales & Aldana, 2018).



5.2.5. Dimensiones de análisis del EOS

Epistémica-ecológica

Se realiza un *análisis de textos* que permita abordar la enseñanza de los conceptos de media, moda y mediana, e integrar las actividades en una secuencia didáctica que contribuya a potenciar el aprendizaje de las medidas de tendencia central y en general de estadística descriptiva. A si mismo se establecen relaciones con el contexto donde se desarrollan los aprendizajes, su relación y cercanía a los conceptos formales de las matemáticas, el grado de adaptación de estos conceptos con los contemplados en el currículo de la institución educativa y el MEN.

Instruccional – Mediacional:

Se analizan los patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuencia, orientada a la fijación y negociación de significados. Asimismo, se describen los recursos técnicos previstos o utilizados y se valora el uso del tiempo destinado a las distintas acciones y procesos, así como los agentes participantes y su papel.

Cognitivo-afectiva:

Se describen los *significados personales* de los estudiantes en el momento de la implementación de la secuencia didáctica, en términos de configuraciones cognitivas de objetos y procesos matemáticos y su proximidad con los *significados pretendidos*. Además se analiza la sensibilidad del proceso a los estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de los alumnos en relación con los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

En la fase de diseño la noción de idoneidad epistémica de un proceso instruccional pone el acento en la "representatividad" de las situaciones-problema seleccionadas. El análisis de la implementación del diseño instruccional se realiza usando las nociones de configuración figuración didáctica y hecho didáctico significativo (HDS). Estas tres nociones se utilizan para realizar una descripción narrativa de la implementación. La noción de HDS se aplica como herramienta para sintetizar e interpretar la trayectoria didáctica implementada.

6. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

En este capítulo hemos descrito la investigación desde el planteamiento del problema, justificación, objetivos, marco teórico y metodología que nos permite alcanzar los objetivos planteados.

Este primer capítulo se pone de manifiesto la necesidad de profundizar en el pensamiento aleatorio en instituciones educativas en la educación básica secundaria donde se puede evidenciar que los estudiantes presentan dificultades en los aprendizajes relacionados con los conceptos de medidas de tendencia central, a través de los resultados obtenidos en las Pruebas Saber, lo que hace necesario estudiar la forma de abordar estos conceptos por parte de los docentes buscando estrategias pedagógicas y didácticas que permita mejorar estos aprendizajes, donde los estudiantes puedan construir los conocimientos necesarios para abordar situaciones problemas relacionados con conceptos de medidas de tendencia central.

Seguidamente se busca plantear acciones que permitan realizar una propuesta didáctica que ayude a desarrollar el pensamiento aleatorio en los estudiantes a través de una configuración epistémica-ecológica del concepto matemático en estudio, una configuración instruccional (interaccional-mediacional) vislumbrada en una Secuencia Didáctica, una configuración cognitiva-afectiva que permita establecer las relaciones entre los significados pretendidos y los significados logrados, así como realizar una valoración integral de todas las configuraciones didácticas que plantea la teoría del Enfoque Ontosemiótico de Godino (EOS).

Luego se esclarece la forma en que es abordado el estudio a través de una metodología de investigación cualitativa-descriptiva donde se realiza un proceso inductivo que permite realizar una exploración, descripción y generalización de algunas aspectos didácticos del proceso de instrucción matemática, apoyados en las características de un tipo de investigación de diseño que permite realizar una planeación de la experiencia que se quiere realizar, una experimentación de la herramienta obtenida que para nuestro caso es la Secuencia Didáctica a implementar, observando las interacciones docente-estudiantes y estudiante-estudiante, y finalmente un análisis retrospectivo de los resultados obtenidos de la implementación de la secuencia con los estudiantes.

CAPITULO 2

CONSTRUCCIÓN DE UNA CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA Y ECOLOGICA DE IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

1. Introducción

Revisando diferentes textos y documentos de calidad investigativa sobre el conocimiento de las medidas de tendencia central (MTC) y su didáctica en la enseñanza a estudiantes de educación básica secundaria, se encuentran varios trabajos relacionados con la formación en estadística y con el objeto matemático de estudio. En este capítulo presentamos la construcción de una configuración epistémica-ecológica para la valoración de la idoneidad didáctica de la enseñanza y aprendizaje de las MTC en estudiantes de grado noveno, y componentes de esta configuración propuestos en la teoría de la idoneidad didáctica (Godino 2011).

Para llevar a cabo dicha construcción de la configuración es necesario revisar documentos curriculares de referencia del MEN, que sirvan como base para soportar indicadores epistémicos-ecológicos que permitan dar cuenta del cumplimiento de estos estos documentos curriculares. Estos indicadores están basados en el sistema de indicadores propuestos en Godino (2011) para analizar si se cumplen en la planeación de la instrucción matemática del concepto de MTC para desarrollar pensamiento aleatorio en los estudiantes de educación básica secundaria.

En primer lugar se analiza el contenido de los ***libros de texto*** empleados para la enseñanza-aprendizaje de las ***medidas de tendencia central*** en Colombia, en segundo lugar se realiza las adaptaciones de las ***situaciones problemas*** que se propone para ser realizada por los estudiantes de grado noveno, y por último se analiza que tanto se ajusta el proceso de enseñanza-aprendizaje al ***contexto*** regional (Risaralda), local (Pereira) y al mismo Proyecto Educativo Institucional (PEI) de la Institución Educativa Hugo Ángel Jaramillo donde se realiza esta investigación.

2. FACETA EPISTÉMICA

El currículo pretendido, según Cai & Howson (2013), determina qué se espera que aprendan los estudiantes, cuándo y cómo. En este sentido el MEN ha elaborado documentos curriculares como los lineamientos, los estándares básicos de competencias (EBC), los derechos básicos de aprendizaje (DBA) en su primera y segunda versión, las orientaciones pedagógicas en dos versiones, las mallas curriculares de aprendizaje, entre otros documentos. En estos documentos se evidencia que las medidas de tendencia central son parte del currículo de matemáticas desde la educación primaria debido a su utilidad en la vida diaria, su papel instrumental en otras disciplinas y su importancia en el desarrollo de un pensamiento aleatorio. Sin embargo la enseñanza de la estadística depende fuertemente de los profesores, quienes tienen un papel esencial al interpretar el currículo y adaptarlo a las circunstancias específicas de sus estudiantes.

Esta faceta incluye los significados de referencia en relación con las medidas de tendencia central que se explicita en cada uno de los documentos curriculares del MEN. Se realiza un recorrido desde las nociones iniciales de estadística en la educación inicial, primaria, hasta llegar a la básica secundaria para analizar toda la trayectoria epistemológica que se debe tener en cuenta para la instrucción matemática en el desarrollo del pensamiento aleatorio. Se realiza una descripción de los DBA en su primera y segunda versión (*ver anexo 4*), que se relacionan con el objeto matemático de este estudio y su aporte a la construcción del concepto de medidas de tendencia central que permite posteriormente realizar una propuesta pedagógica a través de una Secuencia Didáctica que se desarrolla en el siguiente capítulo.

2.1. Textos analizados en la configuración epistémica

Este breve análisis de texto se realiza con la finalidad de aportar a la creación de la secuencia didáctica con el fin de crear un orden lógico que permita abordar los conceptos de las MTC. Los siguientes textos analizados son los que se encuentran disponibles en la institución educativa en el momento de la realización de este estudio: "Módulo de Secundaria Activa – Matemáticas 9°" una propuesta pedagógica del MEN, "Los Caminos del Saber – Matemáticas 9°" de la editorial Santillana y "Hipertexto – Matemáticas 9°" de la editorial Santillana.

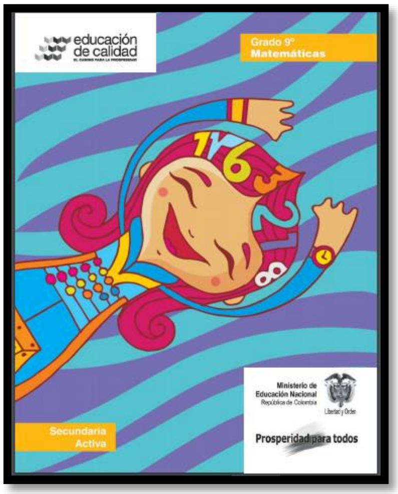


Tabla 4. Análisis de textos (basado en Mayén, 2009).

	Definiciones	Secundaria Activa. Matemáticas 9.	Los Caminos del Saber. Matemáticas 9.	Hipertexto Matemáticas 9.
DM1	Media como promedio	X	X	X
DM2	Media como algoritmo	X	X	
DME1	Mediana como dos partes	X	X	X
DME2	Mediana como valor central			
DMO1	Moda, valor más frecuente	X	X	X
DMO2	Moda, diagrama diferencial			

Este análisis nos permite evidenciar que los dos primeros textos contienen más definiciones de las MTC, y en particular el módulo de Secundaria Activa tiene actividades contextualizada para los estudiantes que permiten potenciar los aprendizajes de las MTC, por lo que algunas de sus actividades se seleccionaron para conformar la secuencia didáctica descrita en el siguiente capítulo.

2.2. Situaciones problemas

Parafraseando a Múnera (2007) en general podemos decir que una situación problema es un espacio de informaciones e interrogantes a los cuales el estudiante está invitado a responder, con el fin de generar y movilizar niveles de respuestas y preguntas frente a un saber específico, en nuestro caso sobre las medidas de tendencia central, con el objetivo de desencadenar un aprendizaje.

Textualmente Múnera (2007) cita a Chamorro (1992) mencionando que las situaciones planteadas deben tender a: "familiarizar al alumno con procesos de uso común en las matemáticas, tales como la formulación y validación de hipótesis", que debe propiciar espacios que le permitan particularizar, generalizar, conjeturar y verificar; características que son propias del razonamiento matemático. Además cita a Mason (1984) mencionando que "el pensamiento matemático se apoya en una atmósfera de interrogantes, desafíos y reflexión con abundante tiempo y espacio, creando desafío, sorpresa y contradicción". En estos espacios de interacción, el alumno va cambiando sus comportamientos e ideas frente al "objeto" en cuestión, razón por la cual es importante que el profesor conozca los procesos cognitivos que el alumno está estructurando durante todo el proceso de aprendizaje, por lo que el docente que realiza el proceso de instrucción en este estudio, realiza grabaciones de audio en cada situación problema aplicada para verificar que efectivamente el estudiante obtuvo los aprendizajes previstos y que surgieron durante el proceso de instrucción.

Para nuestro caso estas situaciones problemas se utilizan como mediador para promover aprendizajes significativos que relacionaremos más adelante con hechos didácticos significativos (HDS) en el capítulo 4 cuando se sintetice la trayectoria didáctica implementada en el análisis cognitivo – afectivo.

Las situaciones que se ilustran a continuación son una adaptación de situaciones planteadas por Mayén, Cobo, Batanero & Balderas (2007) a estudiantes de básica secundaria de una escuela en México. Para efectuar tales adaptaciones se tuvo en cuenta contextualizar las situaciones problemas de tal manera que el estudiante pudiera aprender fácilmente por ser datos u situaciones familiares a su entorno. Para realizar estas adaptaciones se tiene en cuenta que crear situaciones problemas (Múnera, 2007) es primero conocer el saber específico que se propone enseñar, segundo re contextualizarlo de acuerdo con las condiciones del estudiantes, lo que confirma la importancia de saber que conocimientos previos debe tener el educando.

Situación 1. Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en Colombia es 2.2 hijos por familia.

a. Explica qué significa para ti esta frase.
b. Se han elegido 10 familias colombianas y el número medio de hijos entre las 10 familias es de 2.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo. ¿Cuántos hijos podrán tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las 10 familias sea 2.2? Justifica tu respuesta.

Adaptación realizada al Ítem 1 de Mayén, Cobo, Batanero y Balderas (2007).

Situación 2. Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado es 4. ¿Te parece posible? ¿Por qué?

Tomado de Mayén, Cobo, Batanero y Balderas (2007).

Situación 3. Kevin y Alexandra dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada fin de semana una media de 4 horas a hacer deporte.

a. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?
b. Kevin y Alexandra dedican además 1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican cada fin de semana, entre las dos actividades: hacer deporte y escuchar música?

Adaptación realizada al Ítem 2 de Mayén, Cobo, Batanero y Balderas (2007).

Situación 4. El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24.

a. ¿Cuál es el peso del niño mediano?
b. ¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg?
c. En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona la respuesta.

Tomado de Mayén, Díaz y Batanero (2009).

Situación 5. El profesor David califica a sus alumnos por desempeños del siguiente modo: Bj=Bajo, Bs=Básico, A=Alto, S=Superior.

En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de estudiantes de noveno grado:

Noveno 2: Bj Bs Bs A A S S Bj Bj Bj Bs Bs Bs A S S Bj Bs Bs S S S S
Noveno 3: S S Bj Bj Bs A Bs A Bj Bj S A Bs S Bj A A
a. ¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?
b. ¿Cuál sería el promedio más apropiado para representar estos datos?

Adaptación realizada al Ítem 6 de Mayén, Cobo, Batanero y Balderas (2007).

Situación 6. Nueve estudiantes han pesado un celular en el laboratorio de ciencias. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestra a continuación: 104.2, 104.3, 104.0, 104.2, 104.2, 104.1, 104.5, 104.2, 104.1, 104.2. Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del celular. ¿Qué harías para calcularlo?

Adaptación realizada al Ítem 8 de Mayén, Cobo, Batanero y Balderas (2007).

2.3. Soluciones esperadas en las situaciones problemas

Estas soluciones esperadas de las situaciones problemas permiten prever los conflictos cognitivos que se manifiestan en los estudiantes durante la implementación de la situación, y permite valorar el aprendizaje durante el desarrollo de la instrucción matemática.

2.3.1. Solución esperada para la Situación 1

Situación 1. Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en Colombia es 2.2 hijos por familia.

a. Explica qué significa para ti esta frase.
b. Se han elegido 10 familias colombianas y el número medio de hijos entre las 10 familias es de 2.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo. ¿Cuántos hijos podrán tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las 10 familias sea 2.2? Justifica tu respuesta.

Adaptación realizada al Ítem 1 de Mayén, Cobo, Batanero & Balderas (2007).

Las posibles respuestas han sido analizadas en el trabajo de Mayén (2009), donde se observa que en el inciso a) de la situación 1 se pide al alumno una definición de media con sus propias palabras. Se considera correcto si la respuesta recoge la idea de media como reparto equitativo en una distribución de datos; por ejemplo, si el alumno da una respuesta del tipo: “Que el número de hijos a los que tocaría cada familia al repartir el total sería 2.2, pero esto es resultado de una operación, pues el número de hijos siempre es un valor entero”, o bien, si considera el valor más probable al tomar un elemento de una población, por ejemplo: “Las familias tienen alrededor de 2 hijos, pero algunas familias tienen más o menos”. Se considera correcta las respuestas al inciso b), cuando los alumnos den una distribución de datos que, incluyendo los valores dados, resulte una media igual a 2.2. Por ejemplo: “Las otras familias tienen 2 hijos cada una, excepto una que tiene 3, porque así la media da 2.2”. Es decir, el estudiante debe calcular el total de hijos de las 10 familias, multiplicando la media 2.2 por 10. Restando los 5 hijos que conjuntamente tienen las dos familias dadas quedan 17 hijos entre 8 familias. Se trataría de dar un total de 17, para lo cual hay varias posibilidades, por ejemplo, cada familia podría tener 1, y una de ellas 10 hijos. Para resolver este problema, el estudiante podría usar las diferentes definiciones de media y moda, así como de las siguientes propiedades: “La media es un valor perteneciente al rango de la variable”, “la media no tiene por qué ser uno de los valores de los datos” (ya que en este caso, la media no da un valor entero), “el cálculo de la media no es operación interna” (pues no se conserva el conjunto numérico dado inicialmente en el problema); y “la media es un representante del conjunto de datos”. Como elemento de cálculo, se requiere, para una media dada, buscar una distribución, lo que implica conocer el algoritmo de cálculo de este parámetro con un conjunto pequeño de datos aislados y saber aplicarlo a la inversa. También se podría resolver por ensayo y error, calculando la media con datos aislados. Respecto al lenguaje, el problema contiene elementos numéricos y verbales. Se pide también proporcionar un argumento.

2.3.2. Solución esperada para la Situación 2

Situación 2. Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado es 4. ¿Te parece posible? ¿Por qué?

Tomado de Mayén, Cobo, Batanero & Balderas (2007).

Con esta situación también originalmente de Tormo (1993) citado por Mayén (2009), se pretende averiguar si los alumnos son capaces de dar una distribución de valores, conocida la media y el máximo. Como indican Mokros y Russell (1995), hasta que los niños no conciben el conjunto de datos como un todo, no podrán comprender la idea de promedio. Para resolver la situación y teniendo en cuenta que el producto de la media (4) por el número de valores (6) es igual a 24, restando el máximo 5, se obtiene 19. Por tanto, la suma de los otros 5 números ha de ser igual a 19. Una posible solución es que el resto de los valores sea igual a 4, excepto uno de ellos que tome el valor 3. Hay otras soluciones posibles a la situación 3. En esta situación se trata de ver si los alumnos comprenden el algoritmo de cálculo de la media. También aparece el algoritmo de cálculo de la media con datos aislados. Esperamos que los alumnos muestren con un ejemplo que el enunciado es posible y den un argumento matemáticamente correcto. Esta situación se presenta en un contexto abstracto e implícitamente aparece la definición de media como algoritmo. Existe una lista de números no conocidos, lo que obliga a construir una distribución para una media dada. Los elementos de representación son verbales y numéricos. Incluye, como elementos de significado más relevantes, las propiedades de la media de "ser un valor perteneciente al rango de la variable" y "ser el centro de gravedad de la distribución".

2.3.3. Solución esperada para la Situación 3

Situación 3. Kevin y Alexandra dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada fin de semana una media de 4 horas a hacer deporte.

a. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?

b. Kevin y Alexandra dedican además 1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican cada fin de semana, entre las dos actividades: hacer deporte y escuchar música?

Adaptación realizada al Ítem 2 de Mayén, Cobo, Batanero & Balderas (2007).

Esta situación es original del estudio de Watson (2000), adaptado por Cobo (2003) y citado por Mayén (2009). En el inciso a) nos permite evaluar si los estudiantes son capaces de calcular correctamente una media ponderada, un tema en que numerosos autores (Li y Shen, 1992; Carvalho, 2001; Cobo, 2003), han señalado dificultades, incluso en estudiantes universitarios.

En su solución, los estudiantes tendrán que multiplicar la cantidad de horas que dedican a hacer deporte (8 horas) los dos primeros alumnos (es decir 8×2); multiplicar la cantidad de horas que dedican a hacer deporte (4 horas) los otros 8 estudiantes (es decir 4×8); sumar los valores resultantes y obtener la media global dividiendo entre el total de datos (10) usando la siguiente expresión algebraica:

$$\overline{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

Donde "x" sería el tiempo que dedican a hacer deporte o escuchar música y "w" la frecuencia de estudiantes.

$$\bar{x} = \frac{(8 \times 2) + (4 \times 8)}{2 + 8} = \frac{16 + 32}{10} = \frac{48}{10} = 4.8$$

La respuesta al inciso a) ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes? Sería, los 10 estudiantes hacen deporte con un promedio de 4,8 horas cada fin de semana.

La ponderación correcta en el cálculo de la media, supone capacidad para aplicar la ley distributiva al sumar un conjunto de valores numéricos repetidos y también percibir que la media aritmética considerada como una operación no tiene la propiedad asociativa (Pollatsek, Lima y Well, 1981). Se requiere también el conocimiento de las definiciones de la media, como algoritmo y como promedio.

En inciso b) además de aplicarse de nuevo el cálculo de la media ponderada, tratamos de averiguar si los alumnos reconocen la siguiente propiedad: "la media de la suma de dos o más variables, es la suma de las medias de éstas" (Tormo, 1993). Las representaciones que el alumno debe usar para resolver el problema son verbales y numéricas.

2.3.4. Solución esperada para la Situación 4

Situación 4. El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24.

a. ¿Cuál es el peso del niño mediano?
b. ¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg?
c. En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona la respuesta.

Tomado de Mayén, Díaz & Batanero (2009).

Con esta situación tomada originalmente de Godino (1999), quien lo utilizó en una investigación con futuros profesores y posteriormente tomado por Cobo (2003), se pretende medir las competencias en el cálculo de la mediana, tanto con un número par de valores como impar. También se quiere comprobar si los estudiantes comprenden adecuadamente el efecto de la presencia de valores atípicos sobre los valores de media y mediana. Para resolver el apartado a), habría que ordenar los datos y tomar el elemento central, aplicando directamente la definición de mediana. Supone que los alumnos comprendan que la mediana es el centro de la distribución cuando los datos están ordenados, combinando las ideas de centro y orden. A partir de los datos dados, los alumnos tendrían que producir una ordenación de los datos y determinar el valor central que sería la mediana. Al añadir un nuevo elemento en el apartado b), el número de elementos sería entonces par. Nos encontraríamos en el caso de indeterminación, pues al ordenar el conjunto de datos y buscar el valor central, encontramos dos valores. Por tanto, los dos elementos centrales del conjunto de datos cumplen la definición de mediana, pues están situados en el centro de la distribución. Para resolver la indeterminación se introduce un convenio que se enseña a los alumnos, que consiste en obtener la media de los dos valores centrales y tomar dicho valor medio como mediana del conjunto de datos. En el apartado c), se espera que los alumnos indiquen que el mejor representante es la mediana, ya que la media se vería muy afectada por el alto valor 43 que es atípico. Por el contrario, la mediana (19) no se ve afectada por los valores extremos y cumple que exactamente el 50% del grupo está por encima y debajo de este valor. Esta situación contempla las siguientes propiedades: "el cálculo de la moda y la media intervienen todos los valores de los datos, mientras que en el de la mediana no"; "La media cambia siempre que cambia algún dato, mientras que la mediana puede no cambiar"; y "la media es menos resistente que la mediana". Por otro lado, en cuanto a las definiciones de mediana, contiene de manera implícita, las que giran en torno a la idea de elemento central que divide a la población en dos partes iguales, y con respecto a la media, la centrada en la idea de promedio aritmético de un conjunto de valores (Cobo y Batanero, 2000). Se utilizan en esta situación representaciones verbales y simbólicas, y se espera que el alumno proporcione una argumentación.

2.3.5. Solución esperada para la Situación 5

Situación 5. El profesor David califica a sus alumnos por desempeños del siguiente modo: Bj=Bajo, Bs=Básico, A=Alto, S=Superior.

En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de estudiantes de noveno grado:

Noveno 2: Bj Bs Bs A A S S Bj Bj Bj Bs Bs Bs A S S Bj Bs Bs S S S S
Noveno 3: S S Bj Bj Bs A Bs A Bj Bj S A Bs S Bj A A
a. ¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?
b. ¿Cuál sería el promedio más apropiado para representar estos datos?

Adaptación realizada al Ítem 6 de Mayén, Cobo, Batanero & Balderas (2007).

Esta situación que es tomada originalmente de Godino (1999) citado en el trabajo de Mayén et al. (2007), se centra en la mediana y su relación con las otras medidas de tendencia central. En él se pide comparar dos grupos de datos ordinales. Puesto que los datos corresponden a una variable ordinal, que no admite el cálculo de la media, los únicos parámetros de centralización con que se pueden hallar como resumen de los datos son la mediana y la moda (Cobo & Batanero, 2000). La mediana es preferible a la moda porque tiene en cuenta el orden de los datos, mientras la moda sólo tiene en cuenta su frecuencia. Para calcularla en cada grupo, el alumno tendría que ordenar previamente los valores, como se muestra a continuación:

Noveno 2: Bj Bj Bj Bj Bj Bs Bs Bs Bs Bs Bs Bs A A A S S S S S S S S
Noveno 3: Bj Bj Bj Bj Bj Bs Bs Bs A A A A A S S S S

El primer grupo tiene 23 elementos, con lo que el alumno central, que ocupa la posición 12 tiene un “Básico” (aprobado). En el segundo grupo el valor de la mediana es “Alto”, puesto que el elemento central es el 9 (de 17 sujetos). Finalmente se deben comparar las dos medianas calculadas, hallando el mayor de ellos. El grupo correspondiente será el que tiene “mejores” notas.

Mayén et al. (2007) consideran que una dificultad de esta situación problema es el diferente número de casos en cada grupo. Podríamos también admitir como solución (aunque no tan apropiada) si los alumnos calculan y comparan correctamente las modas de los dos grupos. Consideramos parcialmente correcto si el alumno calcula y compara bien las medias de los dos grupos (asignando una puntuación numérica a cada una de las calificaciones) y da como respuesta que el mejor grupo es el primero. En consecuencia, la situación contempla los algoritmos de cálculo de media, mediana y moda con datos aislados. En cuanto a las propiedades, esta situación contiene las siguientes: numérica, “Para el cálculo de la mediana no se tienen en cuenta todos los valores de los datos, sólo su posición una vez ordenados”; algebraica: “La mediana y la moda existen para variables ordinales, mientras que la media no existe en este caso”; y estadísticas: “Los promedios son representantes de un colectivo” y “Existe moda y mediana en variables cualitativas ordinales”. Incluye representaciones de tipo verbal y simbólico, y también se espera que el alumno proporcione una argumentación.

2.3.6. Situación esperada en la Situación 6

Situación 6. Nueve estudiantes han pesado un celular en el laboratorio de ciencias. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestra a continuación: 104.2, 104.3, 104.0, 104.2, 104.2, 104.1, 104.5, 104.2, 104.1, 104.2. Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del celular. ¿Qué harías para calcularlo?

Adaptación realizada al Ítem 8 de Mayén, Cobo, Batanero & Balderas (2007).

Esta situación está tomada originalmente de Garfield & Konold (1992) cita por Mayén et al. (2007) y requiere el cálculo de la media en una variable discreta con datos aislados y hacer uso de la media como estimación de una cantidad desconocida a partir de diversas mediciones en presencia de errores, En esta situación, la media la respuesta correcta, aunque se espera que los alumnos puedan optar por la mediana o la moda. De esta manera, la situación incluye definiciones, algoritmos de cálculo y procedimientos relativos a las tres medidas para el caso de una variable discreta con datos aislados. Las representaciones son numéricas y verbales. Contiene también algunas propiedades: "La media y la mediana puede no coincidir con ningún valor de los datos, mientras que la moda siempre es uno de ellos", "la media cambia al cambiar algún dato", "el cálculo de la moda, desde el punto de vista algebraico, es una operación interna, mientras que el de la media y la mediana no lo es", "los tres promedios, media, mediana y moda, son representantes de un colectivo" y "la suma de las desviaciones de un conjunto respecto a su media es cero".

A pesar que se puede realizar un análisis epistémico detallado para cada situación problema (ver ejemplo para la Situación 1 en el *anexo 7*), este estudio enfatiza la construcción de una configuración epistémica de manera general (para varias situaciones problemas y actividades). A continuación se construye una configuración epistémica general para todas las situaciones problemas que intervienen en el proceso de aprendizaje de los estudiantes de este estudio. Los siguientes indicadores servirán para evaluar de manera general todas las situaciones problemas configuradas epistémicamente y determinar si el proceso de planeación fue idóneo.

Tabla 5. Indicadores de idoneidad epistémica (Adaptado de Godino, 2011; Ossa & Aldana, 2017).

COMPONENTES	**INDICADORES**
Situaciones-problemas	Se incluyen situaciones problemas para introducir, desarrollar y aplicar nociones de MTC (involucra resolver y formular problemas). Se promueve el uso de problemas abiertos (de tipo heurístico) que admiten el uso de estrategias variadas de resolución.

Lenguajes	Se incluyen diversas representaciones de uso convencional en estadística (representaciones concretas y visuales, tablas, gráficos, estadísticos, íconos, símbolos,…) incentivando su producción por parte de los alumnos. El nivel del lenguaje pretendido o empleado es adecuado a los estudiantes a que se dirige.
Reglas: definiciones, proposiciones y procedimientos	Se incluyen los conceptos, procedimientos (algoritmos, técnicas de construcción de tablas y gráficos,…) y propiedades de las MTC, formulados de manera correcta y adaptados al nivel educativo. Se promueven diferentes métodos de recolección de datos (censos, encuestas, observación, medición). Se promueve el uso e interpretación de conceptos (media aritmética simple, ponderada, mediana, moda, valores atípicos,…) técnicas y propiedades estadísticas para: analizar, describir y comparar conjuntos de datos; establecer conjeturas que relacionen una muestra con su población; analizar experimentos comparativos; y explorar tendencias de datos a través del tiempo. Se promueve resolver problemas que requieran el cálculo e interpretación de MTC para analizar el comportamiento de un conjunto de datos.

	Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.
Argumentos	Se fomenta maneras de justificar conclusiones acordes al nivel de los estudiantes, conocida la media aritmética, la moda o la mediana de un conjunto de datos. Se promueve el razonamiento y la demostración como una actividad fundamental de la actividad matemática. Se promueve el desarrollo, evaluación y justificación de argumentos.
Relaciones	Los objetos matemáticos-estadísticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. Se promueven destrezas de razonamiento estadístico a través de la resolución de problemas de análisis de datos. Se propone reconocer relaciones y tendencias, conocidas la media aritmética, la moda o la mediana de un conjunto de datos. Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas. Se abordan ideas estadísticas (conceptos, procedimientos, propiedades) de manera integrada.

En este sentido hemos obtenido una primera Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica a partir de los documentos curriculares del MEN y otras investigaciones. En este caso los "indicadores epistémicos" sintetizan los principales objetivos y contenidos presentes en el currículo de educación básica secundaria, y pueden ser vistos como criterios de idoneidad para valorar los aprendizajes obtenidos por los estudiantes de grado noveno.

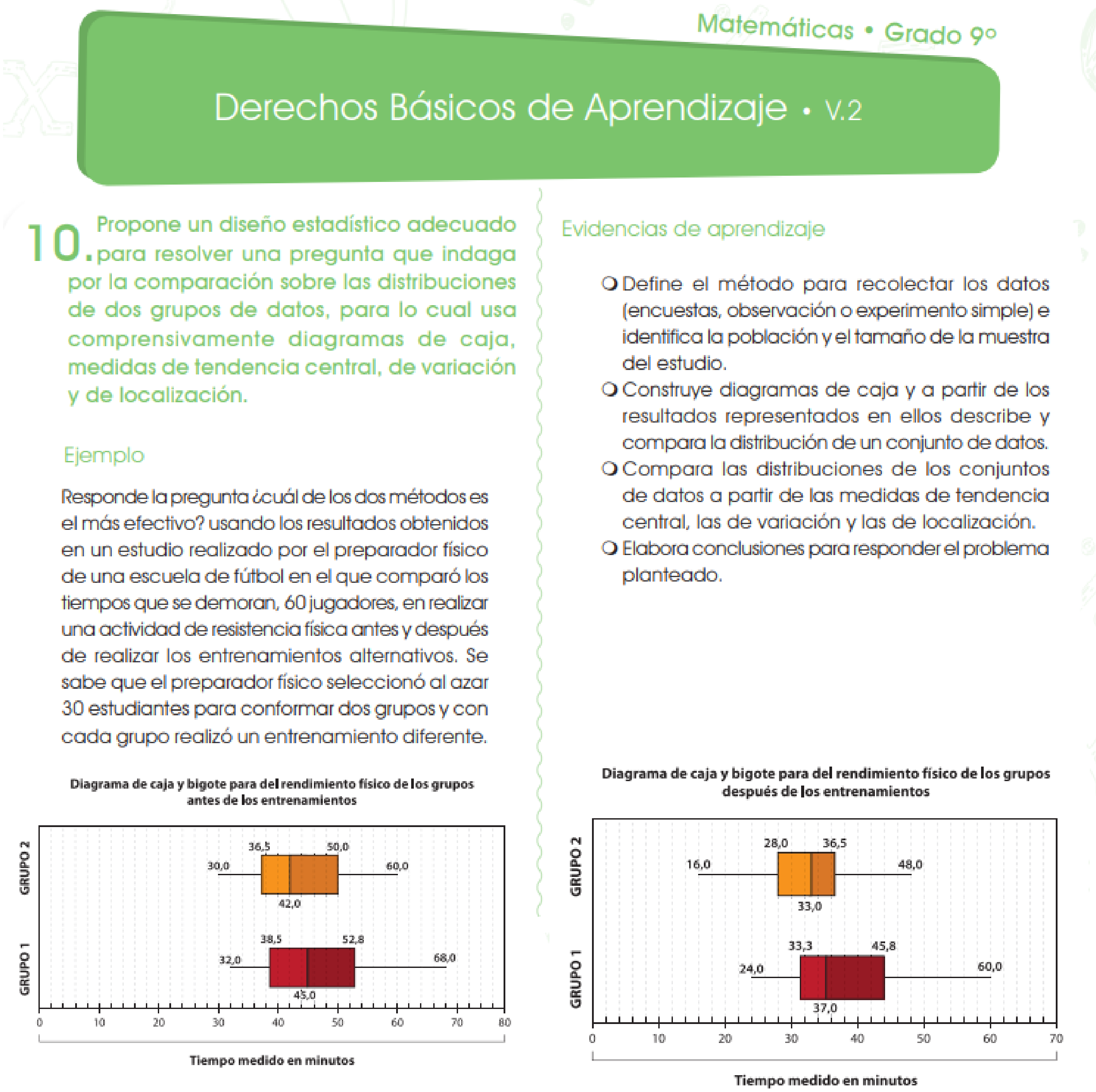
3. FACETA ECOLÓGICA

Esta faceta se refiere a las medidas de tendencia central y su relación con elementos socioculturales y profesionales, además con contenidos intra e inter disciplinares, con el currículo y con la innovación.

La realidad experimentada en la Institución Educativa y como en otras instituciones es que estos conceptos estadísticos son dejados para los últimos procesos de instrucción matemática y en algunas ocasiones los docentes no los alcanzan a abordar. Los estudiantes de grado noveno de esta investigación manifiestan que solo relacionaban el concepto de media como promedio debido a que es muy utilizado en su cotidianidad cuando quieren obtener el promedio final de sus calificaciones de un periodo académico, no teniendo referencia así de los conceptos de moda y mediana en un conjunto de datos. Aunque los estudiantes relacionaban la media como el promedio, no reconocían sus propiedades como valor representativo de un conjunto de datos, que por ejemplo, cuando existen valores atípicos la media deja de ser representativa y deja a espacios para la búsqueda de un mejor representante del conjunto de datos como lo es la moda o la mediana. Lo anterior indica que a pesar de que en los documentos bases curriculares del MEN se encuentra estipulado la enseñanza de las medidas de tendencia central, algunas instituciones no han podido realizar ajustes a sus currículos que permita la enseñanza de este objeto matemático.

Las directrices curriculares del MEN en los DBA-v2 para grado noveno (nivel de estudio de esta investigación) contempla la enseñanza de las medidas de tendencia central en el siguiente aspecto:

Figura 4. DBA de Matemáticas 2da Versión. Grado 9 Numeral 10 tomado del MEN (2016)



Matemáticas • Grado 9º

Derechos Básicos de Aprendizaje • V.2

10. Propone un diseño estadístico adecuado para resolver una pregunta que indaga por la comparación sobre las distribuciones de dos grupos de datos, para lo cual usa comprensivamente diagramas de caja, medidas de tendencia central, de variación y de localización.

Ejemplo

Responde la pregunta ¿cuál de los dos métodos es el más efectivo? usando los resultados obtenidos en un estudio realizado por el preparador físico de una escuela de fútbol en el que comparó los tiempos que se demoran, 60 jugadores, en realizar una actividad de resistencia física antes y después de realizar los entrenamientos alternativos. Se sabe que el preparador físico seleccionó al azar 30 estudiantes para conformar dos grupos y con cada grupo realizó un entrenamiento diferente.

Evidencias de aprendizaje

- Define el método para recolectar los datos (encuestas, observación o experimento simple) e identifica la población y el tamaño de la muestra del estudio.
- Construye diagramas de caja y a partir de los resultados representados en ellos describe y compara la distribución de un conjunto de datos.
- Compara las distribuciones de los conjuntos de datos a partir de las medidas de tendencia central, las de variación y las de localización.
- Elabora conclusiones para responder el problema planteado.

Sin embargo tratando de retomar los aprendizajes considerados necesarios para alcanzar este DBA se construye una secuencia didáctica que permita recoger algunos conceptos que debieron ser desarrollados en grados anteriores para comprender los nuevos aprendizajes propuestos para su nivel educativo. Más adelante en el Capítulo 3 ilustraremos esta secuencia didáctica. Con la información contemplada anteriormente se construye la siguiente configuración ecológica.

Tabla 6. Indicadores de idoneidad ecológica. (Adaptado de Godino, 2011; Ossa & Aldana, 2017).

COMPONENTES	**INDICADORES**
Adaptación al currículo	Se deben tener en cuenta las exigencias del currículo escolar. Los contenidos, su implementación y evaluación deben corresponder con las directrices curriculares.
Apertura hacia la innovación didáctica	Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva. Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.
Adaptación socio- profesional y cultural	Se establecen conexiones entre los contenidos de MTC con profesiones y diferentes contextos de la vida cotidiana. Se analizan usos incorrectos de la estadística en el mundo circundante. Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.
Educación en valores	Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.

Conexiones intra e interdisciplinares	Se establecen conexiones entre los contenidos de MTC con otros contenidos matemáticos y con otras áreas de la educación básica secundaria. Se establecen conexiones entre los contenidos MTC de distintos niveles de enseñanza. Se establecen conexiones entre los contenidos estadísticos con otros contenidos.

4. ANÁLISIS EPISTÉMICO-ECOLÓGICO

El estudio preliminar del contenido cuya enseñanza se pretende se realiza en el EOS guiado por la noción de "significado de referencia": sistema de prácticas operativas y discursivas que se usan como referencia para elaborar el significado pretendido en el proceso de instrucción. Las prácticas matemáticas son entendidas como cualquier actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino & Batanero, 1994). Por tanto, el punto central en la elaboración del significado de referencia será la caracterización de las situaciones-problema que permitan establecer los contenidos cuyo aprendizaje se pretende. Este planteamiento es concordante con la búsqueda de situaciones fundamentales de la teoría de situaciones (Brousseau, 1986; 1998), o con la elaboración de una "praxeología de referencia" en el marco de la TAD (Chevallard, 1999). De hecho, el estudio de las matemáticas basado en la resolución de problemas, en un sentido no restrictivo de un enfoque teórico, se puede considerar actualmente como un postulado general de la didáctica de las matemáticas.

Desde el punto de vista "ecológico", el EOS resalta la importancia de conectar la formación estadística con aspectos intra e interdisciplinares. Se trata de tener en cuenta el sistema de relaciones y restricciones institucionales que condicionan el proceso de estudio. En este sentido, la literatura es concordante en considerar la importancia de conectar los contenidos estadísticos curriculares con el desarrollo de una cultura estadística en los estudiantes (Batanero, 2002; Franklin et al. 2005; MEN, 2015; MEC, 2006a; NCTM, 2000; Watson, 2006).

5. CONCLUSIONES DEL CAPITULO

En este capítulo se ha logrado construir una configuración de idoneidad epistémica y ecológica para valorar la idoneidad didáctica del proceso de instrucción matemática sobre el aprendizaje de las Medidas de Tendencia Central.

En esta fase de estudio preliminar hemos analizado el currículo de la educación básica secundaria permitiendo establecer los componentes que conforman los indicadores de idoneidad epistémicos, y estudiar que tanto se adapta el currículo de la institución educativa donde implementa este estudio al currículo sugerido por el MEN, obteniéndose de esta manera la configuración epistémica-ecológica e indicadores de idoneidad que nos permitirán valorar en el capítulo 5 el grado de proximidad de los significados pretendidos (implementados) con unos significados de referencia (institucionales).

CAPITULO 3

DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA QUE GENERE UNA CONFIGURACIÓN INTERACCIONAL – MEDIACIONAL PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

1. INTRODUCCIÓN

En este apartado de la investigación abordamos el diseño de una secuencia didáctica que permita caracterizar tanto algunas secuencias de interacción como los medios que serán usados. Esta fase de diseño implica la selección y secuenciación de situaciones problemas, el estudio de la solución esperada y el análisis retrospectivo de las soluciones dadas por los estudiantes. La resolución de cada problema es interpretada como una *configuración didáctica* y su secuenciación da origen a la *trayectoria didáctica* diseñada.

El capítulo que a continuación se presenta está conformado de la siguiente manera: en primer lugar presentamos las situaciones problemas que se pretenden proponer a los estudiantes para su solución, en segundo lugar, incluimos la solución esperada para cada situación problema teniendo en cuenta los principales procedimientos y propiedades de las medidas de tendencia central que se espera que los estudiantes relacionen, en tercer lugar, se describe el diseño de la secuencia didáctica que se construye a partir del análisis de la faceta epistémica-ecológica, además de incluir los elementos instruccionales (interaccional-mediacional) a tener en cuenta para la construcción de esta herramienta pedagógica, en cuarto lugar se realiza el análisis del diseño instruccional teniendo en cuenta aspectos epistémicos, ecológicos e instruccionales, y para finalizar, se incluye una síntesis con las principales conclusiones del capítulo.

2. DISEÑO DEL PROCESO DE INSTRUCCIÓN

Para potenciar el aprendizaje de las medidas de tendencia central se realiza un diseño de una secuencia didáctica que agrupa tanto diversas situaciones planteadas en el Modulo de Secundaria Activa implementado en la institución educativa donde se desarrolla el estudio, y situaciones problemas planteadas en una investigación realizada por Mayén, Cobo, Batanero & Balderas (2007) como la experiencia del docente autor en la educación básica secundaria. Estas actividades y situaciones problemas propuestas en esta secuencia didáctica constituyen configuraciones didácticas, que a su vez de manera secuenciada determinan la trayectoria didáctica planificada en este proceso de enseñanza. *(Ver Secuencia Didáctica en el anexo 6)*

Para el diseño de esta secuencia didáctica se tienen en cuenta la configuración epistémica-ecológica, así como los elementos de las facetas interaccional-mediacional que permitirá facilitar el proceso de instrucción matemática acerca de las medidas de tendencia central. En la construcción de esta secuencia didáctica se encuentra un componente importante del uso de la tecnología para lograr desarrollos cognitivos y significativos en los estudiantes, teniendo en cuenta que la tecnología atrapa la atención de los jóvenes. Para lo anterior se tienen en cuenta la construcción de un ambiente de aprendizaje de las medidas de tendencia central (MTC) con el uso del software "Hagamos estadística".

3. FACETA INTERACCIONAL

Como menciona Ossa & Aldana (2017) en esta faceta se consideran varios aspectos relevantes, en primer lugar encontramos la interacción docente-dicente, se resalta el rol del profesor como acompañante y facilitador del aprendizaje de sus estudiantes; es él el responsable de gestionar y organizar convenientemente la clase brindando ayuda oportuna y adecuada a los estudiantes que lo necesitan. En el trabajo de grupo, debe favorecer un clima de confianza y respeto mutuo fomentando la comunicación y la colaboración. También se plantea que el profesor debe estar preparado para identificar eventuales conflictos y reorientar las lecciones de clase en direcciones no previstas.

En segundo lugar, la interacción entre discentes, se promueve mediante instancias de comunicación y debate donde los estudiantes tengan la necesidad de comunicar, justificar y cuestionar puntos de vistas. "Los alumnos necesitan explicar y justificar lo que piensan, y aprender cómo detectar las falacias y a criticar el pensamiento de otros" (NCTM, 2000, p. 192). En tercer lugar tenemos la autonomía, que se promueve cuando los estudiantes enfrentan de manera individual problemas y tareas matemáticas.

Para finalizar, la evaluación formativa es concebida como una parte integral del aprendizaje; promoviéndose procesos de evaluación sistemática y continua mediante el uso de diversos tipos y técnicas de evaluación. Otro aspecto que se destaca es la importancia de la coherencia entre la evaluación y las metas de aprendizaje.

Según el estándar 5 de la NTCM (1991), en el *entorno de aprendizaje* el profesor de matemáticas debería crear un entorno de aprendizaje que estimule el desarrollo de la capacidad matemática de cada estudiante: a) proporcionando y estructurando el tiempo necesario para que exploren unas matemáticas adecuadas y que intenten resolver problemas e ideas significativas; b) usando el espacio físico y los materiales de modo que faciliten el aprendizaje matemático por los estudiantes; c) proporcionando un contexto que estimule el desarrollo de las destrezas y eficiencia matemática; d) respetando y valorando las ideas de los estudiantes, modos de pensamiento y disposición hacia las matemáticas; y mediante la animación consistente de los estudiantes para e) trabajar independientemente y en colaboración para dar sentido a las matemáticas; f) asumir riesgos intelectuales mediante el planteamiento de cuestiones y formulando conjeturas; g) mostrar competencia matemática mediante la validación y el apoyo de ideas matemáticas con argumentos matemáticos.

A continuación se presentan los indicadores de idoneidad interaccional teniendo en cuenta los indicadores propuestos por Godino (2011) e investigaciones relacionadas con este estudio (Ossa & Aldana, 2017).

Tabla 7. Indicadores idoneidad interaccional. (Adaptado de Godino, 2011; Ossa & Aldana, 2017).

COMPONENTES	**INDICADORES**
	Se incorporan estrategias para reorientar las lecciones de clase en direcciones no previstas.

Interacción docente-discente	Se promueve un clima de confianza y respeto mutuo, fomentando la discusión y colaboración en las instancias de diálogo con toda la clase. Se tiene en cuenta la ayuda oportuna y adecuada a los estudiantes que lo necesitan. Se contemplan momentos de introducción (presentación de objetivos, metodología didáctica, modos de evaluación,…) y sistematización de los contenidos tratados poniendo énfasis en los contenidos claves. Se considera llegar a consensos con base al mejor argumento. Se tiene en cuenta el uso de diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.
Interacción entre discentes	Se favorecen instancias de comunicación y debate que implican explicar, justificar y cuestionar puntos de vista. Se favorecen instancias de comunicación y debate que implican explicar, justificar y cuestionar puntos de vista (respuestas) utilizando argumentos matemáticos. Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.

Autonomía	Se promueve el trabajo personal de los estudiantes frente a la resolución de problemas y tareas (comprensión del problema, trazar un plan, comprobar soluciones, comunicar resultados).
Evaluación formativa	La evaluación es vista como un proceso al servicio de la enseñanza y el aprendizaje. Se contemplan el uso de diversas técnicas de evaluación (resolución de problemas, tareas prácticas, observaciones, diarios de clase,…). La evaluación es coherente con las metas de aprendizaje (se incluyen tareas similares a las situaciones de aprendizaje, incluso las mismas). La evaluación se aplica de manera continua y sistemática.

4. FACETA MEDIACIONAL

Esta faceta incluye el análisis de la disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. En este sentido, los recursos tecnológicos, entre otros, ofrecen una gama amplia de ayuda al docente y a los estudiantes en los procesos de instrucción.

En esta faceta se hace mucho énfasis en la integración didáctica de las TIC; se requiere el uso de Internet para descargar el Software educativo "Hagamos estadística" que permita manipular datos (elaborar tablas, construir gráficos, realizar cálculos) y la incorporación de calculadoras para facilitar operaciones de cálculo cuando se requiera.

4.1. Recursos Tecnológicos[6]

Según Godino, Batanero & Font (2003), en diversas investigaciones se informa que los estudiantes pueden aprender más matemáticas y de manera más profunda con el uso de una tecnología apropiada. Hay que tener en cuenta, no obstante, que la tecnología no se debería usar como sustituto de intuiciones y comprensiones básicas; al contrario, deberá enfocarse de manera que estimule y favorezca tales intuiciones y comprensiones más sólidas. Los *recursos tecnológicos* se deben usar de manera amplia y responsable, con el fin de enriquecer el aprendizaje matemático de los estudiantes. La existencia, versatilidad y potencia de la tecnología hace posible y necesario replantearse qué matemáticas deberían aprender los estudiantes, y cómo deberían aprender mejor.

Según la investigación realizada por Godino, Batanero & Font (2003) pueden aparecer algunas dificultades cuando se usan recursos tecnológicos de las cuales una en específica aplica para este estudio en el proceso de instrucción matemática:

- Dificultades de aprendizaje del software o la calculadora si el alumno no está familiarizado con estos recursos. Ello puede ocasionar que el tiempo, ya limitado, para la enseñanza de la matemática se invierta en el aprendizaje de la tecnología. Por ello se recomienda usar recursos fácilmente manipulables que no añadan complejidad innecesaria a la actividad matemática, en nuestro caso el software “Hagamos estadística”.

4.1.1. Calculadoras

Las calculadoras y los ordenadores se consideran actualmente como herramientas esenciales para la enseñanza, el aprendizaje y la construcción de las matemáticas. "La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y favorece el aprendizaje de los estudiantes" (NCTM, 2000). Estos recursos han reducido muchas horas dedicadas al cálculo, permitiendo dedicar más tiempo a tareas interpretativas y eliminando

[6] Se encuentra textualmente escrito en Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-6-2.

temas, como el cálculo de logaritmos a los que se destinaba mucho tiempo hace unos años. En el caso de este estudio, se promueve el uso de calculadoras en los estudiantes de grado noveno para realizar operaciones matemáticas con la finalidad de que interpreten las situaciones propuestas.

4.1.2. Ordenadores

Según Godino et al. (2003) han sido principalmente los ordenadores los que están cambiando la manera de enseñar matemáticas, debido principalmente a la revolución que hizo que los ordenadores estuvieran a disposición de un mayor número de usuarios, y al desarrollo del lenguaje natural en el manejo del software que hizo accesible su uso. Los programas de ordenador proporcionan imágenes visuales que evocan nociones matemáticas, facilitan la organización, el análisis de los datos, la graficación y el cálculo de manera eficiente y precisa. Pueden apoyar la investigación de los propios estudiantes en las distintas áreas de matemáticas: geometría, estadística, álgebra, medida y sistemas numéricos. Cuando proporcionamos herramientas tecnológicas, los estudiantes pueden centrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas. La gran ventaja de los ordenadores es su naturaleza dinámica, su velocidad, y el creciente rango de software que soportan. De esta manera, permiten a los estudiantes experimentar y explorar todos los aspectos de la matemática y tienen oportunidad de poder trabajar sobre preguntas de investigación reales, las cuales brindan mayor interés.

En este estudio se hace uso de un software estadístico llamado “Hagamos estadística” del cual utilizaremos alguna de sus herramientas para profundizar en algunos conceptos estadísticos especialmente los de MTC. Este software permite consolidar los conocimientos de estadística básica como son: tablas de frecuencias, medidas de tendencia central y gráficos estadísticos, además permite desarrollar la habilidad de analizar y concluir aspectos relevantes sobre grupos de datos.

4.1.3. Videos

Godino et al. (2003) menciona que actualmente se pueden encontrar videos didácticos que tratan muchos de los contenidos matemáticos. Sin embargo algunos consejos generales que conviene tener en cuenta son: 1) Antes de llevarlo al aula, hay que determinar qué parte se va a usar, por qué y para qué. Se necesita verlo completo para determinar qué segmentos son adecuados para los alumnos. 2) No hay que caer en la tentación de querer proyectar todo el video en una sola sesión. Los chicos no tienen la misma retentiva que los adultos, o la que desarrollan cuando van al cine. No hay que sustituir la clase con un video, sino que hay que aprovechar partes del mismo para enriquecer la enseñanza. 3) Hay que diseñar actividades que permitan a los estudiantes estar atentos antes, durante y después de ver el segmento del video. 4) No es conveniente apagar las luces.

Lo anterior se tiene en cuenta para la construcción de la Secuencia didáctica *(ver anexo 6)* que tiene fragmentos de videos que se usaran para enriquecer la enseñanza de las MTC.

Con los elementos anteriores se construye una configuración mediacional que permita establecer interacciones docente-estudiantes y estudiante-estudiante de manera idónea para la construcción del concepto de medidas de tendencia central.

Tabla 8. Indicadores idoneidad mediacional. (Adaptado de Godino, 2011; Ossa & Aldana, 2017).

COMPONENTES	**INDICADORES**
Recursos materiales (tangibles, textuales, digitales, …)	Se debe pensar en la integración didáctica de TIC (ordenadores, calculadoras, recursos de Internet, software específico) y material concreto, didáctico y manipulatorios. Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.

Número de alumnos, horario y condiciones del aula	Se tiene en cuenta el número y distribución de los alumnos para llevar a cabo la enseñanza pretendida de manera apropiada. Se contemplan aspectos relativos al horario de mayor conveniencia para impartir las clases. Se considera que las condiciones del aula sean adecuadas para el desarrollo del proceso instruccional pretendido. Tener en cuenta la organización del entorno físico de la clase (uso de mensajes sutiles sobre lo que es válido en el aprendizaje y uso de los contenidos, distribución apropiada del mobiliario,…).
Tiempo de enseñanza y aprendizaje (colectiva e individual)	El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida. Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema. Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

5. ANÁLISIS INSTRUCCIONAL (INTERACCIONAL-MEDIACIONAL)

La dimensión instruccional incluye el rol del profesor y de los estudiantes en relación con la clase de estadística, y al mismo tiempo, la forma de seleccionar las situaciones problemas, los recursos tecnológicos, y de organizar las secuencias de enseñanza.

En el estándar 8 de la NTCM se hace referencia a la evaluación del entorno de aprendizaje y se menciona que la evaluación debe medir la capacidad del profesor para crear un entorno de aprendizaje que estimula el desarrollo de la capacidad matemática de cada estudiante debería proporcionar evidencia de que el profesor: transmite la idea de que las matemáticas son un contenido para ser explorado y creado tanto individualmente como en colaboración con otros; respeta a los estudiantes y sus ideas y anima su curiosidad y espontaneidad; estimula a que los estudiantes extraigan y validen sus propias conclusiones; selecciona las tareas que permitan a los estudiantes construir nuevos significados mediante la construcción y la extensión de su conocimiento previo; hace un uso apropiado de los recursos disponibles; respeta y responde a los diversos intereses de los estudiantes así como a sus identidades culturales, lingüísticas y socioeconómicas mediante el diseño de las tareas matemáticas; apoya y estimula la participación completa y el estudio continuado de las matemáticas de todos los estudiantes.

Un “problema” en el que coinciden diversos autores (Pinto, 2010; Watson et al., 2008) es el uso de formas poco innovadoras de instrucción; centradas principalmente, en la trasmisión de información y en la inclusión de tareas de aplicación de conceptos y técnicas estadísticas. En consecuencia, las interacciones profesor-alumno en la clase de estadística, siguen los pasos típicos de una “clase tradicional”: presentación de una definición, se dan a conocer los procedimientos, presentación de algunos ejemplos y desarrollo de ejercicios. Estos autores, también coinciden en señalar falta de preparación para integrar recursos materiales y tecnológicos como herramientas que permiten favorecer y potenciar el aprendizaje.

La enseñanza y aprendizaje de las MTC a través de las situaciones problemas, como se propone en este estudio, permite implementar *trayectorias didácticas* en las que predominan las configuraciones de tipo personal y de trabajo cooperativo, es decir, con un nivel mayor en el aprendizaje matemático. Sin embargo, cada configuración didáctica (ligada al desarrollo de una configuración epistémica específica) debe contemplar los momentos de regulación (procesos de definición, enunciación, fijación de procedimientos y justificaciones) en los que el profesor fije los significados institucionales que serán implementados en cada clase.

La elección de los dispositivos de ayuda al cálculo estadístico y la representación gráfica es determinante para el desarrollo de la trayectoria didáctica por sus interacciones con las trayectorias epistémica, docente, discente, así como con las trayectorias cognitivas de los estudiantes.

En el transcurso de la trayectoria didáctica se contemplan procesos de evaluación formativa y sumativa. Como procesos de evaluación formativa se contemplan los estados de avances de cada tarea y el trabajo final presentado por estudiante. Así mismo, se realizará un seguimiento constante a través de la observación directa para obtener información en las sesiones acerca del estado del aprendizaje y facilitar su retroalimentación.

6. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

En cada una de las fases del EOS se encuentran herramientas originales que amplían las posibilidades de análisis de otros marcos teóricos. En la primera fase o estudio preliminar las dimensiones y componentes de la idoneidad didáctica orientan un análisis sistémico de la literatura, es decir permiten delimitar e interpretar dichos resultados para la posterior etapa de diseño. En cuanto a la dimensión epistémica, la noción de significado de referencia da una orientación específica a la epistemología del contenido cuyo aprendizaje se pretende construir.

Ahora bien, en la fase de diseño, una vez se seleccionan la muestra representativa de situaciones-problemas, este marco teórico nos propone ver de manera antelada lo que se pretende con los objetos y procesos para la resolución de tales situaciones que se proponen, con el fin de identificar conflictos de aprendizaje y los elementos a tener en cuenta en los procesos de institucionalización y evaluación.

Para concluir, debemos considerar que las nociones teóricas que se contemplan en esta faceta resultan eficaces para comprender y organizar procesos de enseñanza y aprendizaje de estadística en estudiantes de educación básica secundaria. En este sentido, consideramos que las actuaciones tomadas en la realización de este diseño, resultan necesarias para una programación idónea de un proceso de instrucción. Tal cual lo propone Rivas (2014) “la identificación de los componentes del programa al cual se adscribe un diseño, actúan como un *marco regulador* que debe ser tenido en cuenta por toda investigación que se realiza en un ambiente naturalista”. Además el estudio preliminar, permite identificar y analizar cuáles son las presiones externas de resultados de investigaciones, propuestas curriculares que sirven de base para la selección de las situaciones problemas, la metodología didáctica; los recursos tecnológicos y los procedimientos evaluativos que se incluirán en el diseño. Analizar la solución esperada resulta relevante para poder prever posibles estrategias que seguirán los estudiantes y para la posterior identificación de los objetos y procesos que se realiza en cada situación problema.

CAPITULO 4.

IMPLEMENTACION DE UNA CONFIGURACIÓN COGNITIVA – AFECTIVA PARA LOGRAR UNA PROXIMIDAD ENTRE SIGNIFICADOS PERSONALES Y SIGNIFICADOS PRETENDIDOS

1. INTRODUCCIÓN

En este tipo de análisis el centro de atención es el reconocimiento de conflictos cognitivos y las motivaciones de los estudiantes a las situaciones planteadas, que tienen lugar y sobre cómo son abordados por el docente y los propios estudiantes. En este orden de ideas, se pretende dar cuenta de los conocimientos que construyen los estudiantes y de la progresión de los aprendizajes. En el análisis no solo encontramos los resultados de las situaciones problemas y el contraste con lo esperado en la investigación sino también los principales conflictos que se han presentado. El propósito final es describir, clasificar e interpretar *hechos didácticos significativos*, que transcurren durante el proceso de instrucción que representen la trayectoria didáctica generada.

En este capítulo en primer lugar se realiza una descripción de consideraciones generales en los procesos de enseñanza-aprendizaje especialmente en las MTC así como aspectos evaluativos de los procesos de aprendizajes , en el segundo lugar, se describe configuración didáctica en la faceta cognitiva así como sus indicadores de idoneidad didáctica contempladas en este estudio, en tercer lugar se realiza la configuración afectiva y sus indicadores de idoneidad didáctica, en cuarto lugar se describen configuraciones didácticas generadas basadas en el conjunto de hechos didácticos significativos, de esta manera se puede evaluar el proceso cognitivo alcanzado por los estudiantes en este proceso de instrucción, y finalmente se ilustran las principales conclusiones del capítulo.

2. CONSIDERACIONES GENERALES EN LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

La historia de las matemáticas muestra que las definiciones, propiedades y teoremas enunciados por matemáticos famosos también son falibles y están sujetos a evolución. De manera análoga, el aprendizaje y la enseñanza deben tener en cuenta que es natural que los alumnos tengan dificultades y cometan errores en su proceso de aprendizaje y que *se puede aprender de los propios errores*. Esta es la posición de las teorías psicológicas constructivistas sobre el aprendizaje de las matemáticas, las cuales se basan a su vez en la visión filosófica sobre las matemáticas conocidas como constructivismo social.

En el estándar 6 de la NTCM (1991) sobre el análisis de la enseñanza y el aprendizaje, el profesor de matemáticas debería comprometerse en el análisis progresivo de la enseñanza y el aprendizaje sabiendo:

- Observar, escuchar y reunir información sobre los estudiantes para evaluar lo que están aprendiendo;
- Examinar los efectos de las tareas, el discurso, y el entorno del aprendizaje sobre el conocimiento de los estudiantes, sus destrezas y actitudes; en orden a
- Asegurar que cada estudiante está aprendiendo matemáticas adecuadas y significativas y que está desarrollando una disposición positiva hacia las matemáticas;
- Desafiar y extender las ideas de los estudiantes;
- Adaptar o cambiar las actividades durante la enseñanza;
- Hacer planes, tanto a corto como a largo plazo;
- Describir y comentar sobre el aprendizaje de cada estudiante con los padres, directores, así como con los propios estudiantes.

Batanero & Godino (2002) mencionan que los *conflictos en el aprendizaje* y los *instrumentos de evaluación* para las Medidas de Tendencia Central además de ser uno de los principales conceptos estadísticos, la media tiene muchas aplicaciones en cuestiones prácticas de la vida diaria. Que este concepto no es tan simple como parece lo puedes comprobar al tratar de resolver el siguiente problema: Problema: Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 60 kilos y el de los hombres de 90. ¿Cuál es el peso medio de las 10 personas del ascensor? Una reacción frecuente al resolver el problema anterior es decir que la media es 75 kilos. Sin embargo esta solución es errónea porque en el ascensor hay más hombres que mujeres.

Las situaciones en las cuales se debe calcular una media ponderada son frecuentes: calcular la puntuación media en un curso, la velocidad media, o el índice de precios. También cuando calculamos la media a partir de una tabla de datos. No se puede olvidar que en este caso cada valor de la variable tiene que ponderarse por su frecuencia. También se cometen errores al calcular la media, mediana y moda. Algunos de los más frecuentes son: · Moda: Tomar la mayor frecuencia absoluta, en lugar del valor de la variable. · Mediana: No ordenar los datos para calcular la mediana; calcular el dato central de las frecuencias absolutas ordenadas de forma creciente; calcular la moda en vez de la mediana; equivocarse al calcular el valor central. · Media: Hallar la media de los valores de las frecuencias; no tener en cuenta la frecuencia absoluta de cada valor en el cálculo de la media. En otros casos el cálculo se hace correctamente, pero no se entiende el algoritmo de cálculo. Esto se puede comprobar si le pides a un alumno que te diga 10 números diferentes cuya media sea igual a cuatro o bien que te dé el número que falta entre 5 sabiendo que la suma de los cuatro primeros es 23 y la media es igual a 5. Muchos no sabrán cómo hacerlo o lo harán con dificultad.

2.1. La evaluación de los procesos de aprendizaje

Los procesos de evaluación han sido objeto de una amplia discusión en los círculos académicos dedicados a la educación. Mario Carretero (2009) escribe: "Además de las ideas previas, es importante analizar el proceso de interacción entre el conocimiento nuevo y el que ya poseen. De esta manera, no es tan importante el producto final que emite el alumno, como el proceso que lleva a dar una determinada respuesta".

Desde esta perspectiva, se pone de manifiesto, que el profesor debe prestar atención a las concepciones de los alumnos, no sólo antes de que comience el proceso de aprendizaje, sino también a las que se van generando durante el mismo. Es decir, que es importante conocer lo que está en la mente de los alumnos durante todo el proceso de enseñanza. En oposición a como se ha evaluado hasta ahora: todo el proceso se reduce a sacar "notas" a través de un "examen"

Según el profesor Mesa (1990) "Evaluar el proceso de aprendizaje significa aproximarse al estado de comprensión logrado por los alumnos". Se busca, entonces, cualificar los niveles de comprensión durante toda la intervención.

De lo planteado hasta el presente, se deduce que esta manera de evaluar debe respetar los ritmos de aprendizaje y que los errores presentes en las respuestas deben ser canalizados como agentes mediadores para provocar cambios conceptuales en los alumnos.

Los programas educativos se han caracterizado por planear cada área a través de objetivos "específicos" con tiempos preestablecidos, de tal manera que sean alcanzados en el mismo tiempo por todos los estudiantes.

La evaluación por procesos sugiere un cambio en la planeación curricular, en la que se precisen los logros básicos, para ser alcanzados en diferentes tiempos, respetando los diferentes ritmos de aprendizaje.

Esto, "rompe" con aquella enseñanza que se ha caracterizado, en general, por la presentación sucesiva y lineal de contenidos que se supone genera un avance en los estudiantes.

Carmen Chamorro (1992) se refiere a los ritmos de aprendizaje de la siguiente manera: "El tiempo de aprendizaje corresponde al ritmo real del individuo que aprende, es característico de cada individuo y se sabe que no es continuo. Es decir, el tiempo de aprendizaje implica avances y retrocesos, que dependen, entre otras cosas, de las retroacciones"

El papel del error en la evaluación es fundamental cuando éste es considerado por el profesor para acompañar al estudiante o grupo de estudiantes, con miras a motivar las diferentes respuestas a través de la confrontación o presentación de nuevos interrogantes que conduzcan a la creación de un ambiente interesante y, por consiguiente, poco tensionante para el alumno. Al respecto afirma, Carmen Chamorro (1992):

El error pone de manifiesto las concepciones erróneas o incompletas, la construcción defectuosa de conceptos o relaciones, o, simplemente, las lagunas de conocimientos, y sólo tomándolos en consideración pueden reorientarse las actividades de aprendizaje. Es decir, el error, que habitualmente es interpretado como índice de lo que el alumno no sabe hacer, debe tomarse como índice de que el alumno sabe alguna cosa incorrecta o incompleta, para, partiendo de ahí, ayudarle a construir el conocimiento correcto.

3. FACETA COGNITIVA

Esta faceta contiene un análisis que contrasta la proximidad de los significados de MTC (pretendidos/implementados) y su estrecha relación con la zona del desarrollo potencial de los estudiantes, del mismo modo en que los *significados personales* entran en correspondencia con los significados pretendidos/implementados (significados institucionales).

En cuanto al aprendizaje, teniendo en cuenta que se consideran los mismos elementos que para la idoneidad epistémica (Godino, 2011), el aprendizaje se centra en la comprensión y competencia de los contenidos presentes en los indicadores de dicha dimensión.

Basados en los indicadores de Godino (2011) y el estudio realizado por Ossa & Aldana (2017), se contemplan los siguientes indicadores de idoneidad cognitiva para este estudio.

Tabla 9. Indicadores de idoneidad cognitiva. (Adaptado de Godino, 2011; Ossa & Aldana, 2017).

COMPONENTES	INDICADORES
Conocimientos previos	Deben conectarse los nuevos aprendizajes con los conocimientos previos. Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio).

	Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo. Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes.
Aprendizaje; evaluación sumativa	Se promueve la comprensión y competencia en los contenidos propuestos en la faceta epistémica (problemas, lenguaje, conceptos, procedimientos, propiedades, y argumentos). Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión y competencia). Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia meta cognitiva. La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia. Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

4. FACETA AFECTIVA

En esta dimensión se destaca la necesidad de tener en cuenta el carácter motivacional de las actividades y situaciones problemas. Para ello, se sugiere incluir situaciones desafiantes que resulten de interés para los estudiantes motivando la especulación y el trabajo intenso. En el ámbito actitudinal, se enfatiza en promover una actitud positiva hacia la materia, la perseverancia y el trabajo sistemático en la resolución de problemas, una buena disposición al trabajo de equipo y un manejo crítico de la información. Por último, en el ámbito emocional, se promueve la confianza y seguridad en las propias habilidades para resolver problemas y tareas matemáticas.

La idoneidad afectiva de un proceso de instrucción implica el cumplimiento de los indicadores presentados en la tabla siguiente.

Tabla 10. Indicadores de idoneidad afectiva. (Adaptado de Godino, 2011; Ossa & Aldana, 2017).

COMPONENTES	**INDICADORES**
Intereses y necesidades	Se tiene en cuenta el carácter motivacional de los problemas o tareas (problemas de interés para los alumnos que inviten a la especulación y al trabajo intenso). Se incentiva la valoración de la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
	Se promueven actitudes como: la curiosidad, la perseverancia y el trabajo sistemático en la resolución de problemas. Se favorece una actitud positiva hacia el trabajo en equipo.

Actitudes	Se favorece la lectura y uso crítico de la información. Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice. Promover una actitud positiva hacia la materia y hacia los conceptos por ver.
Emociones	Se debe incentivar la confianza y seguridad en sí mismo para resolver problemas y tareas matemáticas. Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

En los indicadores señalados, habría que tener en cuenta las diferencias cognitivas y afectivas de los sujetos (estudiantes), también está el hecho de que el fin con el que se aprende la materia a nivel escolar es resolver problemas de diferentes contextos de la vida cotidiana. Esta faceta nos induce al análisis sobre la implicación de los estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje durante el proceso de instrucción.

5. HECHO DIDÁCTICO SIGNIFICATIVO (HDS)

Rivas y Godino (2015) mencionan que una *configuración didáctica* es un segmento de actividad didáctica (enseñanza y aprendizaje) que se distribuye entre los momentos de inicio y finalización de una tarea o situación – problema diseñada o implementada. Incluye, por tanto, las acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar el estudio conjunto de la tarea. La situación – problema sobre la cual se delimita una configuración didáctica puede estar formada por distintas subtareas cada una de las cuales se puede considerar como una subconfiguración.

El análisis detallado de un proceso de estudio matemático requiere dividir la crónica del mismo en configuraciones y subconfiguraciones. No obstante, en el transcurso de una subconfiguración didáctica pueden ocurrir hechos didácticos que interesa analizar. En Wilhelmi, Font & Godino (2005) se define un hecho didáctico como cualquier acontecimiento que tiene un lugar y un tiempo en el devenir de los procesos de instrucción matemática y que, por alguna razón, se considera como una unidad (por ejemplo, resolver una ecuación en la pizarra). Los hechos que implican una cierta regularidad explicable en el marco de una teoría constituyen un fenómeno; pero también pueden carecer de esa regularidad en cuyo caso se tiene un fenómeno singular (dan pie a "teoremas de existencia y a contraejemplos"). A partir de las nociones anteriores Godino et al. (2014), introducen la noción de hecho didáctico significativo (HDS). Estos autores consideran que un hecho didáctico es significativo (HDS) si las acciones o prácticas didácticas que lo componen desempeñan una función, o admiten una interpretación, en términos del objetivo instruccional pretendido. La significatividad se puede entender desde el punto de vista del docente, del estudiante, o bien desde un punto de vista institucional externo al sistema didáctico, es decir, del sujeto que ha realizado el estudio preliminar y el diseño instruccional. Se pueden asimilar a fenómenos singulares ya que la interpretación se hace siempre desde una cierta teoría. Una de las teorías que permite categorizar y analizar HDS es la teoría de la idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores empíricos Godino (2011). Esta noción se define como un criterio sistémico y coherente compuesto por las dimensiones: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva e instruccional (interaccional y mediacional. Para cada una de estas dimensiones se definen componentes y criterios que resultan útiles para identificar y analizar HDS que se manifiestan en el desarrollo de una trayectoria didáctica.

En la investigación realizada por Rivas & Godino (2015) ilustran cómo identificar en la implementación de un proceso instruccional hechos y fenómenos didácticos relevantes que potencialmente pueden condicionar y explicar los aprendizajes logrados por los estudiantes. Por lo tanto nos basaremos en los HDS para comparar los aprendizajes pretendidos (significados institucionales) estudiados en la faceta epistémica-ecológica y los aprendizajes logrados por los estudiantes (significados personales) estudiados en esta faceta cognitiva-afectiva.

6. DESCRIPCIÓN DE LA TRAYECTORIA DIDÁCTICA

La trayectoria didáctica del proceso de instrucción implementado la describimos de acuerdo con las situaciones problema que a su vez realizan configuraciones didácticas referidas a cada una de las situaciones. Los estudiantes disponían de una colección de ejercicios, situaciones u actividades de iniciación, bien individuales o grupales, las cuales fueron descritas en la secuencia didáctica para luego llegar a construir los conceptos medidas de tendencia central.

Cuando se realiza la descripción de cada situación problema se tiene en cuenta: el contenido efectivamente tratado (configuración epistémica implementada). Además la descripción de cada situación problema se sistematizan los principales *hechos didácticos significativos* observados, los que son finalmente sintetizados para dar una visión de conjunto del efecto de las subconfiguraciones epistémica e instruccional sobre la progresión del aprendizaje.

Durante las descripciones utilizaremos las palabras "conflicto" y "dificultad" para referirnos a las brechas distantes entre los significados (conflicto semiótico), de igual forma para referirnos al "dominio deficiente" de una técnica o propiedad matemática.

Según Godino, Batanero & Font (2009) se caracteriza la idea de conflicto semiótico como: "Cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales" (p. 15).

6.1. Configuración didáctica mediante la Situación 1.

Para el análisis de la configuración didáctica es importante recordar la solución esperada de las situaciones para ser comparada con la solución obtenida de los estudiantes y poder analizar conflictos cognitivos que se presentaron en los estudiantes.

Situación 1. Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en Colombia es 2.2 hijos por familia.

a. Explica qué significa para ti esta frase.
b. Se han elegido 10 familias colombianas y el número medio de hijos entre las 10 familias es de 2.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo. ¿Cuántos hijos podrán tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las 10 familias sea 2.2? Justifica tu respuesta.

Adaptación realizada al Ítem 1 de Mayén, Cobo, Batanero & Balderas (2007).

6.1.1. Solución esperada para la Situación 1

Las posibles respuestas han sido analizadas en el trabajo de Mayén (2009), donde se observa que en el inciso a) de la situación 1 se pide al alumno una definición de media con sus propias palabras. Se considera correcto si la respuesta recoge la idea de media como reparto equitativo en una distribución de datos; por ejemplo, si el alumno da una respuesta del tipo: "Que el número de hijos a los que tocaría cada familia al repartir el total sería 2.2, pero esto es resultado de una operación, pues el número de hijos siempre es un valor entero", o bien, si considera el valor más probable al tomar un elemento de una población, por ejemplo: "Las familias tienen alrededor de 2 hijos, pero algunas familias tienen más o menos".

Se considera correcta las respuestas al inciso b) cuando los alumnos den una distribución de datos que, incluyendo los valores dados, resulte una media igual a 2.2. Por ejemplo: "Las otras familias tienen 2 hijos cada una, excepto una que tiene 3, porque así la media da 2.2". Es decir, el estudiante debe calcular el total de hijos de las 10 familias, multiplicando la media 2.2 por 10. Restando los 5 hijos que conjuntamente tienen las dos familias dadas quedan 17 hijos entre 8 familias. Se trataría de dar un total de 17, para lo cual hay varias posibilidades, por ejemplo, cada familia podría tener 1, y una de ellas 10 hijos.

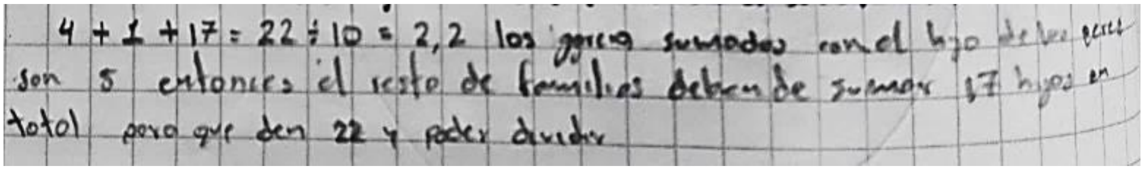
Para resolver este problema, el estudiante podría usar las diferentes definiciones de media y moda, así como de las siguientes propiedades: “La media es un valor perteneciente al rango de la variable”, “la media no tiene por qué ser uno de los valores de los datos” (ya que en este caso, la media no da un valor entero), “el cálculo de la media no es operación interna” (pues no se conserva el conjunto numérico dado inicialmente en el problema); y “la media es un representante del conjunto de datos”. Como elemento de cálculo, se requiere, para una media dada, buscar una distribución, lo que implica conocer el algoritmo de cálculo de este parámetro con un conjunto pequeño de datos aislados y saber aplicarlo a la inversa. También se podría resolver por ensayo y error, calculando la media con datos aislados. Respecto al lenguaje, el problema contiene elementos numéricos y verbales. Se pide también proporcionar un argumento.

6.1.2. Solución obtenida en la Situación 1

Al inicio los estudiantes pensaban que *media* era la mitad de algo, para el caso de un conjunto de datos con cantidad impar el valor que se ubica en la mitad se denomina mediana. El docente al observar esta dificultad en el concepto menciona a los estudiantes que en términos estadísticos media y promedio son lo mismo, lo cual los estudiantes relacionan el concepto.

Los estudiantes calculan la *media o promedio* de manera aritmética sin utilizar el símbolo formal ni la forma general utilizando sumatoria. Por lo que el docente formaliza los símbolos y la formula general con sumatoria una vez los estudiantes se hayan expuesto por un determinado tiempo a resolver la situación con sus conocimientos previos.

Al tratarse de un problema que no es aplicar el algoritmo como comúnmente se hace (sumar valores y dividirlo entre la cantidad de valores) sino que hay que buscar un valor desconocido en esa suma, la mayoría de estudiantes al principio se enfrenta con este tipo de planteamiento que promueven la inquietud en los estudiantes en busca de la solución mediante pruebas de ensayo y error. Es interesante escuchar las explicaciones de los estudiantes una vez hayan la solución, pues buscan comprobar que el algoritmo se cumple para la solución que encontraron. Un estudiante en este nivel educativo (noveno grado) no debería tener dificultades para hallar la solución.



El estudiante en referencia responde al inciso b de la siguiente manera:

“ $4 + 1 + 17 = 22 \div 10 = 2{,}2$ los García sumados con el hijo de los Pérez son 5 entonces el resto de familias deben sumar 17 en total para que den 22 y poder dividir”.

Hay estudiantes que mediante ensayo y error buscan generar los datos de las otras 8 familias (en total 10 con los García y los Pérez) para que la suma les de 22 y poder dividirlo entre 10, sin embargo no justifican la respuesta, lo cual refleja una dificultad con expresar lo que razonó de la situación, es decir, dificultades en la competencia comunicación.

6.1.3. Hechos didácticos significativos de la Situación 1

A continuación presentamos una síntesis de los principales hechos didácticos significativos observados en la implementación de la Situación 1. Estos hechos didácticos se exponen en cuanto a la faceta cognitiva, teniendo en cuenta que se puede realizar para las demás facetas. En la faceta cognitiva la síntesis se centra en la identificación de conflictos.

Facetas	*Hechos didácticos significativos*
Faceta cognitiva-afectiva (Aprendizajes; conflictos cognitivos)	Se han manifestado las siguientes dificultades en los aprendizajes: 1. Definir la media con sus propias palabras. 2. Reconocer la idea de media como reparto equitativo en una distribución de datos. 3. Identificar la suma de un conjunto de datos como el producto entre la media de ese conjunto por el número total de datos. 4. Reconocer la media aritmética como un algoritmo que se puede descomponer para hallar un valor desconocido en el conjunto de datos que genera la media. 5. Representación de fórmula de la media aritmética simple en lenguaje de símbolos matemáticos.

6.2.Configuración didáctica en la Situación 2

Situación 2. Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado es 4. ¿Te parece posible? ¿Por qué?

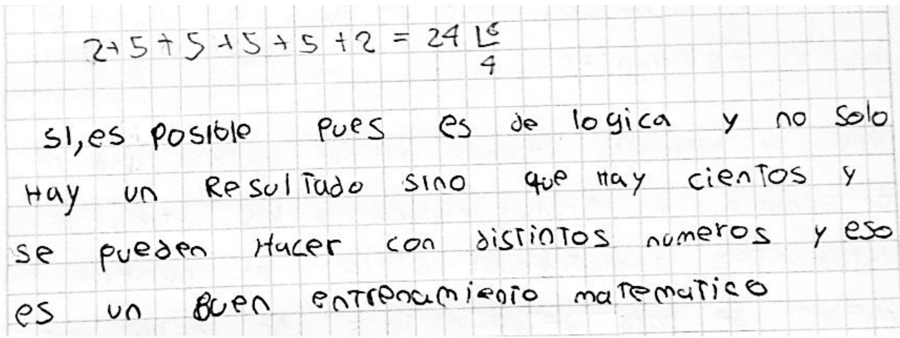
Tomado de Mayén, Cobo, Batanero & Balderas (2007).

6.2.1. Solución esperada para la Situación 2

Con esta situación tomada originalmente de Tormo (1993) citado por Mayén (2009), se pretende averiguar si los alumnos son capaces de dar una distribución de valores, conocida la media y el máximo. Como indican Mokros & Russell (1995), hasta que los niños no conciben el conjunto de datos como un todo, no podrán comprender la idea de promedio. Para resolver la situación y teniendo en cuenta que el producto de la media (4) por el número de valores (6) es igual a 24, restando el máximo 5, se obtiene 19. Por tanto, la suma de los otros 5 números ha de ser igual a 19. Una posible solución es que el resto de los valores sea igual a 4, excepto uno de ellos que tome el valor 3. Hay otras soluciones posibles a la situación 3.

En esta situación se trata de ver si los alumnos comprenden el algoritmo de cálculo de la media. También aparece el algoritmo de cálculo de la media con datos aislados. Esperamos que los alumnos muestren con un ejemplo que el enunciado es posible y den un argumento matemáticamente correcto. Esta situación se presenta en un contexto abstracto e implícitamente aparece la definición de media como algoritmo. Existe una lista de números no conocidos, lo que obliga a construir una distribución para una media dada. Los elementos de representación son verbales y numéricos. Incluye, como elementos de significado más relevantes, las propiedades de la media de "ser un valor perteneciente al rango de la variable" y "ser el centro de gravedad de la distribución".

6.2.2. Solución obtenida en la Situación 2


2+5+5+5+5+2 = 24 |6
4

si, es posible pues es de logica y no solo hay un resultado sino que hay cientos y se pueden hacer con distintos numeros y eso es un buen entrenamiento matematico

En esta situación varios estudiantes se preguntan que si pueden repetir números, y si pueden repetir específicamente el número 5, a lo que el docente contesta con la pregunta: ¿te lo restringen, te dicen en el ejercicio que no puedes?, dice que "(…) el número más grande es el 5", pero no dice que no se puede repetir en el conjunto de datos.

Hay estudiantes que generan más de un conjunto de datos de seis valores que cumplen con la condición de no ser mayores que cinco y al sumar los valores y dividirlos entre seis les da 4. Lo anterior permite observar al docente que varios estudiantes mediante esta situación están comprendiendo el algoritmo del cálculo de la media.

6.2.3. Hechos didácticos significativos de la Situación 2

A continuación presentamos una síntesis de los principales hechos didácticos significativos observados en la implementación de la Situación 2. En la faceta cognitiva la síntesis se centra en la identificación de conflictos.

Facetas	*Hechos didácticos significativos*
Faceta cognitiva-afectiva (Aprendizajes; conflictos cognitivos)	Se han manifestado las siguientes dificultades en los aprendizajes: 1. Comprender el algoritmo de cálculo de la media aritmética. 2. Concebir el conjunto de datos como un todo. 3. No tener en cuenta que el producto de la media por el número de valores es igual a la suma de los datos de la distribución.

6.3. Configuración didáctica mediante la Situación 3.

Situación 3. Kevin y Alexandra dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada fin de semana una media de 4 horas a hacer deporte.

a. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?

b. Kevin y Alexandra dedican además 1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican cada fin de semana, entre las dos actividades: hacer deporte y escuchar música?

Adaptación realizada al Ítem 2 de Mayén, Cobo, Batanero & Balderas (2007).

6.3.1. Solución esperada para la Situación 3

Esta situación es original del estudio de Watson (2000), adaptado por Cobo (2003) y citado por Mayén (2009). En el inciso a) nos permite evaluar si los estudiantes son capaces de calcular correctamente una media ponderada, un tema en que numerosos autores (Li & Shen, 1992; Carvalho, 2001; Cobo, 2003), han señalado dificultades, incluso en estudiantes universitarios.

En su solución, los estudiantes tendrán que multiplicar la cantidad de horas que dedican a hacer deporte (8 horas) los dos primeros alumnos (es decir 8×2); multiplicar la cantidad de horas que dedican a hacer deporte (4 horas) los otros 8 estudiantes (es decir 4×8); sumar los valores resultantes y obtener la media global dividiendo entre el total de datos (10) usando la siguiente expresión algebraica:

$$\overline{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

Donde "x" sería el tiempo que dedican a hacer deporte o escuchar música y "w" la frecuencia de estudiantes.

$$\bar{x} = \frac{(8 \times 2) + (4 \times 8)}{2 + 8} = \frac{16 + 32}{10} = \frac{48}{10} = 4.8$$

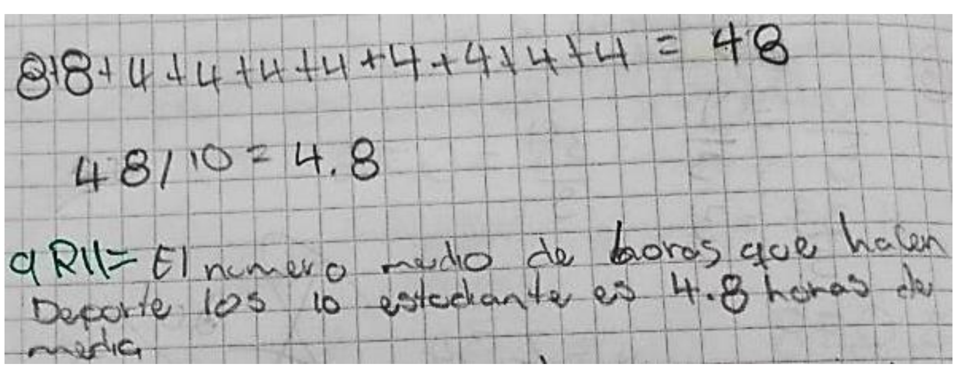
La respuesta al inciso a) ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes? Seria, los 10 estudiantes hacen deporte con un promedio de 4,8 horas cada fin de semana.

La ponderación correcta en el cálculo de la media, supone capacidad para aplicar la ley distributiva al sumar un conjunto de valores numéricos repetidos y también percibir que la media aritmética considerada como una operación no tiene la propiedad asociativa (Pollatsek, Lima & Well, 1981). Se requiere también el conocimiento de las definiciones de la media, como algoritmo y como promedio.

En inciso b) además de aplicarse de nuevo el cálculo de la media ponderada, tratamos de averiguar si los alumnos reconocen la siguiente propiedad: “la media de la suma de dos o más variables, es la suma de las medias de éstas” (Tormo, 1993). Las representaciones que el alumno debe usar para resolver el problema son verbales y numéricas.

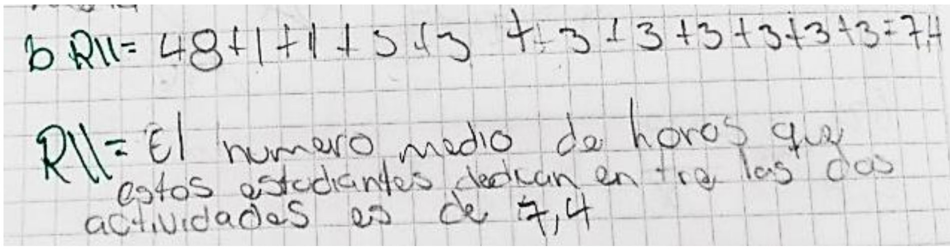
6.3.2. Solución obtenida en la Situación 3

Los estudiantes presentan dificultades para comprender los enunciados teniendo en cuenta los términos “Kevin y Alexandra dedican una media de...”, “¿cuál es el número medio de horas que…”, por lo que el docente recuerda a sus estudiantes que la palabra “media o medio” es sinónimo de “promedio” y no quiere decir que es la mitad de un dato. Una vez aclarado esto inician con la interpretación y obtienen resultados como estos:



Muchos estudiantes demoran para dar con la solución al inciso a. Se percibe la dificultad en la capacidad para aplicar la ley distributiva al sumar un conjunto de valores numéricos repetidos.

En el inciso b a la mayoría de los estudiantes se les dificulta ingresar otros datos a la distribución de valores existentes.



En el mismo estudiante se observa la dificultad de aplicar la ley distributiva al sumar repetitivamente los valores que han sido ingresados al conjunto de datos, sin embargo halla la solución correcta.

6.3.3. Hechos didácticos significativos de la Situación 3

A continuación presentamos una síntesis de los principales hechos didácticos significativos observados en la implementación de la Situación 3. Estos hechos didácticos se exponen en cuanto a la faceta cognitiva y la síntesis se centra en la identificación de conflictos.

Facetas	*Hechos didácticos significativos*
Faceta cognitiva-afectiva (Aprendizajes; conflictos cognitivos)	Se han manifestado las siguientes dificultades en los aprendizajes: 1. Relación del término “media o medio” como “promedio”. 2. Capacidad para aplicar la ley distributiva al sumar un conjunto de valores numéricos repetidos. 3. Algoritmo de la media aritmética ponderada.

6.4. Configuración didáctica mediante la Situación 4.

Situación 4. El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24.

a. ¿Cuál es el peso del niño mediano?
b. ¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg?
c. En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona la respuesta.

Tomado de Mayén, Díaz & Batanero (2009).

6.4.1. Solución esperada para la Situación 4

Con esta situación tomado originalmente de Godino (1999), quien lo utilizó en una investigación con futuros profesores y posteriormente tomado por Cobo (2003) para su trabajo, se pretende medir las competencias en el cálculo de la mediana, tanto con un número par de valores como impar.

También se quiere comprobar si los estudiantes comprenden adecuadamente el efecto de la presencia de valores atípicos sobre los valores de media y mediana. Para resolver el apartado a), habría que ordenar los datos y tomar el elemento central, aplicando directamente la definición de mediana. Supone que los alumnos comprendan que la mediana es el centro de la distribución cuando los datos están ordenados, combinando las ideas de centro y orden. A partir de los datos dados, los alumnos tendrían que producir una ordenación de los datos y determinar el valor central que sería la mediana. Al añadir un nuevo elemento en el inciso b), el número de elementos sería entonces par. Nos encontraríamos en el caso de indeterminación, pues al ordenar el conjunto de datos y buscar el valor central, encontramos dos valores. Por tanto, los dos elementos centrales del conjunto de datos cumplen la definición de mediana, pues están situados en el centro de la distribución. Para resolver la indeterminación se introduce un convenio que se enseña a los alumnos, que consiste en obtener la media de los dos valores centrales y tomar dicho valor medio como mediana del conjunto de datos. En el inciso c), se espera que los alumnos indiquen que el mejor representante es la mediana, ya que la media se vería muy afectada por el alto valor 43 que es atípico. Por el contrario, la mediana (19) no se ve afectada por los valores extremos y cumple que exactamente el 50% del grupo está por encima y debajo de este valor.

Esta situación contempla las siguientes propiedades: “el cálculo de la moda y la media intervienen todos los valores de los datos, mientras que en el de la mediana no”; “La media cambia siempre que cambia algún dato, mientras que la mediana puede no cambiar”; y “la media es menos resistente que la mediana”. Por otro lado, en cuanto a las definiciones de mediana, contiene de manera implícita, las que giran en torno a la idea de elemento central que divide a la población en dos partes iguales, y con respecto a la media, la centrada en la idea de promedio aritmético de un conjunto de valores (Cobo & Batanero, 2000). Se utilizan en esta situación representaciones verbales y simbólicas, y se espera que el alumno proporcione una argumentación.

6.4.2. Solución obtenida en la Situación 4

La preguntan con que inician los estudiantes al enfrentarse a esta situación es ¿Qué es mediano? a lo que el docente interviene al grupo para aclarar que significa mediano, y pone como ejemplo la altura de tres estudiantes del aula de clases, indicando que una vez ordenados de mayor a menor altura, el estudiante de ubicado en la mitad era el “estudiante mediano”. A muchos estudiantes este ejemplo les ayudó a abordar la pregunta sobre cuál era el peso del niño mediano.

En el inciso b cuando se ingresa otro dato a la distribución los estudiantes presentan conflictos con entender como calcular el peso del niño mediano, esto se debe a que el procedimiento que se realiza para calcular la mediana en un conjunto de datos con cantidad impar de valores es diferente para cuando el conjunto de datos tiene una cantidad par. El docente interviene cuando la mayoría de los estudiantes presentan este conflicto cognitivo, por lo que recurre al ejemplo anterior de las altura de tres estudiantes del aula de clases, ingresando otro más, pregunta, ¿cuál es la altura mediana?, se pregunta a los estudiantes cuál es su altura en metros y se ilustra en el tablero, a lo que después de un determinado tiempo un estudiante dice “se toman los valores de los dos del centro y se divide entre dos”, dando con el algoritmo para el cálculo de la mediana en un conjunto de datos con cantidad par de valores.

En el inciso c identifican que el valor “43 kg” es un dato que es alto a comparación de los otros datos de la distribución (es decir atípico) por lo que la media se vería afectada, mencionan algunos estudiantes por lo que no sería un buen representante de los datos.

6.4.3. Hechos didácticos significativos de la Situación 4

A continuación presentamos una síntesis de los principales hechos didácticos significativos observados en la implementación de la Situación 4. Estos hechos didácticos se exponen en cuanto a la faceta cognitiva y la síntesis se centra en la identificación de conflictos.

Facetas	*Hechos didácticos significativos*
Faceta cognitiva-afectiva (Aprendizajes; conflictos cognitivos)	Se han manifestado las siguientes dificultades en los aprendizajes: 1. Significado la palabra mediana. 2. Mediana como representante de un conjunto datos 3. Uso conveniente de la mediana cuando existen valores atípicos en la distribución de datos. 4. Uso del algoritmo para el cálculo de la mediana cuando el número de elementos es par. 5. Reconocer que la mediana no se ve afectada por valores extremos y es mejor representante que la media en estos casos. 6. Reconocer las propiedades de la mediana.

6.5. Configuración didáctica mediante la Situación 5.

Situación 5. El profesor David califica a sus alumnos por desempeños del siguiente modo: Bj=Bajo, Bs=Básico, A=Alto, S=Superior.

En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de estudiantes de noveno grado:

Noveno 2: Bj Bs Bs A A S S Bj Bj Bj Bs Bs Bs A S S Bj Bs Bs S S S S
Noveno 3: S S Bj Bj Bs A Bs A Bj Bj S A Bs S Bj A A
a. ¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?
b. ¿Cuál sería el promedio más apropiado para representar estos datos?

Adaptación realizada al Ítem 6 de Mayén, Cobo, Batanero & Balderas (2007).

6.5.1. Solución esperada para la Situación 5

Esta situación que es tomada originalmente de Godino (1999) citado en el trabajo de Mayén et al. (2007), se centra en la mediana y su relación con las otras medidas de tendencia central. En él se pide comparar dos grupos de datos ordinales. Puesto que los datos corresponden a una variable ordinal, que no admite el cálculo de la media, los únicos parámetros de centralización con que se pueden hallar como resumen de los datos son la mediana y la moda (Cobo & Batanero, 2000). La mediana es preferible a la moda porque tiene en cuenta el orden de los datos, mientras la moda sólo tiene en cuenta su frecuencia. Para calcularla en cada grupo, el alumno tendría que ordenar previamente los valores, como se muestra a continuación:

Noveno 2: Bj Bj Bj Bj Bj Bs Bs Bs Bs Bs Bs Bs A A A S S S S S S S S
Noveno 3: Bj Bj Bj Bj Bj Bs Bs Bs A A A A A S S S S

El primer grupo tiene 23 elementos, con lo que el alumno central, que ocupa la posición 12 tiene un “Básico” (aprobado). En el segundo grupo el valor de la mediana es “Alto”, puesto que el elemento central es el 9 (de 17 sujetos). Finalmente se deben comparar las dos medianas calculadas, hallando el mayor de ellos. El grupo correspondiente será el que tiene “mejores” notas.

Mayén et al. (2007) consideran que una dificultad de esta situación problema es el diferente número de casos en cada grupo. Podríamos también admitir como solución (aunque no tan apropiada) si los alumnos calculan y comparan correctamente las modas de los dos grupos. Consideramos parcialmente correcto si el alumno calcula y compara bien las medias de los dos grupos (asignando una puntuación numérica a cada una de las calificaciones) y da como respuesta que el mejor grupo es el primero. En consecuencia, la situación contempla los algoritmos de cálculo de media, mediana y moda con datos aislados. En cuanto a las propiedades, esta situación contiene las siguientes: numérica, "Para el cálculo de la mediana no se tienen en cuenta todos los valores de los datos, sólo su posición una vez ordenados"; algebraica: "La mediana y la moda existen para variables ordinales, mientras que la media no existe en este caso"; y estadísticas: "Los promedios son representantes de un colectivo" y "Existe moda y mediana en variables cualitativas ordinales". Incluye representaciones de tipo verbal y simbólico, y también se espera que el alumno proporcione una argumentación.

6.5.2. Solución obtenida en la Situación 5

Cuando el docente propone esta situación está interesado en saber cómo los estudiantes darán solución a este planteamiento teniendo en cuenta que los dos grupos de datos tienen cantidades diferentes y son variables cualitativas y no cuantitativas como vienen acostumbrados los estudiantes.

Cuando inicia su implementación los estudiantes empiezan a comparar las dos distribuciones de datos, unos observan la mayor cantidad de notas "buenas" que tienen los diferentes grupos como si estuvieran buscan la moda de cada distribución sin darse cuenta de ello, pero una gran mayoría ven la necesidad de convertir las letras a números dándole un valor. Anteriormente se calificaba con valores cuantitativos por lo que hubo la necesidad de crear la siguiente escala para facilitar el tránsito de calificación cuantitativa a calificación cualitativa:

Calificación Cuantitativa (anterior)	Calificación Cualitativa (actual)
0,0 – 2,9	Bajo (Bj)
3,0 – 3,9	Básico (Bs)
4,0 – 4,5	Alto (A)
4,6 – 5,0	Superior (S)

Los estudiantes realizaron la conversión de notas de calificación cualitativa (actual) al sistema de calificación antiguo que era cuantitativo, para querer buscar un promedio de cada distribución y luego comparar los dos promedios para saber cuál de los dos grupos tenía mejores notas.

Es interesante saber prever en la faceta epistémica que estas posibles soluciones son válidas, tanto la comparación de las dos distribuciones de datos a través de la moda o a través de la media, sin embargo pocos lograron relacionar una solución que involucrara la mediana como representante de cada grupo de datos.

6.5.3. Hechos didácticos significativos de la Situación 5

A continuación presentamos una síntesis de los principales hechos didácticos significativos observados en la implementación de la Situación 5. Estos hechos didácticos se exponen en cuanto a la faceta cognitiva y se centra en la identificación de conflictos.

Facetas	*Hechos didácticos significativos*
Faceta cognitiva-afectiva (Aprendizajes; conflictos cognitivos)	Se han manifestado las siguientes dificultades en los aprendizajes: 1. Reconocer la mediana como un representante de dos distribuciones para su comparación. 2. Inconvenientes de uso de la media para distribuciones de datos con variable cualitativa. 3. Determinar qué valor del intervalo de la calificación cuantitativa representa mejor la calificación cualitativa.

6.6.Configuración didáctica mediante la Situación 6.

Situación 6. Nueve estudiantes han pesado un celular en el laboratorio de ciencias. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestra a continuación: 104.2, 104.3, 104.0, 104.2, 104.2, 104.1, 104.5, 104.2, 104.1, 104.2. Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del celular. ¿Qué harías para calcularlo?

Adaptación realizada al Ítem 8 de Mayén, Cobo, Batanero & Balderas (2007).

6.6.1. Solución esperada para la Situación 6

Esta situación tomado originalmente de Garfield & Konold (1992) adaptada por Mayén et al. (2007) requiere el cálculo de la media en una variable discreta con datos aislados y hacer uso de la media como estimación de una cantidad desconocida a partir de diversas mediciones en presencia de errores, En esta situación, la media es la respuesta correcta, aunque se espera que los alumnos puedan optar por la mediana o la moda. De esta manera, esta situación incluye definiciones, algoritmos de cálculo y procedimientos relativos a las tres medidas para el caso de una variable discreta con datos aislados. Las representaciones son numéricas y verbales. Contiene también algunas propiedades: "La media y la mediana puede no coincidir con ningún valor de los datos, mientras que la moda siempre es uno de ellos", "la media cambia al cambiar algún dato", "el cálculo de la moda, desde el punto de vista algebraico, es una operación interna, mientras que el de la media y la mediana no lo es", "los tres promedios, media, mediana y moda, son representantes de un colectivo" y "la suma de las desviaciones de un conjunto respecto a su media es cero".

6.6.2. Solución obtenida en la Situación 6

En la mayoría de estudiantes se observa que buscan en la distribución de los datos el valor que más se repite al obtener el peso de los celulares por distintos estudiantes, de manera que si se repite más un valor es porque ese es el correcto y los otros valores de medición que están por encima o por debajo por poca cantidad sean tomados como errores en el momento del peso del celular.

Algunos pocos tratan de buscar la media de la distribución de los datos y usarla como representante de ese conjunto de valores.

6.6.3. Hechos didácticos significativos de la Situación 6

A continuación presentamos una síntesis de los principales hechos didácticos significativos observados en la implementación de la Situación 6. Estos hechos didácticos se exponen en cuanto a la faceta cognitiva y se centra en la identificación de conflictos.

Facetas	*Hechos didácticos significativos*
Faceta cognitiva-afectiva (Aprendizajes; conflictos cognitivos)	Se han manifestado las siguientes dificultades en los aprendizajes: 1. Hacer uso de la media como estimación de una cantidad desconocida a partir de diversas mediciones en presencia de errores. 2. Uso de la mediana como valor representativo de la distribución de datos. 3. Relacionar las diferentes propiedades existentes en esta situación.

7. ANÁLISIS COGNITIVO-AFECTIVO

En la perspectiva del EOS, el aprendizaje es entendido como la correspondencia entre los significados personales y los significados institucionales (Godino & Batanero, 1994). En el transcurso del aprendizaje suelen producirse disparidades entre los significados atribuidos a una expresión por el sujeto que aprende y los significados institucionalmente pretendidos, lo que se designa como conflicto semiótico de tipo cognitivo (Godino, et al., 2007).

El estudio de investigaciones relacionadas con este estudio ponen de manifiesto importantes resultados sobre conflictos que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las MTC. Batanero & Godino (2002) mencionan algunos de los más frecuentes son: · Moda: Tomar la mayor frecuencia absoluta, en lugar del valor de la variable. · Mediana: No ordenar los datos para calcular la mediana; calcular el dato central de las frecuencias absolutas ordenadas de forma creciente; calcular la moda en vez de la mediana; equivocarse al calcular el valor central. · Media: Hallar la media de los valores de las frecuencias; no tener en cuenta la frecuencia absoluta de cada valor en el cálculo de la media. En otros casos el cálculo se hace correctamente, pero no se entiende el algoritmo de cálculo. Esto se puede comprobar si le pides a un alumno que te diga 10 números diferentes cuya media sea igual a cuatro o bien que te dé el número que falta entre 5 sabiendo que la suma de los cuatro primeros es 23 y la media es igual a 5. Muchos no sabrán cómo hacerlo o lo harán con dificultad.

En el punto de vista afectivo, las investigaciones revisadas dan cuenta de elementos que afectan la sensibilidad de los estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de los alumnos en relación con los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido; la inseguridad respecto al dominio de contenidos estadísticos, la percepción de la estadística como una disciplina formal y difícil de aprender, y, la escasa valoración de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) como herramientas que pueden enriquecer las oportunidades de aprendizaje, son algunos elementos que se reflejan en estudios de la literatura reciente (Estrada & Batanero, 2008; Chick & Pierce, 2008; Sedlmeier & Wassner, 2008). Estas "actitudes" hacia la estadística requieren ser subsanadas a través de procesos de estudio que conecten los contenidos estadísticos con las necesidades e intereses de los estudiantes, teniendo en cuenta sus conocimientos y falencias, y atendiendo a las diferencias individuales inherentes a cualquier grupo de personas.

8. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

El capítulo presente nos permitió constatar que el marco teórico "Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la Instrucción Matemática" (EOS) aporta herramientas importantes para el análisis de procesos de cognitivo y afectivos de los estudiantes. En este sentido, en la fase de implementación las nociones de configuración, subconfiguración, trayectoria didáctica y de hecho didáctico significativo nos han permitido, delimitar y conocer a fondo la forma del proceso de estudio y además realizar una descripción y un análisis detallado de los contenidos propuestos, los factores de interacción y los conflictos que se pudieron dar a lo largo del proceso de formación.

CAPITULO 5

VALORACIÓN DE LAS IDONEIDADES DIDÁCTICAS

1. INTRODUCCION

En el capítulo describimos y analizamos la implementación del proceso de instrucción empleado y el análisis retrospectivo de cada faceta que conforma la idoneidad didáctica propuesta por Godino (2011). El análisis retrospectivo se completa con algunas reflexiones sobre las diferentes dimensiones y con una valoración global de la *idoneidad didáctica* del proceso de estudio implementado.

2. ANÁLISIS RETROSPECTIVO DE INDICADORES DE IDONEIDAD DIDÁCTICA

El análisis retrospectivo contempla una comparación del análisis realizado sobre las prácticas, objetos y procesos implicados en las situaciones problemas con los hechos didácticos observados en la implementación, una reflexión sobre el proceso instruccional, el análisis de los resultados de aprendizaje (evaluaciones) y una valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio en su globalidad.

Se realiza la valoración de los indicadores de idoneidad didáctica en la faceta epistémica teniendo en cuenta la configuración realizada y lo desarrollado en su implementación.

Tabla 11. Valoración de indicadores epistémicos. (Adaptado de Godino, 2011; Ossa & Aldana, 2017).

COMPONENTES:	EVIDENCIA DE INDICADORES:
Situaciones-problemas	Se presenta a los estudiantes seis (6) situaciones de generación de problemas (problematización) adaptadas al contexto social donde se desarrollan estos conceptos que exige al estudiante un análisis de la situación planteada y la búsqueda de una solución que implique apoyarse en los conceptos de medidas de tendencia central para acercarse a una repuesta fundamentada matemáticamente.

Lenguajes	Para identificar el uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismos en la construcción del concepto de medidas de tendencia central, se realiza el análisis de los diferentes textos disponibles en la biblioteca de la institución educativa como el “Módulo de Secundaria Activa” de noveno grado del MEN, “Los Caminos del Saber” Matemáticas 9 de Santillana y “Hipertexto” Matemáticas 9 de Santillana. Se evidencia en estos textos una expresión matemática simbólica del concepto de medidas de tendencia central, una expresión escrita y gráfica. Se revisa literatura matemática relacionada con los conceptos de medidas de tendencia central de diferentes niveles, sin embargo se escogen los textos mencionados con anterioridad por el nivel del lenguaje adecuado a los estudiantes de grado noveno. En la solución de las situaciones problemas, el docente propone a sus estudiantes expresar matemáticamente la situación y su interpretación matemática.
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Las definiciones y procedimientos para dar solución a las situaciones problemas son claros y correctos en el punto de vista matemático, y están adaptados a la educación básica secundaria. Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales para obtener la media, moda y mediana para el grado noveno. En las situaciones problemas propuestas los estudiantes tienen que generar definiciones personales de las medidas de tendencia central para luego ser contrastada con la definición formal, generar proposiciones de los conceptos y realizar procedimientos para la solución de las situaciones de problematización.

Argumentos	Las explicaciones del concepto matemático de las medidas de tendencia central y las comprobaciones de los textos analizados y las situaciones problemas implementadas son adecuadas para estudiantes de grado noveno en la educación básica secundaria. En las situaciones problemas propuestas se promueve que el estudiante tenga que argumentar. Sin embargo algunos estudiantes tienen dificultades en argumentar sus respuestas a las situaciones problemas.
Relaciones	Los problemas de media, moda y mediana se relacionan entre sí cuando le es solicitado al estudiante que identifique que medida de tendencia central representa mejor los datos suministrados, los estudiantes logran tener claro las definiciones de media, moda y mediana y establecer como se relacionan entre sí. Se identifican y articulan los diversos significados de media, moda y mediana que intervienen en las prácticas matemáticas. Como por ejemplo lograr identificar que a la media se le conoce también como promedio, que la moda es un dato que se repite con mayor frecuencia en el conjunto de datos de la información suministrada en la situación problema, y que la mediana de esos datos es ordenar un conjunto de valores numéricos y ubicar el valor que se encuentra a igual distancia de los valores extremos y dentro del intervalo de valores. Algunos estudiantes no logran establecer relaciones diferentes a la media como promedio de un conjunto de datos.

Para la valoración de esta idoneidad se tiene en cuenta todos los fundamentos en el currículo de matemáticas para la educación básica secundaria impartidas por el MEN, se seleccionan las situaciones problemas de acuerdo con nivel de los estudiantes a quienes se les propone. Por ende, la **valoración de idoneidad epistémica es alta**.

Tabla 12. Valoración de indicadores ecológicos. (Adaptado de Rivas, 2014; Ossa & Aldana, 2017).

COMPONENTES:	EVIDENCIA DE INDICADORES:
Adaptación al currículo	- En los derechos básicos de aprendizaje (DBA) del MEN, se articulan aprendizajes estructurantes relacionados con MTC en educación básica secundaria desde el grado sexto hasta once, en el cual establece específicamente para grado noveno se requiere que los estudiantes proponga un diseño estadístico adecuado para resolver una pregunta que indaga por la comparación sobre las distribuciones de dos grupos de datos, sin haber estructurado los aprendizajes de los anteriores cursos. Por lo anterior el autor de este estudio decide crear una secuencia didáctica que permite recoger varios aprendizajes de cursos anteriores para establecer bases estadísticas en los estudiantes. - La realidad vivida en la institución y como en otras instituciones es que estos conceptos son dejados para los últimos procesos de instrucción matemática. El proceso de evaluación del aprendizaje en este estudio se ajusta a lo establecido por el MEN y por el Proyecto Institucional Educativo.

Apertura hacia la innovación didáctica	- **Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva** La institución educativa donde se realizó esta investigación tiene la intencionalidad de formar a los profesores en Maestrías en Didáctica de diversos campos del conocimiento para fortalecer los procesos pedagógicos y didácticos en aras de buscar una mejor formación para los jóvenes que educa y generar resultados que se puedan evidenciar en las pruebas evaluativas internas y externas. Estos profesores de Maestrías realizan sus investigaciones en la institución buscando fortalecer la práctica pedagógica haciendo uso de la didáctica específica de las áreas. Luego de que el docente realice su investigación la comparte en la comunidad educativa y se vincula a la formación de otros docentes especialmente de educación inicial y básica primaria en la didáctica de ciertos aprendizajes que se encuentran en bajo rendimiento ante las pruebas externas los estudiantes. Específicamente en Matemáticas la institución cuenta con dos docentes en formación en Didáctica de las Matemáticas que realizan su investigación, en el caso de este trabajo, en el desarrollo del pensamiento aleatorio y mediante espacios de formación docente comparte esta investigación e incentiva a los demás docentes a reflexionar sobre su práctica pedagógica, realizando acompañamiento a los docentes de educación inicial y básica primaria a buscar estrategias pedagógicas y didácticas que permitan abordar ciertos aprendizajes en matemáticas donde los estudiantes presentan mayores dificultades. En los planes de formación docente del área de matemáticas hemos creado un equipo de trabajo capaz de ser consciente sobre las dificultades que presentan los estudiantes y que debemos mejorar esos aprendizajes. Utilizando diversos enfoques propios de las Didácticas de las Matemáticas que nos ayuden a resolver las situaciones que se nos presentan en el desarrollo de ciertos pensamientos matemáticos. - En esta investigación se integran de nuevas tecnologías como lo es el ordenador mediante software educativo.

Adaptación socio-profesional y cultural	- Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes
Educación en valores	- Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.
Conexiones intra e interdisciplinares	- Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.

En la valoración de esta idoneidad a pesar de contar con un buen indicador de apertura hacia la innovación en el lugar donde se desarrolló esta investigación, tenemos en cuenta que en la adaptación al currículo por tratar de cubrir aprendizajes que no fueron abordados en los cursos anteriores a grado noveno, se realiza comparaciones entre dos distribuciones haciendo uso de la media, moda y media, sin embargo por limitaciones en el tiempo establecido en el currículo de matemáticas, no se introduce la creación de diagramas con caja y bigote establecido en el DBA relacionado con las MTC en noveno grado. Por lo anterior se realiza una **valoración de idoneidad ecológica media**.

Tabla 13. Valoración indicadores interaccionales. (Adaptado de Godino, 2011; Ossa & Aldana, 2017).

COMPONENTES	INDICADORES
Interacción docente-discente	El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.). Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento.

	Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase.
Interacción entre discentes	Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. Pocas veces tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos. Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos).
Evaluación formativa	Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos

Por la valoración anterior de los indicadores de idoneidad interaccional, se percibe que aunque hay muchos indicadores con buenos resultados, pocas veces los estudiantes tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos. Por lo tanto la valoración reflexionada sobre la **idoneidad interaccional es media.**

Tabla 14. Valoración indicadores mediacionales (Adaptado de Godino, 2011; Ossa & Aldana, 2017).

COMPONENTES	INDICADORES
Recursos materiales (tangibles, textuales, digitales, …)	Se usan recursos informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido. Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	El número y la distribución de los alumnos permiten llevar a cabo la enseñanza pretendida. El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo de enseñanza y aprendizaje (colectiva e individual)	El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema. Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

Por la valoración de los indicadores de idoneidad mediacional se tiene en cuenta que se cumple en su mayoría con todos los indicadores, por lo tanto se da una **valoración de idoneidad mediacional alta**.

Tabla 15. Valoración de indicadores cognitivos (Adaptado de Godino, 2011; Ossa & Aldana, 2017).

COMPONENTES	**INDICADORES**
Conocimientos previos	Se conectan los nuevos aprendizajes con los conocimientos previos retomando aquellos aprendizajes que los estudiantes no hayan alcanzado. Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	Se proponen adaptaciones razonables y apropiadas considerando las diferencias individuales. Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.
Aprendizaje; evaluación sumativa	Se promueve la comprensión y competencia en los contenidos propuestos en la faceta epistémica (problemas, lenguaje, conceptos, procedimientos, propiedades, y argumentos). Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión y competencia).

Una alta idoneidad cognitiva supone el cumplimiento de los indicadores propuestos en la tabla anterior. En el componente aprendizaje, se consideran los mismos conocimientos, comprensiones y competencias incluidas en los indicadores de la faceta epistémica, sin embargo a pesar de que se implementan situaciones que involucran la comparación de dos distribuciones a través de la media, moda y mediana, teniendo en cuenta los DBA de grado noveno, no se logra implementar los diagramas de caja y bigote. Por lo anterior se reflexiona en una **valoración de idoneidad cognitiva media.**

Tabla 16. Valoración de indicadores afectivos (Adaptado de Godino, 2011; Ossa & Aldana, 2017).

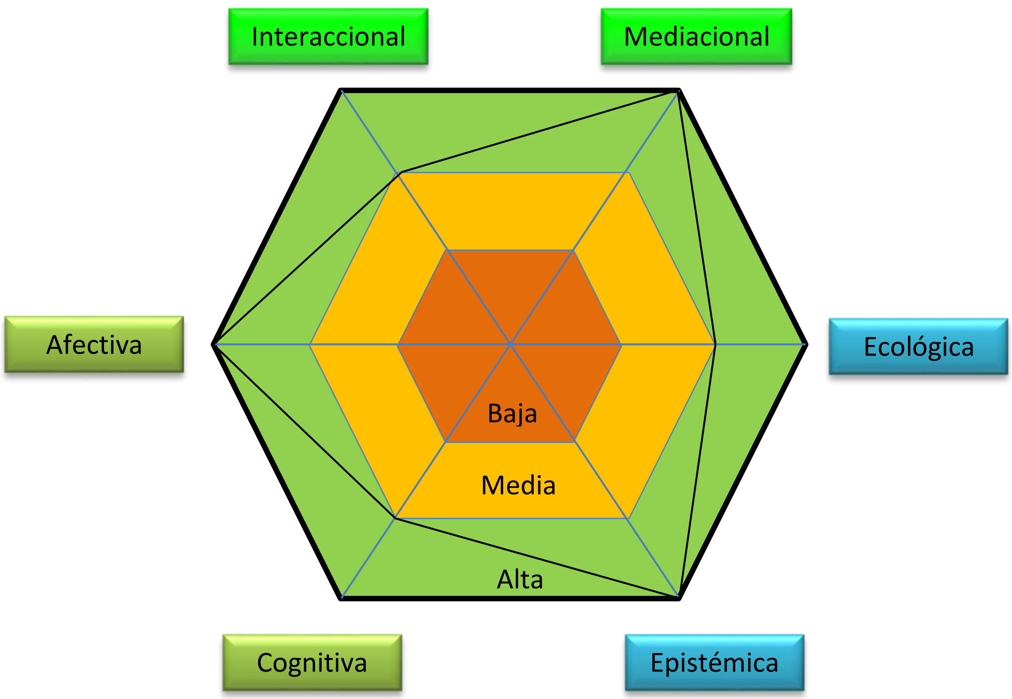
COMPONENTES	**INDICADORES**
Intereses y necesidades	Las actividades y situaciones problemas relacionado con las MTC tienen interés para los alumnos. Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las MTC y las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

Esta valoración de indicadores de idoneidad afectiva logra dar cuenta de una **valoración de idoneidad alta** en esta faceta.

3. CONCLUSIONES DEL CAPITULO

Realizando una integración de todas las idoneidades y sus indicadores, se toma como referencia un diagrama que ilustra Godino (2011) en la idoneidad didáctica, por lo que se toma la iniciativa de adaptar ese diagrama e ilustrar a continuación una síntesis de la idoneidad didáctica obtenida para el aprendizaje de las medidas de tendencia central en estudiantes de educación básica secundaria:

IDONEIDAD DIDÁCTICA



CAPITULO 6

CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo que se presenta a continuación se encuentra las síntesis y las principales conclusiones del estudio realizado. De igual forma, presentamos la síntesis y conclusiones en relación a los objetivos e hipótesis de la investigación desarrollados en cada estudio; también, se describe las principales aportaciones y limitaciones, se presenta algunas líneas de investigación que podrían dar continuidad a este trabajo; y finalmente, incluimos las publicaciones y participación en eventos nacionales e internacionales que fueron derivados de este trabajo de grado para obtener el título de Magister en Enseñanza de las Matemáticas.

2. CONCLUSIONES

De acuerdo con el propósito general de esta investigación *"configurar una idoneidad didáctica para el aprendizaje de las medidas de tendencia central en estudiantes de grado noveno de Educación Básica, mediante el Enfoque Ontosemiótico de la instrucción matemática (EOS)"* nos hemos planteado cuatro objetivos específicos, que debemos retomar a continuación para indicar las principales conclusiones obtenidas en cada uno de ellos.

- ✓ ***Objetivo específico** 1: Establecer una configuración epistémica – ecológica a través de un estudio preliminar de análisis de texto que indique el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia de las MTC, así como el grado en que el proceso de estudio se ajusta al Proyecto Educativo de la Institución Educativa Hugo Ángel Jaramillo (IEHAJ), a través de los condicionamientos del entorno social y cultural en que se desarrolla.*

Este objetivo se relacionó con la primera fase de esta investigación denominado "*estudio preliminar",* donde las dimensiones y componentes de la idoneidad didáctica han orientado el análisis de la literatura, y a la vez nos han permitido delimitar e interpretar dichos resultados para la posterior etapa de diseño de trayectorias didácticas. En la dimensión epistémica, la noción de significado nos da pie para una orientación más específica de la epistemología del contenido del aprendizaje que hemos propuesto en esta investigación y así como establecer si el currículo establecido en la institución educativa se adapta al currículo sugerido por el MEN.

- ✓ ***Objetivo específico 2:*** *Generar una configuración interaccional – mediacional mediante el diseño de trayectorias didácticas para resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción, y el grado de disponibilidad/adecuación, por medio de los recursos materiales necesarios para el desarrollo del proceso de aprendizaje de las MTC.*

Este objetivo se relacionó con lo propuesto en la segunda fase "*diseño de la trayectoria didáctica",* una vez se seleccionaron los problemas que se vieron representados las seis situaciones problemas, hizo prever de manera organizada las soluciones esperadas, las principales prácticas, objetos y procesos matemáticos que se establecen en una secuencia didáctica para facilitar el proceso de instrucción, identificando posibles conflictos de aprendizaje y los elementos a tener en cuenta en los procesos de institucionalización y evaluación.

- ✓ ***Objetivo específico 3:*** *Implementar una configuración cognitiva – afectiva que permita expresar la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos de los estudiantes en el proceso de estudio de las MTC, mediante el grado de implicación (interés, motivación, disposición) que ellos tienen en el proceso de aprendizaje.*

Este objetivo se relacionó con la fase de *implementación,* las nociones de configuración, subconfiguración, trayectoria didáctica y de hecho didáctico significativo nos permitió delimitar y sintetizar el proceso de estudio y realizar una descripción y análisis detallado de los contenidos puestos en juego en la secuencia didáctica construida en la fase anterior.

- ✓ ***Objetivo específico 4:*** *Construir una valoración de las idoneidades que permita visualizar una integración de las idoneidades epistémica, ecológica, interaccional, mediacional, cognitiva y afectiva, logrando una aproximación a una idoneidad didáctica para el aprendizaje de las MTC bajo el Enfoque Ontosemiótico.*

Finalmente este objetivo se desarrolló con la fase de *valoración de las idoneidades o análisis retrospectivo,* en donde se realiza una evaluación de cada idoneidad y sus indicadores para establecer si su valoración de idoneidad didáctica es baja, media o alta.

3. APORTES Y LIMITACIONES

Esta investigación aporta a la comunidad matemática una propuesta de planeación, experimentación y valoración de un proceso de instrucción matemática a través de indicadores de idoneidad didáctica basadas en Godino (2011). Es posible valorar procesos de instrucción matemática tanto para la implementación de secuencias didáctica como en el caso de este estudio, como para unidades didácticas, recursos didácticos, entre otros.

Si observamos como en la valoración de las idoneidades se fue evaluando cada indicador con lo desarrollado en la investigación, logra dar claridad sobre el proceso de valoración de una propuesta didáctica en cuanto a su idoneidad didáctica vista desde diferentes componentes como lo son la epistémica, ecológica, interaccional, mediacional, cognitiva y afectiva.

Otro aporte de esta investigación es haber relacionado el desarrollo de cada faceta de idoneidad con las fases del proceso de estudia y a su vez integrados a una investigación de diseño con sus fases de planeación, experimentación y análisis retrospectivo.

Sin embargo, existe una limitación de esta investigación y consiste en haber analizado un único objeto de estudio en un contexto educativo específico, caracterizado por unas limitaciones de tiempo en el currículo de matemáticas en esta institución educativa en particular, debido a que en los referentes nacionales del MEN se evidencia que los aprendizajes evaluados en las pruebas saber tiene componente aleatorio con igual cantidad de preguntas como el componente numérico variacional y el componente espacial métrico.

4. FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Diseñar e implementar instrumentos de valoración de la idoneidad didáctica es un tema que ha venido trabajando de manera muy constante (Godino, 2011; Godino, Arteaga, & Rivas, 2014; Godino, Rivas & Arteaga, 2012; Godino, Batanero, Rivas & Arteaga, 2013; Rivas, Godino, & Arteaga, 2012) lo que hace que sea una línea de investigación abierta que abre posibilidades a la realización de nuevos estudios, teniendo en cuenta varios aspectos: por una parte se hace necesario la mejora progresiva de los instrumentos ya existentes y por otra, elaborar guías para la valoración de la idoneidad didáctica para diferentes áreas de la matemática y diferentes niveles educativos y con poblaciones variadas. La metodología que se ha aplicado en este estudio puede resultar útil para la realización de diversos estudios.

5. PUBLICACIONES Y PARTICIPACIONES EN EVENTOS

5.1. PUBLICACIONES

Grisales, J.D. & Aldana, E. (2017). *Configuracion epistémica para el aprendizaje de las medidas de tendencia central*. Memorias XXI Congreso Colombiano de Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia. Bogota D.C.

Grisales, J.D. & Aldana, E. (2018). *Idoneidad didáctica para el aprendizaje de las medidas de tendencia central en estudiantes de educación básica secundaria mediante el Enfoque Ontosemiótico*. Revista ALME 31. México.

5.2. PARTICIPACIONES EN EVENTOS

- *Encuentro Regional del Sistema Universitario del Eje Cafetero (SUEJE)*

  Grisales, J.D. & Aldana, E. (2018). *Idoneidad didáctica para el aprendizaje de las medidas de tendencia central en estudiantes de educación básica secundaria mediante el Enfoque Ontosemiótico*. Universidad Tecnológica de Pereira.
- S*emana de la matemática en la Universidad del Quindío*. Cursillo, Octubre de 2017.
- Grisales, J.D. & Aldana Bermúdez, E. (31 de Julio - 1,2,3 y 4 de Agosto de 2017). *Idoneidad didáctica para el aprendizaje de las medidas de tendencia central*. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa RELME 31. Lima, Perú.

REFERENCIAS

Alsina, À., y Domingo, M. (2010). Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 13(1), 7-32.

Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique: un essai de synthèse. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), En amont et en aval des ingénieries didactiques (pp. 225-237). Grenoble: La penséesauvage.

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. UNO, 2000,25, 41-58.

Castro, D. y Zabala, J. (2014) Educación Matemática: Un caso Descriptivo en la Enseñanza del Pensamiento Aleatorio. Colombia. Ed: Caza de Libros ISBN: 978-958-8822-51-8 v. pags.

Fernández Fernández, Santiago; Alejandro Córdoba, José María Cordero Sánchez, Alejandro Córdoba (2002). «3.3. Medidas de posición». Estadística Descriptiva (2ª edición). ESIC Editorial. p. 134. ISBN 8473563069.

Godino, J. D, Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT*, 8, (1), 46-74
.

Godino, J. D. (2013) Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, (11), 111-132.

Godino, J. D., Rivas, H. y Arteaga, P. (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Praxis Educativa*, 7 (2), 331-354.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm.

Godino, J.D. Batanero, C y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education, ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* Volumen XXVII, Nº 2, 221-252.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. and Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education,* 4.2, 1–26.

Mateus, Eduar (2012). Estudio cualitativo sobre la enseñanza de las medidas de tendencia central usando una estrategia didáctica basada en e-learning, en grado décimo de educación secundaria en la Institución Educativa Luis Eduardo Calvo Cano. En Obando, Gilberto (Ed.), Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 1079-1084). Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

Mayén, S., Batanero, C. y Díaz, C. (2009). Student´s semiotic conflicts in the concept of median. Statistics Education Research Journal, 8 (2), 74-93. http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ8(2)_Mayen.pdf

Mayén, S., Batanero, C., Díaz, C. y Cobo, B. (En prensa). Significado de las medidas de posición central para estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato. Enseñanza de las Ciencias.

Mayén, S., Cobo, B., Batanero, C. y Balderas, P. (2007). Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato. Unión, 9,187-201.

MEN. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar! Consultado en enero de 2017 en: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

MEN. Lineamientos curriculares en Matemáticas. Santa Fe de Bogotá, D.C., 7 de junio de 1998. Consultado en enero de 2017 en: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

MEN. Derechos Básicos de Aprendizaje. Consultado en enero de 2017 en: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

MEN. Pensamiento Estadístico y Tecnologías Computacionales. Proyecto "*Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia*". 2004.

MEN. Informe por Colegio. Pruebas Saber Institución Educativa Hugo Ángel Jaramillo (IEHAJ). 2015.

Parra, F. J. y Ávila, R. (2015). Hacia una idoneidad didáctica en una clase de física. *Latin-American Journal of Physics Education*, 9, S, 2015, (S1205) 1 – 7.

Ramos, A. B y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – RELIME*, 11 (2), 233-265.

Rius Díaz, Francisca (octubre de 1997). «2.3.2 La media». Bioestadística. Métodos y aplicaciones. Málaga: Universidad de Málaga. ISBN 84-7496-653-1. Consultado el 7 de abril de 2009.

Rius Díaz, Francisca. «2.3.4 La mediana». Bioestadística. Métodos y aplicaciones.

Rius Díaz, Francisca. «2.3.6 La moda». Bioestadística. Métodos y aplicaciones.

Robles, M. G., Tellechea, E. y Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática*, 26(2), 69-109.

Santos, María José (abril de 2009). «Retrato robot del alcalde metropolitano». El Correo de Andalucía. Consultado el 7 de abril de 2009.

Sayritupac, J. (2013). Significados de las medidas de tendencia central. Un estudio con alumnos universitarios de carreras de humanidades. Tesis de maestría en enseñanza de las matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Serret Moreno-Gil, Jaime (1998). Procedimientos estadísticos. ESIC. p. 75. ISBN 8473561716. Consultado el 17 de abril de 2009.

Wackerly, Dennis D; Mendenhall, William; Scheaffer, Richard L. (2002). «1.3. Descripción de un conjunto de mediciones: métodos numéricos». Estadística matemática con aplicaciones (6ª edición). Cengage Learning Editores. p. 8. ISBN 9706861947. «La medida central que más se usa en estadística es la media aritmética».

Wackerly, Dennis D; Mendenhall, William; Scheaffer, Richard L. (2002). «1.3. Descripción de un conjunto de mediciones: métodos numéricos». Estadística matemática con aplicaciones (6ª edición). Cengage Learning Editores. p. 8. ISBN 9706861947. «Dos conjuntos de mediciones podrían tener distribuciones de frecuencias muy distintas, pero con la misma media».

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (1999). The developments of concepts of average. Focus on Learning Problems in Mathematics. 21(4), 15-39.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. Mathematical Thinking and Learning. 2(1&2), 11-50.

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. UNO, 2000,25, 41-58.

Batanero, C. y Godino, J.D. (2002). Estocástica y su didáctica para maestros. Proyecto Edut-maestros. ISBN: 84-932510-0-3. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6_Estocastica.pdf

Cai, J. y Gorowara, C. (2002). Teachers' conceptions and constructions of pedagogical representations in teaching arithmetic average. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*, Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Disponible en, www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications

Carretero, Mario. (2009). Constructivismo y Educación. Buenos Aires: Editorial Paidós. ISBN 978-950-12-1518-2.

Castro, D. y Zabala, J. (2014) Educación Matemática: Un caso Descriptivo en la Enseñanza del Pensamiento Aleatorio. Colombia. ed: Caza de Libros ISBN: 978-958-8822-51-8 v. pags.

Chamorro, C. (1992). El aprendizaje significativo en el área de las matemáticas. España.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32* (1), 9-13.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A.E. Kelly, R.A. Lesh, & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19* (2), 221-266.

Díaz C., Batanero C., Wilhelmi M. R. (2008). Errores frecuentes en el análisis de datos en Educación y Psicología. *Publicaciones, 38,* 9-23.

Espinel, C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Investigación en Educación Matemática, 11,* 99-119.

Espinel, C., Bruno, A. y Plasencia, I. (2008). Statistical graphs in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Font, V. y Godino, J.D. (2006). Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 8, n. 1, pp. 67-98.

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 27* (2), 2-7.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82,* 97-124.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70* (1), 1-25.

Gal, I., Ginsburg, L. y Garfield, J. B. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En: I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37-51). Voorburg: IOS Press.

Garfield, J. B. y Ben-Zvi, D. (2008). Preparing school teachers to develop students' statistical reasoning. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Giambalvo, O. y Gattuso, L. (2008). Teachers training in a realistic context. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-6-2. Disponible en: https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22* (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J. D., (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Conferencia presentada en la *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J.

García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49-68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D., (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del onocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas, Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/eos/sintesis_EOS_14abril14.pdf

Godino, J. D., Arteaga, P., Estepa, A. y Rivas, H. (2013). Desafíos de la enseñanza de la estadística basada en proyectos (Ed.), *Actas de las 1ª Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, Vol. 2 (pp. 173-180). Granada, España: Universidad de Granada.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14* (3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., Cid, E., Font, V., Ruiz, F. y Roa, R. (2004). *Matemáticas para maestros.* Granada:Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino/

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A. Lacasta, E. y Wilhelmi, M.R. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. *CERME 8*, Turquía. Disponible en, http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG16/WG16_Godino.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en,
http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga. P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 8* (1), 46-74.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27* (2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 26* (1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*, Vol. 38: 25-49.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27* (1), *59-76.*

Godino, J. D., Rivas, H. y Arteaga, P. (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Praxis Educativa, 7* (2), 331-354.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., Wilhelmi, M. R. (2013, Septiembre). *Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Comunicación presentada en el Grupo de Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica. XVII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Bilbao, España.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathematiques* (aceptado).

Groth, R. E. y Bergner, J. A. (2006). Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode. *Mathematical Thinking and Learning, 8,* 37-63.

Hernández, C. R., Fernández, C., Baptista, P. (1991/1997). *Metodología de la investigación.* (2ª Reimpresión). Colombia: Panamericana Formas e Impresos S.A.

Hernández, C. R., Fernández, C., Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación.* (4ª ed.). Mexico: McGRAW – HILL

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23,* 557-568.

Lecoutre, M. P. y Cordier, J. (1990). Effet du mode de présentation d'un problème aleatoire sur les modèles développés par les élèves. *Bulletin de l'APMEP, 372,* 9-22.

Lee, H. S. y Hollebrands, K. (2008). Preparing to teach data analysis and probability with technology. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Llinares, S. y Sánchez, G. M. (1990). El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las matemáticas. En C. S. Llinares y G. M. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática* (pp. 67-116). Sevilla: ALFAR.

Llinares, S., Sánchez, V. y García, B. M. (1994). Conocimiento del contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación de las fracciones. *Revista de Educación, 304,* 199-225.

MEN (2004). Pensamiento Estadístico y Tecnologías Computacionales. Proyecto “Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia”.

MESA, O. (1994). Camino a la aritmética: Un enfoque constructivista. Centro de Pedagogía Participativa. Medellín, Colombia.

Múnera, J. (2007). Construcción de aprendizajes matemáticos desde el enfoque de situaciones problemas. Revista Formándonos Maestros. Institución Educativa Normal Superior de Envigado. Nº 3, Noviembre de 2007.

Múnera, J. (2007). Pautas para el diseño de situaciones problema en la enseñanza de contenidos matemáticos. Documento disponible en: http://ayura.udea.edu.co/practica/tutorias/curspensam.html

Nasser, F. (1999). Prediction of college students achievement in introductory statistics course. Comunicación presentada en el *52nd ISI - International Statistical Institute -Session.* Helsinki.

Nasser, F. M. (2004). Structural model of the effects of cognitive and affective factors on the achievement of arabic-speaking pre-service teachers in introductory statistics. *Journal of Statistics Education, 12* (1). Disponible en, www.amstat.org/publications/jse/

Ossa, A. y Aldana, E. (2017). Una idoneidad didáctica para la formación de profesores que atienden poblaciones con déficit cognitivo, desde el desarrollo del pensamiento aleatorio: comprensión y construcción del concepto de probabilidad. Universidad del Quindío, Colombia.

Rivas, H., Godino, J.D. (2015). Hechos didácticos significativos en el estudio de nociones probabilísticas por futuros maestros. Análisis de una experiencia formativa. Segundas

Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria. Universidad de Granada.

Rivas, H., Godino, J. D. y Arteaga, P. (2012, Septiembre). *Indicadores de idoneidad didáctica en procesos de formación estadística de profesores.* Comunicación presentada en el grupo de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria.

Ruiz Olabuénaga, J.I. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa.* Deusto: Universidad de Deusto.

Durán, D., & Giné, C. (2011). *La formación del profesorado para la educación enclusiva: Un proceso de desarrollo profesional y de mejora de los centros para atender la diversidad.*

Fernandez, J. (2000). *Didáctica de las matemáticas en educación infantil.* Madrid: Ediciones Pedagogícas.

Godino, J. (2011). *Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Brazil.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2009). *Enfoque ontosemiótico" del conocimiento y la instrucción matemática.* Madrid.

Godino, J., Batanero, C., Rivas, H., & Arteaga, P. (2013). *Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas.* Madrid.

Godino, J., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. (2006). *Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas.*

Godino, J., Contreras, A., & Font, V. (2006). *análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática.* Madrid. *Inclusive Education* *ten years after Salamanca: Setting the agenda.* (2006). Salamanca: European Journal of Psychology of Education.

Ley General de educación. (1994). *LEY 115 DE 1994.* Bogotá.

Ministerio de educación nacional. (1998). Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!”.

Ministerio de educación nacional. (2006). *Fundamentación conceptual para la atención en el servicio educativo a estudiantes con necesidades educativas especiales NEE.* Bogotá.

Ministerio de Educción Nacional. (2002). la revolución educativa . *men*, 1-8.

Parrilla, A. (2003). *La voz de la experiencia: la colaboración como estrategia de inclusión.* Aula de innovación educativa.

Rivas, H. (2014). *Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria.* Granada.

Rodriguez , C. (2014). *¿por qué es importante desarrollar el pensamiento lógico matemático?*

Salazar, C. (2000). *orientaciones pedagógicas para la atención educativa a estudiantes con discapacidad cognitiva.* Bogota .

Anexo 1.

Dificultades en el aprendizaje de las Medidas de Tendencia Central

León & Zawojeski (1991) realizan entrevistas a niños entre 8 y 14 años y analizan el efecto de la edad sobre la comprensión de estas propiedades. Además de encontrar una importante influencia de la edad sobre la comprensión de la media, también observaron que la contextualización de las tareas facilita mucho su resolución. Sin embargo, propiedades tales como que la suma de desviaciones respecto a la media es cero, que la media es un valor representativo de los valores promediados o que hay que tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media continuaron siendo demasiado abstractas para una proporción importante de alumnos de 14 años.

La idea de representante de un conjunto de datos es importante en las aplicaciones prácticas, por ejemplo, al comparar dos conjuntos de datos respecto a una misma variable de interés. Como indican Mokros & Russell (1995) hasta que los niños no conciben el conjunto de datos como un todo, y no como un agregado de valores, no podrán comprender las ideas de resumen de los datos o representante de los datos, que se refiere al conjunto global y no a ninguno de sus valores aislados. Por otro lado, se tiende a situar la media en el centro del recorrido de la distribución, propiedad que es cierta para distribuciones simétricas. Pero cuando la distribución es muy asimétrica la media se desplaza hacia uno de los extremos y la moda o la mediana serían un valor más representativo del conjunto de datos. Esto no es siempre comprendido por algunos alumnos quienes invariablemente eligen la media como mejor representante de los datos sin tener en cuenta la simetría de la distribución o la existencia de valores atípicos, como hemos observado en nuestra propia experiencia.

Respecto a la comprensión de la mediana Barr, (1980) indica que los alumnos entienden que la mediana es el centro de “algo” pero no siempre comprenden a que se refiere ese “algo” porque no comprenden realmente que una tabla de frecuencia es sólo un resumen de los datos y no son capaces de pasar de la tabla a la lista de valores que es una representación alternativa de los datos. Incluso si se les da los datos en forma de lista no entienden por qué hay que ordenarlos para calcular la mediana, porque no entienden que la mediana es un estadístico que se refiere al conjunto ordenado de datos.

No sirve de nada conocer las definiciones de las medidas de posición central y saber calcularlas si luego no se reconocen los problemas relacionados con estos conceptos. Pollasek & Cols (1981) propusieron a sus alumnos el siguiente problema:

> *La media en fluidez verbal de una clase de un colegio es de 400. Si extraemos una muestra aleatoria de 5 estudiantes y resulta que la puntuación de los 4 primeros es de 380, 420, 600, 400. ¿Cuál sería aproximadamente la puntuación esperada para el quinto estudiante?*

La respuesta correcta a este ítem es 400, el valor esperado en la población. Sin embargo, son pocos los alumnos que dieron una respuesta correcta al problema, en la investigación citada, sino que, generalmente se busca un valor de la puntuación del quinto sujeto tal que, sumada a las cuatro anteriores, dé una media de 400.

Respecto al problema (usar la media como representante de un conjunto de datos), resulta aún más difícil para los alumnos construir un conjunto de datos que tenga un promedio dado. Goodchild (1988) proporcionó a los estudiantes cajas de cerillas en las que se había impreso la frase "contenido medio 35 cerillas" y pidió a sus alumnos construir una distribución hipotética del contenido de 100 cajas. Lo que más le sorprendió fue que las distribuciones construidas por los alumnos, no tenían forma acampanada como la distribución normal. Goodchild sugirió que ello se debe a la falta de comprensión de la media como medida de posición central de la distribución.

Russell & Mokros (1991) clasificaron en cuatro categorías los significados incorrectos atribuidos por los estudiantes a la palabra "media": valor más frecuente (en realidad esto sería una confusión son la palabra "moda"), "valor razonable" (significado coloquial del término), "punto medio" (confusión con la mediana) y "algoritmo" (es un significado restringido, donde la media se ve sólo como el algoritmo de cálculo). Watson & Moritz (en prensa), analizan el significado intuitivo dado por los niños al término "promedio" y hallan un gran número de niños para los cuales el promedio es simplemente un valor en el centro de la distribución (es una idea próxima al concepto de mediana). Pocas veces se relaciona la palabra "promedio" con la moda y menos aún con la media aritmética. Las siguientes definiciones de "promedio" fueron obtenidas en entrevistas a niños realizadas por Watson & Moritz (en prensa): *"Significa igual", "que es normal", "no eres* *realmente bueno, pero tampoco malo"*. Al preguntar qué quiere decir que el número medio de niños por familia es 2'3, obtienen respuestas correctas y otras como las siguientes: *"Que tienen dos niños grandes y otro que no ha crecido todavía", "que en las familias australianas el número más frecuente de niños es 2'3", "el '3 es un niño que tiene que crecer para hacerse mayor. Por ejemplo, tiene 3 años ahora y cuando cumpla 10, contará como 1 y entonces el número promedio de niños será 3"*. Para el profesor los enunciados sobre los promedios pueden parecer muy claros, pero estas respuestas indican la necesidad de poner atención al significado que las palabras y valores numéricos tienen para los estudiantes en relación con contextos específicos.

Eisenbach (1994) plantea a estudiantes universitarios en un curso introductorio de estadística el significado de la frase: "¿Qué quiere decir que el salario medio de un empleado es 3.600 dólares?" obteniendo respuestas como "que la mayoría de los empleados gana alrededor de 3.600 dólares", o que "es el salario central; los otros trabajadores ganan más o menos de 3600 dólares", que muestran la confusión terminológica entre las palabras "media", "mediana" y "moda".

Batanero (2000) menciona que la idea de promedio no se puede comprender hasta tanto se visualice el conjunto de datos como un todo y también que la forma de presentación de los datos (tabla, gráfico, datos sin tabular) incide en la dificultad de las tareas. Reading & Pegg (1996) estudiando la forma en que los niños de grados 7 a 12 reducen los conjuntos de datos observaron que algunos alumnos que eran capaces de dar un resumen de datos presentado en forma numérica, fracasaron en la tarea cuando los datos se presentaban por medio de un gráfico estadístico. También observaron que los niños mostraban dificultad a la hora de dar un argumento o justificar su respuesta de por qué se elegía un cierto promedio, al plantearles el siguiente problema:

> *Como parte de un proyecto los estudiantes de una clase miden cada uno su número de calzado, obteniéndose los siguientes datos:*
> *26 26 26 27 27 27 27 28 28 28 28 28 28 29 29 29 29 29 30 30 30 30 30 30 30 31 32 32 33*
>
> *Si te preguntan cuál sería el mejor número para representar este conjunto de datos, ¿Qué número o números elegirías? Explícanos por qué has elegido ese (esos) número(s).*

En esa investigación se clasifica a los alumnos en 8 niveles diferentes de respuesta, pero, incluso los estudiantes de nivel 6 y 7 que son capaces de proporcionar un resumen como la media, son incapaces de argumentar el porqué de su decisión, más allá de dar la definición del concepto. Solo una pequeña parte de los estudiantes de su investigación (nivel 8) fueron capaces de justificar la elección de las medidas de valor central y dispersión relacionándolas con características del conjunto de datos.

Watson & Moritz (2000), analizaron el significado intuitivo dado por los estudiantes de 11 a 15 años al término "promedio" y hallaron que un gran número consideran que el promedio es simplemente un valor en el centro de la distribución. Esta idea es correcta si la distribución es simétrica, pero si no lo es, solo se cumple para la mediana. En su estudio, tratan de analizar el desarrollo evolutivo del concepto e indican también que algunas propiedades de la media, como la de representatividad, sólo la entienden los estudiantes de cursos avanzados.

Mary & Gattuso (2005) analizan si los estudiantes tienen en cuenta el efecto de un valor cero sobre la media. Todos estos trabajos se centran en el análisis de algoritmos de cálculo o propiedades aisladas. En investigaciones de Cobo & Batanero (2003) y Cobo & Díaz (2004) se realiza una evaluación conjunta de la comprensión de todas las medidas de tendencia central por los estudiantes, mediante un cuestionario.

Anexo 2

Propiedades e inconvenientes de uso de las MTC

Propiedades de la Media Aritmética

Las principales propiedades de la media aritmética son:[7]

- Su cálculo es muy sencillo y en él intervienen todos los datos.
- Su valor es único para una lista de datos dada.
- Se usa con frecuencia para comparar poblaciones, aunque es más apropiado acompañarla de una medida de dispersión.
- Se interpreta como "*punto de equilibrio*" o "*centro de masas*" del conjunto de datos, ya que tiene la propiedad de equilibrar las desviaciones de los datos respecto de su propio valor:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{x} = \overline{x}-\overline{x} = 0$$

- Minimiza las desviaciones cuadráticas de los datos respecto de cualquier valor prefijado, esto es, el valor de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-k)^2$ es mínimo cuando $k=\overline{x}$. Este resultado se conoce como Teorema de König. Esta propiedad permite interpretar uno de los parámetros de dispersión más importantes: la varianza.
- Se ve afectada por transformaciones afines (cambios de origen y escala), esto es, si $x'_i = ax_i + b$ entonces $\overline{x'} = a\overline{x} + b$, donde $\overline{x'}$ es la media aritmética de los x'_i, para i = 1,..., n y a y b números reales.
- Es poco sensible a fluctuaciones muestrales, por lo que es un parámetro muy útil en inferencia estadística.

Inconvenientes de su uso de la Media Aritmética

Este parámetro, aun teniendo múltiples propiedades que aconsejan su uso en situaciones muy diversas, tiene también algunos inconvenientes, como son:

[7] Rius Díaz, Francisca. «2.3.2 La media». Bioestadística. Métodos y aplicaciones. Málaga: Universidad de Málaga. ISBN 84-7496-653-1. Consultado el 7 de abril de 2009.

- Para datos agrupados en intervalos (variables continuas) su valor oscila en función de la cantidad y amplitud de los intervalos que se consideren.
- Es una medida a cuyo significado afecta sobremanera la dispersión, de modo que cuanto menos homogéneos sean los datos, menos información proporciona. Dicho de otro modo, poblaciones muy distintas en su composición pueden tener la misma media.[8] Por ejemplo, un equipo de baloncesto con cinco jugadores de igual estatura, 1,95 m, evidentemente, tendría una estatura media de 1,95 m, valor que representa fielmente a esta población homogénea. Sin embargo, un equipo de jugadores de estaturas más heterogéneas, 2,20 m, 2,15 m, 1,95 m, 1,75 m y 1,70 m, por ejemplo, tendría también, como puede comprobarse, una estatura media de 1,95 m, valor que no representa a casi ninguno de sus componentes.
- En el cálculo de la media no todos los valores contribuyen de la misma manera. Los valores altos tienen más peso que los valores cercanos a cero. Por ejemplo, en el cálculo del salario medio de una empresa, el salario de un alto directivo que gane 10.000 € tiene tanto peso como el de diez empleados "normales" que ganen 1.000 €. En otras palabras, se ve muy afectada por valores extremos.
- No se puede determinar si en una distribución de frecuencias hay intervalos de clase abiertos.

Propiedades de la Moda

Sus principales propiedades son:

- Cálculo sencillo.
- Interpretación muy clara.
- Al depender solo de las frecuencias, puede calcularse para variables cualitativas. Es por ello el parámetro más utilizado cuando al resumir una población no es posible realizar otros cálculos, por ejemplo, cuando se enumeran en medios periodísticos las características más frecuentes de determinado sector social. Esto se conoce informalmente como "retrato robot".[9]

[8] Wackerly, Dennis D; Mendenhall, William; Scheaffer, Richard L. (2002). «1.3. Descripción de un conjunto de mediciones: métodos numéricos». Estadística matemática con aplicaciones (6ª edición). Cengage Learning Editores.

[9] Santos, María José. «Retrato robot del alcalde metropolitano». El Correo de Andalucía. 2009.

Inconvenientes de la Moda

- Su valor es independiente de la mayor parte de los datos, lo que la hace muy sensible a variaciones muestrales. Por otra parte, en variables agrupadas en intervalos, su valor depende excesivamente del número de intervalos y de su amplitud.
- Usa muy pocas observaciones, de tal modo que grandes variaciones en los datos fuera de la moda, no afectan en modo alguno a su valor.
- No siempre se sitúa hacia el centro de la distribución.
- Puede haber más de una moda en el caso en que dos o más valores de la variable presenten la misma frecuencia (distribuciones bimodales o multimodales).

Propiedades e inconvenientes de la Mediana

Las principales propiedades de la mediana son:[10]

- Es menos sensible que la media a oscilaciones de los valores de la variable.
- Como se ha comentado, puede calcularse para datos agrupados en intervalos, incluso cuando alguno de ellos no está acotado.
- No se ve afectada por la dispersión. De hecho, es más representativa que la media aritmética cuando la población es bastante heterogénea. Suele darse esta circunstancia cuando se resume la información sobre los salarios de un país o una empresa. Hay unos pocos salarios muy altos que elevan la media aritmética haciendo que pierda representatividad respecto al grueso de la población. Sin embargo, alguien con el salario "mediano" sabría que hay tanta gente que gana más dinero que él, como que gana menos. Sus principales inconvenientes son que en el caso de datos agrupados en intervalos, su valor varía en función de la amplitud de estos. Por otra parte, no se presta a cálculos algebraicos tan bien como la media aritmética.

[10] Rius Díaz, Francisca. «2.3.4 La mediana». Bioestadística. Métodos y aplicaciones.

Anexo 3

Indicadores de Idoneidad Didáctica (Godino, 2011)

3.1. Idoneidad epistémica

Es el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Determinar si las estrategias utilizadas son adecuadas o no desde el punto de vista matemático.

Un programa formativo, o un proceso de estudio matemático, tiene mayor idoneidad epistémica en la medida en que los contenidos implementados (o pretendidos) representan bien a los contenidos de referencia. En la siguiente tabla se incluye los componentes y algunos indicadores relevantes que permiten hacer operativa dicha noción. Seguidamente mencionamos algunas concordancias de estos componentes e indicadores con los propuestos por diversas teorías, y en particular los Principios y Estándares para la enseñanza de las matemáticas formulados por el NCTM (2000).

Tabla 3.1. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica (Godino, 2011).

COMPONENTES:	INDICADORES:
Situaciones-problemas	Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).
Lenguajes	Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas. Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige. Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.
Argumentos	Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen. Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.

Relaciones	Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.

En el marco del EOS se atribuye a las situaciones problemas un papel central, ya que se asume una concepción antropológica de la matemática, de modo que los objetos matemáticos emergen de las prácticas de los sujetos al enfrentarse a determinados problemas. Esta posición es concordante con la "Teoría de situaciones didácticas" (Brousseau, 1997) y también con la "Educación matemática realista" (EMR) (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005), basada en la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983; 1991). En estas teorías, y en diversas propuestas curriculares, se propone el uso de situaciones - problemas como medio de contextualizar las ideas matemáticas y generarlas a partir de la actividad de resolución, comunicación y generalización de las soluciones. "La resolución de problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacer matemáticas. Esta es una parte integral de las matemáticas, no una pieza aislada del programa de matemáticas. Los estudiantes necesitan tener oportunidades frecuentes para formular, enfrentar y resolver problemas complejos que requieren mucho esfuerzo" (NCTM, 2000, p. 51). Los principios de actividad y de realidad de la EMR apoyan la consideración de los indicadores recogidos en la tabla 3.1 como indicadores de idoneidad epistémica. Para Freudenthal (1991) las matemáticas son una actividad humana. "No hay matemáticas sin matematización", actividad que puede ser de aplicación a resolver problemas del entorno, o problemas de reorganización del propio conocimiento matemático.

Un punto central para el logro de una alta idoneidad epistémica será, por tanto, la selección y adaptación de situaciones-problemas o tareas ricas. Sin embargo, aunque las situaciones problemas constituyen un elemento central, el logro de una idoneidad epistémica alta requiere también atención, como propone el EOS, a las diversas representaciones o medios de expresión, las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como las justificaciones de las mismas. Tales tareas deben proporcionar a los estudiantes diversas maneras de abordarlas, implicar diversas representaciones, y requerir que los estudiantes conjeturen, interpreten y justifiquen las soluciones.

También se debe prestar atención a las conexiones entre las distintas partes del contenido matemático. Las matemáticas son un campo de estudio integrado. “En un currículum coherente, las ideas matemáticas están relacionadas y se construyen unas sobre otras. (NCTM, 2000, p.14). Esta posición concuerda con el “Principio de interconexión” de la “Educación matemática realista”: Los bloques de contenido matemático (numeración y cálculo, álgebra, geometría,…) no pueden ser tratados como entidades separadas. Las situaciones problemáticas deberían incluir contenidos matemáticos interrelacionados. Además, la resolución de problemas de contexto ricos con frecuencia significa que tienes que aplicar un amplio rango de herramientas y comprensiones matemáticas.

3.2. Idoneidad ecológica

Es el grado de adaptación curricular, socio-profesional y conexiones intra e interdisciplinares del entorno en que se desarrolla.

Se refiere al grado en que un plan o acción formativa para aprender matemáticas resulta adecuado dentro del entorno en que se utiliza. Por entorno entendemos todo lo que está fuera del aula, condicionando la actividad que se desarrolla en la misma. Así, nos podemos referir a todo lo que viene en general determinado por la sociedad, la escuela, la pedagogía, la didáctica de las matemáticas. El proceso de estudio tiene lugar en un contexto educativo que fija unos fines y valores para la educación de los ciudadanos y profesionales que se deben respetar. Dichos fines y valores son interpretados y especificados dentro del proyecto educativo del centro o departamento que coordina la acción de los distintos profesores implicados. El docente forma parte de una comunidad de estudio e indagación que aporta conocimientos útiles sobre prácticas matemáticas y didácticas idóneas que se deberán conocer y aplicar.

La educación matemática crítica (Skovsmose, 1994) aporta ideas para lograr que la educación matemática permita a los ciudadanos ser parte activa de una sociedad democrática. Más allá del aprendizaje matemático individual de cada persona, se hace necesario formular reflexiones sobre las consecuencias colectivas de este aprendizaje en la sociedad actual. En la escuela, la práctica matemática puede ejercer una enorme influencia en dos sentidos totalmente opuestos: por un lado, la matemática reducida a meros cálculos rutinarios puede reforzar actitudes pasivas y complacientes y, por otro lado, la matemática en su sentido más amplio puede desarrollar el pensamiento crítico y alternativo.

Otros componentes e indicadores de idoneidad ecológica se incluyen en la siguiente tabla, en particular las conexiones del contenido matemático con otras áreas curriculares, y entre distintas áreas temáticas dentro de la propia matemática.

Tabla 3.2. Componentes e indicadores de idoneidad ecológica (Godino, 2011).

COMPONENTES:	INDICADORES:
Adaptación al currículo	- Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura hacia la innovación didáctica	- Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva - Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.
Adaptación socio-profesional y cultural	- Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes
Educación en valores	- Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.
Conexiones intra e interdisciplinares	- Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.

3.3. Idoneidad interaccional

Es el grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado, favorecen la autonomía en el aprendizaje y el desarrollo de competencias comunicativas. En la siguiente tabla incluimos algunos indicadores de idoneidad referidos a las interacciones entre el profesor y los estudiantes y entre los propios estudiantes. Teniendo en cuenta principios de aprendizaje socio-constructivista ampliamente asumidos se valora positivamente la presencia de momentos en que los estudiantes asumen la responsabilidad del aprendizaje. La aceptación de este principio de autonomía en el aprendizaje es un rasgo esencial de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1997), en la que las situaciones de acción, comunicación y validación se conciben como momentos a didácticos de los procesos de estudio, esto es, situaciones en las que los alumnos son protagonistas en la construcción de los conocimientos pretendidos. La toma de decisiones sobre la progresión del estudio, tanto por parte del docente como de los estudiantes, requiere la puesta en práctica de procedimientos de observación y encuesta para una evaluación formativa de los aprendizajes.

Tabla 3.3. Componentes e indicadores de idoneidad interaccional (Godino, 2011).

COMPONENTES	INDICADORES:
Interacción docente-discente	- El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) - Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.) - Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento - Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. - Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase.
Interacción entre alumnus	- Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. - Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos. - Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	- Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos).
Evaluación formative	- Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos

La importancia del discurso, el diálogo, la conversación en la clase es resaltada por diversos autores: “La naturaleza del discurso matemático es una característica central de la práctica de la clase. Si aceptamos seriamente que los profesores necesitan oportunidades para aprender a partir de su práctica, el desarrollo de conversaciones matemáticas permite a los profesores aprender continuamente de sus estudiantes. Las conversaciones matemáticas que se centran sobre las ideas de los estudiantes pueden proporcionar a los profesores una ventana sobre el pensamiento de los estudiantes en modos que el trabajo individual de los estudiantes no lo permite" (Frankle, Kazemi & Battey (2007, p. 237).

En el marco de la Educación Matemática Realista se asume un principio de interacción, según el cual, la enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. La interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión. Los estudiantes, en lugar de ser receptores de una matemática ya elaborada, son considerados como participantes activos del proceso de enseñanza - aprendizaje, en el que ellos mismos desarrollan herramientas y comprensiones, y comparten sus experiencias unos con otros. La negociación explícita, la intervención, la discusión, la cooperación y la evaluación son elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo en el que los métodos informales del aprendiz son usados como una plataforma para alcanzar los métodos formales. En esta instrucción interactiva, los estudiantes son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005, p. 290).

Uno de los principios fundamentales de Freudenthal (1991) para la educación matemática es que se debe dar a los estudiantes una "oportunidad guiada" de "reinventar" las matemáticas. Esto implica que, en la EMR, tanto los profesores como los programas educativos tienen un papel fundamental en cómo los estudiantes adquieren los conocimientos. Ellos dirigen el proceso de aprendizaje, pero no de una manera fija mostrando lo que los estudiantes tienen que aprender. Esto estaría en contradicción con el principio de actividad y daría lugar a comprensiones falsas.

Por el contrario, los estudiantes necesitan espacio y herramientas para la construcción de conocimientos matemáticos por sí mismos. Con el fin de alcanzar este estado deseado, los profesores tienen que proporcionar a los alumnos un ambiente de aprendizaje en el que el proceso de construcción pueda surgir. Uno de los requisitos es que los profesores deben ser capaces de predecir dónde y cómo se pueden anticipar las comprensiones y habilidades de los estudiantes que están emergiendo.

3.4. Idoneidad mediacional

Se entiende la idoneidad mediacional como el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

El uso apropiado de la tecnología es uno de los principios formulados por el NCTM (2000, p.24), indicándose, “La tecnología es esencial en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Este medio puede influenciar positivamente en lo que se enseña y, a su vez, incrementar el aprendizaje de los estudiantes”. Esta organización profesional sostiene que la tecnología es una herramienta esencial para el aprendizaje matemático en el siglo XXI, y todas las escuelas deben asegurar que todos sus estudiantes tienen acceso a la tecnología.

Los profesores efectivos maximizan el potencial de la tecnología para desarrollar la comprensión de los estudiantes, estimular su interés, e incrementar su eficiencia en matemáticas. Cuando la tecnología se usa estratégicamente, puede proporcionar acceso a las matemáticas para todos los estudiantes.

Se considera, así mismo, que las calculadoras y demás herramientas tecnológicas, como sistemas de cálculo algebraico, software de geometría dinámica, applets, hojas de cálculo y dispositivos de presentación interactiva, son componentes vitales de una educación matemática de alta calidad.

En la siguiente tabla, Godino (2011) incluye algunos componentes e indicadores de idoneidad en el uso de recursos tecnológicos, incluyendo artefactos manipulativos. También se debe considerar como factor determinante de la idoneidad mediacional las condiciones ambientales de la clase, la ratio profesor/alumnos y el tiempo asignado a la enseñanza y el aprendizaje.

Tabla 3.4. Componentes e indicadores de idoneidad mediacional (Godino, 2011).

COMPONENTES:	INDICADORES:
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	- Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido. - Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	- El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. - El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). - El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	- El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida. - Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema. - Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

3.5. Idoneidad cognitiva

Grado en que los significados implementados (pretendidos) por el docente son entendidos por el estudiante, así como la proximidad de los significados personales logrados por los estudiantes son los pretendidos/implementados por el profesor.

Definimos la idoneidad cognitiva como el grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) son adecuados para los alumnos, es decir, están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos. La siguiente tabla incluye los componentes e indicadores seleccionados.

Tabla 3.5. Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva (Godino, 2011).

COMPONENTES:	INDICADORES:
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	- Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio) - Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	- Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo - Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes
Aprendizaje: **Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)**	- Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas: Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva. - La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia. - Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

En el marco del EOS se asume que el aprendizaje implica la apropiación de los significados institucionales pretendidos por parte de los estudiantes, mediante la participación en la comunidad de prácticas generada en la clase. Supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales iniciales de los estudiantes y los significados institucionales planificados. Los significados son entendidos en términos de prácticas operativas y discursivas y supone además el reconocimiento e interrelación de los objetos que intervienen en dichas prácticas.

Tres de los seis principios formulados por el NCTM (2000) sobre la enseñanza de las matemáticas tienen relación con la idoneidad cognitiva. El principio de igualdad indica, "La excelencia en la educación matemática requiere igualdad, grandes expectativas y un fuerte apoyo para todos los estudiantes". Se exige que se hagan adaptaciones razonables y apropiadas, y que sean incluidos contenidos motivadores para promover el acceso y el logro de todos los estudiantes. El principio de aprendizaje requiere que "Los estudiantes deben aprender las matemáticas entendiéndolas, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de sus experiencias y conocimientos previos". Así mismo, el principio de evaluación afirma que, "La evaluación debe apoyar el aprendizaje de matemáticas relevantes y proveer de información útil tanto a profesores como estudiantes".

3.6. Idoneidad afectiva

Grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes. La emisión de un juicio sobre la mayor o menor idoneidad afectiva del proceso en cuestión se basa en el grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes. La siguiente tabla se incluye los componentes e indicadores seleccionados.

Tabla 3.6. Componentes e indicadores de idoneidad afectiva (Godino, 2011).

COMPONENTES:	INDICADORES:
Intereses y necesidades	- Las tareas tienen interés para los alumnos - Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	- Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. - Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	- Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. - Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

La resolución de cualquier problema matemático lleva asociada una situación afectiva para el sujeto implicado, quien pone en juego no solamente prácticas operativas y discursivas para dar una respuesta al problema, sino también moviliza creencias, actitudes, emociones o valores que condicionan en mayor o menor grado y diferente sentido la respuesta cognitiva requerida.

Los objetos y procesos afectivos son usualmente considerados como entidades psicológicas, que refieren a estados o rasgos mentales más o menos estables, o a disposiciones para la acción de los sujetos individuales. Pero desde el punto de vista educativo el logro de unos estados afectivos que interaccionen positivamente con el dominio cognitivo tienen que ser objeto de consideración por parte de las instituciones educativas, y, en particular, por el profesor. El dominio afectivo conlleva, por tanto, una faceta institucional y se concreta en normas de índole afectivo que condicionan el trabajo del profesor.

3.7. Interacción entre facetas

En los apartados anteriores hemos identificado algunos indicadores de idoneidad para las seis facetas que proponemos en el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. Dichas facetas no se deben considerar como factores independientes, ya que de hecho se producen interacciones entre las mismas. Así, por ejemplo, el uso de un recurso tecnológico puede determinar que se puedan abordar determinados tipos de problemas y las configuraciones de objetos y procesos correspondientes, lo cual conlleva nuevas formas de representación, argumentación, generalización, etc. También se pueden ver afectadas las formas de interacción entre el profesor y los estudiantes, el interés y motivación, y en definitiva los aprendizajes.

En la siguiente tabla, Godino (2011) incluye algunos indicadores de idoneidad relativos a interacciones entre facetas.

Tabla 3.7. Componentes e indicadores de idoneidad de interacciones entre facetas (Godino, 2011).

COMPONENTES:	INDICADORES:
Epistémica-ecológica	- El currículo propone el estudio de problemas de ámbitos variados como la escuela, la vida cotidiana y el trabajo.
Epistémica-cognitiva-afectiva	- El contenido del estudio (fenómenos explorados en las diferentes áreas de contenido, formulando y justificando conjeturas) tiene sentido para los estudiantes en los distintos niveles y grados. - Los estudiantes tienen confianza en sus habilidades para enfrentar problemas difíciles y mantienen su perseverancia aun cuando la tarea sea compleja. - Se estimula a los estudiantes a reflexionar sobre sus razonamientos durante los procesos de resolución de problemas de manera tal que son capaces de aplicar y adaptar las estrategias que han desarrollado en otros problemas y contextos.
Epistémica-cognitiva mediacional	- El uso de recursos tecnológicos induce cambios positivos en el contenido de enseñanza, en los modos de interacción, motivación y en el aprendizaje de los estudiantes.
Cognitiva-afectiva-interaccional	- Las explicaciones dadas por los estudiantes incluyen argumentos matemáticos y racionales, no solamente descripciones de procedimientos. - Se incluyen contenidos motivadores, con adaptaciones razonables y apropiadas, que promueven el acceso y el logro de todos los estudiantes.

Ecológica-instruccional (papel del docente y su formación)	- El profesor es comprensivo y dedicado a sus estudiantes. - El profesor conoce y entiende profundamente las matemáticas que enseña y es capaz de usar ese conocimiento con flexibilidad en sus tareas de enseñanza. - El profesor tiene amplias oportunidades y apoyo para incrementar y actualizar frecuentemente sus conocimientos didáctico-matemáticos.

El principio de enseñanza del NCTM (2000) reclama atención a las conexiones entre aspectos cognitivos – afectivos e instruccionales: "Una enseñanza efectiva de las matemáticas requiere saber y comprender qué es lo que los estudiantes saben y necesitan aprender de las matemáticas; y luego motivarlos y apoyarlos para que las aprendan bien".

En el caso de la EMR la adopción del principio de interacción implica que la enseñanza a toda la clase tiene un papel importante. Sin embargo, esto no quiere decir que toda la clase se lleva conjuntamente y que cada estudiante está siguiendo el mismo camino y está alcanzando el mismo nivel de desarrollo en el mismo momento. Por el contrario, dentro de la EMR, los niños son considerados como individuos, cada uno siguiendo una trayectoria de aprendizaje individual. Este punto de vista sobre el aprendizaje a menudo resulta en abogar por la división de las clases en pequeños grupos de estudiantes cada uno siguiendo sus propias trayectorias de aprendizaje. En EMR, sin embargo, existe una fuerte preferencia por mantener la clase como una unidad de organización y de adaptar la educación a los diferentes niveles de habilidad de los estudiantes. Esto se puede hacer por medio de proporcionar a los estudiantes problemas que pueden resolverse según diferentes niveles de comprensión.

El uso de modelos propuesto en la EMR relaciona aspectos mediacionales, epistémicos (representacionales, fenomenológicos), cognitivos e instruccionales. Se afirma que los modelos sirven como una herramienta clave para salvar esta distancia entre las matemáticas informales, relacionadas con el contexto y las matemáticas más formales. En primer lugar, los estudiantes desarrollan estrategias estrechamente relacionada con el contexto. Más tarde, algunos aspectos de la situación de contexto se pueden generalizar, lo que significa que el contexto más o menos, adquiere el carácter de un modelo y como tal puede dar apoyo a la solución de otros problemas relacionados entre sí. Finalmente, los modelos permitirán el acceso de los estudiantes al conocimiento matemático más formal. A fin de cumplir la función de puente entre los niveles formales e informales, los modelos han de pasar de un “modelo de” una situación particular, a un “modelo para” todos los tipos de situaciones equivalentes (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005, p. 289).

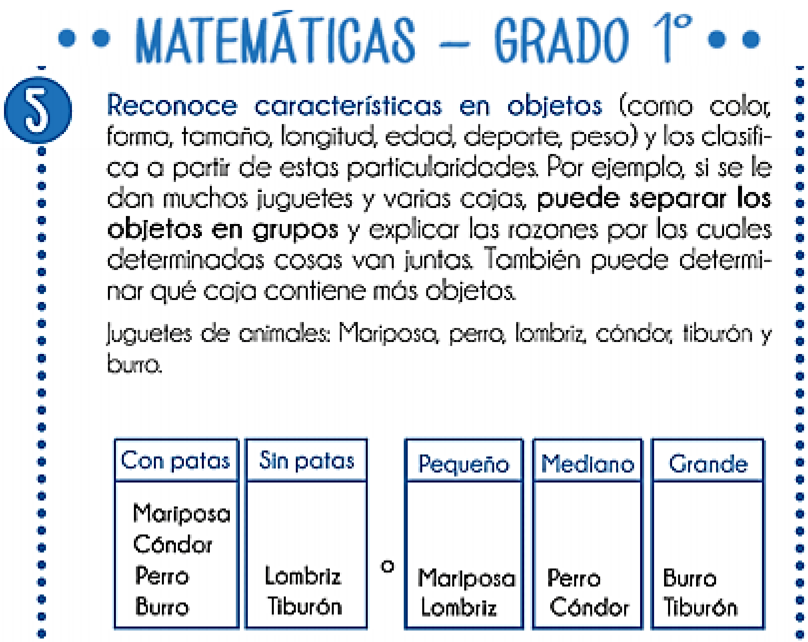
El principio de realidad (EMR) pone en relación aspectos epistémicos y cognitivos. El objetivo general de la educación matemática es que los estudiantes deben ser capaces de utilizar sus conocimientos matemáticos y herramientas para resolver problemas. Este principio de realidad no sólo es reconocible al final del proceso de aprendizaje en el ámbito de la aplicación de las matemáticas, la realidad es concebida como una fuente para el aprendizaje de las matemáticas. Un contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas de la vida cotidiana como a situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos. Al igual que las matemáticas surgieron de la matematización de la realidad, también el aprendizaje debería originarse al matematizar la realidad. En vez de comenzar con ciertas abstracciones o definiciones que deben aplicarse más tarde, se debe comenzar con contextos ricos, que requieren organización matemática o, en otras palabras, contextos que pueden ser matematizados (Freudenthal, 1968).

Anexo 4.

Recorrido del concepto de MTC en los DBA en Educación Básica Primaria y Secundaria.

Análisis de las MTC en los DBA Primera versión.

1. Nociones y conceptos en **Primaria** que se relacionan con el pensamiento aleatorio que pueden aportan a la construcción de los conceptos de medidas de tendencia central:



MATEMÁTICAS – GRADO 1°

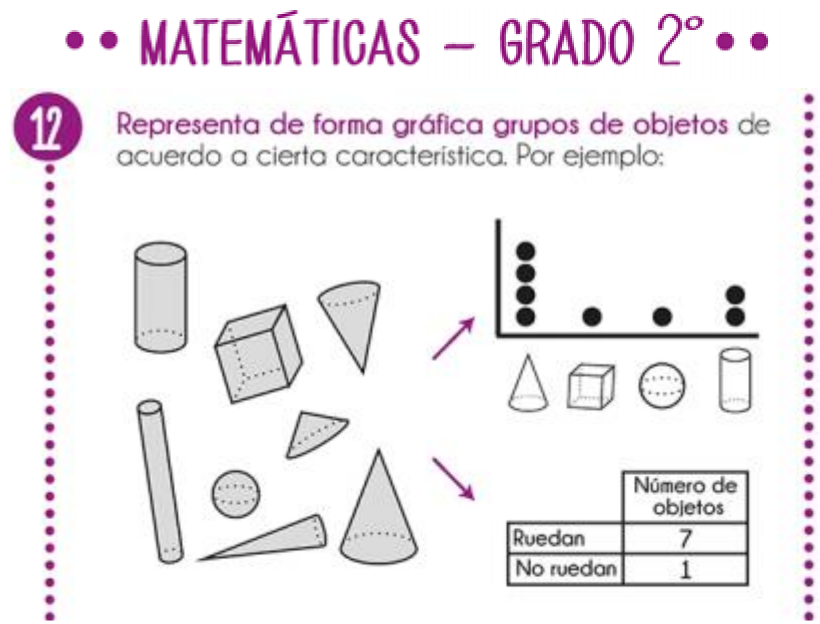
5 **Reconoce características en objetos** (como color, forma, tamaño, longitud, edad, deporte, peso) y los clasifica a partir de estas particularidades. Por ejemplo, si se le dan muchos juguetes y varias cajas, **puede separar los objetos en grupos** y explicar las razones por las cuales determinadas cosas van juntas. También puede determinar qué caja contiene más objetos.

Juguetes de animales: Mariposa, perro, lombriz, cóndor, tiburón y burro.

Con patas	Sin patas
Mariposa Cóndor Perro Burro	Lombriz Tiburón

o

Pequeño	Mediano	Grande
Mariposa Lombriz	Perro Cóndor	Burro Tiburón



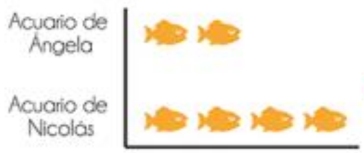
MATEMÁTICAS – GRADO 2°

12 **Representa de forma gráfica grupos de objetos** de acuerdo a cierta característica. Por ejemplo:

	Número de objetos
Ruedan	7
No ruedan	1

MATEMÁTICAS – GRADO 3°

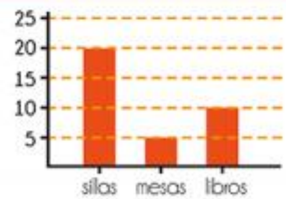
12 Interpreta y representa datos dados de diferentes maneras. Por ejemplo:



	Número de peces
Ángela	20
Nicolás	40

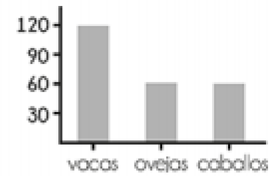
Un 🐟 representa 10 peces

objeto	cantidad
sillas	20
mesas	5
libros	10



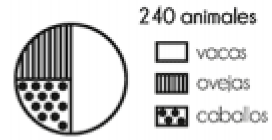
MATEMÁTICAS – GRADO 4°

16 Entiende unos datos representados de cierta forma y los representa de otra. Por ejemplo:



Animal	Cantidad
vacas	120
ovejas	60
caballos	60

240 animales
50% vacas
25% ovejas
25% caballos

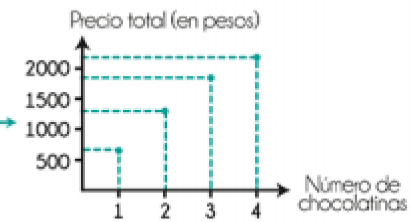


240 animales
La mitad (1/2) son vacas
Una cuarta parte (1/4) son ovejas
Una cuarta parte (1/4) son caballos

17 Interpreta y representa datos descritos como puntos en el primer cuadrante del plano cartesiano. Por ejemplo:

PROMOCIÓN:

Número de chocolatinas	Precio total (en pesos)
1	700
2	1300
3	1800
4	2200



A partir de los datos concluye cosas como "si compro 3 chocolatinas pago 1 800 pesos y cada chocolatina me cuesta 600 pesos".

MATEMÁTICAS – GRADO 5°

15 Calcula el promedio (la media) e identifica la moda en un conjunto de datos. Por ejemplo, en la tabla aparece la cantidad de goles que metió cada persona durante el campeonato de fútbol masculino.

Jugador	Número de goles
Simón	4
Diego	3
Enrique	3
Daniel	5
Francisco	7
Nicolás	2

La moda: 3 goles
(el dato que más se repite)

La media: 4 goles por persona

$$\frac{4+3+3+5+7+2}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

Es de anotar que la primera concepción de **media y moda**, los DBA los establece en el **Grado 5** en el DBA 15.

2. Conceptos en **Básica Secundaria** que se relacionan con el pensamiento aleatorio que pueden aportan a la construcción de los conceptos de medidas de tendencia central:

• • MATEMÁTICAS – GRADO 6° • •

18 **Calcula la media (el promedio), la mediana y la moda de un conjunto de datos.** Por ejemplo:

Ángela se sabe 2 poesías de memoria; Catalina se sabe 5; Ana María e Isabel se saben 8 cada una.

- **media** = $\frac{2+5+8+8}{4} = \frac{23 \text{ poesías}}{4 \text{ personas}}$ = 5,75 poesías/persona
- de menor a mayor: 2 $\underbrace{5,\ 8}_{\frac{5+8}{2}}$, 8 ⟶ **mediana** = $\frac{5+8}{2} = \frac{13}{2}$ = 6,5 poesías
- **moda** = 8 poesías (el dato que más se repite)

• • MATEMÁTICAS – GRADO 7° • •

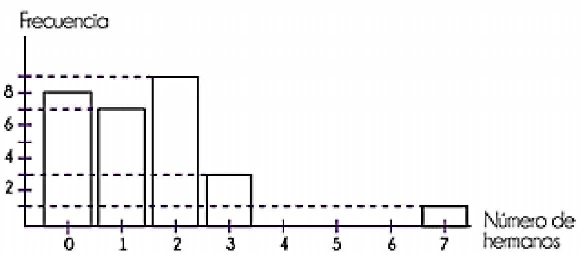
12 **Comprende cómo la distribución de los datos afecta la media (promedio), la mediana y la moda.** Por ejemplo:

- A cada estudiante de séptimo se le preguntó cuántos libros había leído en toda su vida. Si la mediana fue 9,5 libros, entonces sabemos que el 50% de los estudiantes de séptimo ha leído 9 libros o menos, y el 50% ha leído 10 libros o más.
- Los datos extremos afectan a la media y no tanto a la mediana. Por ejemplo:

Notas (sobre 100): 5 70 75 85 85	Notas (sobre 100): 65 70 75 85 85
media = $\frac{5+70+75+85+85}{5} = \frac{320}{5} = 64$	**media** = $\frac{65+70+75+85+85}{5} = \frac{380}{5} = 76$
mediana = 75 (número del medio)	**mediana** = 75 (número del medio)

• • MATEMÁTICAS – GRADO 8° • •

17 **Calcula la media de datos agrupados e identifica la mediana y la moda.** Por ejemplo, en el salón de clase hay ocho estudiantes que no tienen hermanos, siete estudiantes que tienen un solo hermano, nueve estudiantes que tienen dos hermanos, tres estudiantes que tienen tres hermanos, y un estudiante que tiene siete hermanos. Ninguno tiene ni cuatro, ni cinco, ni seis hermanos.



Datos ordenados de menor a mayor:

$\underbrace{0, 0, ..., 0,}_{\text{8 veces}} \underbrace{1, ..., 1,}_{\text{7 veces}} \underbrace{2, ..., 2,}_{\text{9 veces}} \underbrace{3, ..., 3,}_{\text{3 veces}} \underbrace{7}_{\text{una vez}}$

$\underbrace{0, ..., 0,\ 1, ..., 1,}_{\text{14 veces}}\ \underbrace{1,\ 2, ..., 2,\ 3, ..., 3,\ 7}_{\text{14 veces}}$

$\frac{1+1}{2}$ ⟵ mediana = 1 hermano

moda = 2 hermanos

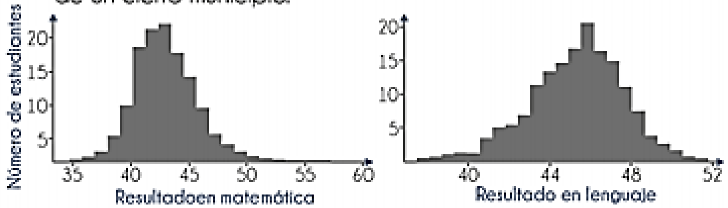
media = $\frac{\text{total hermanos}}{\text{total estudiantes}} = \frac{(8\times 0)+(7\times 1)+(9\times 2)+(3\times 3)+(1\times 7)}{8+7+9+3+1}$

$= \frac{0+7+18+9+7}{28} = \frac{41}{28} \approx$ 1,46 hermanos/estudiante

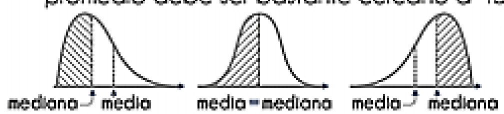
- Como la mediana es 1 hermano, entonces el 50% de los estudiantes tiene un hermano o menos y el 50% de los estudiantes tiene un hermano o más. En promedio, los estudiantes de la clase tienen 1,46 hermanos.
- La moda es 2 hermanos pues es el dato más frecuente.
- Comprende que es un error calcular la media así: $\frac{8+7+9+3+0+1}{6}$.
- Comprende que el estudiante que tiene 5 hermanos es un caso aislado que aumenta a la media pero no afecta a la mediana.

• • MATEMÁTICAS – GRADO 9° • •

17 **Reconoce los conceptos de distribución y asimetría de un conjunto de datos y reconoce las relaciones entre la media, mediana y moda en relación con la distribución en casos sencillos.** Por ejemplo, la siguiente gráfica muestra los resultados en las pruebas Saber 9 de matemáticas y lenguaje de un cierto municipio.



Reconoce que ambos datos tienen una distribución en forma de campana, pero una es aproximadamente simétrica mientras que la otra es asimétrica. A partir de la asimetria y forma de la distribución de los resultados en matemáticas, deduce que el promedio debe ser bastante cercano a 45.



La mediana es la que hace que las áreas sombreadas y no sombreadas sean iguales (separa los datos en el 50% inferior y el 50% superior)

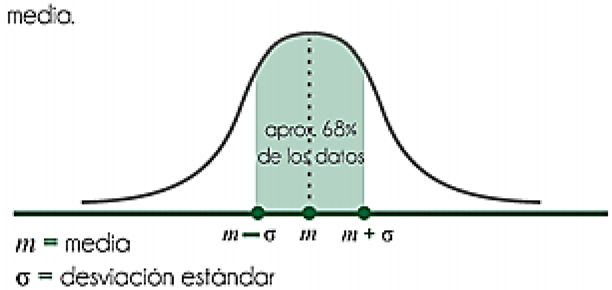
• • MATEMÁTICAS – GRADO 10° • •

17 **Calcula y utiliza los percentiles para describir la posición de un dato con respecto a otros.** En particular, entiende que la mediana corresponde al percentil 50 y comprende cómo los percentiles ayudan a reconocer la distribución de los datos. Por ejemplo:

- Que la mediana de los salarios de cierta ciudad, sea 2 millones de pesos significa que la mitad de las personas tienen un salario inferior a 2 millones, y que el percentil 75 sea 2,5 millones, significa que el 25% de la población de dicha ciudad tiene un salario superior a 2,5 millones.
- Andrés consultó sus resultados de la prueba Saber 11 y fue informado que en la prueba de matemáticas está ubicado en el percentil 56. Esto significa que el 56% de todos los estudiantes que presentaron la prueba en el país obtuvieron un puntaje menor al suyo.

• • MATEMÁTICAS – GRADO 11 • •

17 **Reconoce la desviación estándar como una medida de dispersión de un conjunto de datos.** En particular, para datos que tienen una distribución aproximadamente simétrica (en "forma de campana"), conoce el hecho de que alrededor del 68% de los datos se encuentra a menos de una desviación estándar de la media (promedio) y casi la totalidad de los datos se encuentran a menos de dos desviaciones estándar de la media.



3. En la **Educación Media,** hacia dónde se relaciona o se usa como base el concepto de medidas de tendencia central: En el Grados 10° se tienen en cuenta los **percentiles** como medidas de localización y en el Grado 11° se toma como bases las medidas de tendencia central y de localización para construir los conceptos de **medidas de dispersión** como la desviación estándar.

Análisis de las MTC en los DBA Segunda versión.

1. Nociones y conceptos en **Primaria** que se relacionan con el pensamiento aleatorio que pueden aportan a la construcción de los conceptos de medidas de tendencia central:

Matemáticas • Grado 1°

10. Clasifica y organiza datos, los representa utilizando tablas de conteo y pictogramas sin escalas, y comunica los resultados obtenidos para responder preguntas sencillas.

Evidencias de aprendizaje

- Identifica en fichas u objetos reales los valores de la variable en estudio.
- Organiza los datos en tablas de conteo y/o en pictogramas sin escala.
- Lee la información presentada en tablas de conteo y/o pictogramas sin escala (1 a 1).
- Comunica los resultados respondiendo preguntas tales como: ¿cuántos hay en total?, ¿cuántos hay de cada dato?, ¿cuál es el dato que más se repite?, ¿cuál es el dato que menos aparece?

Matemáticas • Grado 2°

10. Clasifica y organiza datos, los representa utilizando tablas de conteo, pictogramas con escalas y gráficos de puntos, comunica los resultados obtenidos para responder preguntas sencillas.

Evidencias de aprendizaje

- Identifica la equivalencia de fichas u objetos con el valor de la variable.
- Organiza los datos en tablas de conteo y en pictogramas con escala (uno a muchos).
- Lee la información presentada en tablas de conteo, pictogramas con escala y gráficos de puntos.
- Comunica los resultados respondiendo preguntas tales como: ¿cuántos hay en total?, ¿cuántos hay de cada dato?, ¿cuál es el dato que más se repite?, ¿cuál es el dato que menos se repite?

Matemáticas • Grado 3°

10. Lee e interpreta información contenida en tablas de frecuencia, gráficos de barras y/o pictogramas con escala, para formular y resolver preguntas de situaciones de su entorno.

Evidencias de aprendizaje

- Identifica las características de la población y halla su tamaño a partir de diferentes representaciones estadísticas.
- Construye tablas y gráficos que representan los datos a partir de la información dada.
- Analiza e interpreta información que ofrecen las tablas y los gráficos de acuerdo con el contexto.
- Identifica la moda a partir de datos que se presentan en gráficos y tablas.
- Compara la información representada en diferentes tablas y gráficos para formular y responder preguntas.

Matemáticas • Grado 4º

10. Recopila y organiza datos en tablas de doble entrada y los representa en gráficos de barras agrupadas o gráficos de líneas, para dar respuesta a una pregunta planteada. Interpreta la información y comunica sus conclusiones.

Evidencias de aprendizaje

- Elabora encuestas sencillas para obtener la información pertinente para responder la pregunta.
- Construye tablas de doble entrada y gráficos de barras agrupadas, gráficos de líneas o pictogramas con escala.
- Lee e interpreta los datos representados en tablas de doble entrada, gráficos de barras agrupados, gráficos de línea o pictogramas con escala.
- Encuentra e interpreta la moda y el rango del conjunto de datos y describe el comportamiento de los datos para responder las preguntas planteadas.

Matemáticas • Grado 5º

11. Utiliza la media y la mediana para resolver problemas en los que se requiere presentar o resumir el comportamiento de un conjunto de datos.

Evidencias de aprendizaje

- Interpreta y encuentra la media y la mediana en un conjunto de datos usando estrategias gráficas y numéricas.
- Explica la información que brinda cada medida en relación con el conjunto de datos.
- Selecciona una de las medidas como la más representativa del comportamiento del conjunto de datos estudiado.
- Argumenta la selección realizada empleando semejanzas y diferencias entre lo que cada una de las medidas indica.

2. Conceptos en **Básica Secundaria** que se relacionan con el pensamiento aleatorio que pueden aportan a la construcción de los conceptos de medidas de tendencia central:

Matemáticas • Grado 6º

11. Compara características compartidas por dos o más poblaciones o características diferentes dentro de una misma población para lo cual seleccionan muestras, utiliza representaciones gráficas adecuadas y analiza los resultados obtenidos usando conjuntamente las medidas de tendencia central y el rango.

Evidencias de aprendizaje

- Comprende la diferencia entre la muestra y la población.
- Selecciona y produce representaciones gráficas apropiadas al conjunto de datos, usando, cuando sea posible, calculadoras o software adecuado.
- Interpreta la información que se presenta en los gráficos usando las medidas de tendencia central y el rango.
- Compara las características de dos o más poblaciones o de dos o más grupos, haciendo uso conjunto de las respectivas medidas de tendencia central y el rango.
- Describe el comportamiento de las características de dos o más poblaciones o de dos o más grupos de una población, a partir de las respectivas medidas de tendencia central y el rango.

Matemáticas • Grado 7º

8. Plantea preguntas para realizar estudios estadísticos en los que representa información mediante histogramas, polígonos de frecuencia, gráficos de línea entre otros; identifica variaciones, relaciones o tendencias para dar respuesta a las preguntas planteadas.

Evidencias de aprendizaje

- Plantea preguntas, diseña y realiza un plan para recolectar la información pertinente.
- Construye tablas de frecuencia y gráficos (histogramas, polígonos de frecuencia, gráficos de línea, entre otros), para datos agrupados usando, calculadoras o software adecuado.
- Encuentra e interpreta las medidas de tendencia central y el rango en datos agrupados, empleando herramientas tecnológicas cuando sea posible.
- Analiza la información presentada identificando variaciones, relaciones o tendencias y elabora conclusiones que permiten responder la pregunta planteada.

Matemáticas • Grado 8º

11. Interpreta información presentada en tablas de frecuencia y gráficos cuyos datos están agrupados en intervalos y decide cuál es la medida de tendencia central que mejor representa el comportamiento de dicho conjunto.

Evidencias de aprendizaje

- Interpreta los datos representados en diferentes tablas y gráficos.
- Usa estrategias gráficas o numéricas para encontrar las medidas de tendencia central de un conjunto de datos agrupados.
- Describe el comportamiento de los datos empleando las medidas de tendencia central y el rango.
- Reconoce cómo varían las medidas de tendencia central y el rango cuando varían los datos.

Matemáticas • Grado 9º

10. Propone un diseño estadístico adecuado para resolver una pregunta que indaga por la comparación sobre las distribuciones de dos grupos de datos, para lo cual usa comprensivamente diagramas de caja, medidas de tendencia central, de variación y de localización.

Evidencias de aprendizaje

- Define el método para recolectar los datos (encuestas, observación o experimento simple) e identifica la población y el tamaño de la muestra del estudio.
- Construye diagramas de caja y a partir de los resultados representados en ellos describe y compara la distribución de un conjunto de datos.
- Compara las distribuciones de los conjuntos de datos a partir de las medidas de tendencia central, las de variación y las de localización.
- Elabora conclusiones para responder el problema planteado.

Matemáticas • Grado 10º

9. Comprende y explica el carácter relativo de las medidas de tendencias central y de dispersión, junto con algunas de sus propiedades, y la necesidad de complementar una medida con otra para obtener mejores lecturas de los datos.

Evidencias de aprendizaje

- Encuentra las medidas de tendencia central y de dispersión, usando, cuando sea posible, herramientas tecnológicas.
- Interpreta y compara lo que representan cada una de las medidas de tendencia central en un conjunto de datos.
- Interpreta y compara lo que representan cada una de las medidas de dispersión en un conjunto de datos.
- Usa algunas de las propiedades de las medidas de tendencia central y de dispersión para caracterizar un conjunto de datos.
- Formula conclusiones sobre la distribución de un conjunto de datos, empleando más de una medida.

Matemáticas • Grado 11º

9. Plantea y resuelve situaciones problemáticas del contexto real y/o matemático que implican la exploración de posibles asociaciones o correlaciones entre las variables estudiadas.

Evidencias de aprendizaje

- En situaciónes matemáticas plantea preguntas que indagan por la correlación o la asociación entre variables.
- Define el plan de recolección de la información, en el que se incluye: definición de población y muestra, método para recolectar la información (encuestas, observaciones o experimentos simples), variables a estudiar.
- Elabora gráficos de dispersión usando software adecuado como Excel y analiza las relaciones que se visibilizan en el gráfico.
- Expresa cualitativamente las relaciones entre las variables, para lo cual utiliza su conocimiento de los modelos lineales.
- Usa adecuadamente la desviación estándar, la media el coeficiente de variación y el de correlación para dar respuesta a la pregunta planteada.

Anexo 5.

Aprendizajes relacionados con MTC evaluados en las Pruebas Saber del MEN.

En cuanto a los aprendizajes que evalúan las Pruebas Saber se tiene el documento elaborado por el Ministerio de Educación llamado Matriz de Referencia. A continuación se ilustra los aprendizajes que se relacionan con la evaluación de los conceptos de medidas de tendencia central:

Matemáticas 3°

COMPETENCIA / COMPONENTE	RAZONAMIENTO	
	APRENDIZAJE	EVIDENCIA
ALEATORIO	Describir tendencias que se presentan en un conjunto a partir de los datos que lo describen.	Determinar la moda en un conjunto de datos.
		Señalar comportamientos de aumento o disminución entre dos variables.
		Aproximarse al intervalo que representa el conjunto de datos numéricos obtenidos en un experimento aleatorio.

Matemáticas 5°

COMPETENCIA / COMPONENTE	RESOLUCIÓN	
	APRENDIZAJE	EVIDENCIA
ALEATORIO	Resolver problemas que requieren encontrar y/o dar significado a la medida de tendencia central de un conjunto de datos.	Calcular o usar la media aritmética y la moda en la solución de problemas.
		Interpretar qué indican y qué no indican algunas medidas de tendencia central acerca de un conjunto de datos.

Se puede observar que en Primaria se evalúan dos aprendizajes y 5 evidencias relacionados con las MTC, teniendo en cuenta que se evalúan otros conceptos del pensamiento aleatorio como interpretación de gráficas y eventos de probabilidad.

En la Básica Secundaria que está conformada por los grados 6°, 7°, 8° y 9° se recorren más cantidad de aprendizajes a ser evaluados por la cantidad de grados que este nivel educativo tiene, por lo tanto, las Pruebas Saber evalúan al final de estos grados, es decir en grado 9°, 3 aprendizajes y 6 evidencias ilustradas en la siguiente imagen:

Matemáticas 9°

COMPETENCIA / COMPONENTE	COMUNICACIÓN	
	APRENDIZAJE	EVIDENCIA
ALEATORIO	Reconocer la media, mediana y moda con base en la representación de un conjunto de datos y explicitar sus diferencias en distribuciones diferentes.	Reconocer medidas de tendencia central en un conjunto de datos.
		Explicitar diferencias entre las medidas de tendencia central en una distribución de datos.

COMPETENCIA / COMPONENTE	RAZONAMIENTO	
	APRENDIZAJE	EVIDENCIA
ALEATORIO	Fundamentar conclusiones utilizando conceptos de medidas de tendencia central.	Proponer y justificar conclusiones, conocidas la media aritmética, la moda o la mediana de un conjunto de datos.
		Interpretar el significado de las medidas de tendencia central de acuerdo al contexto.
		Reconocer relaciones y tendencias, conocidas la media aritmética, la moda o la mediana de un conjunto de datos.

COMPETENCIA / COMPONENTE	RESOLUCIÓN	
	APRENDIZAJE	EVIDENCIA
ALEATORIO	Resolver problemas que requieran el uso e interpretación de medidas de tendencia central para analizar el comportamiento de un conjunto de datos.	Resolver problemas que requieran el cálculo e interpretación de medidas de tendencia central de un conjunto de datos.

Las Orientaciones Pedagógicas del MEN surgen de la necesidad de dar pautas sobre el abordaje de ciertos aprendizajes en los que se presenta mayores dificultades en los estudiantes, para nuestro caso en particular, se ha revisado este documento en su Primera Versión en los aprendizajes de grado noveno, y se encuentran las Orientaciones para el aprendizaje: "*Resolver problemas que requieran el uso e interpretación de medidas de tendencia central para analizar el comportamiento de un conjunto de dato"(pág.32)* , el cual es tenido en cuenta para la construcción de la secuencia didáctica expuesta en el Capítulo 3 de este trabajo.

Anexo 6

Secuencia didáctica

Docente	JAIME DAVID GRISALES DÁVILA
Nombre de la secuencia	"Conociendo a mi salón de clases"
Tiempo	10 Sesiones
Problema de enseñanza	En algunas instituciones educativas no se le ha dado la importancia a la estadística en la formación de los futuros ciudadanos del planeta. Esto hace que los individuos enfrentados todos los días a una gran cantidad de información a través de medios físicos y electrónicos, solo pasen la vista por tablas, gráficas y conjunto de datos, sin entenderla, interpretarla y analizarla para predecir futuros acontecimientos y dar explicación a fenómenos socioculturales de la actualidad. Por eso cada vez toma más fuerza la necesidad de incluir dentro de la formación de seres humanos, la educación estadística.
Aforismo del autor	"Una buena enseñanza sucede cuando se involucra al estudiante en su propio aprendizaje"
Maestría	Enseñanza de las Matemáticas
IE	Hugo Ángel Jaramillo
IES	Universidad Tecnológica de Pereira
Fecha de elaboración	9/04/17 4 P.M.

Teoría didáctica de la enseñanza de la matemática

Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS).

El EOS es un sistema teórico inclusivo que trata de articular diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y su enseñanza. Uno de los componentes del EOS es la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción que se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Esto supone la articulación coherente y sistémica de seis facetas o dimensiones: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Godino et al., 2007; Godino, 2013)

Las siguientes sesiones de la secuencia didáctica son construidas apoyadas del Módulo de Secundaria Activa, una propuesta pedagógica de educación flexible sugerida por el Ministerio de Educación Nacional, basados en una adaptación a una lista de situaciones problema planteadas por Mayén, Cobo, Batanero & Balderas (2007) a estudiantes de básica secundaria de una escuela en México y bajo la experiencia como docente del autor.

SESION 1. Introducción a la Estadística (55 minutos)

Inicio (INDAGACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	15 min	Se realiza una pregunta abierta a los estudiantes. Te has preguntado: ¿En que se aplica la estadística? ¿Qué es la palabra "estadística" para ti? Se escuchan las nociones iniciales sobre estadística que tienen los estudiantes.	Oralidad

Desarrollo (CONCEPTUALIZACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	15 min	Introducción a la estadística. https://www.youtube.com/watch?v=gS2RuRrzVYQ	Video VideoBeam Portátil
2.	10 min	Socialización de la información suministrada por el video. Interacción docente-estudiantes.	Oralidad

Final (APLICACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	15 min	Los estudiantes resuelven en su cuaderno un cuestionario sobre los conceptos socializados sobre la estadística.	Cuestionario

SESION 2. Registro de datos estadísticos (110 minutos)

Inicio (INDAGACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	25 min	Se les invita a los estudiantes a analizar, responder las preguntas, en su cuaderno y comentar sus respuestas con algunos compañeros. Daniel hizo una encuesta a personas de su vereda, para saber con qué regularidad ellas van al pueblo y los resultados fueron:	Calculadora Oralidad Tablero

Respuestas	Frecuencia absoluta
Todos los días	15
Una vez a la semana	25
Una vez al mes	10
Alguna vez al año	12
Nunca	5
No contesta	3

1. ¿A cuántas personas encuestó Daniel?
2. ¿Cuántas personas van con más frecuencia al pueblo?
3. ¿Con qué frecuencia van más personas al pueblo?
4. ¿Cuál es el porcentaje de personas que nunca van al pueblo? 5. ¿Cuál es el porcentaje de personas que más van al pueblo?
6. ¿Cómo representarías gráficamente los resultados obtenidos por Daniel? Realízalo.

Desarrollo (CONCEPTUALIZACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	30 min	Se presenta a los estudiantes una síntesis de los siguientes conceptos básicos estadísticos: - Población - Tamaño de la población - Muestra - Individuo o unidad estadística	Oralidad Video
	Descanso (10 min)		
2.	20 min	- Datos - Variable y tipos de variables (cualitativa, cuantitativa, discreta, continua).	

Final (APLICACIÓN)

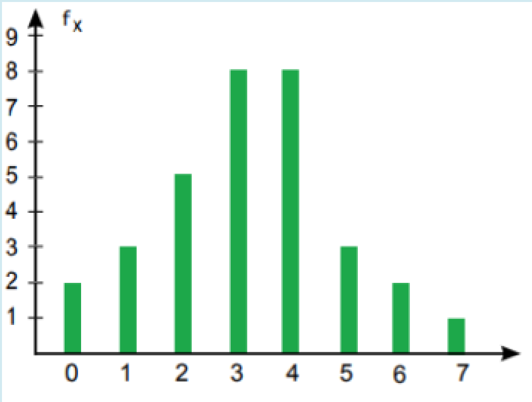
No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	25 min	Los estudiantes conocen e interactúan algunos con el Software de estadística para entender los conceptos ilustrados anteriormente. http://academia.uniquindio.edu.co/academia/investigacion/gedes/index.php/	Software "Hagamos estadística"

SESION 3. Gráficas estadísticas – Diagrama de barras (110 minutos)

Inicio (INDAGACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	25 min	Se motiva a los estudiantes sobre cuáles son las edades de los compañeros del salón de clases. Se pregunta la edad de cada estudiante y se registra en el tablero para ellos tomen los datos en su cuaderno. Una vez realizado lo anterior, se les pregunta que si es posible realizar una gráfica que represente esas edades, que realicen una gráfica en su cuaderno.	Oralidad Tablero

Desarrollo (CONCEPTUALIZACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	30 min	El docente ilustra las siguientes definiciones: - Gráficas estadísticas - Diagrama de barras 	Oralidad
	Descanso 10 min		
2.	20 min	- Organización de los datos en diagramas de barras (escala del gráfico, rótulos de los ejes, etc.)	

Final (APLICACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	25 min	Se les solicita a los estudiantes ajustar a un diagrama barras la gráfica realizada en la indagación con respecto a las edades de los compañeros, luego se les solicita realizar un diagrama de barras de los datos de la sección 2.	Tablero

SESION 4. Construcción de Tablas de frecuencias (55 minutos)

Inicio (INDAGACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	15 min	Se pregunta a los estudiantes cual es el porcentaje de compañeros que tienen 15 años teniendo en cuenta los datos de las edades obtenidos en la sesión anterior (sesión 3). Y los porcentajes de cada edad registrada (de los que tienen 14, 16 y 17 años).	Oralidad Tablero

Desarrollo (CONCEPTUALIZACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	25 min	El docente les ayuda a los estudiantes a construir una tabla de frecuencias de los datos de las edades, construyendo los conceptos de: - Frecuencia absoluta (f) - Frecuencia acumulada (fa) - Frecuencia relativa (fr) - Frecuencia porcentual (fp)	Oralidad Tablero

Edades (años)	F	fa	fr	Fp

Final (APLICACIÓN)

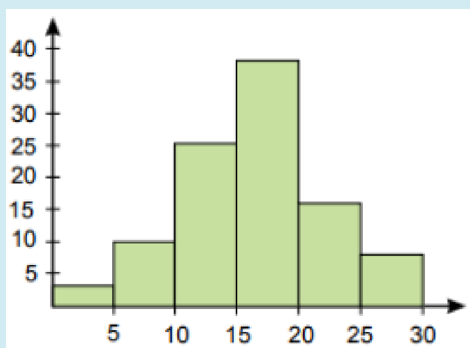
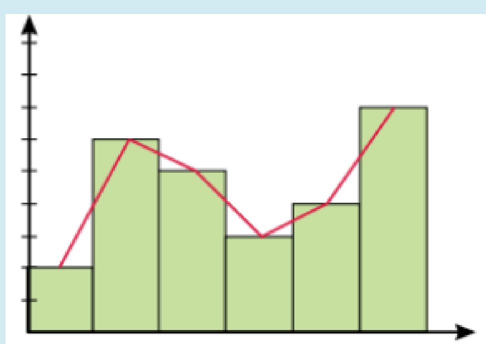
No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	15 min	Se les solicita a los estudiantes realizar una tabla de frecuencias de los datos de la sección 2.	Tablero

SESION 5. Gráficas estadísticas – Histograma y Polígono de frecuencias (110 minutos)

Inicio (INDAGACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	25 min	El docente motiva a los estudiantes a conocer la estatura de los compañeros del salón de clase con la ayuda de una cinta métrica, registrado en el tablero altura por altura para que los estudiantes tomen nota en sus cuadernos. Se les pide a los estudiantes que realicen una gráfica de barras con los datos de las alturas de los compañeros de tal manera que los datos queden ordenados. Se orienta sobre cómo podrían organizar este tipo de datos que son continuos (valores decimales) a través de intervalos.	Oralidad Tablero

Desarrollo (CONCEPTUALIZACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	30 min	El docente ilustra las siguientes definiciones: - Histograma (incluyendo construcción de intervalos) 	Oralidad Tablero
	Descanso 10 min		
2.	20 min	- Polígono de frecuencias 	

Final (APLICACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	25 min	Se les solicita a los estudiantes organizar los datos de la estatura en una tabla de frecuencias, realizar un histograma y polígono de frecuencias de esos datos.	Oralidad

SESION 6. Gráficas estadísticas – Diagrama de sectores o circular (110 minutos)

Inicio (INDAGACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	25 min	El docente pregunta a los estudiantes que entienden por diagrama de sectores o circular. Invita a construir un diagrama circular con los datos de las edades.	Oralidad Tablero

Desarrollo (CONCEPTUALIZACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	30 min Descanso 10 min	El docente realiza la instrucción de los siguientes conceptos matemáticos: - Construcción de un diagrama de sectores	Oralidad Tablero
2.	10 min	- Actividad propuesta adaptada del módulo de secundaria activa: El alcalde de Pereira ha decidido invertir en obras sociales para los estratos menos favorecidos y para esto aplico una encuesta a 50 familias en uno de los sectores necesitados, para saber que estrato es el que más predomina en el sector. La pregunta que realizo fue: ¿A qué estrato socioeconómico pertenece usted? La siguiente tabla muestra las respuestas de las 50 familias.	

1	1	3	1	3	2	3	2	3	3
3	2	1	1	1	2	3	1	2	2
3	1	2	2	1	3	3	2	1	2
2	2	3	3	2	1	3	2	1	1
1	3	1	2	2	3	2	2	3	1

Final (APLICACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	35 min	Se invita a los estudiantes a responder las siguientes preguntas con respecto a la actividad propuesta: a. Determina el tipo de variable que se utiliza en el problema (cualitativa o cuantitativa). b. Construye la tabla de frecuencias correspondiente. c. A partir de la tabla de frecuencias, elabora el diagrama de barras y diagrama de sectores correspondiente. d. ¿Qué nivel socioeconómico tiene una mayor representación en el barrio? e. ¿Cuál es el porcentaje de representación de cada estrato? f. Si la alcaldía decide implementar la obra social en los barrios donde la representación de los estratos 1 y 2 sea mayor al 67%. ¿Este barrio tendría la inversión de obras sociales?	Oralidad Tablero Software "Hagamos estadística"

SESION 7. Medidas de Tendencia Central (MTC) – Media (55 minutos)

Inicio (INDAGACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	15 min	Para abordar este objeto matemático se planteará a los estudiantes unas situaciones problemas relacionados con las medidas de tendencia central (MTC) en el momento de indagación de las siguientes sesiones. En total son seis (6) situaciones problemas. **Situación 1.** Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en Colombia es 2.2 hijos por familia. a. Explica qué significa para ti esta frase. b. Se han elegido 10 familias colombianas y el número medio de hijos entre las 10 familias es de 2.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo. ¿Cuántos hijos podrán tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las 10 familias sea 2.2? Justifica tu respuesta. Adaptación realizada al Ítem 1 de Mayén, Cobo, Batanero & Balderas (2007).	Oralidad Tablero

Desarrollo (CONCEPTUALIZACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	20 min	El docente realiza un papel de mediador y facilitador de la construcción del concepto de media o promedio. Recorre el aula para ayudar a los estudiantes a construir el concepto matemático a través de preguntas orientadoras.	Oralidad Tablero

Final (APLICACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	20 min	**Situación 2.** Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado es 4. ¿Te parece posible? ¿Por qué? Tomado de Mayén, Cobo, Batanero & Balderas (2007).	Tablero

SESION 8. Medidas de Tendencia Central – Media (110 minutos)

Inicio (INDAGACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	25 min	**Situación 3.** Kevin y Alexandra dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada fin de semana una media de 4 horas a hacer deporte. a. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes? b. Kevin y Alexandra dedican además 1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican cada fin de semana, entre las dos actividades: hacer deporte y escuchar música? Adaptación realizada al Ítem 2 de Mayén, Cobo, Batanero & Balderas (2007).	Oralidad Tablero Marcadores Borrador

Desarrollo (CONCEPTUALIZACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1. 2.	30 min Descanso (10 min) 20 min	El docente realiza interacción con los estudiantes para facilitar la construcción del concepto de media o promedio. El docente ilustra la definición de media o promedio: Las medidas de tendencia central corresponden a aquellas que nos dan una idea de los valores medios, valores centrales o más frecuentes de una determinada distribución de valores. La media, moda y mediana son ejemplos de ellas. Recordemos lo que significan: • La media aritmética o promedio, es la medida de tendencia central más utilizada, un ejemplo de esta utilización, es el sacar el promedio de las notas de una materia. Esta medida de tendencia central es un dato que se ubica en el centro de los daos y representa las características del grupo. Podemos decir que esta medida es el punto de equilibrio del conjunto de datos. Recuerda que se representa con el símbolo X	Oralidad

Final (APLICACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	25 min	Se les solicita a los estudiantes obtener la media o promedio de las edades de los compañeros de clase de la sesión 3.	Software “Hagamos estadísticas”

SESION 9. Medidas de Tendencia Central – Mediana (110 minutos)

Inicio (INDAGACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	25 min	**Situación 4.** El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. a. ¿Cuál es el peso del niño mediano? b. ¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg?	Oralidad Tablero Marcadores Borrador

		c. En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona la respuesta. Tomado de Mayén, Díaz & Batanero (2009).	

Desarrollo (CONCEPTUALIZACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	30 min Descanso (10 min)	El docente mediante la interacción con los estudiantes, les facilita construir el concepto de mediana.	
2.	20 min	El docente ilustra la definición de mediana: La mediana es el dato que divide un conjunto de datos en dos partes proporcionalmente iguales. Se representa por: Me.	Oralidad

Final (APLICACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	25 min	Se les solicita a los estudiantes obtener la mediana de las edades de los compañeros de clase de la sesión 3.	Software "Hagamos estadísticas"

SESION 10. Medidas de Tendencia Central (MTC) – Moda (55 minutos)

Inicio (INDAGACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	15 min	**Situación 5.** El profesor David califica a sus alumnos por desempeños del siguiente modo: Bj=Bajo, Bs=Básico, A=Alto, S=Superior. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de estudiantes de noveno grado: Noveno 2: Bj Bs Bs A A S S Bj Bj Bj Bs Bs Bs A S S Bj Bs Bs S S S S Noveno 3: S S Bj Bj Bs A Bs A Bj Bj S A Bs S Bj A A a. ¿Qué grupo ha obtenido mejores notas? b. ¿Cuál sería el promedio más apropiado para representar estos datos? Adaptación realizada al Ítem 6 de Mayén, Cobo, Batanero & Balderas (2007).	Oralidad Tablero

Desarrollo (CONCEPTUALIZACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	20 min	El docente realiza un papel de mediador y facilitador de la construcción del concepto de moda. Recorre el aula para ayudar a los estudiantes a construir el concepto matemático a través de preguntas orientadoras.	Oralidad Tablero

Final (APLICACIÓN)

No	TIEMPO	Actividad de aprendizaje	Recurso
1.	20 min	**Situación 6.** Nueve estudiantes han pesado un celular en el laboratorio de ciencias. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestra a continuación: 104.2, 104.3, 104.0, 104.2, 104.2, 104.1, 104.5, 104.2, 104.1, 104.2. Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del celular. ¿Qué harías para calcularlo? Adaptación realizada al Ítem 8 de Mayén, Cobo, Batanero & Balderas (2007).	Tablero

Anexo 7

Analisis epistémico de la Situación problema 1

El análisis epistémico que se desarrolla a continuación se basa en los indicadores de idoneidad epistémica propuesta por Godino (2011), así como investigaciones previas de idoneidad realizado por otros autores, describe los elementos más relevantes de las *configuraciones de objetos y procesos* que se desarrollan para la esta situación problema en particular a implementar que generan interacciones en el aula, y formalizan conceptos acercando los significados personales a significados institucionales.

Teniendo en cuenta los documentos curriculares del MEN, el análisis de textos realizado en el capítulo 2 y las adaptaciones realizadas a la Situación 1, se configuran los indicadores epistémicos. Entenderemos por "*Evidencia de indicadores*" la manera como el autor de este estudio relaciona los indicadores propuestos por Godino (2011) *(ver anexo 3)*, con los procesos propios de este estudio.

COMPONENTE	EVIDENCIA DE INDICADORES:
Situación-problema	**Situación 1.** Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en Colombia es 2.2 hijos por familia. a. Explica qué significa para ti esta frase. b. Se han elegido 10 familias colombianas y el número medio de hijos entre las 10 familias es de 2.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo. ¿Cuántos hijos podrán tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las 10 familias sea 2.2? Justifica tu respuesta. Adaptación realizada Ítem 1 de Mayén, Cobo Batanero & Balderas (2007) Se presenta una situación contextualiza del país donde se realiza este estudio, que promueve la ejercitación y aplicación del concepto de media aritmética. El inciso b propone una situación de generación de problemas (problematización).

Lenguajes	**Verbal:** Relacionados con el contexto datos estadísticos de Colombia Términos verbales matemáticos: suma, división, media aritmética. **Simbólico:** Números enteros, decimales y fracciones. Símbolos de suma y división, como operaciones aritméticas sin utilizar los estudiantes expresiones simbólicas como $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ El docente debe realizar la formalización del concepto para llevar el nivel del lenguaje adecuado a los estudiantes de grado noveno. Esta situación propone situaciones de interpretación en los estudiantes sobre la media aritmética simple.
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	**Media como promedio:** Valor representativo de un conjunto de datos en este caso de los hijos de las familias colombianas. **Media aritmética como algoritmo de cálculo:** suma de todos los valores dividida por el número de valores. **Propiedad:** La media no es necesariamente igual a un valor que se haya sumado. **Procedimiento:** Conocer cuánto debe sumar todos los valores de las 10 familias (en este caso 22 hijos) para que al dividirlo entre el número de valores (10 familias) el promedio que resulte sea 2.2 hijos por familia. Una vez se conozca cuanto debe sumar todos los hijos de las 10 familias (22 hijos) se procede a restar los 4 hijos de los García y 1 de los Pérez. Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados para grado noveno. Esta situación incentiva a que los alumnos tengan que generar o negociar definiciones y procedimientos con la media aritmética.

Argumentos	Al tratarse de un problema que no es aplicar el algoritmo como comúnmente se hace (sumar valores y dividirlo entre la cantidad de valores) sino que hay que buscar un valor desconocido en esa suma, los estudiantes deberán buscar la solución mediante pruebas de ensayo y error. Se escucha las explicaciones de los estudiantes una vez realicen la solución, para dar cuenta que usa la comprobación del algoritmo verificando que se cumple para la solución que encontraron. Un estudiante en este nivel educativo (noveno grado) no debería tener dificultades para hallar la solución por usar operaciones básicas como suma y división.
Relaciones	Los estudiantes deberán establecer la relación de media como promedio y media como valor representativo presentes en esta situación.

Este análisis de indicadores epistémicos basados en Godino (2011) que se debe evidenciar en los estudiantes en el momento del desarrollo de la situación problema, se tiene como *significados institucionales* de referencia para evaluar el grado de proximidad de los *significados personales* logrado por los estudiantes.