

Natürliche Häufigkeiten zur Lösung Bayesianischer Aufgaben: Systematische Vermeidung statt effektiver Nutzung

Einleitung und Theoretischer Hintergrund

Aufgrund der vielfältigen Anwendungsbereiche der Formel von Bayes in verschiedenen Domänen (z. B. Medizin und Jura) sind so genannte Bayesianische Aufgaben, die das Invertieren gegebener bedingter Wahrscheinlichkeiten erfordern, integraler Bestandteil des Stochastikunterrichts – auch wenn die Formel von Bayes nicht mehr überall explizit gelehrt wird. So finden sich auch in vielen Schulbüchern teils sehr realitätsnahe Bayesianische Aufgaben, z. B. Aufgaben zum HIV-Test (Freitag et al., 2008).

Üblicherweise werden diese Aufgaben mit Hilfe der Pfadregeln und Wahrscheinlichkeitsbäumen gelöst. Allerdings existiert seit über 20 Jahren eine gut untersuchte alternative Lösungsstrategie, die anstelle von Wahrscheinlichkeiten (egal, ob in Kombination mit den Pfadregeln oder der Formel von Bayes) auf absolute Zahlen (so genannte *natürliche Häufigkeiten*) zurückgreift. Die Strategie, natürliche Häufigkeiten zu nutzen, hat sich selbst ohne vorheriges Training wiederholt als intuitiver und verständlicher herausgestellt (z. B. Gigerenzer & Hoffrage, 1995; McDowell & Jacobs, 2017).

Trotz dieser intuitiven Alternative bleiben die typischen Lösungsraten für Bayesianische Aufgaben noch relativ niedrig. Eine aktuelle Metaanalyse ergab, dass gemittelt über sämtliche Studienteilnehmer einer großen Zahl an Studien zum Bayesianischen Denken (darunter auch Schülerinnen und Schüler) lediglich 4% der Aufgaben, die im Wahrscheinlichkeitsformat gestellt sind, korrekt gelöst werden, während immerhin 24% der Aufgaben, die mit natürlichen Häufigkeiten formuliert sind, richtig gelöst werden (McDowell & Jacobs, 2017). Wenn die Aufgabe noch durch eine Visualisierung (z. B. ein Baumdiagramm oder Einheitsquadrat) unterstützt wird, so steigen die Lösungsraten zwar auf ca. 50% (z. B. Böcherer-Linder & Eichler, 2017; Binder et al., 2015), jedoch erscheint dies immer noch nicht optimal. Woran scheitern also Menschen, die eine Aufgabe im intuitiven Häufigkeitsformat gestellt bekommen, jedoch zur falschen Lösung gelangen?

Um diese Frage zu beantworten, prüften wir zunächst explorativ Antwortbögen aus früheren Studien zum Bayesianischen Denken (z.B. aus Hoffrage et al., 2015; Binder et al., 2015) und stellten fest, dass viele der Versuchspersonen die intuitiven natürlichen Häufigkeiten in Wahrscheinlichkeiten zurückübersetzten und schließlich die Aufgabe nicht mehr lösen konnten. Dies

– sowie die Tatsache, dass in den uns bekannten Schulbüchern die Bayesianischen Aufgaben nahezu ausschließlich mit Wahrscheinlichkeiten erklärt werden (für eine Ausnahme siehe Freytag et al., 2008: S. 103) – legt die Vermutung nahe, dass viele Teilnehmer auf die aus der Schule bekannten, jedoch komplizierteren Wahrscheinlichkeiten vertrauen, anstatt das intuitive Häufigkeitsformat effektiv zu nutzen. Gestützt wird diese Vermutung außerdem durch den so genannten Einstellung-Effekt (Luchins, 1942), nach dem zuvor gelernte, etablierte Lösungsstrategien potenziell einfachere Strategien überblenden können, was die schnelle und korrekte Lösung eines Problems beeinträchtigen kann. Im Falle der Bayesianischen Aufgaben könnte also die in der Schule stark verfestigte Wahrscheinlichkeitsstrategie eine aktive Anwendung der intuitiven Häufigkeitsstrategie verhindern.

Um die Vermutungen systematisch zu überprüfen, führten wir eine empirische Studie mit folgenden Hypothesen durch:

Hypothesen zur Unterscheidung von Präsentations- und Rechenformat

H1: Studierende rechnen eher mit Wahrscheinlichkeiten als mit natürlichen Häufigkeiten, d.h. konkret, sie

- a. rechnen gegebene Wahrscheinlichkeiten *nicht* in Häufigkeiten um.
- b. rechnen gegebene Häufigkeiten in Wahrscheinlichkeiten um.

H2: Unabhängig vom Ausgangsformat der Aufgabe gilt:

Studierende, die mit Häufigkeiten *rechnen*, schneiden besser ab als Studierende, die mit Wahrscheinlichkeiten rechnen.

Methode

In einem Papier-und-Bleistift-Test bearbeiteten N=183 Studierende der Universität Regensburg jeweils zwei Bayesianische Aufgaben zu zwei verschiedenen Kontexten (Heroinabhängigkeit und Autounfall). Eine der Aufgaben wurde im Wahrscheinlichkeitsformat, eine im Häufigkeitsformat gestellt. Zusätzlich forderten wir bei einer Aufgabe die Zeichnung eines Baumdiagramms, welches das Problem visualisiert, und stellten den Teilnehmern in der anderen Aufgabe ein ausgefülltes Baumdiagramm zur Verfügung.

Ergebnisse und Diskussion

Die Ergebnisse der Studie bestätigen die erste Hypothese: Die überwiegende Mehrheit der Studienteilnehmer (77%) rechnete gegebene Wahrscheinlichkeiten nicht in natürliche Häufigkeiten um, obwohl im Einleitungstext zur Aufgabe sogar eine Stichprobe, auf die sich die Wahrscheinlichkeiten bezogen, explizit angegeben war (**H1a**). Auf der anderen Seite rechnete fast die

Hälfte der Studierenden (48%) gegebene Häufigkeiten in Wahrscheinlichkeiten um, obwohl neutral nach einem Anteil gefragt wurde (**H1b**; siehe Abb. 1). Insgesamt wurden also 66% aller Aufgaben mit Wahrscheinlichkeiten bearbeitet, was auf eine klare Präferenz dieses Rechenformates gegenüber natürlichen Häufigkeiten schließen lässt.

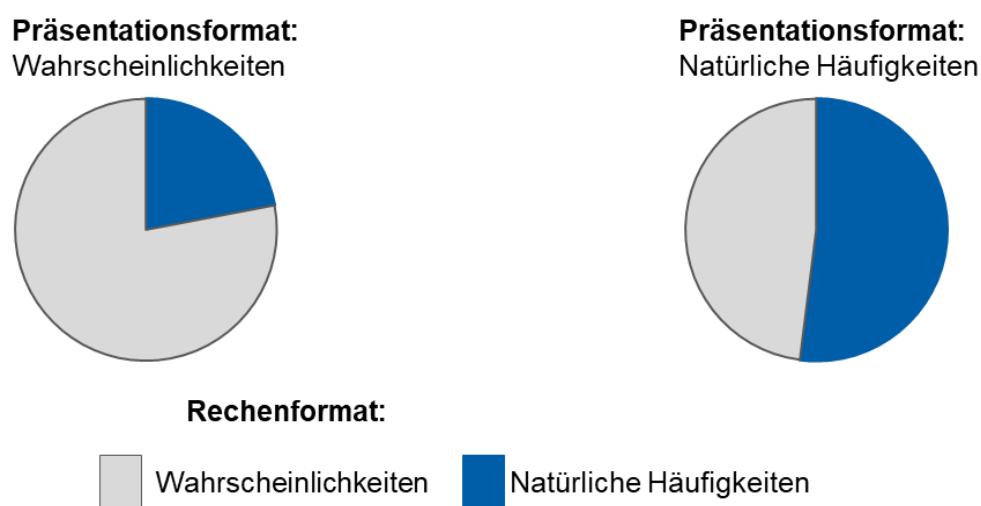


Abbildung 1: Anteil an Aufgaben, die aktiv mit Wahrscheinlichkeiten bzw. natürlichen Häufigkeiten bearbeitet wurden, in Abhängigkeit vom Präsentationsformat (links: Wahrscheinlichkeiten, rechts: natürliche Häufigkeiten).

Darüber hinaus schnitten Teilnehmer, die natürliche Häufigkeiten als Rechenformat benutzten, deutlich besser ab, als diejenigen, die sich zum Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten entschieden. So wurden Aufgaben, die mit Wahrscheinlichkeiten berechnet wurden, nur in 14% (bei Aufgaben im Präsentationsformat Wahrscheinlichkeiten) beziehungsweise 9% (bei Aufgaben im Präsentationsformat natürliche Häufigkeiten) der Fälle richtig gelöst. Aufgaben, die mit natürlichen Häufigkeiten berechnet wurden, besaßen dagegen Lösungsraten von immerhin 52% (bei Präsentationsformat Wahrscheinlichkeiten) beziehungsweise 61% (bei Präsentationsformat natürliche Häufigkeiten; siehe Abb. 2). Diese Ergebnisse bestätigen die Hypothese **H2**.

Insgesamt konnte durch die Studie also der Einstellung-Effekt im Kontext Bayesianischer Aufgaben nachgewiesen werden (vgl. z. B. Luchins, 1942). Da viele Studierende den aktiven Einsatz natürlicher Häufigkeiten zugunsten der aus der Schule vertrauten Wahrscheinlichkeiten vermeiden, können die meisten daraufhin die Aufgabe nicht mehr korrekt lösen. Daher empfehlen wir, Schülerinnen und Schüler – wie auch Lehramtsstudierende für Mathematik, Schulbuchautoren und Lehrplangestalter/innen – stärker dazu zu ermutigen, aktiv Häufigkeitsformate zur Lösung von Aufgaben zu bedingten Wahrscheinlichkeiten zu verwenden.

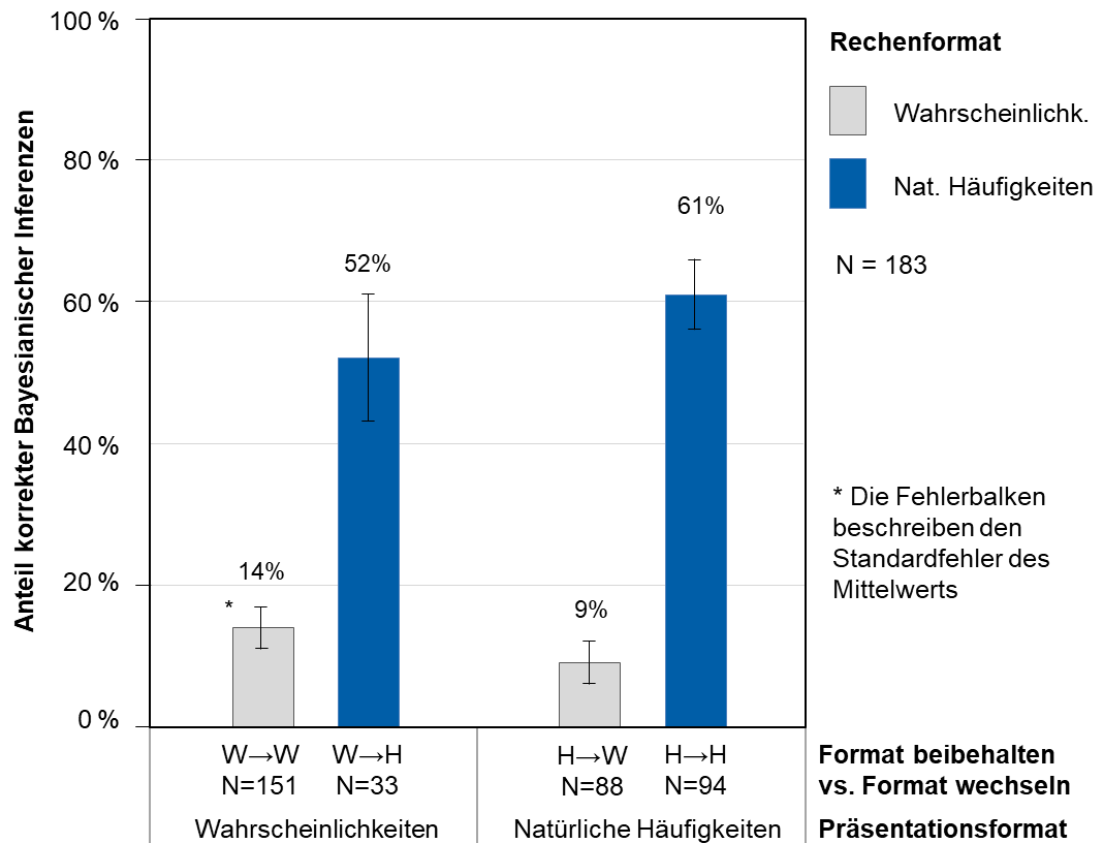


Abbildung 2: Anteil korrekter Bayesianischer Inferenzen in Abhängigkeit von Präsentations- und Rechenformat

Literatur

- Binder, K., Krauss, S. & Bruckmaier, G. (2015). Effects of visualizing statistical information – an empirical study on tree diagrams and 2×2 tables. *Frontiers in psychology*, 6(1186).
- Böcherer-Linder, K. & Eichler, A. (2017). The impact of visualizing nested sets. An empirical study on tree diagrams and unit squares. *Frontiers in psychology*, 7(1186).
- Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review*, 102(4), 684–704.
- Freytag, C., Herz, A., Kammermeyer, F., Kurz, K., Peteranderl, M., Schmähling, R., Schmitt, B., Sinzinger, M., Zebhauser, E. & Zebhauser, M. (2008). *Fokus Mathematik 10 Gymnasium Bayern*. Berlin: Cornelsen Verlag.
- Hoffrage, U., Krauss, S., Martignon, L. & Gigerenzer, G. (2015). Natural frequencies improve Bayesian reasoning in simple and complex inference tasks. *Frontiers in Psychology*, 6(1473).
- Luchins, A. S. (1942). Mechanization in problem solving: The effect of Einstellung. *Psychological monographs*, 54(6), i–95.
- McDowell, M. & Jacobs, P. (2017). Meta-Analysis of the Effect of Natural Frequencies on Bayesian Reasoning. *Psychological bulletin*, 143(12), 1273–1312.