Karlheinz SCHÜFFLER, Düsseldorf

Algebra und Analysis in der Arithmetik musikalischer Intervallsysteme

Die Konstruktion diverser musikalischer Tonskalen vollzieht sich beinahe ausschließlich aus geeigneten Iterationen vorgegebener Basis-Intervalle. Dieser Vorgang erlaubt die Einbettung der Theorie der Tonsysteme sowohl in die Arithmetik, in die Algebra als auch in manche Bereiche der Analysis.

Arithmetik und Zahlentheorie: Historisch sind es zunächst die überaus zahlreichen zahlentheoretischen Spielereinen rund um die Primzahl-Arithmetik, welche das Erscheinungsbild von „Musik und Mathematik" über Jahrhunderte geprägt haben. Da sind zum einen die überbordenden Formen der altgriechischen Tetrachordik mit ihren Skalen und teils äußerst exotischen Intervallen, welche weder unseren Hörgewohnheiten noch erkennbaren Gesetzen einer auf 7 oder 12 Stufen gegründeten Skalenlehre entsprechen. Zum anderen gehört hierzu aber auch die dazu eher gegensätzliche pythagoreische Lehre, nach welcher ein jedes Tonsystem ausschließlich aus reinen Quinten und Oktaven konstruierbar sein muss. Die eigentliche Konstruktion besteht dabei aus geeigneten Aufwärts- oder Abwärtsschichtungen mit Quinte 3 : 2 und Oktave 2 : 1. Pythagoras lässt also nur die (Prim-)Zahlen 1, 2 und 3 als Bausteine einer mathematischen Musik zu. Man bemerkt jedoch, dass es in diesem Fall im Rahmen einer 12-gliedrigen Intervall-Kette keine Schließung zum Ausgangspunkt geben kann, was daran liegt, dass keine 2^{er} Potenz mit einer 3^{er} Potenz zusammenfallen kann. Und so ist ein – das Defizit beschreibendes – Intervall geboren: das pythagoreische Komma; es hat etwa die Größe eines Viertels des üblichen Halbtonschritts.

Ein weiterer Aspekt zahlentheoretisch-arithmetischer Verbindungen zwischen Musik und Mathematik besteht in der Konsonanz-Theorie. Der Begriff der Konsonanz ist dabei gerade deshalb so ergiebig, weil er seitens der Musik keine einheitliche definierende Erklärung erfährt; daher findet die Sprache der Mathematik hierin eine dankbare, Ordnung schaffende Aufgabe. Ein schönes Beispiel hierfür ist die antike Vorstellung einer Konsonanz als diejenige eines sogenannten einfach-super-partikulären Intervalls. Solche Intervalle sind von der Proportionen-Form (n+1) : n. Und angefangen bei den Spielereien rund um die reine Durakkord-Kette 4 : 5 : 6 lassen sich – unter Einbeziehung von Primzahlcharakteristika – auch Fragen formulieren, deren Beantwortung ein beachtliches Instrumentarium moderner Algebra bedarf: So interessiert die Frage, ob die Menge aller Brüche der Form (n+1)/n, für welche Zähler und Nenner eine Primfaktorzerlegung mit ausschließlich den ersten k (fest, vorgegeben) Primzahlen besitzen, überhaupt endlich ist – und

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.)
Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

wenn ja: wie man alle diese Proportionen berechnen kann. Die Algebraiker Størmer und Lehmer konnten hierzu vor einigen wenigen Jahren signifikante Resultate beisteuern: Ja, es gibt für jeden Anzahl-Parameter k nur endlich viele einfach superpartikulare Intervalle – und da man sie dank eines Verfahrens von Lehmer berechnen kann – ist erkennbar, dass die altgriechische Antike alle diese Intervalle (mit den Primzahlen 2, 3 und 5) bereits kannte. Das prominenteste und gleichzeitig kleinste hiervon ist das syntonische Komma $81 : 80 = (3*3*3*3) : (5*2*2*2*2)$.

Eine weitere fruchtbare Spielwiese, welche bestens im motivierenden Unterricht verwendbar wäre, ist das Zahlenspiel mit Mittelwerten. Hier bietet uns die Antike mit dem arithmetischen, dem harmonischen sowie dem geometrischen Mittel (und vielen weiteren verwandten Formen) eine Einbettung einfacher Akkord- und Intervallbeziehungen in die Lehre der Proportionen. So bilden beispielsweise die Kehrwerte einer arithmetischen Proportionenkette eine harmonische Proportionenkette und umgekehrt. Didaktischen Elementen kann reichlich Nahrung gegeben werden. Zudem wird das Verständnis antiker tetrachordischer Strukturen enorm gefördert.

Algebra: Die Menge aller musikalischen Intervalle kann als Modulraum über $\mathbb{Z}$, dem Ring der ganzen Zahlen, beschrieben werden. Die Modulstruktur wird hierbei durch die Adjunktion/Subjunktion – das ist die Aneinanderfügung/Differenzbildung von musikalischen Intervallen – bewirkt. Diese Operation macht die Gesamtheit aller musikalischen Intervalle zu einer Gruppe mit der Prim als neutralem Element. Hierin bilden die vornehmlich durch Quint-Iterationen gewonnen pythagoreischen sowie die durch reine Quinten und Terzen gewonnenen reinen Intervall-Familien gewisse Unter-Module. In diesem Zusammenhang zeigen sich sehr schöne Verbindungen von Intervall-Iterations-Basen zur Theorie unimodularer ganzzahliger Matrizen und ihrem musikalischen Pendant, den Regener-Transformationen. Als prägnantes Beispiel hierzu dient, dass das durch Oktaven, reine Quinten und reine Terzen gewonnene Eulersche Tongitter ebenso durch eine Semiton-Basis – bestehend aus dem diatonischen Halbton zusammen mit dessen Ergänzungen in den beiden Ganztönen, dem kleinen und großen Chroma, generieren lässt. Hierbei werden die Vorteile für die außerordentlich komplex entwickelte Mikroton-Arithmetik (die „Kommata“) der Antike sichtbar. Diese Algebra verbindet – zumindest in vielen konkreten Fällen der klassischen Temperierungen – die Skalenkonstruktionen und ihre Charakteristiken mit der geometrischen Vektorrechnung - demonstriert am erwähnten Eulergitter des entsprechenden Intervallmoduls.

Analysis: Wenn man Iterationen eines oder mehrerer Erzeuger-Intervalle vornimmt, so haben wir es im Grunde mit einem diskreten dynamischen System zu tun. Allerdings sorgt eine begleitende notwendige (Re-)Oktavierung, die so eingerichtet ist, dass sich die Iterationsfolge immer in einem fixierten Oktavraum bewegt, für eine durchaus nichttriviale mathematische Komponente. Am ehesten begegnet man diesem Problem durch ein passendes mathematisches Modell: Schichtungen von Intervallen mit korrigierenden Oktavierungen mit dem Ziel, stets Töne aus einer gegebenen Grundoktave zu gewinnen, modelliert man über der Einheitskreislinie S^1. Womit man allerdings unmittelbar die Verbindung zu komplexen Strukturen gewonnen hat: Jedes Intervall eines Oktav-Tonraums kann 1-1 mit den Punkten der komplexen Kreislinie identifiziert werden; die Bijektion, welche dies besorgt, ist die komplexifizierte Cent-Funktion für Intervalle (Eulersche Cent-Funktion). Sie ordnet dem Intervall I den Wert $\exp[2\pi i * \log_2(\text{Frequenzmaß (I)})]$ zu. Diese Funktion hat darüberhinaus die schöne geometrische Eigenschaft, dass ein Aneinanderfügen zweier Intervalle modulo einer Oktavierung einer Winkeladdition modulo einer Voll-Drehung entspricht. Mit diesem Werkzeug kann nun eine mathematische Betrachtung der Iterationsalgebra profund gestartet werden. Eine Iterationsfolge, die nur von einer Erzeugerquinte (unter Reoktavierungen) gestartet wird, lässt sich als Abtragung eines konstanten Winkels auf der Sphäre S^1 interpretieren. Daher wissen wir, dass genau im Falle der Rationalität dieses Winkels zu 360° eine letztlich endliche – weil periodische – Tonfolge im Oktavraum entsteht. Weiter können wir zeigen, dass die Iterationspunkte unter der Eulerschen Centfunktion genau im Falle der Irrationalität dieses Winkels eine gleichmäßig verteilte doppelpunktfreie dichte Teilmenge der S^1 bilden, ein Resultat von Levi-Poincaré. Die Irrationalität ist übrigens dann gegeben, wenn das Centmaß des Erzeugerintervalls irrational beziehungsweise keine gebrochene 2er-Potenz ist.

Zweifellos bietet die Analysis auch auf anderen Feldern reichlich Gelegenheit, Verbindungen zur Musiktheorie aufzuzeigen. So kann man zunächst einmal unter recht schwachen Annahmen an das Instrument leicht zeigen, dass ein durch Bünde definiertes mehrsaitiges Instrument – eine Laute, Gitarre – nur bei gleichstufiger Temperierung musikalisch widerspruchsfrei ist. Dies erklärt, warum es schon in weit zurückliegender Vergangenheit das Bestreben war, die Bünde, welche ja die Semiton-Schritte definieren, so anzuordnen, dass deren Proportionengesetz $x^{12} = 2$ erfüllt ist. Aus den wohlbekannten und jahrtausendealten Regeln des Monochords folgt daraus, dass dann auch die Gitarrenbünde eine exponentiell verlaufende Anordnungsgeometrie besitzen müssen. Und begleitende Überlegungen zeigen, dass die naturgegebenen Ungenauigkeiten einer solchen Konkretisierung nicht groß sein dürfen. Daher wusste man sich in früheren, taschenrechnerlosen Zeiten nur mittels geschickter Tricks zu helfen. Ein sehr lehrreiches Beispiel kennen wir von Daniel Stråhle, einem schwedischen Handwerker, der im Jahre 1741 eine Näherungskonstruktion erfand, wie man dank einer geometrischen Vorgehensweise die exponentielle Bundfolge beinahe punktgenau finden kann.

Funktionalanalysis: Tatsächlich lässt sich – und auch ohne Not – sogar eine Operator-Mathematik hinsichtlich einiger Fragen zur Temperierung implementieren. Dabei geht der Ursprung auf Christoph Gottlieb Schröter zurück, dessen Rechenspiel aus dem Jahre 1750 unvermittelt in die Iterationstheorie linearer 12×12-Systeme führt und im Zuge von Konvergenzbeweisen die moderne Eigenwerttheorie benötigt.

Dieser Algorithmus geht so: Man gibt im 1. Tableau einfach einmal 12 beliebige positive Zahlen vor – etwa die Folge 1 – 2 – 2 – 2 – 2 – 2 – 2 – 2 – 3 – 3 – 3 – 3, bildet deren Summe (27) und beginnt das nächste Tableau einer 12^{er} Kette mit dieser Zahl 27 und addiert dann die jeweils darüberstehende Zahl des Vor-Tableaus; so entsteht die Folge 27 – 28 – 30 – 32 – 34 – 36 – 38 – 40 – 42 – 45 – 48 – 51 mit der Summe 451. Nun beginnt man mit 451 und verfährt wie zuvor; nach 12 Schritten endet man bei 851.

Ein weiterer (13^{ter}) Folgewert ergäbe übrigens im 2. Tableau den Wert 54 und im 3. Tableau den Wert 902 – das sind exakt die Verdopplungen des jeweiligen Startwerts. Das wiederum bedeutet, dass die jeweiligen Tableau-Folgen – musikalisch gesprochen – im Oktavraum zum jeweiligen „Startton" liegen und von der Tonika in 12 Stufen bis zu deren Oktave führen. Demzufolge bilden sie also eine „Oktav-Skala". Teilt man z.B. bereits die Reihe 2 durch 27 – den Summenwert der Vor-Reihe –, dann entsteht die 12^{er}-Kette 1 = 27/27 – 28/27 – 10/9 – 32/27 – 34/27 – 4/3 – 38/27 – 40/27 – 14/9 – 5/3 – 16/9 – 17/9 – (2). Diese Skala, die man auch aus dem Euler-Gitter gewinnt, ist übrigens exakt eine der Skalen des berühmten Theoretikers Zarlino. Aber schon im nächsten Schritt hat man bereits die Gleichstufigkeitsfolge $2^{k/12}$ praxis-exakt erreicht, ein Wunder. Der mathematische Hintergrund besteht in einer Eigenvektoranalyse der diese Iteration beschreibenden 12×12 Matrix. Tatsächlich sind deren Eigenwerte berechenbar, so dass Konvergenz,- Existenz- und Eindeutigkeitsresultate möglich sind.

Literatur (kleine Auswahl)

Assayag G., Feichtinger H. G. & Rodrigues J. F. (Hrsg.) (2002) *Mathematics and Music, A Diderot Mathematical Forum.* Berlin usw.: Springer

Fauvel, J., Flood, R. & Wilson, R. (2003, Nachdruck 2009) (Hrsg.): *Music and Mathematics – From Pythagoras to Fractals*. New York: Oxford University Press

Schüffler, K. (2017): *Pythagoras, der Quintenwolf und das Komma – Mathematische Temperierungstheorie in der Musik (2. Auflage).* Berlin usw.: Springer