Christoph HAMMER, Osnabrück

# Geometrie handlungsorientiert erleben

## Vorbemerkung

Muss man überhaupt Werbung dafür machen, möglichst viel Geometrie im Mathematikunterricht zu treiben? Ist sie doch ein ideales Lernfeld für Problemlösen, Begriffsbildung und Argumentation. Angesichts der Vorgaben durch Lehrpläne droht Geometrieunterricht aber zum Rechenunterricht zu verkümmern. Um dem zu begegnen, sollen im Folgenden Anregungen für Schüleraktivitäten bei der Behandlung von Flächeninhalten ebener Figuren gegeben werden, deren Ziel Verständnis für funktionale Zusammenhänge ist. Damit soll bloßer „Formelgeometrie" entgegengewirkt werden.

## Probleme mit Flächeninhalten

Erfahrungen aus der Unterrichtspraxis zeigen, dass Schülerinnen und Schüler erhebliche Probleme bei Flächeninhalten haben, die sich auch in einigen Studien widerspiegeln (z. B. Ulfig 2013). Für diese Schwierigkeiten gibt es vielfältige Ursachen, einige sind im Folgenden genannt.

Angesichts der „Liniendominanz ebener Figuren" (Franke & Reinhold 2016) fällt es schwer, tragfähige Vorstellungen vom Begriff „Flächeninhalt" zu entwickeln (Weigand et al. 2009). Aussagen wie „Flächeninhalt ist das, was innerhalb der Randlinie einer Fläche liegt" sind fachlich nicht haltbar, da damit eine Punktmenge beschrieben wird und kein Maß.

Was bedeutet nun „Flächeninhalt" einer ebenen Figur? Wie bei allen Größen definiert man den Begriff im Wesentlichen durch Angabe einer Messvorschrift. Dabei wird der zu messende Gegenstand mit einem Repräsentanten aus demselben Größenbereich verglichen. Beim Flächeninhalt legt man den zu messenden Gegenstand lückenlos und überschneidungsfrei mit einheitlichen Flächenstücken aus und zählt, wie oft das möglich ist. Auf das Problem der Inkommensurabilität (Hammer 2017) wird hier nicht eingegangen. Flächeninhalte werden im Alltag so gut wie nie gemessen, sondern nahezu ausschließlich aus Längenmaßen berechnet. Für das Verständnis und die Abgrenzung zwischen Umfang und Flächeninhalt stellt dies eine besondere Schwierigkeit dar.

Eine weitere Ursache für Schülerprobleme liegt darin begründet, dass die Flächeninhaltsformeln zu verschiedenen Figuren in unterschiedlichen Schuljahren behandelt werden und dadurch der Blick auf ihre Strukturgleichheit verstellt werden könnte, wenn dieser Aspekt nicht im Sinn des Spiralprinzips

*In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag*

produktiv genutzt wird. Übrigens ist „Strukturgleichheit" ein zu harmloser Ausdruck, denn es gibt eine Formel für *alle* Figuren der Schulgeometrie:

$A = m \cdot h,$

wenn $m$ die Mittenlinie und $h$ die Höhe ist. Dies gilt auch für den Kreis, wenn man „Mittenlinie" und „Höhe" passend interpretiert.

Schließlich dominiert in uns das lineare Denken, das zur Übergeneralisierung linearer Zusammenhänge verleitet (De Bock, van Dooren, Verschaffel 2012). Da sich jedoch Längenänderungen überproportional auf Flächeninhalte auswirken, ergeben sich Konflikte mit subjektiven Vorstellungen.

Folgende Vorschläge sollen den genannten Problemen entgegenwirken.

**Flächenmessung bei Rechteck und Parallelogramm**

Das Vorgehen beim Rechteck ist allgemein bekannt. Hier soll aber noch einmal betont werden, dass es zunächst nur darum geht, die *Anzahl* der verwendeten einheitlichen Flächenstücke (z. B. beliebige Rechtecke) zu bestimmen, die das Rechteck lückenlos und überschneidungsfrei ausfüllen. Dazu wird die Anzahl $n_a$ der Einheitsflächenstücke ermittelt, die in einen Streifen passen und die Anzahl $n_b$ der Streifen, die das Rechteck vollständig ausfüllen.

Das Produkt $n_a \cdot n_b$ aus diesen beiden Anzahlen ergibt die Anzahl der Einheitsflächenstücke im Rechteck und damit die Maßzahl für den Flächeninhalt: $A_{\text{Rechteck}} = n_a \cdot n_b \cdot A_{\text{Einheitsflächenstück}}$

Wählt man als Einheitsflächenstück den speziellen Fall eines Quadrats mit z. B. 1 cm Seitenlänge und legt seinen Flächeninhalt als 1 cm$^2$ fest, ergibt sich der Flächeninhalt des Rechtecks als Produkt der Seitenlängen:

$A = n_a \cdot n_b \cdot 1\text{cm}^2 = n_a \cdot 1\text{cm} \cdot n_b \cdot 1\text{cm} = a \cdot b.$

Allerdings sollte nicht zu früh mit normierten Einheiten gearbeitet werden. Voreiliges Messen von Längen und Rechnen mit der Formel verstellen den Blick auf den wesentlichen Gedanken (vgl. Weigand et al. 2009). Hier eignen sich zunächst operative Übungen der folgenden Art:

*Wie viele Einheitsquadrate passen in das Rechteck, wenn deren Seitenlängen verdoppelt, verdreifacht, halbiert, … werden?*

Oder: *Wie viele Einheitsquadrate passen in das Rechteck, wenn dessen Seitenlängen verdoppelt, verdreifacht, … werden?*

Hier kann man in zwei Varianten überlegen, mit unveränderten Einheitsquadraten oder mit im selben Maßstab zentrisch gestreckten Einheitsquadraten. Wir bezeichnen den Streckungsfaktor mit $k$. Bei der ersten Variante passen $k^2$-mal so viele und bei der zweiten gleich viele Quadrate –

allerdings mit jeweils $k^2$-fachem Flächeninhalt – in das Rechteck. Streckung der linearen Abmessungen mit dem Faktor $k$ bedeutet also $k^2$-fachen Flächeninhalt. Die zweite Variante wird später noch eine wichtige Rolle spielen und ist deshalb in Abb. 1 angedeutet.

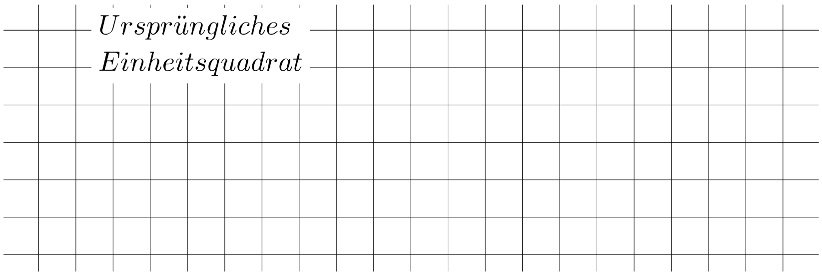


**Abb. 1: Variation der Seitenlänge des Rechtecks bei gestreckten Einheitsquadraten**

Beim Parallelogramm kann man vorgehen wie beim Rechteck. Wir legen das Parallelogramm mit einheitlichen Flächenstücken aus und bestimmen deren Anzahl. Oder wir zählen die Kästchen innerhalb des Parallelogramms im karierten Heft. Die Probleme an zwei der vier Seiten sind leicht zu lösen: was an der einen Seite übersteht, fehlt an der anderen. „Geschicktes“ Zählen bedeutet wie beim Rechteck, zwei Anzahlen miteinander zu multiplizieren.

Dieses Vorgehen hat gegenüber dem Standardweg (Umformung zum Rechteck mit einer Verschiebung) einige Vorteile: Es wird keine spezielle Höhenlinie verwendet, sondern „Höhe“ ist gleichbedeutend mit „Abstand zweier Gegenseiten“. So wird die Gefahr der Übergeneralisierung von „Seite mal Seite“ verringert. Vor allem aber wird die Messung zum „roten Faden“, so dass Schülerinnen und Schüler selbst auf die Idee „Kästchen zählen“ kommen können, wenn es um Flächeninhalte geht. Das kann auch beim Kreis und bis hin zum Integral gewinnbringend sein.

## Flächenmessung beim Kreis

Auch beim Kreis lässt sich die Abhängigkeit des Flächeninhalts vom Radius durch Messung auf einfache Weise herleiten. Dazu zählen wir die Einheitsquadrate, die ihn (wegen der einfacheren Darstellungsmöglichkeit nehmen wir einen Viertelkreis) näherungsweise lückenlos und überschneidungsfrei ausfüllen (Abb. 2). Streckt man Kreisradius und Seitenlänge der Einheitsquadrate mit dem Faktor $k$, ergibt sich wie oben beim Rechteck, dass der Flächeninhalt mit $k$ quadratisch zunimmt. Startet man beim Einheitskreis mit $r$ = 1 LE, so entspricht $k$ der Maßzahl des Radius und damit folgt die Beziehung $A_{\text{Kreis}} = r^2$. Es erleichtert das Verständnis, wenn man diese Streckung mit DGS darstellt. Eine entsprechende Datei ist beim Autor erhältlich.

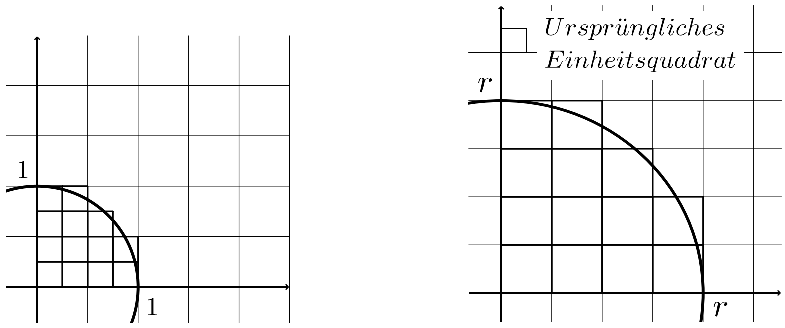


**Abb. 2: Messung des Flächeninhalts eines Viertelkreises und zentrische Streckung (hier: *k* = 2)**

Um einen Näherungswert für π zu bestimmen, muss man die Zahlenwerte interpretieren. Abb. 2 zeigt, dass 4·13 Quadrate in den ganzen Kreis und 16 Quadrate in das Radiusquadrat passen, das Verhältnis ist also $\pi \approx 3{,}25$.

Wohlgemerkt: Diese Überlegungen kann man verstehen, ohne genau über die zentrische Streckung Bescheid zu wissen. Sie zeigen einen Weg zu allgemeinen Beziehungen zwischen Maßen ähnlicher Figuren auf. Generell gilt für eine zentrische Streckung mit dem Faktor $k$:

$s' = k \cdot s;$ $A' = k^2 \cdot A;$ $V' = k^3 \cdot V$ (hier nimmt man einfach Würfel.)

Dabei ist es nicht wichtig, ob etwas über $s$, $A$ oder $V$ bekannt ist. So werden aber Zusammenhänge klar, die hier nicht alle aufgeführt werden können. Zum Beispiel folgt ohne Weiteres, dass für den Kreisumfang $U \sim r$ und für das Kugelvolumen $V \sim r^3$ gilt.

## Fazit:

Das Prinzip des Messens könnte als roter Faden dienen, Teile des Geometriecurriculums vernetzt zu unterrichten. Damit soll dem übertriebenen Formeldenken entgegengewirkt und Verständnis für die funktionalen Zusammenhänge in den Mittelpunkt gerückt werden.

## Literatur

De Bock, D., van Dooren, W., Verschaffel, L. (2012). Verführerische Linearität. In: Praxis der Mathematik in der Schule, 44, 9-14.

Franke, M. & Reinhold, S. (2016[3]). Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Hammer, Ch. (2017). Mehr Geometrie im Geometrieunterricht! Eine kurze Situationsbeschreibung und ein Vorschlag für die Sekundarstufe I. In: A. Filler & A. Lambert (Hrsg.). Von Phänomenen zu Begriffen und Strukturen. Konkrete Lernsituationen für den Geometrieunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Ulfig, F. (2013). Geometrische Denkweisen beim Lösen von PISA-Aufgaben. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R. et al. (Hrsg.). (2009). Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.